Azionamenti Elettrici M
AA. 2010/2011

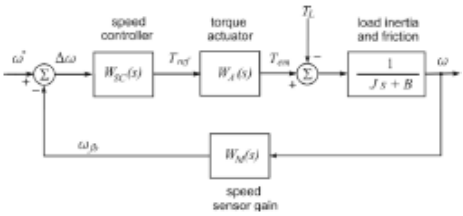
Tecniche avanzate per il controllo
di azionamenti elettrici

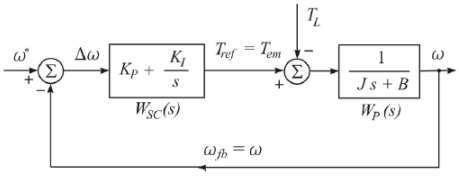
Ing. Luca Zarri

DIE - Universitá degli Studi di Bologna
Viale Risorgimento, 2 - 40136 Bologna
Tel. 051-2093572/ Fax 051-2093941
E-mail: *luca.zarri@mail.ing.unibo.it*

Controllo di velocità

Consideriamo lo schema generico dell'anello di velocità di un azionamento, mostrato nella fig. di sinistra. Nel caso più tipico, il regolatore di velocità è un PI, il controllo di coppia è molto rapido e il ritardo della retroazione è trascurabile.





Le funzioni di trasferimento rispetto al riferimento di velocità e alla coppia resistente del carico sono le seguenti:

$$W_{SS}(s)=\frac{\omega(s)}{\omega^*(s)}\Big|_{T_L=0}=\frac{W_S(s)}{1+W_S(s)}=\frac{sK_P+K_I}{s^2J+s(K_P+B)+K_I}$$

$$=\frac{1+s\frac{K_P}{K_I}}{1+s\frac{K_P+B}{K_I}+s^2\frac{J}{K_I}}=\frac{1+sa_1}{1+sb_1+s^2b_2}$$

$$W_{LS}(s)=\frac{\omega(s)}{T_L(s)}\Big|_{(\omega^*=0)}=-\frac{s}{K_I+s(K_P+B)+s^2J}$$

$$=-\frac{1}{K_I}\frac{s}{1+sb_1+s^2b_2}$$

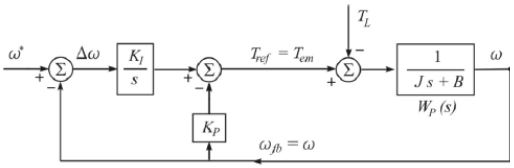
2

Controllo di velocità

Possiamo osservare che:

- ❑ variando le costanti del regolatore è possibile collocare i poli del sistema come si desidera
- ❑ la f.d.t. W_{ss} presenta uno zero (⇨ possibili overshoot nel transitorio)

E' possibile eliminare la presenza dello zero utilizzando uno schema diverso, con il guadagno K_p agente solo sul segnale di retroazione.



$$W_{SS}(s) = \frac{\omega(s)}{\omega^*(s)}\Big|_{T_L=0} = \frac{K_I}{s^2 J + s(K_P + B) + K_I} = \frac{1}{1 + s\frac{K_P + B}{K_I} + s^2\frac{J}{K_I}} = \frac{1}{1 + sb_1 + s^2 b_2}$$

ma, a parità di poli, la risposta è più lenta (la presenza dello zero riduce l'entità dei residui dei poli e dunque la risposta è tanto più veloce quanto più lo zero cancella il polo a bassa frequenza).

3

Doppi rapporti

Spesso si desidera che l'azionamento abbia la massima dinamica di velocità (accettando anche un certo valore di sovraelongazione). Ciò si traduce nella richiesta che la f.d.t. del sistema in catena chiusa abbia modulo unitario per il campo di frequenze più esteso possibile.

Per la taratura dei parametri dei regolatori si può usare **il metodo dei doppi rapporti**. Secondo questa regola bisogna fare in modo che risulti:

$$W_{SS}(s)=\frac{out(s)}{ref(s)}=\frac{a_0+a_1s+a_2s^2+\ldots+a_ms^m}{b_0+b_1s+b_2s^2+\ldots+b_ns^n}=\frac{\sum_{i=0}^{m}a_is^i}{\sum_{i=0}^{n}b_is^i}=\frac{num(s)}{f(s)}$$

$$\frac{b_{k+1}}{b_k}\le\frac{1}{2}\frac{b_k}{b_{k-1}}\Rightarrow b_k^2-2b_{k-1}b_{k+1}\ge 0$$

Si dimostra che questa condizione è necessaria per ottenere una f.d.t. in catena chiusa di guadagno finito a tutte le frequenze. In particolare, interessa il caso in cui la disuguaglianza diventa un'uguaglianza.

4

Doppi rapporti

Consideriamo il caso di sistemi del 2° ordine e del 3° ordine.

$$W_{SS}(j\omega) = \frac{a_0}{b_0 + b_1 j\omega + b_2 (j\omega)^2}$$

$$|W_{SS}(j\omega)|^2 = \frac{a_0^2}{b_0^2 + \underbrace{(b_1^2 - 2b_0 b_2)}_{=\text{zero}}\omega^2 + b_2^2\omega^4} = \frac{a_0^2}{b_0^2 + b_2^2\omega^4}$$

$$W_{SS}(j\omega) = \frac{a_0}{b_0 + b_1 j\omega + b_2 (j\omega)^2 + b_3 (j\omega)^3}$$

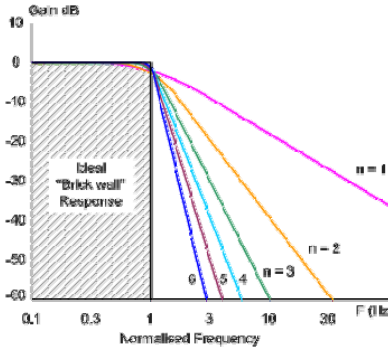
$$|W_{SS}(j\omega)|^2 = \frac{a_0^2}{b_0^2 + \underbrace{(b_1^2 - 2b_0 b_2)}_{=\text{zero}}\omega^2 + \underbrace{(b_2^2 - 2b_1 b_3)}_{=\text{zero}}\omega^4 + b_3^2\omega^6} \Rightarrow |W_{SS}(j\omega)|^2 = \frac{a_0^2}{b_0^2 + b_3^2\omega^6}$$

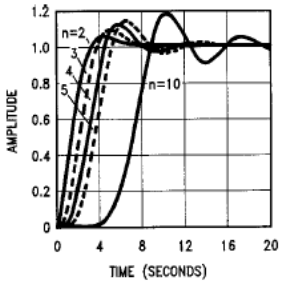
L'uso della regola dei doppi rapporti trasforma il sistema in catena chiusa in un filtro di Butterworth (a meno del guadagno statico)

5

Doppi rapporti

Il filtro di Butterworth ha la proprietà di avere la massima banda a guadagno costante (si dice che la taratura è fatta secondo **il criterio d'ottimo d'ampiezza**).





