

4. METODO DEGLI ELEMENTI FINITI

4.1 Relazione variazionale

Il metodo agli elementi finiti utilizzato per la soluzione del problema elettrodinamico in un condotto MHD si basa su una formulazione variazionale del problema. Tale formulazione consente una maggiore aderenza del procedimento al significato fisico del problema stesso.

Per ottenere una conveniente espressione di bilancio di energia per un generico elemento, si considerano le due equazioni di Maxwell in regime stazionario:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

Moltiplicando la prima relazione per \mathbf{H} , e la seconda per \mathbf{E} , e sottraendo quindi membro a membro, si ottiene:

$$\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$$

Integrando sul dominio di calcolo, costituito dal volume V del canale, ed applicando il teorema della divergenza, si può scrivere anche:

$$\int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = - \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}) dV \quad 4.1.$$

Dalla legge di Ohm generalizzata è possibile ricavare un'espressione per il campo elettrico:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} + \frac{\beta}{\sigma} (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) - \mathbf{U} \times \mathbf{B},$$

che, inserita nella (4.1.), fornisce:

$$\int_V (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{J} dV = \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} + \int_V \frac{J^2}{\sigma} dV. \quad 4.2.$$

La relazione (4.2.) può essere interpretata come segue: l'energia generata all'interno del volume dalle forze elettromotrici dovute all'interazione MHD $\int_V (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{J} dV$ è uguale alla somma dell'energia uscente dalla superficie di contorno S , pari alla somma del flusso del vettore di Poynting $\int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$ e dell'energia dissipata all'interno del volume per effetto

Joule $\int_V \frac{J^2}{\sigma} dV$. Poichè vale :

$$(\mathbf{U} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{J} = -\mathbf{U} \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{B}),$$

la (4.2) può avere un'interpretazione alternativa: l'energia dissipata per effetto joule è pari all'energia entrante dalle superfici del contorno più l'energia meccanica $-\int_V (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{U} dV$ utilizzata per vincere la forza di Lorentz agente sul plasma.

Per ottenere una più conveniente espressione per il flusso del vettore di Poynting si può scrivere:

$$\mathbf{E} \times \mathbf{H} = -(\nabla \Phi) \times \mathbf{H} = \Phi \nabla \times \mathbf{H} - \nabla \times (\Phi \mathbf{H}) = \Phi \mathbf{J} - \nabla \times (\Phi \mathbf{H}).$$

La (4.1) può essere quindi riscritta come segue:

$$\int_S \Phi \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV, \quad 4.3.$$

o anche

$$\int_V \nabla \cdot (\Phi \mathbf{J}) dV = -\int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV. \quad 4.4.$$

Si supponga ora che l'incognita Φ sia soggetta ad un incremento $\delta \Phi$ infinitesimo, rimanendo costanti la velocità del fluido \mathbf{U} , il campo magnetico \mathbf{B} , la conducibilità e il parametro di Hall. Il campo elettrico \mathbf{E} e la densità di corrente \mathbf{J} subiscono di conseguenza un incremento:

$$\delta \mathbf{E} = -\nabla(\delta \Phi)$$

$$\delta \mathbf{J} = [\sigma] \delta \mathbf{E} = -[\sigma] \nabla(\delta \Phi)$$

Differenziando primo e secondo membro della (4.4) si ottiene:

$$\int_V \nabla \cdot (\delta \Phi \mathbf{J}) dV + \int_V \nabla \cdot (\Phi \delta \mathbf{J}) dV = \int_V \nabla(\delta \Phi) \cdot \mathbf{J} dV + \int_V \nabla \Phi \cdot \delta \mathbf{J} dV. \quad 4.5.$$

Inoltre, ricordando la (2.3) si possono scrivere le seguenti relazioni:

$$\int_V \nabla \cdot (\delta \Phi \mathbf{J}) dV = \int_V \nabla(\delta \Phi) \cdot \mathbf{J} dV + \int_V \delta \Phi \nabla \cdot \mathbf{J} dV = \int_V \nabla(\delta \Phi) \cdot \delta \mathbf{J} dV, \quad \leftarrow$$

$$\int_V \nabla \cdot (\Phi \delta \mathbf{J}) dV = \int_V \nabla \Phi \cdot \delta \mathbf{J} dV + \int_V \Phi \nabla \cdot (\delta \mathbf{J}) dV = \int_V \nabla \Phi \cdot \delta \mathbf{J} dV,$$

che, introdotte nella (4.5.) forniscono:

$$\int_V \nabla \cdot (\delta \Phi \mathbf{J}) dV = \int_V \nabla(\delta \Phi) \cdot \mathbf{J} dV$$

o, utilizzando il teorema della divergenza:

$$\int_S \delta \Phi \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla(\delta \Phi) \cdot \mathbf{J} dV. \quad 4.6.$$

E' possibile ottenere la formulazione bidimensionale della (4.6) supponendo che le grandezze fisiche non dipendano dalla coordinata z , e che le componenti delle grandezze vettoriali lungo l'asse z siano trascurabili. In tal caso la (4.6) può essere ridotta ad una equivalente relazione bidimensionale, definita sul dominio Ω giacente sul piano

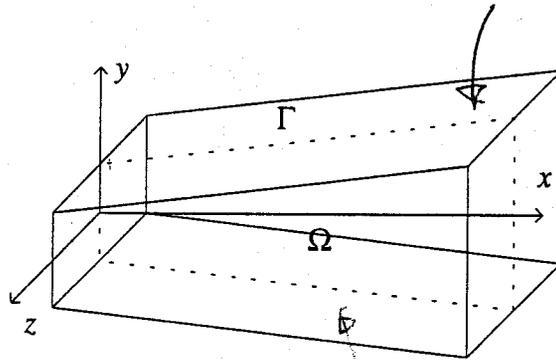


Fig. (4.1): domino di calcolo bidimensionale

mediano perpendicolare all'asse z e delimitato dalla curva chiusa Γ come in fig. (4.1.). Con tali ipotesi la (4.6.) diventa:

$$\int_{S_{z,1}} \delta \Phi \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_{z,2}} \delta \Phi \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\Gamma} \delta \Phi \mathbf{J}_{\text{eff}} \cdot d\mathbf{l} \int_{-w/2}^{w/2} dz = \int_{\Omega} \nabla(\delta \Phi) \cdot \mathbf{J} d\Omega \int_{-w/2}^{w/2} dz \quad 4.7$$

dove $S_{z,1}$ e $S_{z,2}$ sono le superfici laterali del canale perpendicolari all'asse z . Poiché la componente della densità di corrente lungo z è nulla per ipotesi, dalla (4.7) si ottiene:

$$\int_{\Gamma} \delta \Phi \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Omega} \nabla(\delta \Phi) \cdot \mathbf{J} d\Omega. \quad 4.8.$$

