

**METODI NUMERICI PER LA SOLUZIONE DEL PROBLEMA  
ELETTRODINAMICO IN UN GENERATORE MHD A GEOMETRIA  
LINEARE**

DOTTORATO DI RICERCA IN INGEGNERIA ELETTROROTECNICA

SEDE DI BOLOGNA

VII CICLO

TRIENNIO 1991-94

Tesi di Dottorato di

Andrea Cristofolini

METODI NUMERICI PER LA SOLUZIONE DEI PROBLEMI  
ELETTRODINAMICI E DEI PROBLEMI DI GEOMETRIA

DOTTORATO DI RICERCA IN INGEGNERIA ELETTRICA E ELETTRONICA

AVV. G. B. G. G. G.

1974

1974-1975

di ottica e di

infortuni

## ELENCO DEI SIMBOLI

$\Phi$	Potenziale elettrico
$E$	Campo elettrico
$J$	Densità di corrente
$B$	Campo d'induzione magnetica
$H$	Campo magnetico
$U$	Velocità del plasma
$u$	componente della velocità del plasma lungo l'asse $x$
$v$	componente della velocità del plasma lungo l'asse $y$
$\sigma$	conducibilità del plasma
$\beta$	Parametro di Hall del plasma
$L$	lunghezza del canale
$H_{in}$	altezza della sezione di ingresso
$H_{ex}$	altezza della sezione di uscita

## 1. INTRODUZIONE

### 1.1 Conversione MHD

Il moto di un fluido ionizzato attraverso un campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}$  produce su ogni carica  $q$  del fluido una forza  $\mathbf{F} = q(\mathbf{U} \times \mathbf{B})$  perpendicolare alla direzione di  $\mathbf{B}$  e di  $\mathbf{U}$ . Tale forza è alla base del principio di funzionamento del generatore MHD, il cui schema è illustrato in Fig. 1.1. Le due pareti parallele all'asse  $y$  sono di materiale isolante, mentre le altre due sono in materiale conduttore e sono connesse al carico. L'elettrodo che emette gli elettroni è detto catodo, mentre quello che li riceve è detto anodo. Il campo  $\mathbf{B}$  è creato da un magnete a sella esterno al canale. Nel sistema di riferimento utilizzato in Fig. 1.1 la velocità del fluido è diretta come l'asse  $x$ , il campo magnetico come l'asse  $z$ . Per effetto della forza  $\mathbf{F}$ , le cariche positive e quelle negative tendono a muoversi in direzioni opposte lungo  $y$ . La corrente che si genera lungo l'asse  $y$  genera a sua volta una forza per unità di volume  $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$  che si oppone al gradiente di pressione

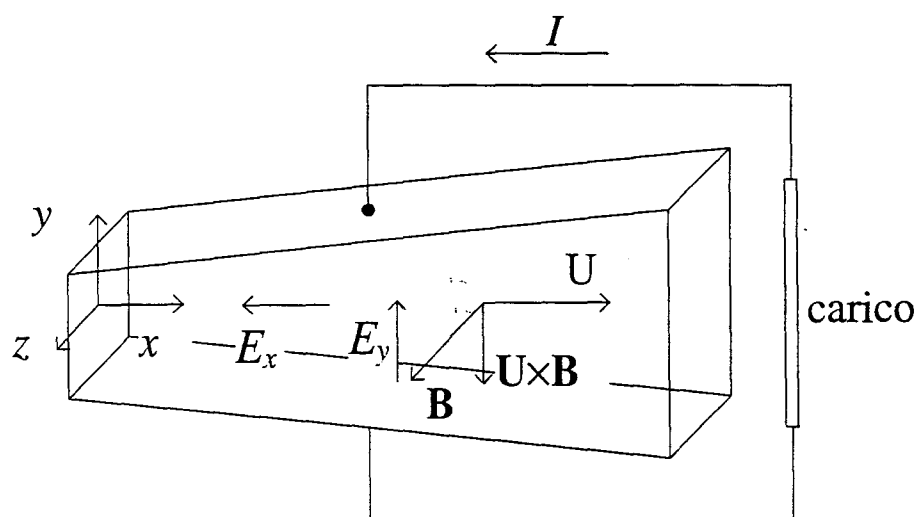


Fig. 1.1: schema di canale MHD

responsabile del moto del fluido. Per mezzo di tale meccanismo, detto interazione MHD, il fluido perde energia termica e meccanica trasformandola in energia elettrica.