TL/H/11221-38

FIGURE 24. Step responses for Butterworth low-pass filters. In each case $\omega_0 = 1$ and the step amplitude is 1.0.

La risposta del sistema presenta delle sovraelongazioni, tuttavia abbastanza contenute nella maggior parte dei casi (<10% per n<4, <20% per n<11)

6

Doppi rapporti

La posizione dei poli può essere facilmente trovata analiticamente risolvendo l'equazione

$$s^{2n} + (-1)^n = 0 \Rightarrow p_k = e^{j\frac{2k+n-1\pi}{n \quad 2}} \quad (k = 1,2,\ldots,2n)$$

e considerando solo i poli con parte reale negativa.

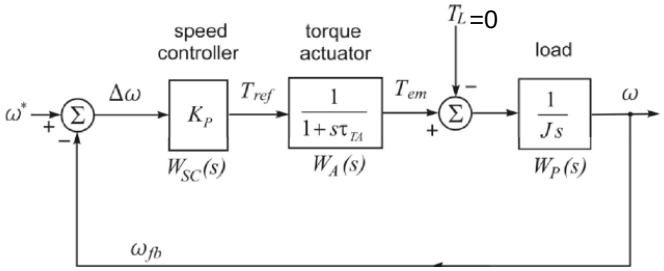
The zeros of the characteristic polynomial and their damping factors for the second-, third-, and fourth-order systems. Polynomial coefficients are adjusted according to the rule of double ratios.

the order	$n=2$	$n=3$	$n=4$
the roots	$s_{1/2} = -\frac{\omega_n}{\sqrt{2}} \pm j\frac{\omega_n}{\sqrt{2}}$	$s_{1/2} = -\frac{\omega_n}{2} \pm j\frac{\omega_n}{2}\sqrt{3}$ $s_3 = -\omega_n$	$s_{1/2} = -\frac{\omega_n}{\sqrt{2}} \pm j\frac{\omega_n}{\sqrt{2}}$ $s_{3/4} = -\frac{\omega_n}{\sqrt{2}} \pm j\frac{\omega_n}{\sqrt{2}}$
damping factor	$\xi = 0.707$	$\xi = 0.5$	$\xi = 0.707$

7

Doppi rapporti

Consideriamo come primo esempio un azionamento in cui l'attrito e la coppia del carico sono trascurabili. In tal caso è sufficiente utilizzare un regolatore proporzionale.



The speed-controlled DC drive system comprising the first-order lag torque actuator $W_A(s)$, inertial load, and the proportional speed controller.

$$W_{SS}(s) = \frac{K_P}{J\tau_{TA}s^2 + Js + K_P}$$

$$b_1^2 = 2b_0b_2 \quad \Rightarrow \quad J = 2K_P\tau_{TA} \quad \Rightarrow \quad K_P = \frac{J}{2\tau_{TA}}$$

Criterio dell'ottimo di ampiezza

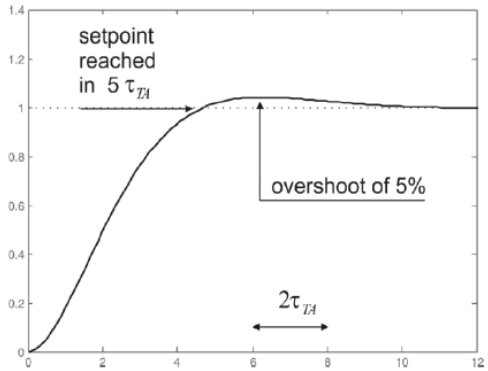
$$W_{SS}(s) = \frac{1}{2\tau_{TA}^2 s^2 + 2\tau_{TA}s + 1}$$

$$s_{1/2} = -\frac{1}{2\tau_{TA}} \pm j\frac{1}{2\tau_{TA}}$$

8

Doppi rapporti

L'utilizzo del criterio dell'ottimo di ampiezza comporta una sovraelongazione del 5% e un tempo di salita che è circa pari a 5 volte la costante di tempo dell'anello di coppia.

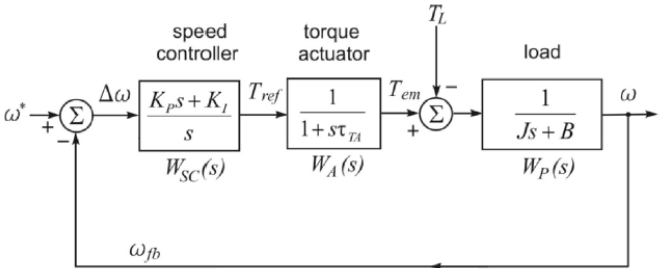


The step response of the second-order speed-controlled DC drive system given in Fig. 3.8, tuned according to the *double ratios* design rule

9

Doppi rapporti

Il caso più generale è quello di un azionamento con regolatore PI e attrito di carico.



$$W_S(s) = \frac{K_I}{B}\frac{1}{s}\frac{(1+s\tau_{SC})}{(1+s\tau_{TA})(1+s\tau_P)}.$$

F.d.t. ad anello aperto di partenza

$$\frac{K_P}{K_I} = \tau_{SC} = \tau_P = \frac{J}{B}$$

Cancellazione del polo meccanico

$$W_S(s) = \frac{K_I}{B}\frac{1}{s(1+s\tau_{TA})}$$

F.d.t. ad anello aperto

$$W_{SS}(s) = \frac{K_I}{K_I + sB + s^2 B\tau_{TA}} = \frac{1}{1 + \frac{B}{K_I}s + \frac{B\tau_{TA}}{K_I}s^2} = \frac{1}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2}.$$

F.d.t. ad anello chiuso

$$b_1^2 = 2 b_0 b_2$$

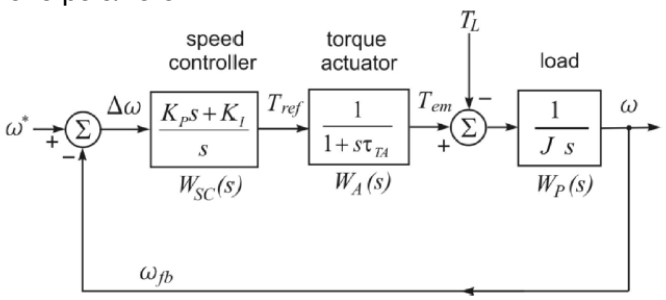
Criterio dell'ottimo di ampiezza

$$K_P = \frac{J}{2\tau_{TA}}, \qquad K_I = \frac{B}{2\tau_{TA}}.$$

10

Doppi rapporti

Nel caso in cui l'attrito sia trascurabile ma non lo sia la coppia di carico, occorre usare un regolatore PI. In questo caso però non è agevole fare la compensazione polo/zero.