4.2 Formulazione agli elementi finiti

La (4.8) è la forma variazionale finale che verrà discretizzata secondo il metodo agli elementi finiti. Il primo passo del procedimento è la suddivisione del dominio di calcolo in n . Ogni elemento è caratterizzato da m nodi. Gli integrali che compaiono nell'espressione variazionale (4.8)

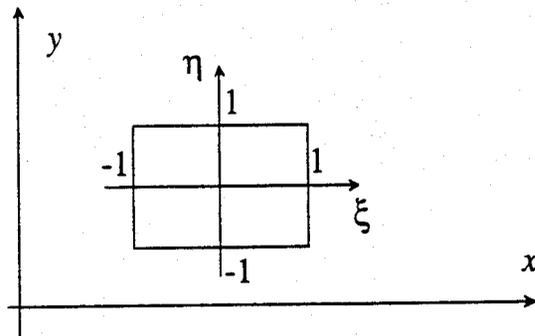


Fig 4.2: Riferimento locale dell'elemento e riferimento globale.

possono essere espressi come la somma degli integrali estesi ai singoli elementi:

$$\sum_{i=1}^q \int_{\Gamma_i} \delta \Phi \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l} = \sum_{j=1}^n \int_{\Omega_j} \nabla(\delta \Phi) \cdot \mathbf{J} d\Omega. \quad 4.9.$$

La sommatoria al primo membro è estesa ai q elementi che confinano con l'esterno, mentre la sommatoria al secondo membro è estesa a tutti gli n elementi.

All'interno di ciascun elemento la funzione incognita Φ è approssimata dalla funzione Φ' , univocamente determinata dai valori che essa assume in corrispondenza dei nodi tramite le funzioni di forma $N_i(\xi, \eta)$:

$$\Phi'(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^m N_i(\xi, \eta) \Phi_i. \quad 4.10.$$

dove ξ ed η sono le coordinate del sistema di riferimento locale relativo all'elemento considerato. In notazione matriciale, la (4.10.) diventa:

$$\Phi'(\xi, \eta) = \{N\}^T \{\Phi\} = \{\Phi\}^T \{N\}, \quad 4.11.$$

dove $\{N\}$ è il vettore delle funzioni di forma e $\{\Phi\}$ è il vettore costituito dai valori che il potenziale assume in corrispondenza dei nodi:

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \dots \\ N_m \end{Bmatrix}$$

$$\{\Phi\} = \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \dots \\ \Phi_m \end{Bmatrix}.$$

Coerentemente con l'approssimazione fatta, il $\nabla\Phi'$ può essere espresso come segue:

$$\nabla\Phi' = \sum_{i=1}^m \Phi_i \nabla N_i,$$

o, in forma matriciale:

$$\nabla\Phi' = \{\Phi\}^T [\nabla N]^T = [\nabla N] \{\Phi\}, \quad 4.12.$$

dove:

$$[\nabla N] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_m}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_m}{\partial y} \end{bmatrix}$$

La legge di Ohm generalizzata nell'ambito dell'approssimazione bidimensionale può essere espressa nella forma:

$$\mathbf{J} = [\sigma] \mathbf{E} + \mathbf{F},$$

dove

$$[\sigma] = \frac{\sigma}{1 + \beta^2} \begin{vmatrix} 1 & -\beta \\ \beta & 1 \end{vmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \frac{B\sigma}{1 + \beta^2} \begin{vmatrix} v + \beta u \\ \beta u - u \end{vmatrix}$$

Introducendo la (4.12.) si ricava:

$$\{J\} = -[\sigma][\nabla N]\{\Phi\} + \{F\}. \quad 4.13.$$

Sostituendo le (4.10.) e (4.12.) nella (4.8.), si ottiene per ogni elemento:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \{\delta\Phi\}^T [\nabla N]^T [\sigma] [\nabla N]\{\Phi\} d\Omega + \int_{\Omega} \{\delta\Phi\}^T [\nabla N]^T \{F\} d\Omega + \\ + \int_{\Gamma} \{\delta\Phi\}^T \{N\} J_n dl = 0 \end{aligned} \quad 4.14.$$

L'equazione matriciale relativa al generico elemento è quindi:

$$[K]\{\Phi\} = -\{P_J\} + \{P_F\}, \quad 4.15$$

con:

$$[K] = \int_{\Omega} [\nabla N]^T [\sigma] [\nabla N] d\Omega$$

$$\{P_J\} = \int_{\Gamma} \{N\} J_n dl$$

$$\{P_F\} = \int_{\Omega} [\nabla N]^T \{F\} d\Omega$$

La matrice $[K]$ viene detta matrice di conducibilità, il vettore $\{P_J\}$ rappresenta il contributo delle correnti imposte dall'esterno ed è presente solo negli elementi di bordo, mentre il vettore $\{P_F\}$ è dovuto all'interazione del plasma in moto con il campo magnetico.

Per la discretizzazione del dominio sono stati utilizzati elementi isoparametrici lineari a quattro nodi. Per il generico elemento le funzioni di forma espresse nelle coordinate del sistema di riferimento globale sono:

$$N_1 = \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} \qquad N_2 = \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}$$

$$N_3 = \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \qquad N_4 = \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}$$

Per simulare le connessioni tra gli elettrodi sono stati utilizzati elementi monodimensionali. Per ottenere l'equazione matriciale relativa a tali elementi è necessario utilizzare la seguente espressione della legge di Ohm, valida per conduttori metallici:

$$\mathbf{J} = \sigma_{Cu} \mathbf{E}$$

dove σ_{Cu} è la conducibilità del rame. Si ottiene quindi:

$$[K]\{\Phi\} = -\{P\},$$

dove:

$$[K] = \int_l [\nabla N]^T \sigma_{Cu} [\nabla N] dl$$

è la matrice di conducibilità degli elementi che simulano le connessioni. Le funzioni di forma per tali elementi sono:

$$N_1 = \frac{1-\xi}{2} \qquad N_2 = \frac{1+\xi}{2}$$

La (4.15) per gli elementi di collegamento prende la seguente forma:

$$\begin{Bmatrix} I \\ -I \end{Bmatrix} = [K]\{\Phi\}$$

dove la matrice di conducibilità $[K]$ è pari a:

$$[K] = \frac{\sigma S}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4.3 Assemblaggio della matrice e soluzione del sistema

Una volta definite determinate le equazioni matriciali per ogni elemento in cui è stato suddiviso il dominio, si procede all'assemblaggio del sistema globale che definisce il problema discretizzato sull'intero dominio., la cui soluzione fornisce i valori dell'incognita in corrispondenza dei nodi.