Il plasma che fluisce nel canale è costituito da gas ad alta temperatura additivato con un metallo alcalino, usualmente cesio o potassio, per innalzarne la conducibilità. I generatori MHD possono essere a ciclo chiuso o a ciclo aperto. Nei generatori a ciclo chiuso il fluido di lavoro è costituito da un gas nobile, usualmente argon. Il gas viene riscaldato per mezzo di un apposito scambiatore di calore, cede parte della sua energia nel passaggio attraverso il canale e viene reimmesso nello scambiatore di calore. Nei generatori a ciclo aperto il plasma è invece costituito dai fumi ottenuti dalla combustione di combustibili fossili come il carbone. I fumi, dopo il passaggio nel canale, vengono depurati dell'additivo e immessi nell'atmosfera.

Nel generatore MHD non sono presenti componenti soggette a elevate sollecitazioni meccaniche come invece avviene per le turbine. Questo consente di lavorare a temperature più elevate di quelle caratteristiche di altri cicli per la produzione di energia. Di conseguenza, l'inserimento di un generatore MHD come impianto di testa in una centrale termoelettrica consente l'innalzamento del rendimento complessivo della centrale stessa.

## **1.2 Approssimazioni MHD**

Nella sua formulazione più generale, il problema magnetofluidodinamico accoppia le relazioni della fluidodinamica ( equazioni di conservazione della massa, della quantità di moto e dell'energia in regimi fortemente turbolenti) con quelle dell'elettromagnetismo (equazioni di Maxwell).

Nell'ambito della conversione MHD si adottano alcune approssimazioni che consentono di ridurre la notevole complessità del problema:

- 1) il problema fluidodinamico viene disaccoppiato da quello elettodinamico. Si suppone che le grandezze elettriche seguano istantaneamente le variazioni delle grandezze fluidodinamiche. Questa approssimazione è giustificata dal fatto che i tempi di variazione caratteristici delle grandezze elettriche sono molto inferiori a quelli delle grandezze fluidodinamiche.
- 2) La densità di carica macroscopica del plasma è considerata nulla. Ciò equivale a trascurare l'effetto di campi elettrici provocati da eventuali perturbazioni locali della condizione di neutralità.
- 3) La corrente di convezione e di spostamento vengono trascurate rispetto alla corrente di conduzione.
- 4) Il campo magnetico indotto dalle correnti nel plasma viene trascurato rispetto al campo magnetico applicato dall'esterno.

### **1.3 Modelli numerici**

La soluzione numerica del problema magnetofluidodinamico comporta la ricerca di due modelli numerici, uno fluidodinamico ed uno elettrodinamico. I due modelli, accoppiati iterativamente, forniscono la soluzione al problema globale.

Nonostante le approssimazioni sopra esposte, il problema magnetofluidodinamico presenta una complessità tale da rendere impossibile la formulazione di una soluzione analitica generale. E' dunque necessaria la ricerca di un modello numerico che fornisca una soluzione approssimata con un opportuno grado di accuratezza in un tempo ragionevole.

La formulazione di un modello numerico si può suddividere in due fasi principali:

- 1) elaborazione del modello fisico del problema: lo scopo di questa prima fase consiste nella formulazione di un'equazione o di un sistema di equazioni che descriva il problema dato;
- 2) discretizzazione: l'equazione che descrive il problema viene elaborata in modo da ottenere un sistema lineare algebrico;
- 3) soluzione del sistema lineare: nel caso di problemi multidimensionali la soluzione del sistema lineare è l'operazione più onerosa dell'intero procedimento. Assume quindi un'importanza fondamentale l'individuazione dell'algoritmo numerico che meglio si adatti, in termini di velocità di esecuzione e di accuratezza della soluzione, al particolare metodo di discretizzazione utilizzato

La soluzione numerica del problema magnetofluidodinamico comporta la ricerca di due modelli numerici, uno fluidodinamico ed uno elettrodinamico. I due modelli, accoppiati iterativamente, forniscono la soluzione al problema globale.