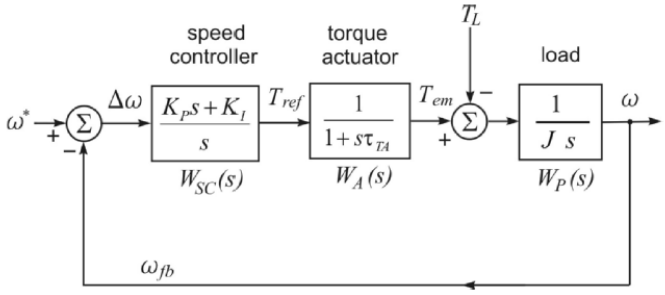
Di conseguenza, nella f.d.t. ad anello aperto lo zero rimane.

$$W_S(s) = W_{SC}(s)W_A(s)W_P(s) = \frac{K_P s + K_I}{s}\,\frac{1}{1+s\tau_{TA}}\,\frac{1}{Js}$$

$$= \frac{K_I}{s}\,\frac{1+s\tau_{SC}}{1+s\tau_{TA}}\,\frac{1}{Js}; \qquad \left(\tau_{SC} = \frac{K_P}{K_I}\right)$$

11

Doppi rapporti



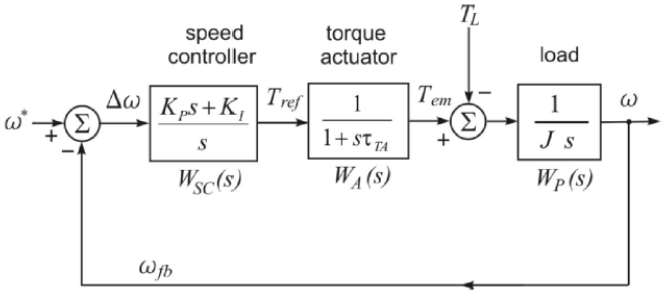
Anche la f.d.t. ad anello chiuso presenta il medesimo zero.

$$W_{SS}(s) = \frac{K_I + K_P s}{K_I + K_P s + Js^2 + J\tau_{TA}s^3} = \frac{1 + \frac{K_P}{K_I}s}{1 + \frac{K_P}{K_I}s + \frac{J}{K_I}s^2 + \frac{J\tau_{TA}}{K_I}s^3}$$

$$= \frac{1 + \tau_{SC}s}{1 + \tau_{SC}s + \frac{J}{K_I}s^2 + \frac{J\tau_{TA}}{K_I}s^3} = \frac{1 + \tau_{SC}s}{b_1 + b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3}$$

12

Doppi rapporti



Utilizzando il criterio dei rapporti per la taratura, si ottiene il seguente risultato:

$$K_P^2 = 2\,J\,K_I;\quad 2\tau_{TA}K_I = J \quad\Rightarrow\quad K_P^{opt} = \frac{J}{2\tau_{TA}};\quad K_I^{opt} = \frac{J}{8\tau_{TA}^2}$$

Le f.d.t. ad anello aperto e in catena chiusa sono rispettivamente:

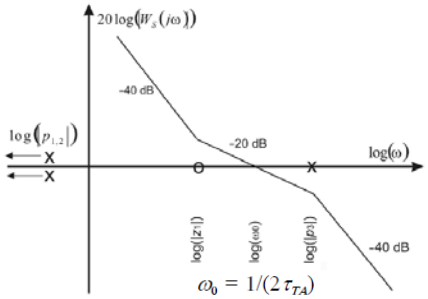
$$W_S^{opt}(s) = \frac{1}{8}\frac{1}{(\tau_{TA}s)^2}\frac{1+4\tau_{TA}s}{1+\tau_{TA}s} \qquad W_{SS}^{opt}(s) = \frac{1+4\tau_{TA}s}{1+4\tau_{TA}s+8\tau_{TA}^2s^2+8\tau_{TA}^3s^3}$$

13

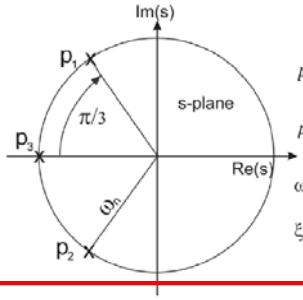
Doppi rapporti

F.d.t. in catena aperta

Vi sono due poli nell'origine, mentre gli altri sono disposti simmetricamente rispetto alla pulsazione di attraversamento ω_0. Per tale ragione, il metodo si dice **criterio dell'ottimo simmetrico**.



F.d.t. in catena chiusa

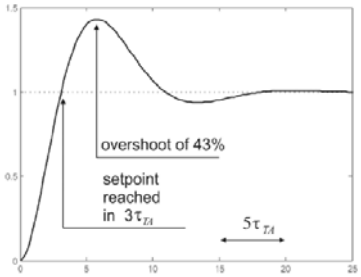


$$p_{1/2} = -\frac{1}{4\tau_{TA}} \pm j\frac{\sqrt{3}}{4\tau_{TA}}$$

$$p_3 = -\frac{1}{2\tau_{TA}}$$

$$\omega_n = |p_1| = |p_{1/2}| = \frac{1}{2\tau_{TA}}$$

$$\xi = 0.5$$



14

Doppi rapporti

La coppia resistente del carico è vista come un disturbo. Nel caso di coppia resistente a gradino l'errore di velocità a regime è nullo con reg. PI.

$$\omega(\infty) = \lim_{s \to 0} (s\,\omega(s)) = \lim_{s \to 0} \left[\frac{(1 + s a_1)\Omega^* - \frac{s T_{LOAD}}{K_I}}{1 + s b_1 + s^2 b_2} \right] = \Omega^*$$

ma non lo è nel caso di coppia resistente a rampa.

$$\omega(\infty) = \lim_{s \to 0} (s\,\omega(s))$$

$$= \lim_{s \to 0} \left[\frac{(1 + s a_1)\Omega^* - \frac{T_{RAMP}}{K_I}}{1 + s b_1 + s^2 b_2} \right] = \Omega^* - \frac{T_{RAMP}}{K_I}$$

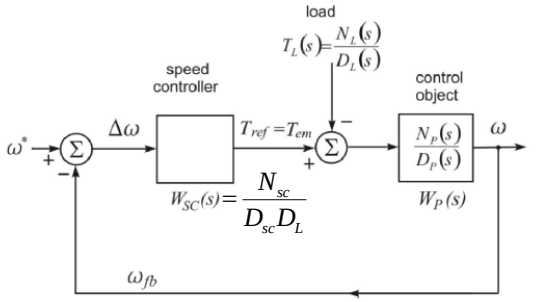
Si pone il problema di ridurre l'effetto del disturbo. A tal fine si possono usare due metodi:

- ❑ principio del modello interno
- ❑ azione in avanti (feedforward)

15

Principio del modello interno

Supponiamo che ogni f.d.t. e che la coppia resistente possa essere descritta come rapporto di polinomi.



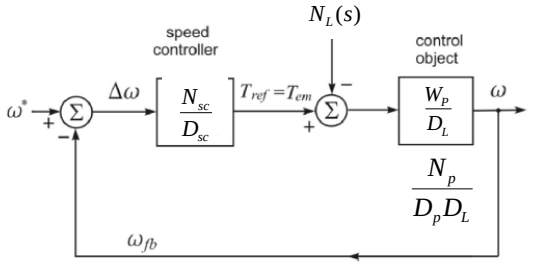
A simplified block diagram of the speed-controlled system, with the load disturbance $T_L(s)$ expressed in terms of polynomials $N_L(s)$ and $D_L(s)$.