Per la risoluzione del sistema lineare è stato adottato il metodo frontale, un algoritmo tipicamente utilizzato per la soluzione di problemi discretizzati con il metodo degli elementi finiti. La soluzione del sistema è integrata con la procedura di assemblaggio.

5. FITTING ESPONENZIALE

5.1 Introduzione

La teoria delle differenze finite centrate è basata sullo sviluppo in serie di Taylor della funzione incognita. Il metodo descritto nel capitolo 3 fornisce una soluzione accurata qualora sia accurata la rappresentazione della funzione incognita per mezzo di un polinomio di secondo grado nelle variabili x, y nella griglia di ampiezza $2\Delta x, 2\Delta y$. Potrebbe quindi risultare necessaria l'adozione di intervalli della griglia tanto piccoli da rendere il numero di punti troppo elevato sia per i tempi di calcolo, sia per gli errori di arrotondamento. Può quindi essere conveniente migliorare il grado di approssimazione della funzione incognita.

Un possibile approccio per aggirare il problema può essere quello di aumentare il numero di termini nell'espansione in serie di Taylor che rappresenta la funzione incognita. Questo tipo di procedimento non è privo di inconvenienti. Il primo è l'appesantimento della procedura di calcolo, dovuto sia all'aumento del numero di incognite nel sistema algebrico risolvibile, ed al conseguente aumento del numero di coefficienti da calcolare, sia al maggior numero di operazioni che l'algoritmo che risolve il sistema deve compiere. Il secondo inconveniente è che uno schema alle differenze finite di ordine superiore al secondo non è sempre applicabile: si pensi ad esempio al caso in cui la funzione da rappresentare presenti una singolarità, od alle difficoltà che si incontrano nell'imposizione delle condizioni al contorno.

5.2 Formulazione del metodo

Quanto esposto riduce sensibilmente il margine di convenienza nell'adottare uno schema alle differenze finite di ordine superiore al secondo. E' quindi necessario sottolineare il fatto che migliorare l'approssimazione non equivale necessariamente ad aumentare il grado del polinomio che rappresenta la funzione. A tal fine si consideri l'equazione differenziale ad una variabile:

$$y'' + \alpha(x)y' = \gamma(x) \quad 5.1.$$

La (5.1) può essere vista come un'equazione descrivente un problema monodimensionale diffusivo-convettivo. Nel caso in cui $\alpha = 0$ e γ costante un'approssimazione polinomiale del secondo grado è esatta, poiché la soluzione è data effettivamente da una parabola. All'aumentare di $|\alpha|$ l'approssimazione parabolica risulta sempre meno soddisfacente. Infatti, fissando l'origine dell'asse x in un generico punto interno al dominio dell'equazione (5.1.), la soluzione dell'equazione è, per $\alpha(x)$ costante e diversa da zero e $\gamma(x)=0$:

$$y(x) = Ae^{-\alpha x} + B, \quad 5.2.$$

dove le costanti A e B sono determinabili in base alle condizioni al contorno. Sviluppando la (5.2.) in serie in un intorno dell'origine si ottiene:

$$y(x) \approx A - A\alpha x + \frac{1}{2}A\alpha^2 x^2 - \frac{1}{6}A\alpha^3 x^3 + \dots \quad e B?$$

Per poter arrestare lo sviluppo al termine di secondo grado deve risultare :

$$\frac{|\alpha x|}{3} \ll 1. \quad 5.3.$$

La (5.3.) fornisce quindi un'indicazione sulle dimensioni del passo di reticolo da utilizzare per risolvere l'equazione (5.1.) qualora venga discretizzata con il metodo classico delle differenze finite.

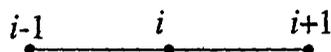


Fig. 5.1. :griglia monodimensionale.

Per ottenere la soluzione della (5.1.) per via numerica occorre innanzitutto discretizzare il dominio disponendo n punti che dividono il dominio stesso in $n-1$ intervalli. In ciascuno dei nodi interni al dominio l'equazione (5.1) viene approssimata con la seguente:

$$y'' + \alpha_p y' = \gamma_p,$$

dove α_p e γ_p sono rispettivamente i valori che le funzioni $\alpha(x)$ e $\gamma(x)$ assumono nel punto $p(x_i)$. L'andamento della funzione incognita nel generico punto p è quindi:

$$y(x) = Ae^{-\alpha_p x} + B + \frac{\gamma_p}{\alpha_p} x$$

Supponendo per semplicità che il dominio sia stato suddiviso in intervalli di ampiezza uguale e pari a Δx (vedi fig. 5.1.), si ha inoltre:

$$x = -\Delta x \longrightarrow y(x_{i-1}) \equiv y_{i-1} = Ae^{\alpha_p \Delta x} + B - \frac{\gamma_p}{\alpha_p} \Delta x$$

$$x = 0 \longrightarrow y(x_i) \equiv y_i = A + B$$

$$y(x_{i+1}) \equiv y_{i+1} = Ae^{-\alpha_p \Delta x} + B + \frac{\gamma_p}{\alpha_p} \Delta x.$$

Eliminando le costanti di integrazione A e B si ottiene la relazione:

$$\begin{aligned} (1 - e^{-\alpha_p \Delta x}) y_{i-1} - 2 \operatorname{senh}(\alpha_p \Delta x) y_i + (e^{\alpha_p \Delta x} - 1) y_{i+1} = \\ = 2 \frac{\gamma_p \Delta x}{\alpha_p} [\cosh(\alpha_p \Delta x) - 1], \end{aligned} \quad 5.4.$$

che può essere utilizzata per discretizzare l'equazione (5.1.). La (5.4.) fornisce la soluzione esatta quando le funzioni $\alpha(x)$ e $\gamma(x)$ sono costanti sul dominio di calcolo. Sviluppando in serie gli esponenziali che compaiono nella (5.4) nell'intorno di zero della variabile $\alpha_p \Delta x$, e trascurando i termini di grado superiore al secondo si ottiene:

$$\begin{aligned} \left[1 - 1 + \alpha_p \Delta x - \frac{1}{2} (\alpha_p \Delta x)^2 \right] y_{i-1} - 2 \alpha_p \Delta x y_i + \\ \left[1 - 1 - \alpha_p \Delta x - \frac{1}{2} (\alpha_p \Delta x)^2 \right] y_{i+1} = 2 \frac{\gamma_p \Delta x}{\alpha_p} \left[1 + \frac{1}{2} (\alpha_p \Delta x)^2 - 1 \right] \end{aligned}$$

da cui:

$$\left(1 - \frac{\alpha_p \Delta x}{2} \right) y_{i-1} - 2 y_i + \left(1 + \frac{\alpha_p \Delta x}{2} \right) y_{i+1} = \gamma_p \Delta x^2, \quad 5.5.$$

che è la relazione che si sarebbe ottenuta discretizzando la (5.1.) mediante il metodo alle differenze finite centrate:

$$y'' = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{\Delta x^2}$$

$$y'' = \frac{-y_{i-1} + y_{i+1}}{2\Delta x}$$

La (5.4.) risulta più appropriata della (5.5.) nel discretizzare la (5.1) per due motivi:

1) utilizza un'approssimazione migliore. La superiorità del metodo (5.4.) è tanto più apprezzabile quanto più la funzione $\alpha(x)$ assume valori elevati;

2) è esente dai problemi di instabilità della soluzione che si verificano utilizzando la (5.5) con $\frac{|\alpha_p \Delta x|}{2} > 1$.

5.3 Il fitting esponenziale applicato all'elettrodinamica MHD: trasformazione e discretizzazione del dominio

Anche utilizzando il metodo del fitting esponenziale conviene trasformare il dominio da divergente in rettangolare. Non è però possibile utilizzare la trasformazione vista al capitolo 3, poiché comparirebbe un termine di derivata mista $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta}$ nell'equazione (2.13) trasformata. E' necessario

quindi utilizzare una trasformazione conforme del dominio, tale cioè da mantenere la forma dell'equazione (2.13) immutata. E' stata quindi applicata la seguente trasformazione:

$$\xi = a \ln \left[\frac{(x^2 + y^2)^{1/2}}{R_0} \right] = a \ln \left(\frac{R}{R_0} \right), \quad 5.6.$$

$$\eta = a \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right) = a \vartheta, \quad 5.7.$$

dove x e y sono le coordinate del dominio originale, ξ ed η le coordinate del dominio trasformato, a un fattore di scala arbitrario ed R_0 una distanza di riferimento arbitraria. Le (5.6.) e (5.7.) trasformano un settore di corona

circolare nello spazio x, y in un rettangolo nello spazio ξ, η . (vedi fig. 5.2). Fissato l'origine del sistema x, y in corrispondenza del centro della corona circolare, la lunghezza si può scrivere:

$$R_{in} = \frac{L h_{in}}{h_{ex} - h_{in}}, \quad R_{ex} = R_{in} + L = \frac{L h_{ex}}{h_{ex} - h_{in}}$$

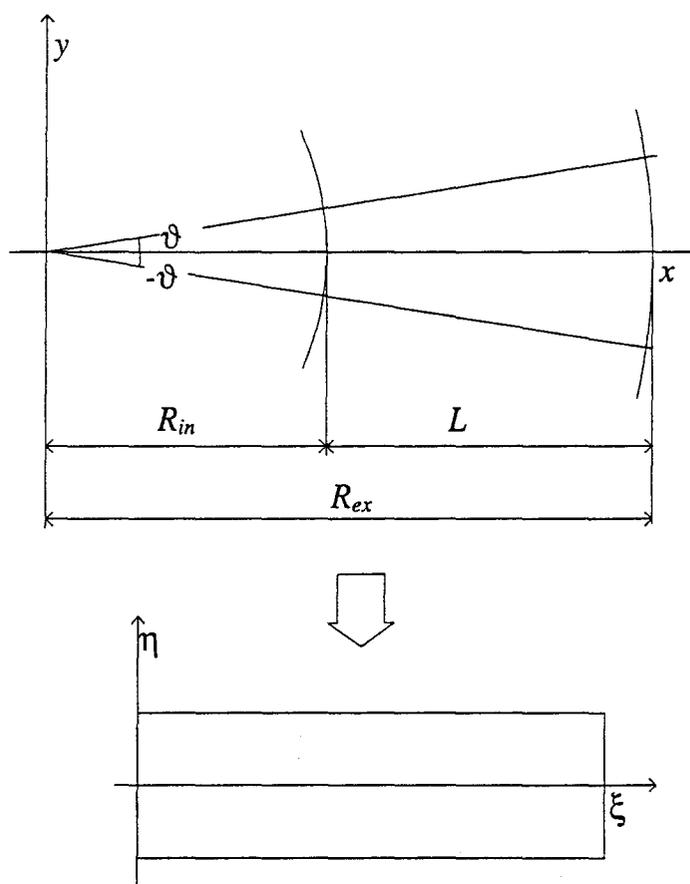


Fig (5.2): trasformazione del dominio.

Per trasformare l'equazione (2.13.) nello spazio ξ, η è necessario esplicitare le derivate rispetto a x, y in termini di derivate rispetto a ξ ed η :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{a}{R} \left(\cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \xi} - \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \eta} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{a}{R} \left(\operatorname{sen} \vartheta \frac{\partial}{\partial \xi} + \operatorname{cos} \vartheta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{a^2}{R^2} \left(\operatorname{cos}^2 \vartheta \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \operatorname{sen}^2 \vartheta \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - 2 \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{cos} \vartheta \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \right) + \\ &\quad + \frac{a}{R^2} \left[(\operatorname{sen}^2 \vartheta - \operatorname{cos}^2 \vartheta) \frac{\partial}{\partial \xi} + 2 \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{cos} \vartheta \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \frac{a^2}{R^2} \left(\operatorname{sen}^2 \vartheta \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \operatorname{cos}^2 \vartheta \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 2 \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{cos} \vartheta \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \right) + \\ &\quad + \frac{a}{R^2} \left[(\operatorname{cos}^2 \vartheta - \operatorname{sen}^2 \vartheta) \frac{\partial}{\partial \xi} - 2 \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{cos} \vartheta \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \end{aligned}$$

L'equazione (2.13) diventa nello spazio ξ, η quindi:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + F(x, y) \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + G(x, y) \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = T(x, y) \quad 5.8.$$

con:

$$F(x, y) = \frac{R}{a} [f(x, y) \operatorname{cos} \vartheta + g(x, y) \operatorname{sen} \vartheta]$$

$$G(x, y) = \frac{R}{a} [g(x, y) \operatorname{cos} \vartheta - f(x, y) \operatorname{sen} \vartheta]$$

Il dominio rettangolare è quindi discretizzato mediante una griglia di n_ξ punti lungo l'asse ξ e n_η lungo l'asse η . Un generico punto della griglia è mostrato in fig. (5.3).