Nei capitoli 3, 4 e 5 sono riportati alcuni metodi numerici per la soluzione del problema elettrodinamico. Nel capitolo 3 viene descritto il metodo dei volumi di controllo, che presenta però difficoltà di convergenza. Sono stati perciò sviluppati due metodi che presentano sicura convergenza oltre ad essere caratterizzati da flessibilità e velocità di calcolo. Nel capitolo 4 viene descritto un metodo agli elementi finiti (FEM), basato su una formulazione variazionale. Nel capitolo 5 viene esposto un metodo alle differenze finite basato su una discretizzazione a cinque punti con fitting di tipo esponenziale (DFEXP).

## 2. ELETTRODINAMICA MHD

### 2.1 Il problema elettrodinamico

Le equazioni di Maxwell per un plasma stazionario all'interno di un condotto MHD, in base alle approssimazioni fatte, si possono scrivere come segue:

$$\nabla \times \mathbf{B} = 0 \quad 2.1.$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla \Phi \quad 2.2.$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad 2.3.$$

Inoltre, considerando che nel generatore MHD in ciclo aperto è trascurabile lo scorrimento ionico ed il gradiente di pressione elettronica, la legge di Ohm generalizzata può essere espressa come segue:

$$\mathbf{J} + \beta \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{B} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B}) \quad 2.4.$$

Ponendosi nel sistema di riferimento usualmente adottato per lo studio dei condotti MHD lineari, cioè un sistema cartesiano ortogonale destrorso con l'asse x orientato nella direzione della velocità di massa del plasma e l'asse z parallelo alla direzione del campo d'induzione magnetica, la (2.4) può essere riscritta in forma scalare:

$$J_x = \frac{\sigma}{1 + \beta^2} [(E_x + vB) - \beta(E_y - uB)] \quad 2.5.$$

$$J_y = \frac{\sigma}{1 + \beta^2} [(E_y - uB) + \beta(E_x + vB)] \quad 2.6.$$

$$J_z = \sigma E_z \quad 2.7.$$



Le (2.5.), (2.6.), (2.7.) possono essere riscritte sinteticamente in forma matriciale:

$$\{J\} = [\sigma] \{E\} + \{F\},$$

dove

$$[\sigma] = \frac{\sigma}{1 + \beta^2} \begin{vmatrix} 1 & -\beta & 0 \\ \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \beta^2 \end{vmatrix}$$

$$\{F\} = \frac{\sigma B}{1 + \beta^2} \begin{vmatrix} v - \beta u \\ \beta v - u \\ 0 \end{vmatrix}$$

Si noti che  $[\sigma]$  è un tensore antisimmetrico.

## 2.2 L'approssimazione bidimensionale

Si supponga che le grandezze che compaiono nelle equazioni appena viste siano indipendenti dalla coordinata  $z$ , e che siano trascurabili le componenti delle grandezze vettoriali parallele all'asse  $z$ . Tale ipotesi è ragionevole in zone del condotto abbastanza lontane dalle pareti laterali. E' possibile quindi ridurre il dominio da tre a due dimensioni, analizzando le grandezze elettrodinamiche e fluidodinamiche del plasma sul piano perpendicolare all'asse  $z$ , piano contenente l'asse del condotto. Il problema elettrodinamico stazionario è quindi completamente definito dalle:

$$E_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad 2.8.$$

$$E_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad 2.9.$$

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = 0 \quad 2.10.$$

$$J_x = \frac{\sigma}{1+\beta^2} [(E_x + \nu B) - \beta(E_y - uB)] \quad 2.11.$$

$$J_y = \frac{\sigma}{1+\beta^2} [(E_y - uB) + \beta(E_x + \nu B)] \quad 2.12.$$

Dalle equazioni (2.8.)-(2.12.) si ottiene una equazione differenziale di tipo ellittico nell'incognita potenziale elettrico  $\Phi$ :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + f(x, y) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + g(x, y) \frac{\partial \Phi}{\partial y} = t(x, y), \quad 2.13.$$

dove si è posto

$$f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \ln \left( \frac{\sigma}{1+\beta^2} \right) \right] + \beta \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \ln \left( \frac{\beta \sigma}{1+\beta^2} \right) \right] \right\}$$

$$g(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \ln \left( \frac{\sigma}{1+\beta^2} \right) \right] - \beta \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \ln \left( \frac{\beta \sigma}{1+\beta^2} \right) \right] \right\}$$

$$t(x, y) = \frac{1+\beta^2}{\sigma} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\sigma(\beta u + \nu)B}{1+\beta^2} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\sigma(u - \beta \nu)B}{1+\beta^2} \right] \right\}.$$