Scegliamo la f.d.t. del regolatore in modo che comprenda già al denominatore il polinomio generatore del disturbo D_L. In tal caso la funzione D_L è sia sul ramo diretto, sia su quello del disturbo. Allora possiamo accorparla direttamente al sistema da controllare.

16

Principio del modello interno

Lo schema a cui giungiamo è mostrato di sotto, dove la funzione generatrice del disturbo è inclusa del sistema da controllare (sistema esteso).



A simplified block diagram of the speed-controlled system, with the load disturbance $T_L(s)$ expressed in terms of polynomials $N_L(s)$ and $D_L(s)$.

Scegliamo i polinomi N_{sc} e D_{sc} in modo da stabilizzare il sistema esteso, ossia in modo che il polinomio caratteristico in catena chiusa abbia tutti i poli con parte reale negativa.

17

Principio del modello interno

L'errore di velocità dovuto al disturbo è il seguente:

$$\Delta\omega(s) = \frac{\left(\frac{W_p}{D_L}\right)N_L}{1+\left(\frac{N_{sc}}{D_{sc}}\right)\left(\frac{W_p}{D_L}\right)} = \frac{N_P D_{SC} N_L(s)}{\underbrace{D_P D_L D_{SC} + N_{SC} N_P}_{\text{Polinomio caratteristico del sistema in catena chiusa, stabilizzato dal regolatore}}}$$

A regime, l'errore di velocità dovuto alla coppia di disturbo tende a zero, in quanto il denominatore ha poli tutti a parte reale negativa.

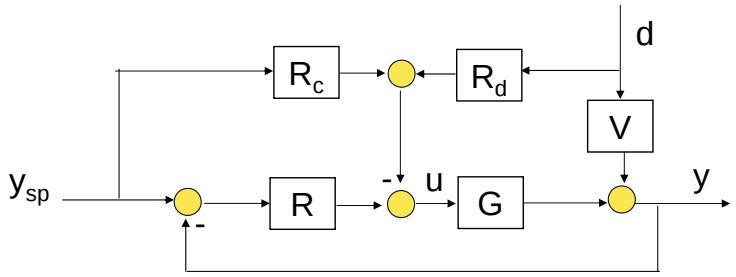
Principio del modello interno: condizione sufficiente per la reiezione a regime di un disturbo è che la f.d.t. costituita dalla serie del regolatore e del sistema da controllare contenga a denominatore il polinomio generatore del disturbo.

Per analogia, si verifica che condizione sufficiente per l'inseguimento asintotico del riferimento è che la f.d.t. costituita dalla serie del regolatore e del sistema da controllare contenga a denominatore il polinomio generatore del riferimento.

18

Azione in avanti

Consideriamo lo schema generico con azioni in avanti di anticipo del setpoint R_c e di compensazione del disturbo R_d:



Calcoliamo la variabile d'uscita in funzione del setpoint y_{sp} e del disturbo d.

$$y = \frac{RG + R_c G}{1 + RG} y_{sp} + \frac{V - R_d G}{1 + RG} d$$

19

Azione in avanti

$$y = \frac{R_c G + RG}{1 + RG} y_{sp} + \frac{V - R_d G}{1 + RG} d$$

La reiezione del disturbo è perfetta se risulta:

$$R_d = \frac{V}{G}$$

Purtroppo in genere non è fisicamente realizzabile e quindi occorre approssimarla. Per le basse frequenze spesso si usa un semplice guadagno.

L'inseguimento del set-point è perfetto se risulta:

$$R_c = \frac{1}{G}$$

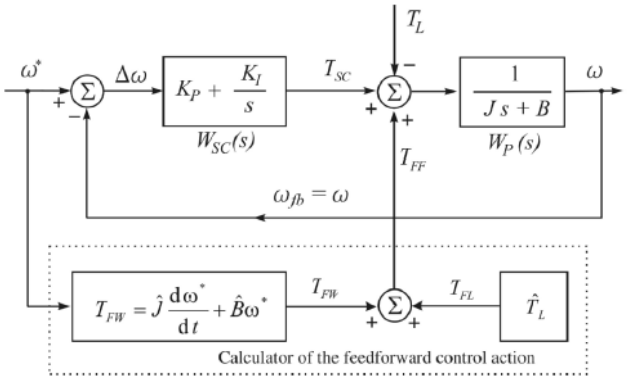
In genere non è realizzabile, perché G ha più poli che zeri, e quindi occorre approssimarla. Rapide variazioni del riferimento portano subito alla saturazione del segnale *u* di comando.

L'azione in avanti può essere interessante nel caso in cui il riferimento sia pre-calcolato e non contenga frequenze elevate. Allora in questo caso, l'azione in avanti può essere pre-calcolata anch'essa.

20

Azione in avanti

L'azione in avanti permette di compensare perfettamente l'errore di inseguimento del set-point se l'andamento di quest'ultimo è noto in anticipo ed è possibile calcolare la coppia inerziale T_{FW}. L'errore dovuto alla coppia resistente del carico si elimina misurando (o stimando) la coppia resistente stessa.



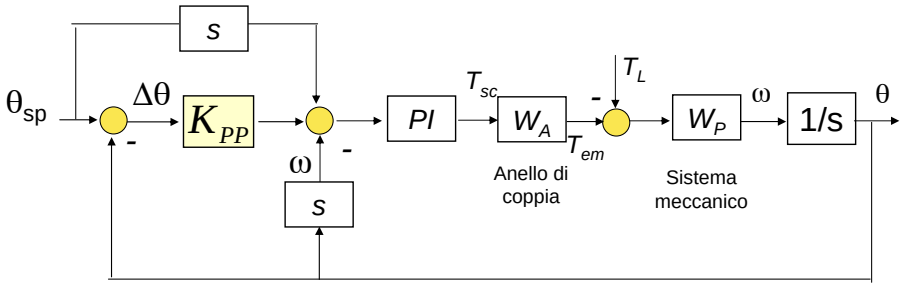
The speed control system with both the feedback and the feedforward control actions.

21

Azione in avanti

Regolatore di posizione

La compensazione in avanti può essere utile anche nel caso di controllo di posizione. Ecco un esempio di schema che prevede, come al solito, un anello esterno di posizione ed un anello interno di velocità.



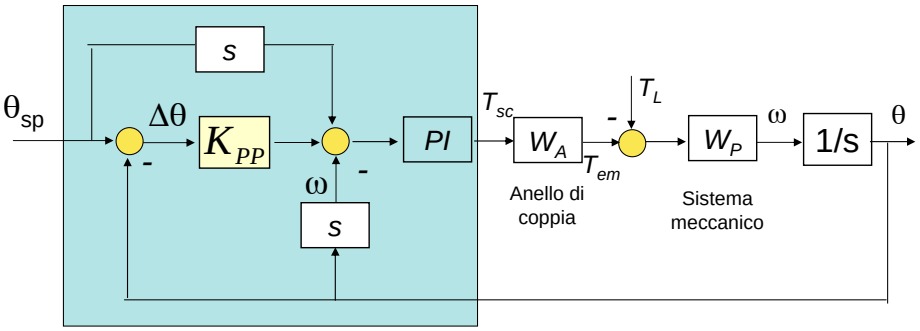
N.B. La velocità non è misurata, ma è ricavata idealmente derivando il segnale di posizione.