5.4 Il fitting esponenziale applicato all'elettrodinamica MHD: discretizzazione dell'equazione

L'equazione (5.8), che formalizza il problema elettrodinamico nello dominio trasformato ξ, η può essere riscritta in forma equivalente come segue:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + F(x, y) \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = T_x(x, y) \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + G(x, y) \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = T_y(x, y); \\ T_x(x, y) + T_y(x, y) = T(x, y) \end{cases} \quad 5.9.$$

Approssimando $\frac{\partial}{\partial \xi} \approx \frac{d}{d\xi}$, $\frac{\partial}{\partial \eta} \approx \frac{d}{d\eta}$, $\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \approx \frac{d^2}{d\xi^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \approx \frac{d^2}{d\eta^2}$, e ponendo i coefficienti ed i termini noti nella (5.9.) costanti e pari ai valori che questi assumono nel punto $p_{i,j}$, si avrà:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \Phi}{d\xi^2} + F_p \frac{d\Phi}{d\xi} = T_{p,x} \\ \frac{d^2 \Phi}{d\eta^2} + G_p \frac{d\Phi}{d\eta} = T_{p,y}; \\ T_{p,x} + T_{p,y} = T_p \end{cases} \quad 5.10.$$

approssimando le prime due equazioni del sistema (5.10.) mediante la (5.4), si ottengono due relazioni del tipo:

$$(1 - e^{-F_p \Delta \xi}) \Phi_{i-1,j} - \sinh(F_p \Delta \xi) \Phi_{i,j} + (e^{F_p \Delta \xi} - 1) \Phi_{i+1,j} = 2 \frac{T_{p,x} \Delta x}{F_p} [1 - \cosh(F_p \Delta \xi)]$$

$$(1 - e^{-G_p \Delta \eta}) \Phi_{i,j-1} - \sinh(G_p \Delta \eta) \Phi_{i,j} + (e^{G_p \Delta \eta} - 1) \Phi_{i,j+1} = 2 \frac{T_{p,y} \Delta \eta}{G_p} [1 - \cosh(G_p \Delta \eta)]$$

dove i pedici i,j , $i-1,j$, $i+1,j$, $i,j-1$, $i,j+1$ sono relativi ai corrispondenti punti in fig. 5.3. Eliminando $T_{p,x}$ e $T_{p,y}$, si ottiene una relazione a cinque punti:

$$a_1 \Phi_{i,j-1} + a_2 \Phi_{i-1,j} + a_3 \Phi_{i,j} + a_4 \Phi_{i+1,j} + a_5 \Phi_{i,j+1} = T_p \quad 5.11.$$

in cui si è posto:

$$a_1 = \frac{G_p (1 - e^{-G_p \Delta \eta})}{2 \Delta \eta [\cosh(G_p \Delta \eta) - 1]}$$

$$a_2 = \frac{F_p (1 - e^{-F_p \Delta \xi})}{2 \Delta \xi [\cosh(F_p \Delta \xi) - 1]}$$

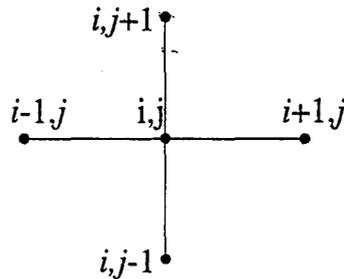


Fig. (5.3): elemento di griglia bidimensionale

$$a_3 = - \left[\frac{F_p \operatorname{senh}(F_p \Delta \xi)}{\Delta \xi [\cosh(F_p \Delta \xi) - 1]} + \frac{G_p \operatorname{senh}(G_p \Delta \eta)}{\Delta \eta [\cosh(G_p \Delta \eta) - 1]} \right]$$

$$a_4 = \frac{F_p (e^{F_p \Delta \xi} - 1)}{2 \Delta \xi [\cosh(F_p \Delta \xi) - 1]}$$

$$a_5 = \frac{G_p (e^{G_p \Delta \eta} - 1)}{2 \Delta \eta [\cosh(G_p \Delta \eta) - 1]}$$

Anche in questo caso si verifica che $a_1 + a_2 + a_4 + a_5 = a_3$. In altre parole il valore dell'incognita nel punto p_{ij} è assimilabile ad una media pesata dell'incognita nei punti $p_{i,j-1}$, $p_{i-1,j}$, $p_{i+1,j}$ e, $p_{i,j+1}$, con pesi rispettivamente

$\frac{a_1}{a_3}$, $\frac{a_2}{a_3}$, $\frac{a_4}{a_3}$, $\frac{a_5}{a_3}$. Discretizzando mediante la (5.11.), si ottiene un sistema

lineare algebrico rappresentato da una matrice a banda con la diagonale principale e quattro codiagonali costituite da termini non nulli. La convergenza di metodi di rilassamento applicati ad un sistema lineare ottenuto utilizzando l'equazione (5.11.) è sempre regolare e la regolarità della convergenza è tanto più marcata quanto più è alto il valore dei prodotti $F_p \Delta \xi$, $G_p \Delta \eta$.

5.5 Iterazioni a punto fisso e metodi di rilassamento

I metodi a punto fisso sono procedimenti comunemente utilizzati per la risoluzione di un'ampia gamma di problemi. Sono ad esempio a punto fisso i metodi newtoniani per la soluzione di problemi lineari e non lineari. La formulazione di un metodo a punto fisso che risolva un dato sistema di equazioni:

$$[A]\{\Phi\} - \{t\} = 0 \quad 5.12.$$

consiste nell'individuare una opportuna forma :

$$\{\Phi\} = \mathbf{g}\{\{\Phi\}\} \quad 5.13$$

equivalente alla 5.12. La soluzione del problema (5.13) si dice punto fisso $\{\bar{\Phi}\}$ perché non viene modificata dall'operatore \mathbf{g} .