Risolvendo la (2.13) si ottiene il potenziale elettrico su tutto il dominio; noto il potenziale è possibile risalire ai valori di campo elettrico e di densità di corrente mediante le (2.8.), (2.9.), (2.11.), (2.12.).

### 2.3 Condizioni al contorno

L'equazione che descrive il problema elettrodinamico stazionario è, come già detto, di tipo ellittico. Di conseguenza devono essere imposte delle

condizioni su tutto il contorno affinché la (2.13.) sia risolubile. Vi sono diversi tipi di condizioni al contorno che possono essere imposte:

- 1) imposizione del potenziale: corrisponde ad una condizione al contorno di Dirichlet. I potenziali elettrostatici possono essere conosciuti in base a risultati derivanti da altri modelli o a misure effettuate su condotti esistenti. In tal caso, sulla porzione di contorno corrispondente alle pareti elettrodiche il potenziale può venire imposto;
- 2) imposizione delle correnti: corrisponde ad imporre una relazione tra le componenti del campo elettrico lungo  $x$  e lungo  $y$ . Un tale tipo di condizione deve essere imposta sulla porzione di contorno corrispondente alle pareti isolanti o alle sezioni di ingresso e di uscita del canale, dove la corrente normale è nulla.
- 3) Imposizione delle condizioni di carico: quando i potenziali di elettrodo non sono noti a priori, è necessario calcolarli utilizzando le condizioni di carico. Si consideri ad esempio il generatore ad elettrodi continui raffigurato in fig. 2.1. In questo caso le condizioni al contorno da applicare alle pareti elettrodiche sono:

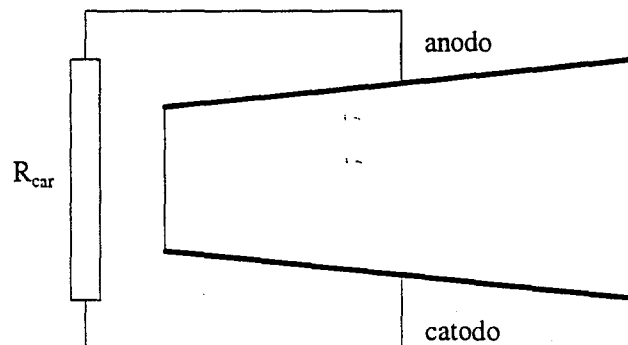


Fig. 2.1. : condotto di Faraday ad elettrodi continui

$$\Phi_{and} = 0$$

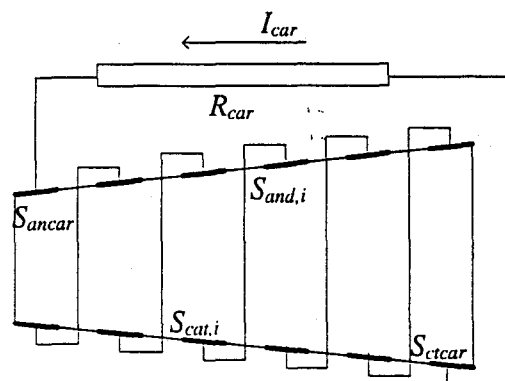
$$\Phi_{cat} - \Phi_{and} = R_{car} I_{cat}$$

$$I_{cat} = \int_{S_{cat}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_{and}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = I_{and}$$