22

Equivalenza con regolatori PID

Regolatore di posizione

Si noti che la porzione di schema entro il rettangolo si può sostituire con un solo regolatore PID (con due poli reali). Pertanto i regolatori industriali presentano spesso questa soluzione per il controllo di posizione.

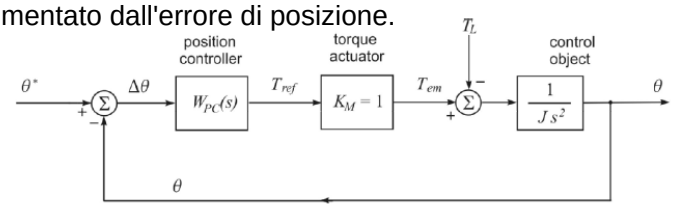


$$T_{sc} = PI(s)\left(s\theta_{sp} + K_{pp}(\theta_{sp} - \theta) - s\theta\right) =$$
$$= \boxed{PI(s)(s + K_{pp})}(\theta_{sp} - \theta) = \boxed{PID(s)}(\theta_{sp} - \theta)$$

23

Controllo di posizione

Nel caso di sistemi di piccola potenza, si elimina talvolta l'anello di regolazione di velocità intermedio e si considera direttamente il regolatore di coppia alimentato dall'errore di posizione.



Simplified block diagram of the s-domain position controller.

In questo caso, il regolatore di posizione non può essere di tipo puramente proporzionale, ma deve essere al minimo di tipo PD. Se K_D fosse zero, allora il sistema in catena chiusa sarebbe instabile.

$$W_{SS}(s) = \frac{1 + s\frac{K_D}{K_P}}{1 + s\frac{K_D}{K_P} + 1 + s^2\frac{J}{K_P}}$$

$$f(s) = s^2 + s\frac{K_D}{J} + \frac{K_P}{J}, \qquad \omega_n^2 = \frac{K_P}{J}, \quad 2\xi\omega_n = \frac{K_D}{J}$$

24

Controllo di posizione

Per evitare la saturazione della coppia in corrispondenza a brusche variazioni del comando di posizione, l'azione derivativa viene spesso riposizionata solo sul ramo di retroazione.

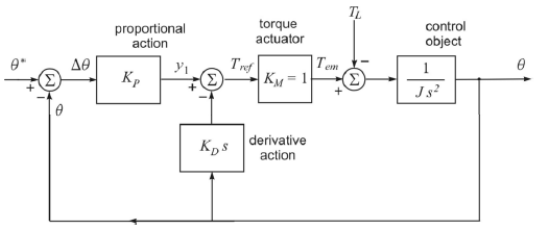


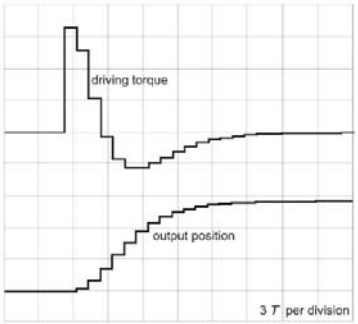
Fig. 5.4. Proportional-derivative position controller with the derivative action relocated into the feedback path.

$$W_{SS}(s) = \frac{\theta(s)}{\theta^*(s)} = \frac{K_P}{K_P + K_D s + Js^2} = \frac{1}{1 + s\frac{K_D}{K_P} + 1 + s^2\frac{J}{K_P}}$$

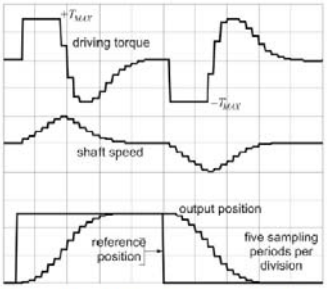
In questo modo viene meno lo zero dovuto all'azione derivativa nella f.d.t. del sistema in catena chiusa. N.B. Il segnale $K_d s\theta$ equivale a $K_d\omega$, cioè a una retroazione di velocità.

25

Controllo di posizione



Transient response of the driving torque (upper trace) and position (lower trace) for a small step change in the reference position. The amplitude of the input step is small, and the driving torque does not reach the system limit. The feedback gains of the PD controller are tuned to provide an aperiodic step response of the output position.

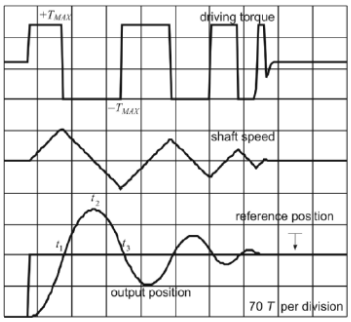


Transient response of the driving torque (upper trace), shaft speed (middle), and position (lower trace) for the step change in the reference position. The reference position exhibits a pulse change and returns to the initial value. The driving torque reaches the limit $\pm T_{MAX}$.

N.B. In queste figure si tiene conto del massimo valore ammissibile per la coppia, ossia è inserito all'uscita del regolatore PD un blocco di saturazione di coppia, in modo che essa resti nell'intervallo [$-T_{max}$, T_{max}]. Se le variazioni del riferimento (o dei disturbi) sono limitate, il funzionamento è soddisfacente.

26

Controllo di posizione



Operation of the PD position controller with large input disturbances. The driving torque reaches the system limit, driving the system into a nonlinear operating mode and resulting in poorly damped oscillations. The amplitude of the oscillations is inversely proportional to their frequency.

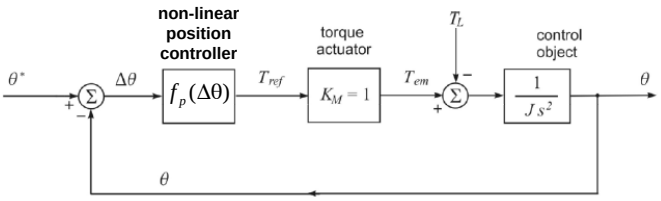
Quanto le variazioni del riferimento o di coppia resistente sono elevate, non è possibile trascurare il comportamento non-lineare del sistema. Si manifestano notevoli sovra-elongazioni di posizione (quando l'errore di posizione è zero, non lo è quello di velocità, e l'accelerazione è limitata), eliminabili solo riducendo i guadagni del sistema di controllo.

27

Sistemi TOS

Regolatore non-lineare di posizione

Si può migliorare il comportamento adottando un regolatore di posizione non lineare. L'idea alla base di questo metodo è che l'errore di velocità e di posizione devono azzerarsi contemporaneamente.