E' necessario conoscere sotto quali condizioni, assegnata una soluzione di tentativo $\{\Phi\}^{(0)}$, la sequenza $\{\Phi\}^{(m+1)} = \mathbf{g}\{\{\Phi\}^{(m)}\}$ converge al punto fisso $\{\bar{\Phi}\}$. Si dimostra che se l'operatore \mathbf{g} è contrattivo su tutto lo spazio S delle soluzioni, cioè se vale

$$\|\mathbf{g}\{\{\Phi\}' - \{\Phi\}''\}\| \leq K \|\{\Phi\}' - \{\Phi\}''\|$$

per qualsiasi coppia $\{\Phi\}'$ e $\{\Phi\}''$ e per $K < 1$,

- a) \mathbf{g} ha un punto fisso;
- b) l'iterazione definita sull'operatore \mathbf{g} converge per qualsiasi $\{\Phi\}^{(0)}$ appartenente a S ; risulta infatti:

$$\|\{\bar{\Phi}\} - \{\Phi\}^{(m)}\| \leq \frac{K^m}{1-K} \|\{\Phi\}^{(1)} - \{\Phi\}^{(0)}\|$$

Occorre quindi trovare un operatore \mathbf{g} contrattivo sullo spazio S delle soluzioni. A tal fine si introduce l'inversa approssimata $[C]$. La matrice $[C]$ si definisce inversa approssimata di una matrice non singolare $[A]$ quando esiste una norma tale che risulti:

$$\|[I] - [C][A]\| < 1$$

Se $[A]$ è invertibile, lo è anche $[C]$. Dato quindi il generico sistema (5.12.) ed individuata una conveniente inversa approssimata della matrice dei coefficienti, l'operatore g cercato può essere espresso come segue:

$$g\{\Phi\} = [C]\{t\} + ([I] - [C][A])\{\Phi\} = \{\Phi\} + [C](\{t\} - [A]\{\Phi\})$$

Come è immediato verificare, g è contrattiva, e quindi la successione

$$\{\Phi\}^{(m+1)} = \{\Phi\}^{(m)} + [C](\{t\} - [A]\{\Phi\}^{(m)})$$

converge alla soluzione, riducendo l'errore di un fattore $K = \|[I] - [C][A]\|$ ad ogni iterazione.

E' a questo punto chiaro quanto sia determinante la scelta appropriata dell'inversa approssimata: tanto meglio $[C]$ approssima $[A]$, cioè tanto minore è K , tanto minore è il numero di iterazioni necessarie per la convergenza; d'altra parte, tanto più semplice è il calcolo del prodotto $[C]\{\Phi\}^{(m)}$, tanto più rapida è l'esecuzione di ogni singola iterazione.

Per illustrare i più comuni metodi iterativi a punto fisso conviene riscrivere la matrice dei coefficienti $[A]$ come somma di tre matrici:

$$[A] = [U] + [D] + [L],$$

dove $[U]$ è strettamente triangolare alta, $[L]$ strettamente triangolare bassa e $[D]$ diagonale. Se $[D]$ è invertibile, se cioè tutti i termini della diagonale principale sono non nulli, due possibili inverse approssimate sono $([D] + [L])^{-1}$ e $([D] + [U])^{-1}$. Utilizzando la prima, la successione iterativa prende la seguente forma:

$$\{\Phi\}^{(m+1)} = \{\Phi\}^{(m)} + ([D] + [L])^{-1}(\{t\} - [A]\{\Phi\}^{(m)})$$

$$([D] + [L])\{\Phi\}^{(m+1)} = ([D] + [L] - [A])\{\Phi\}^{(m)} + \{t\}$$

$$[D]\{\Phi\}^{(m+1)} = -[L]\{\Phi\}^{(m+1)} - [U]\{\Phi\}^{(m)} + \{t\},$$

che, in forma estesa fornisce la relazione:

$$\Phi_i^{(m+1)} = -\sum_{j<i} \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} \Phi_j^{(m+1)} - \sum_{j>i} \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} \Phi_j^{(m)} + \frac{t_i}{a_{i,i}}, \quad 5.14.$$

espressione formale del ben noto metodo di Gauss - Seidel. I termini $a_{i,j}$ sono i coefficienti della matrice $[A]$, mentre i termini t_i sono i coefficienti del vettore dei termini noti $\{t\}$. Il metodo di Jacobi approssima l'inversa di $[A]$ con la matrice $[D]^{-1}$, per cui si ottiene l'espressione iterativa:

$$\Phi_i^{(m+1)} = -\sum_{j \neq i} \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} \Phi_j^{(m)} + \frac{b_i}{a_{i,i}} \quad 5.15$$

I due algoritmi descritti sono i più noti esempi di algoritmi di rilassamento. L'algoritmo di Gauss - Seidel è in generale più efficiente di quello di Jacobi, sia perché utilizza un'inversa approssimata migliore, sia perché comporta un minore ingombro di memoria: infatti, per utilizzare la (5.15.) è necessario memorizzare i due vettori $\{\Phi\}^{(m)}$ e $\{\Phi\}^{(m+1)}$, mentre per la (5.14.) è sufficiente memorizzare un solo vettore.

Si può dimostrare che gli algoritmi di Gauss - Seidel e di Jacobi sono convergenti quando la matrice $[A]$ è definita positiva. Si dimostra inoltre che tali metodi sono convergenti se la matrice $[A]$ è debolmente diagonale dominante, se risulta cioè che:

$$|a_{i,i}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$$

per tutti gli i , e che, per almeno un i risulti:

$$|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

5.6 Tecniche di accelerazione

Utilizzando un metodo di rilassamento è spesso conveniente amplificare la variazione fra $\{\Phi\}^{(m)}$ a $\{\Phi\}^{(m+1)}$. E' questa l'idea alla base del metodo SOR (Successive OverRelaxation), che modifica in tal senso la (5.14.):

$$\Phi_i^{(m+1)/2} = -\sum_{j<i} \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} \Phi_j^{(m+1)} - \sum_{j>i} \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} \Phi_j^{(m)} + \frac{b_i}{a_{i,i}}.$$

$$\{\Phi\}^{(m+1)} = \omega \{\Phi\}^{(m+1)/2} + (1-\omega) \{\Phi\}^{(m)}$$

Il parametro ω è maggiore di 1 e minore di 2.

Tutti i metodi iterativi hanno in comune la proprietà per cui le componenti dell'errore a frequenza più elevata decadono più velocemente di quelle a frequenza più bassa. Inoltre, quanto più il numero di nodi n della griglia è piccolo, e quindi quanto più la griglia di calcolo è larga, tanto più velocemente decrescono le componenti a frequenza bassa dell'errore. Questo comportamento è alla base del metodo Multigrid, che prevede la soluzione iterativa del problema utilizzando via via griglie sempre più fini. Durante i primi passi del procedimento si utilizzano griglie di calcolo piuttosto larghe, che consentono di ridurre velocemente le frequenze più basse dell'errore, fornendo così una grossolana mappatura della soluzione. Le griglie più fitte rifiniscono via via la soluzione tagliando le frequenze più elevate dell'errore. In teoria, ottimizzando il metodo multigrid è possibile rendere indipendente dal passo del reticolo finale il numero di iterazioni necessarie alla convergenza.