La prima relazione fissa il potenziale dell'anodo come potenziale di riferimento. Le rimanenti due condizioni esprimono il fatto che la caduta di tensione sul carico  $R_{car}$  deve uguagliare la differenza di potenziale tra anodo e catodo, e che la corrente raccolta dal catodo deve essere pari a quella uscente dall'anodo ad esso collegato. Le correnti anodiche e catodiche sono espresse come gli integrali della componente normale della densità di corrente estesi rispettivamente alla superficie dell'anodo  $S_{and}$  ed alla superficie del catodo  $S_{cat}$ . Un caso più complesso è costituito da un generatore diagonale, illustrato schematicamente in fig. 2.2. Per la generica coppia  $i$  catodo - anodo vale una relazione esprimente il corto circuito tra i due elettrodi:

$$\Phi_{cat,i} = \Phi_{and,i}$$

ed una esprime l'uguaglianza tra la corrente catodica e quella anodica:



Fig(2.2.): condotto diagonale

$$I_{cat,i} = \int_{S_{cat,i}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_{and,i}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = I_{and,i}.$$

Per la coppia di elettrodi connessi al carico valgono tre relazioni analoghe a quelle già viste per il generatore ad elettrodi continui:

$$\Phi_{ancar} = 0$$

$$\Phi_{ctcar} - \Phi_{ancar} = R_{car} I_{car}$$

$$I_{car} = \int_{S_{ctcar}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_{adcar}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

Risolvendo l'equazione (2.13) associandola con le opportune condizioni di carico è possibile determinare il potenziale sul contorno e all'interno del dominio.

### 3. IL METODO DEI VOLUMI DI CONTROLLO

#### 3.1 Trasformazione del dominio e definizione del reticolo

Per passare dalla geometria divergente del condotto alla geometria rettangolare risulta, più conveniente per la soluzione numerica del problema, è possibile la trasformazione del dominio di calcolo mediante il cambio di coordinate rappresentato dalle seguenti relazioni [3]:

$$\xi = x$$
$$\eta = \frac{y}{1 + c\xi},$$

dove  $x$  e  $y$  sono le coordinate del dominio originale,  $\xi$  ed  $\eta$  le coordinate del dominio trasformato;  $c$  è un parametro dipendente dalla geometria del condotto:

$$c = \frac{\tan\theta}{H(x)}.$$

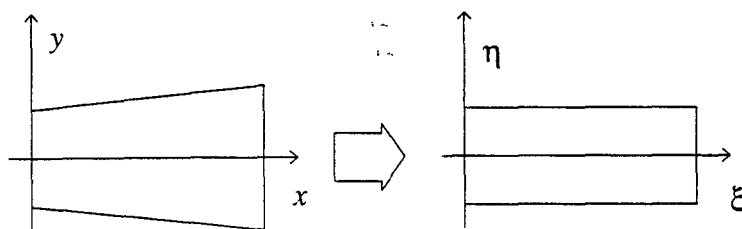


Fig.(3.1): schema della trasformazione del dominio

Per discretizzare il dominio di calcolo viene utilizzata una griglia “sfalsata” (staggered grid). Il reticolo di calcolo è infatti costituito da un certo numero di elementi di superficie rettangolari confinanti gli uni con gli altri. Nei punti centrali di tali elementi viene calcolato il potenziale elettrico. Tali punti vengono denominati punti  $p$  e sono caratterizzati dalle coordinate  $x_p, y_p$ . Le densità di corrente e i dati di ingresso relativi al campo d'induzione magnetica impresso, alla velocità del plasma ed alle sue proprietà di trasporto (parametro di Hall, conducibilità elettrica) sono invece riferiti ai punti  $v$ , situati sul contorno dell'elemento.