Durante la fase finale di avanzamento verso la posizione finale, il controllo deve decelerare per azzerare la propria velocità. Per le massime prestazioni, la coppia erogata dovrebbe essere pari a $-T_{max}$. La derivata dell'energia cinetica E_c si calcola come segue:

$$\frac{dE_c}{dt} = -T_{\max}\omega$$

28

Sistemi TOS

Integrando tra l'istante attuale t e l'istante finale t_f per il quale la velocità si annulla, imponendo che il set-point θ_{sp} non venga superato (per evitare sovraelongazioni), si ottiene:

$$\frac{dE_c}{dt} = -T_{\max}\omega \Rightarrow \underbrace{E_c(t_f)}_{\text{zero}} - E_c(t) = -T_{\max}\left(\underbrace{\theta(t_f)}_{\leq\theta_{sp}} - \theta(t)\right)$$

Si ricava che, per evitare sovraelongazioni, la velocità (in valore assoluto) non deve eccedere un valore limite che dipende dall'errore di posizione.

$$\frac{1}{2}J\omega^2(t) \leq T_{\max}\left|\theta_{sp} - \theta(t)\right| \Rightarrow \left|\omega(t)\right| \leq \sqrt{\frac{2T_{\max}\left|\Delta\theta(t)\right|}{J}} = \omega_M$$

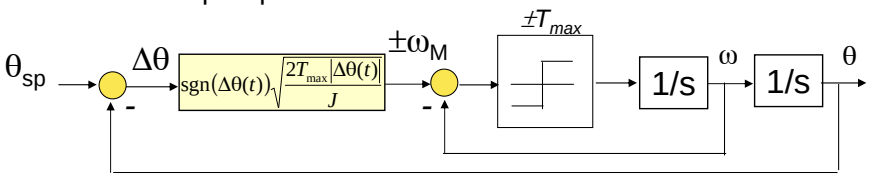
Se disponessimo della misura di velocità, potremmo realizzare uno schema di controllo ottimale in termini di velocità e privo di sovraelongazione (**Time Optimal Servomechanism, TOS**)

29

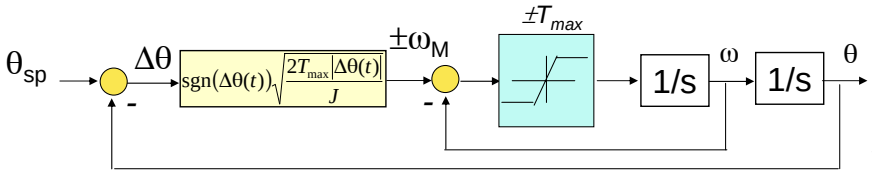
Sistemi TOS

Time Optimal Servomechanism (TOS)

Lo schema di un sistema TOS è il seguente. La velocità e la coppia richieste sono sempre quelle massime.



Per evitare il fenomeno di chattering (oscillazioni dovute all'eccessiva prontezza dell'azionamento) si usa uno schema più "morbido", chiamato Proximate Time Optimal Servomechanism (PTOS).

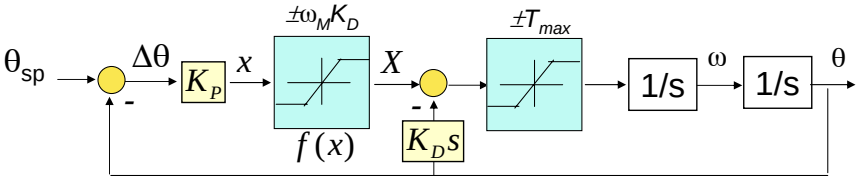


30

Sistemi TOS

Time Optimal Servomechanism (TOS)

La velocità del motore può essere ricavata indirettamente derivando l'angolo θ. Si ritrova dunque la stessa configurazione di un regolatore PD.



Per evitare sovraelongazioni, deve valere la condizione: $|\omega(t)| \le \omega_M$

Quando l'errore dell'anello di velocità è trascurabile, risulta:

$$\left.\begin{array}{l} X \cong K_D\omega \\ |\omega| \le \omega_M \end{array}\right\} \Rightarrow |X| \le K_D\omega_M$$

La funzione *f(x)* è definita come segue:

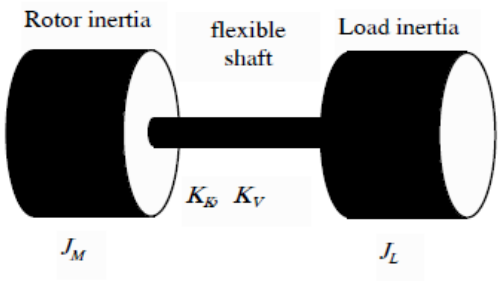
$$f(x) = sign(x)\min\left\{|x|, K_D\sqrt{\frac{2T_{\max}|\Delta\theta|}{J}}\right\}$$

31

Accoppiamenti elastici

Il sistema di trasmissione meccanico ha spesso una rigidità non infinita (ad esempio se l'albero è flessibile, oppure se è presente un riduttore con una minima deformabilità). A causa dell'elasticità dell'albero di trasmissione, si possono manifestare oscillazioni indesiderate.

Studiamo questi fenomeni usando un sistema a due masse.



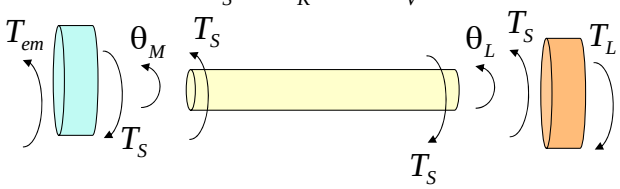
The rotor inertia J_M and load inertia J_L are coupled by a flexible shaft, described by a finite stiffness K_K and an internal viscous friction, characterized by the coefficient K_V.

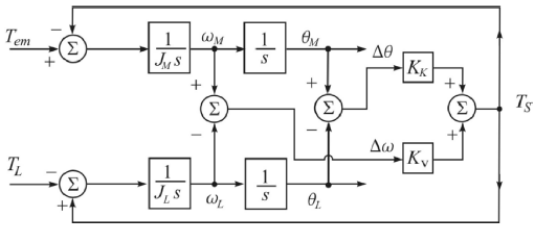
32

Accoppiamenti elastici

Determiniamo le equazioni del sistema meccanico. La rigidità dell'albero è K_K, il coefficiente di attrito viscoso è K_V.

$$T_S = K_K \Delta\theta + K_V \Delta\omega$$





A mechanical subsystem with torsional resonance mode comprises four state variables (θ_M, θ_L, ω_M, ω_L). The input to the system is the driving torque T_{em}, while the outputs are the rotor and load speed and position.