5.7 Applicazioni al problema elettrodinamico di un campo magneto-fluidodinamico

La matrice dei coefficienti ottenuta discretizzando il problema elettrodinamico con il metodo del fitting esponenziale è sempre debolmente diagonale dominante quando sono imposte condizioni al contorno di Dirichlet. Infatti dalla (5.11.) per ogni nodo interno al dominio risulta:

$$|a_{i,i}| = \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

Inoltre, per tutti i nodi sul contorno il potenziale è considerato noto, per cui:

$$\Phi_i = \Phi_{\text{imposto}}.$$

$$|a_{i,i}| = 1 > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| = 0.$$

In tal caso quindi la risoluzione del sistema lineare mediante un algoritmo di rilassamento è sicuramente convergente. Qualche attenzione deve essere rivolta invece qualora siano imposte le correnti al contorno. In questo caso infatti la particolare forma della legge di Ohm generalizzata può provocare dei problemi alla convergenza dell'algoritmo. Si consideri il generico nodo alla parete illustrato in fig. 5.4. Applicando le relazioni viste al paragrafo

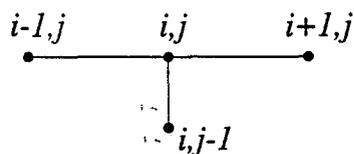


Fig. 5.4: griglia di calcolo in corrispondenza di un nodo di parete.

5.3, si ottiene, lungo la direzione ξ :

$$\Phi(\xi, \eta_p) = A_\xi e^{-F_p \xi} + B_\xi + \frac{T_{\xi,p}}{F_p} \xi,$$

$$(1 - e^{-F_p \Delta \xi}) \Phi_{i-1,j} - 2 \sinh(F_p \Delta \xi) \Phi_{i,j} + (e^{F_p \Delta \xi} - 1) \Phi_{i+1,j} = \frac{2T_{\xi,p} \Delta \xi}{F_p} [\cosh(F_p \Delta \xi) - 1]$$

$$A_\xi = \frac{\Phi_{i,j} - \Phi_{i-1,j} - T_{\xi,p} \Delta \xi / F_p}{(1 - e^{F_p \Delta \xi})}.$$

Lungo la direzione η si ottiene invece:

$$\Phi(\xi_p, \eta) = A_\eta e^{-G_p \eta} + B_\eta + \frac{T_{\eta,p}}{G_p} \eta$$

$$\Phi_{i,j} = A_\eta + B_\eta$$

$$\Phi_{i,j-1} = A_\eta e^{G_p \Delta \eta} + B_\eta - \frac{T_{\eta,p}}{G_p} \Delta \eta,$$

da cui:

$$A_\eta = \frac{\Phi_{i,j} - \Phi_{i,j-1} - T_{\eta,p} \Delta \eta / G_p}{(1 - e^{G_p \Delta \eta})}.$$

Per determinare la costante A_η si impone la densità di corrente. Dalla (2.12), ricordando che U è nullo alla parete, si ha:

$$J_\eta = -\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial \Phi}{\partial \xi},$$

da cui:

$$J_\xi = G_p A_\eta + \beta F_p A_\xi - (\beta T_{\xi,p} / F_p + T_{\eta,p} / G_p)$$

Si perviene quindi ad una relazione a quattro punti:

$$a_1 \Phi_{i,j-1} + a_2 \Phi_{i-1,j} + a_3 \Phi_{i,j} + a_4 \Phi_{i+1,j} = T, \quad 5.16.$$

in cui:

$$a_1 = \frac{-G_p(e^{F_p \Delta \xi} - 1)}{\beta \Delta \xi (1 - e^{G_p \Delta \eta}) - \Delta \eta (1 - e^{F_p \Delta \xi}) + (1 - e^{G_p \Delta \eta})(1 - e^{F_p \Delta \xi})(\beta/F_p - 1/G_p)}$$

$$a_2 = \frac{-\beta F_p (e^{G_p \Delta \eta} - 1)}{\beta \Delta \xi (1 - e^{G_p \Delta \eta}) - \Delta \eta (1 - e^{F_p \Delta \xi}) + (1 - e^{G_p \Delta \eta})(1 - e^{F_p \Delta \xi})(\beta/F_p - 1/G_p)} +$$

$$+ \frac{2 \Delta \xi (1 - e^{-F_p \Delta \xi})}{F_p [\cosh(F_p \Delta \xi) - 1]}$$

$$a_4 = \frac{2 \Delta \xi (e^{F_p \Delta \xi} - 1)}{F_p [\cosh(F_p \Delta \xi) - 1]}$$

$$a_3 = a_1 + a_2 + a_4$$

Poche il coefficiente a_4 è sempre positivo, affinché sia rispettata la condizione di debole diagonale dominanza devono essere positivi anche a_1 e a_2 . Tale condizione è verificata se risulta:

$$\beta \Delta x (1 - e^{g_p \Delta y}) - \Delta y (1 - e^{f_p \Delta x}) + (1 - e^{g_p \Delta y})(1 - e^{f_p \Delta x})(\beta/f_p - 1/g_p) < 0. \quad 5.17.$$

Affinché la (5.17) sia soddisfatta è spesso necessario o aumentare troppo il passo Δy , o diminuire in maniera eccessiva il passo Δx . Per imporre la corrente sul contorno non è quindi sempre conveniente applicare la (5.16).

Una soluzione alternativa è quella di utilizzare un'approssimazione di ordine inferiore. Riferendosi ancora al caso illustrato in fig 5.4, l'espressione della corrente diventa, con un'approssimazione lineare:

$$J_y = \frac{\Phi_{i,j-1} - \Phi_{i,j}}{\Delta y} + \beta \frac{\Phi_{i-1,j} - \Phi_{i,j}}{\Delta x},$$

da cui:

$$a_1 \Phi_{i,j-1} + a_2 \Phi_{i-1,j} + a_3 \Phi_{i,j} = J_y \quad 5.17.$$

con:

$$a_1 = \frac{1}{\Delta y} \quad a_2 = \beta \frac{1}{\Delta x} \quad a_3 = a_1 + a_2$$

In tal modo la matrice dei coefficienti risulta sempre debolmente diagonale dominante e, di conseguenza, gli algoritmi di rilassamento sono sempre convergenti.