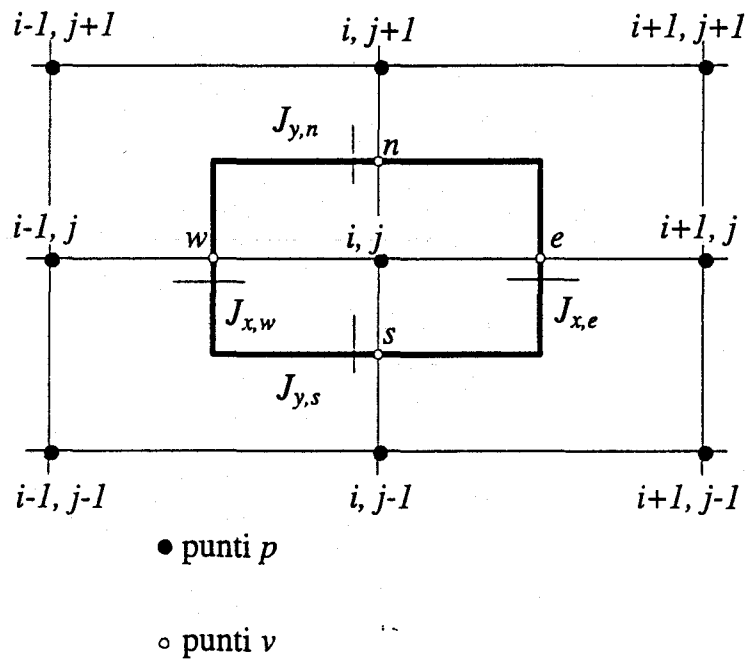


Fig. (3.2): generico elemento della griglia

dominante. L'algoritmo presenta quindi grosse difficoltà a convergere. Le difficoltà crescono sensibilmente al crescere del numero di nodi contenuti nello strato limite. Infatti, in tali regioni si hanno forti variazioni della conducibilità elettrica e del parametro di Hall. Ciò provoca, come appare da un confronto con i coefficienti che compaiono nella (3.5), una sensibile deviazione dalla condizione di diagonale dominante. In tali condizioni la matrice dei coefficienti risulta fortemente malcondizionata.

Per ovviare a tali inconvenienti sono stati sviluppati i metodi numerici FEM e DFEXP.



Per discretizzare il dominio di calcolo viene utilizzata una griglia “sfalsata” (staggered grid). Il reticolo di calcolo è infatti costituito da un certo numero di elementi di superficie rettangolari confinanti gli uni con gli altri. Nei punti centrali di tali elementi viene calcolato il potenziale elettrico. Tali punti vengono denominati punti  $p$  e sono caratterizzati dalle coordinate  $x_p, y_p$ . Le densità di corrente e i dati di ingresso relativi al campo d'induzione magnetica impresso, alla velocità del plasma ed alle sue proprietà di trasporto (parametro di Hall, conducibilità elettrica) sono invece riferiti ai punti  $v$ , situati sul contorno dell'elemento.

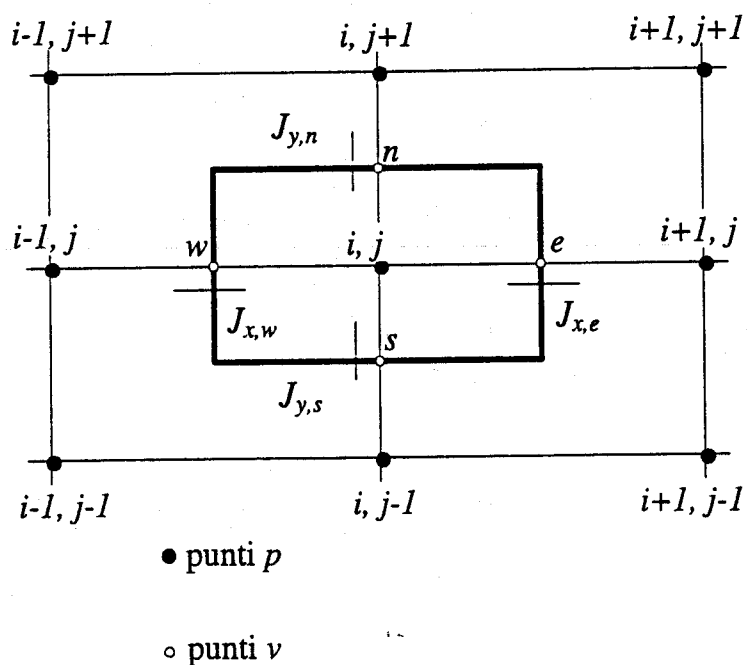


Fig. (3.2): generico elemento della griglia

### 3.2 Discretizzazione dell'equazione.

Si faccia riferimento al generico elemento di griglia rappresentato in Fig. 3.2. La discretizzazione è basata sull'equazione di conservazione di carica elettrica (2.10), che integrata sull'elemento e riscritta nella forma trasformata porge il seguente bilancio:

$$(J_{x_e} - J_{x_w})\Delta\eta + Z_{\xi_{i,j}}(J_{y_n} - J_{y_s})\Delta\xi = c\eta_{i,j}Z_{\xi_{i,j}}(J_{x_n} - J_{x_s})\Delta\xi \quad 3.1.$$

dove:

$$Z_{\xi_{i,j}} = \frac{1}{1 + c\xi_{i,j}}$$

I pedici indicano che le grandezze sono riferite ai punti corrispondenti nella Fig. 3.2. Introducendo le componenti della densità di corrente lungo  $x$  e  $y$ , dalle 2.8, 2.9, 2.11 e 2.12 si ottiene:

$$J_x = \Sigma \left[ -\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + F_\beta \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + (\nu + \beta u)B \right], \quad 3.2.$$

$$J_y = \Sigma \left[ -G \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + (\beta \nu - u)B \right], \quad 3.3.$$

dove si è posto

$$\Sigma = \frac{\sigma}{1 + \beta^2}$$

$$F_\beta = Z_\xi (\beta + c\eta)$$

$$G = Z_\xi (1 - c\beta\eta).$$

Sostituendo nella (3.1.) la (3.2.) e la (3.3.), si ottiene infine:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \Sigma_e \left[ -\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \Big|_e + F_{\beta_e} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \Big|_e + (v_e + \beta_e u_e) B_e \right] - \Sigma_w \left[ -\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \Big|_w + F_{\beta_w} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \Big|_w + (v_w + \beta_w u_w) B_w \right] \right\} \Delta \eta + \\
& Z_{\xi_{i,j}} \left\{ \Sigma_n \left[ -G_n \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \Big|_n - \beta_n \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \Big|_n + (\beta_n v_n - u_n) B_n \right] - \Sigma_s \left[ -G_s \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \Big|_s - \beta_s \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \Big|_s + (\beta_s v_s - u_s) B_s \right] \right\} \Delta \xi + \\
& c\eta Z_{\xi_{i,j}} \left\{ \Sigma_n \left[ -\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \Big|_n + F_{\beta_n} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \Big|_n + (v_n + \beta_n u_n) B_n \right] - \Sigma_s \left[ -\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \Big|_s - \beta_s \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \Big|_s + (v_s + \beta_s u_s) B_s \right] \right\} \Delta \xi +
\end{aligned} \tag{3.4.}$$

La (3.4.) è valida per ogni elemento in cui il dominio è suddiviso. L'ultimo passo del procedimento di discretizzazione che fornisce il sistema algebrico finale consiste nell'esprimere le derivate parziali con le formule di differenze centrate:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \Big|_w &\approx \frac{\Phi_{i,j} - \Phi_{i-1,j}}{\Delta \xi} \\
\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \Big|_e &\approx \frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i,j}}{\Delta \xi} \\
\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \Big|_s &\approx \frac{\Phi_{i,j} - \Phi_{i-1,j}}{\Delta \eta} \\
\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \Big|_n &\approx \frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i,j}}{\Delta \eta} \\
\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \Big|_s &\approx \frac{\Phi_{i+1,j} + \Phi_{i+1,j-1} - \Phi_{i-1,j} - \Phi_{i-1,j-1}}{4\Delta \xi} \\
\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \Big|_n &\approx \frac{\Phi_{i+1,j} + \Phi_{i+1,j+1} - \Phi_{i-1,j} - \Phi_{i-1,j+1}}{4\Delta \xi}
\end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right|_w \approx \frac{\Phi_{i,j+1} + \Phi_{i-1,j+1} - \Phi_{i,j-1} - \Phi_{i-1,j-1}}{4\Delta\eta}$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right|_e \approx \frac{\Phi_{i,j+1} + \Phi_{i+1,j+1} - \Phi_{i,j-1} - \Phi_{i+1,j-1}}{4\Delta\eta}$$