33

Accoppiamenti elastici

Calcoliamo la f.d.t. W_{P1} tra la coppia T_{em} del motore e la velocità ω_M del motore.

$$W_{P1}(s)=\frac{1}{(J_M+J_L)s}\frac{1+\frac{K_V}{K_K}s+\frac{J_L}{K_K}s^2}{1+\frac{K_V}{K_K}s+\frac{J_L J_M}{K_K(J_M+J_L)}s^2}$$

$$=\frac{1}{J_{EQ}s}\frac{1+\frac{2\zeta_z}{\omega_z}s+\frac{1}{\omega_z^2}s^2}{1+\frac{2\zeta_p}{\omega_p}s+\frac{1}{\omega_p^2}s^2}.$$

$$\omega_p=\sqrt{\frac{K_K(J_M+J_L)}{J_M J_L}},\qquad \omega_z=\sqrt{\frac{K_K}{J_L}},$$

$$\zeta_p=\sqrt{\frac{K_V^2(J_M+J_L)}{4K_K J_M J_L}},\qquad \zeta_z=\sqrt{\frac{K_V^2}{4K_K J_L}}.$$

The ratio $R_R=\omega_p/\omega_z$ is known as the resonance ratio:

$$R_R=\frac{\omega_p}{\omega_z}=\sqrt{1+\frac{J_L}{J_M}}=\frac{\xi_p}{\xi_z}$$

R_R è chiamato *rapporto di risonanza*, mentre il rapporto $\rho = J_L/J_M$ è il *rapporto d'inerzia*.

La pulsazione naturale ω_p è la pulsazione naturale a cui vibra spontaneamente il sistema a due masse (natural frequency). La pulsazione ω_z è la pulsazione a cui vibra il carico quando il rotore è bloccato (locked frequency).

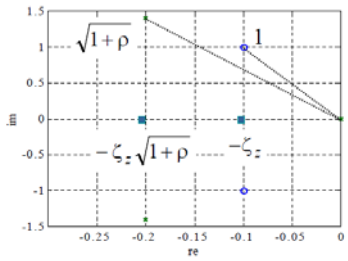
34

Accoppiamenti elastici

Come sono messi i poli e gli zeri?

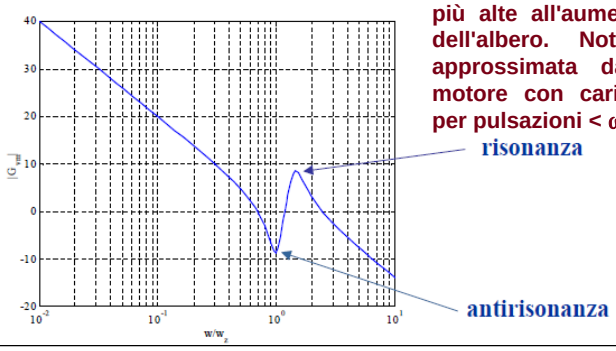
Esaminando il rapporto R_R si vede che i poli sono a frequenza più alta degli zeri e sono anche più smorzati.

Il diagramma di Bode del guadagno mostra una antirisonanza (in corrispondenza di ω_z) e una risonanza (in corrispondenza di ω_p).



L'antirisonanza si sposta a frequenze più alte all'aumentare della rigidezza dell'albero. Notiamo che W_{P1} è approssimata dalla f.d.t. del solo motore con carico inerziale ($1/J_{EQ}s$) per pulsazioni < ω_z.

$\rho=1$
$\zeta_z=0.1$



Accoppiamenti elastici

Calcoliamo la f.d.t. W_{P2} tra la coppia T_{em} del motore e la velocità ω_L del carico.

$$W_{P2}(s) = \frac{1}{(J_M + J_L)s} \frac{1 + \frac{K_V}{K_K}s}{1 + \frac{K_V}{K_K}s + \frac{J_L J_M}{K_K(J_M + J_L)}s^2}$$

$$= \frac{1}{J_{EQ}s} \frac{1 + \frac{2\zeta_z}{\omega_z}s}{1 + \frac{2\zeta_p}{\omega_p}s + \frac{1}{\omega_p^2}s^2}$$

$$\omega_p = \sqrt{\frac{K_K(J_M + J_L)}{J_M J_L}}, \qquad \omega_z = \sqrt{\frac{K_K}{J_L}},$$

$$\zeta_p = \sqrt{\frac{K_V^2(J_M + J_L)}{4K_K J_M J_L}}, \qquad \zeta_z = \sqrt{\frac{K_V^2}{4K_K J_L}}.$$

The ratio $R_R = \omega_p/\omega_z$ is known as the resonance ratio:

$$R_R = \frac{\omega_p}{\omega_z} = \sqrt{1 + \frac{J_L}{J_M}} = \frac{\xi_p}{\xi_z}$$

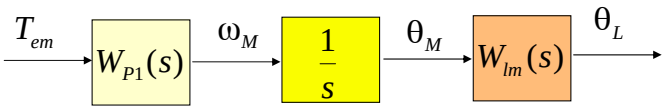
R_R è chiamato *rapporto di risonanza*, mentre il rapporto $\rho = J_L/J_M$ è il *rapporto d'inerzia*.

La pulsazione naturale ω_p è la pulsazione naturale a cui vibra spontaneamente il sistema a due masse (natural frequency). La pulsazione ω_z è la pulsazione a cui vibra il carico quando il rotore è bloccato (locked frequency).

36

Accoppiamenti elastici

Invece di esaminare separatamente le f.d.t. W_{P1} e W_{P2}, poiché il controllo è spesso fatto misurando la posizione dell'albero motore (il sensore è vicino al motore e non al carico), è meglio studiare lo schema seguente:



dove:

W_{P1} è la f.d.t. tra coppia elettromagnetica e la velocità del motore

W_{lm} è la f.d.t. dalla rotazione dell'albero motore e la rotazione del carico

$$W_{lm}(s) = \frac{1+\frac{K_V}{K_K}s}{1+\frac{K_V}{K_K}s+\frac{J_L}{K_K}s^2} = \frac{1+\frac{2\zeta_z}{\omega_z}s}{1+\frac{2\zeta_z}{\omega_z}s+\frac{1}{\omega_z^2}s^2}.$$

La risonanza è in corrispondenza a ω_z. Ecco perché tale pulsazione naturale è detta a rotore bloccato.

37

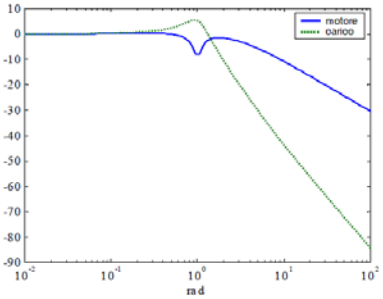
Accoppiamenti elastici

Supponiamo di realizzare il controllo di posizione usando un anello intermedio di controllo della velocità. Supponiamo di progettare il regolatore PI dell'anello di velocità con i metodi usuali (ignorando l'elasticità).

In genere non si presentano particolari problemi sulla velocità del motore (il sistema rimane con margine di fase sufficiente, sia che la pulsazione di attraversamento sia scelta < ω_z, sia che sia scelta >ω_z), perché gli zeri di W_{P1} sono in quasi-cancellazione dei rispettivi poli.

Si manifesta tuttavia un problema se si considera la f.d.t. della velocità in catena chiusa.

C'è una risonanza nella f.d.t tra il set-point della velocità del motore e l'effettiva velocità del carico. Tale risonanza non si manifesta nella f.d.t. del motore.