Bisogna inoltre notare che la condizione di diagonale dominanza della matrice dei coefficienti è più debole quando sono imposte le correnti al contorno che non quando sono imposti i potenziali. Infatti, per quanto detto finora, imporre il potenziale equivale ad avere nella matrice una riga in cui vale:

$$|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|, \text{ condizione di diagonale dominanza forte,}$$

Imponendo le correnti si introduce una riga per la quale vale:

$$|a_{i,i}| = \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|, \text{ condizione di diagonale dominanza debole.}$$

L'imposizione delle correnti al contorno risulta quindi una condizione critica per gli algoritmi di rilassamento. Tale criticità si traduce in pratica in una maggiore lentezza ed in una minor precisione dell'algoritmo.

La particolare struttura del sistema lineare ottenuto utilizzando il metodo

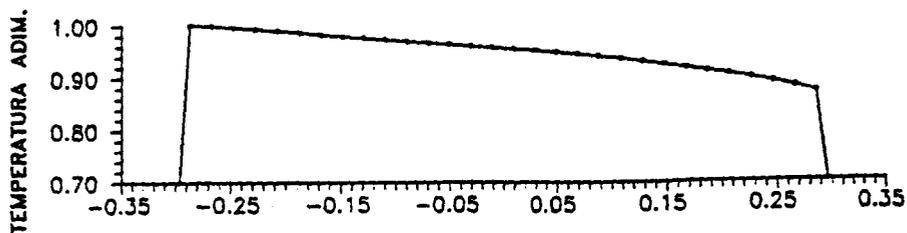


Fig 5.5: andamento della temperatura attraverso la sezione.

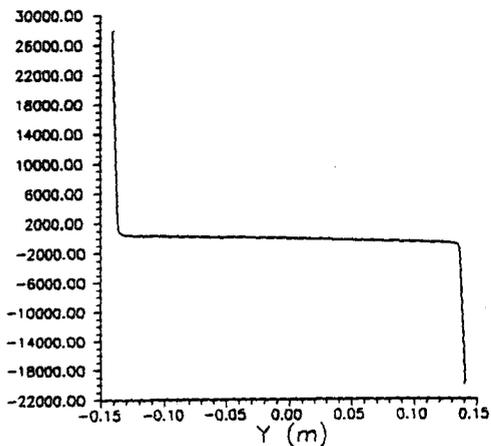


Fig (5.6): andamento tipico del coefficiente $f(x,y)$ attraverso la sezione

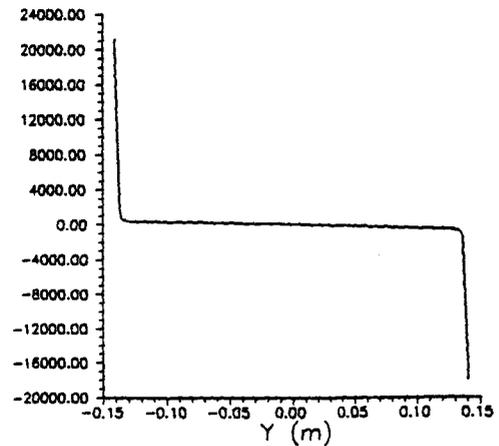


Fig (5.7): andamento tipico del coefficiente $g(x,y)$ attraverso la sezione

del fitting esponenziale suggerisce degli accorgimenti che migliorano l'efficienza dell'algoritmo di Gauss - Seidel. Si ordini la matrice dei coefficienti in modo tale che, in ogni riga, i coefficienti a_1 e a_2 si trovino a destra della diagonale principale, e a_4 e a_5 a sinistra. Tali coefficienti dipendono dalle grandezze f_p e g_p , il cui andamento tipico è graficato in figg. 5.6 e 5.7. Tali grandezze sono dominate dalle derivate lungo y della conducibilità e del parametro di Hall. A loro volta, queste grandezze dipendono fortemente dalla distribuzione della temperatura. Un esempio per un caso di regime fortemente turbolento tipico di un canale MHD è mostrato in fig. 5.5. Nelle regioni in cui $f(x,y)$ e $g(x,y)$ sono positive, a_1 e a_2 sono maggiori di a_4 e a_5 , viceversa quando $f(x,y)$ e $g(x,y)$ sono negative a_4 e a_5 sono maggiori di a_1 e a_2 . Questo comportamento si accentua al crescere del valore assoluto di $f(x,y)$ e $g(x,y)$. Dalla (5.11) infatti risulta:

$$\begin{array}{llll}
 a_1 \approx g_p / \Delta y, & a_2 \approx f_p / \Delta x, & & f_p \Delta x > 10 \\
 a_5 \approx 0 & a_4 \approx 0 & \text{per} & g_p \Delta y > 10 \\
 a_1 \approx 0, & a_2 \approx 0, & & f_p \Delta x < -10 \\
 a_5 \approx g_p / \Delta y & a_4 \approx f_p / \Delta x & \text{per} & g_p \Delta y < -10
 \end{array}$$

In base a queste osservazioni, si comprende che le prime righe della matrice, corrispondenti ai punti più vicini alla parete catodica, hanno i coefficienti maggiori a sinistra della diagonale principale. Le ultime righe, corrispondenti ai punti prossimi alla parete anodica, hanno i coefficienti maggiori a destra della diagonale principale. Le righe centrali, corrispondenti al core del flusso nel canale hanno coefficienti più o meno simmetrici, essendo il carattere di simmetria disturbato dalla più o meno

forte interazione MHD. In sostanza, in regime fortemente turbolento, le proprietà della matrice dei coefficienti sono determinate:

- a) nelle prime e nelle ultime righe dall'andamento della conducibilità e del parametro di Hall in prossimità delle pareti elettrodiche, dove tali grandezze presentano drastiche variazioni che si rispecchiano in forti asimmetrie della matrice dei coefficienti;
- b) nelle righe centrali dall'andamento delle grandezze citate nel core del plasma, dove le variazioni delle proprietà di trasporto elettrico, di minore entità, sono dovute essenzialmente all'interazione MHD.

Quanto detto finora suggerisce di dividere la matrice dei coefficienti in due blocchi aventi almeno una riga in comune. Il primo blocco $[A]'$, che comprende la parte alta della matrice, viene risolto con il metodo SOR, utilizzando come inversa approssimata l'inversa della matrice triangolare bassa che si ottiene azzerando i termini a destra della diagonale principale. In maniera analoga, il secondo blocco $[A]''$ comprendente la parte bassa della matrice, viene risolto con il SOR che utilizza l'inversa della matrice triangolare alta ottenuta annullando i termini a sinistra della diagonale principale. L'iterazione principale si suddivide quindi in due sottoiterazioni in cui i due blocchi vengono risolti separatamente.