La presenza di un tensore di conducibilità e la trasformazione conforme di coordinate rende necessaria l'adozione di una griglia a stella a nove punti. Ciò equivale a dire che nell'equazione algebrica che discende dalla discretizzazione in ogni punto  $p_{i,j}$  compaiono nove incognite, relative al punto  $p_{i,j}$  ed agli otto punti circostanti:

$$\begin{aligned} & a_{sw} \Phi_{i-1,j-1} + a_s \Phi_{i,j-1} + a_{se} \Phi_{i+1,j-1} + a_w \Phi_{i-1,j} + a_p \Phi_{i,j} + \\ & + a_e \Phi_{i+1,j} + a_{nw} \Phi_{i-1,j+1} + a_n \Phi_{i,j+1} + a_{ne} \Phi_{i+1,j+1} = t_{i,j} \end{aligned} \quad 3.5.$$

In caso di condotto non divergente, cioè nel caso in cui  $\eta \equiv y$ , i coefficienti della generica equazione relativa al punto  $p$  si possono esprimere come segue:

$$\begin{aligned} a_s &= \frac{\Delta x}{\Delta y} \Sigma_s + \frac{1}{4} (\Sigma_e \beta_e - \Sigma_w \beta_w) \\ a_n &= \frac{\Delta x}{\Delta y} \Sigma_n + \frac{1}{4} (\Sigma_w \beta_w - \Sigma_e \beta_e) \\ a_w &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \Sigma_w + \frac{1}{4} (\Sigma_s \beta_s - \Sigma_n \beta_n) \\ a_e &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \Sigma_e + \frac{1}{4} (\Sigma_n \beta_n - \Sigma_s \beta_s) \\ a_p &= - \left[ \frac{\Delta y}{\Delta x} (\Sigma_w + \Sigma_e) + \frac{\Delta x}{\Delta y} (\Sigma_n + \Sigma_s) \right] \end{aligned}$$

$$a_{sw} = \frac{1}{4}(\sum_s \beta_s - \sum_w \beta_w)$$

$$a_{se} = \frac{1}{4}(\sum_e \beta_e - \sum_s \beta_s)$$

$$a_{nw} = \frac{1}{4}(\sum_w \beta_w - \sum_n \beta_n)$$

$$a_{ne} = \frac{1}{4}(\sum_n \beta_n - \sum_e \beta_e)$$

$$t_{i,j} = [(v_w + \beta_w u_w)B_w - (v_e + \beta_e u_e)B_e]\Delta y + \\ + [(\beta_s v_s - u_s)B_s - (\beta_n v_n - u_n)B_n]\Delta x$$

Dalle precedenti definizioni si ottengono le seguenti relazioni:

$$a_w + a_e + a_s + a_n = -a_p \quad 3.6.$$

$$a_{sw} + a_{se} + a_{nw} + a_{ne} = 0 \quad 3.7.$$

Il coefficiente  $a_p$  è sempre negativo; non è invece assicurato che gli altri coefficienti che compaiono nella (3.5.) siano positivi. Infatti, mentre  $a_n$ ,  $a_s$ ,  $a_w$  e  $a_e$  possono sempre essere resi positivi da un'opportuna scelta della spaziatura della griglia, dalla (3.7.) discende che se  $a_{sw}$ ,  $a_{se}$ ,  $a_{nw}$  e  $a_{ne}$  sono tutti diversi da zero, almeno uno di essi è negativo.

Il sistema algebrico ottenuto dalla discretizzazione è rappresentato da una matrice quadrata a banda con la diagonale principale ed otto codiagonali contenenti termini per lo più non nulli.

Per la risoluzione del sistema lineare ottenuto dalla discretizzazione secondo il metodo degli elementi di controllo viene utilizzato un algoritmo di rilassamento a blocchi. La matrice dei coefficienti non è però diagonale

dominante. L'algoritmo presenta quindi grosse difficoltà a convergere. Le difficoltà crescono sensibilmente al crescere del numero di nodi contenuti nello strato limite. Infatti, in tali regioni si hanno forti variazioni della conducibilità elettrica e del parametro di Hall. Ciò provoca, come appare da un confronto con i coefficienti che compaiono nella (3.5), una sensibile deviazione dalla condizione di diagonale dominante. In tali condizioni la matrice dei coefficienti risulta fortemente malcondizionata.

Per ovviare a tali inconvenienti sono stati sviluppati i metodi numerici FEM e DFEXP.