38

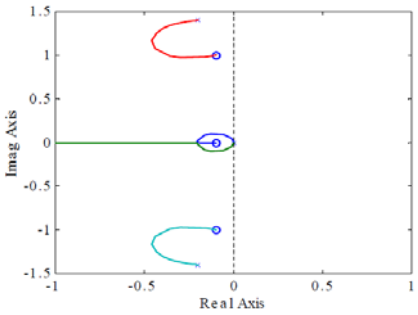
Accoppiamenti elastici

Esaminando il luogo delle radici della velocità del carico, si scopre che esiste una coppia di poli complessi coniugati, il cui smorzamento al variare del guadagno K_P del regolatore di velocità prima aumenta, poi diminuisce.

Conviene allora scegliere per K_P il valore che rende massimo tale smorzamento. Ciò equivale a imporre una pulsazione di attraversamento dell'anello di velocità circa pari a

$$\omega_{cv} \approx 0.7\omega_z$$

LIMITE DELLA PULSAZIONE CRITICA DELL'ANELLO DI VELOCITA'

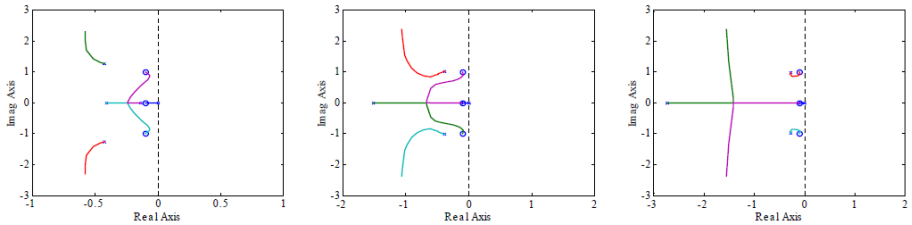


39

Accoppiamenti elastici

Una volta progettato il regolatore di velocità, si può progettare il regolatore proporzionale dell'anello di posizione (sempre misurata sul lato-motore). Purtroppo si scopre che all'aumentare della banda dell'anello di velocità, si generano poli poco smorzati nella f.d.t. di posizione ad anello chiuso.

$\tilde{\omega}_{cv} = 0.5$ $\tilde{\omega}_{cv} = 1$ $\tilde{\omega}_{cv} = 1.5$



Si può verificare che la massima risonanza della f.d.t. tra il riferimento di posizione angolare (lato motore) e la rotazione del carico è approssimabile come:

$$H_\infty \cong \frac{1}{2\left(\xi_z + \frac{\omega_z}{2\omega_{cv}}\frac{\rho}{1+\rho}\right)}$$

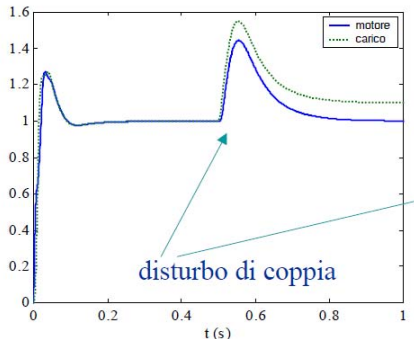
Scelgo il suo valore massimo e ricavo ω_{cv} nel progetto.

40

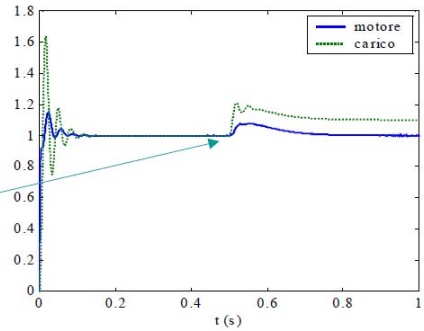
Accoppiamenti elastici

Ecco alcuni esempi di forma d'onda della posizione del motore e del carico, con taratura dell'anello di velocità "morbido" oppure "aggressivo" rispetto alla pulsazione ω_z.

$\tilde{\omega}_{cv} = 0.5$

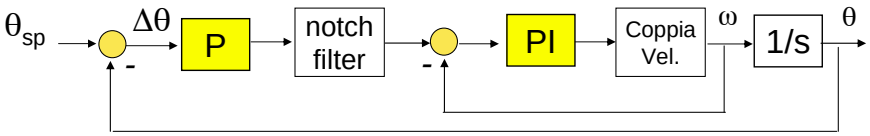


$\tilde{\omega}_{cv} = 2.5$

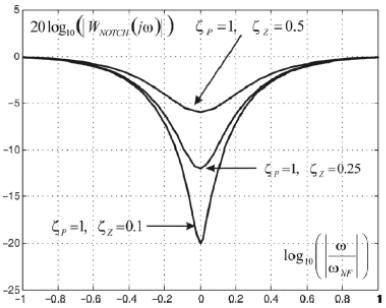


Filtro notch

Il filtro di notch è predisposto in azionamenti commerciali con struttura di controllo in cascata P/PI oppure PID per ridurre il problema della risonanza indotta da accoppiamento elastico.



$$W_{NOTCH}(s) = \frac{s^2 + 2\zeta_Z \omega_{NF} s + \omega_{NF}^2}{s^2 + 2\zeta_P \omega_{NF} s + \omega_{NF}^2}$$



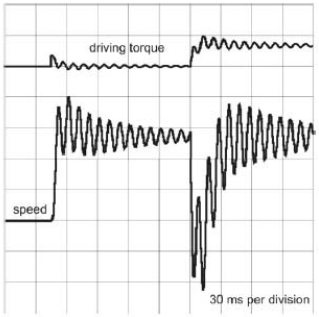
The amplitude characteristics of the notch filter obtained with pole damping of $\zeta_P = 1$ and zero damping ranging from $\zeta_Z = 0.5$ to $\zeta_Z = 0.1$.

Filtro notch

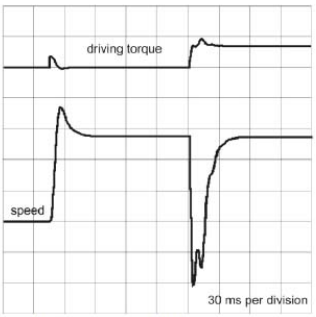
- Il filtro di notch ha un diagramma di Bode con una gola ("notch") in corrispondenza di una pulsazione specifica e viene usato per evitare l'eccitazione di modi oscillatori del carico attraverso la variabile di controllo.
- Posizionando gli zeri del filtro in corrispondenza dei poli complessi del processo si cancella il relativo contributo nella risposta al segnale di riferimento.
- Tuttavia, tali poli complessi coniugati non sono eliminati dalla f.d.t. ad anello chiuso e quindi i modi di oscillazione possono essere eccitati dai disturbi della coppia di carico.
- Inoltre occorre conoscere bene la frequenza di risonanza sulla quale sintonizzare il filtro di notch.

43

Accoppiamenti elastici



Simulation traces of the driving torque and speed obtained from the model in Fig. 8.15 during the reference step (left) and the load step (right) transients. This model does not include any antiresonant filter.



The simulation given in Fig. 8.18 is repeated with a notch antiresonant filter. Other settings and scalings remain unaltered.