

# Capitolo 1

## MODELLO DELLO SCHERMO

### 1.1 Ipotesi di Lavoro

In presenza di correnti impresse sinusoidali aventi pulsazione  $\omega$  e con le seguenti ipotesi di lavoro:

- 1) intensità dei campi  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  non troppo elevate
- 2)  $\omega\tau \ll 1$  (dove  $\tau$  è il tempo di rilassamento caratteristico dei processi di conduzione e di polarizzazione)

si ha che:

- 1) la velocità degli elettroni è molto piccola
- 2) si può trascurare la dispersività dei materiali
- 3) si può considerare  $\mathbf{J}$  e  $\mathbf{D}$  dipendenti unicamente da  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  dipendente unicamente da  $\mathbf{H}$

In tali ipotesi, considerando materiali lineari, omogenei, isotropi, tempo invarianti una volta raggiunta la condizione di regime, sono valide le equazioni di Maxwell e l'equazione di continuità (esprese tramite la Rappresentazione Simbolica (App 3)), in cui è evidenziata la densità di corrente elettrica impressa  $\dot{\mathbf{J}}_i$ :

$$\nabla \times \dot{\mathbf{H}} = j\omega \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_c \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{J}}_i \quad (1)$$

$$\nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -j\omega \mu \dot{\mathbf{H}} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot (\gamma \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{J}}_i) = -j\omega \dot{\rho}$$

Dove si sono utilizzate le seguenti equazioni di legame materiale:

$$\dot{\mathbf{D}} = \epsilon \dot{\mathbf{E}}$$

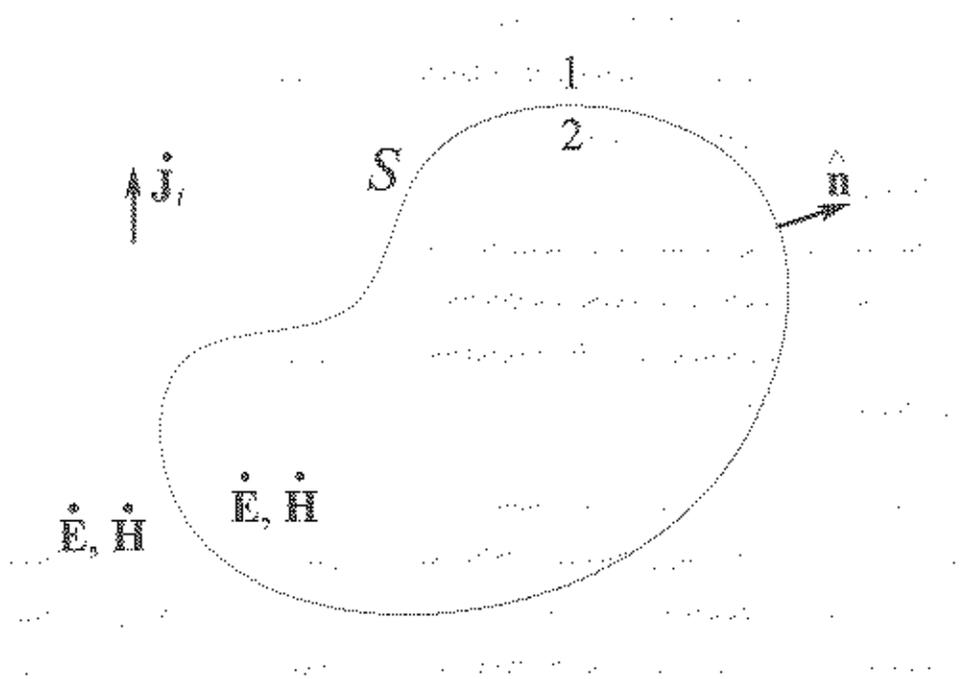
$$\dot{\mathbf{J}} = \gamma \dot{\mathbf{E}}$$

$$\dot{\mathbf{B}} = \mu \dot{\mathbf{H}}$$

$$\epsilon_0 = \epsilon + \frac{\gamma}{j\omega}$$

### 1.2 Teorema di Equivalenza: correnti volumetriche omogeneizzanti e correnti superficiali assorbenti.

Il sistema che si intende modellare è costituito da due regioni omogenee e distinte tra loro:



1) Regione  $V_0 \setminus V$  costituita da aria, avente proprietà  $\epsilon_0, \gamma_0, \mu_0$  e contenete la sorgente impressa  $\dot{\mathbf{J}}_i$ , nella quale valgono le equazioni:

$$\nabla \times \dot{\mathbf{H}} = j\omega \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{J}}_i \tag{3}$$

$$\nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -j\omega \mu_0 \dot{\mathbf{H}} \tag{4}$$

2) Regione V occupata dallo schermo avente proprietà  $\epsilon_2, \gamma_2, \mu_2$  nella quale valgono le equazioni:

$$\nabla \times \dot{\mathbf{H}} = j\omega \dot{\epsilon}_{c2} \dot{\mathbf{E}} \quad (5)$$

$$\nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -j\omega \mu_2 \dot{\mathbf{H}} \quad (6)$$

Il sistema può essere reso formalmente omogeneo con proprietà  $\epsilon_1, \gamma_1, \mu_1$  introducendo nella regione V la densità volumetrica di corrente elettrica  $\dot{\mathbf{J}}_{pe}$  sostenuta dalla polarizzazione elettrica e la densità volumetrica di corrente magnetica  $\dot{\mathbf{M}}_{pm}$  sostenuta dalla polarizzazione magnetica

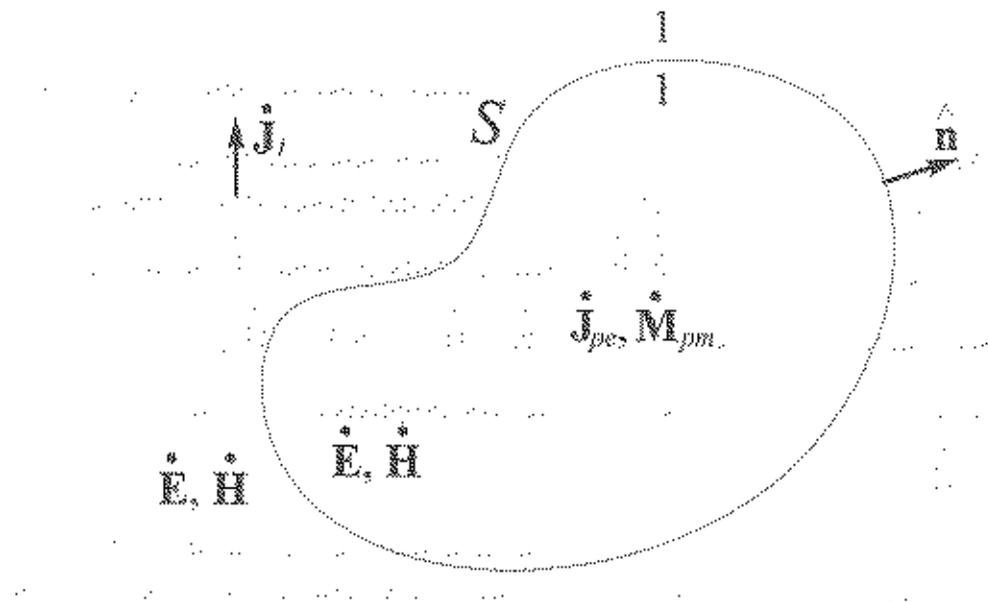
$$\dot{\mathbf{J}}_{pe} = j\omega (\dot{\epsilon}_{c2} - \dot{\epsilon}_{c1}) \dot{\mathbf{E}} \quad (9)$$

$$\dot{\mathbf{M}}_{pm} = j\omega (\mu_2 - \mu_1) \dot{\mathbf{H}} \quad (10)$$

Quindi nella regione V valgono le equazioni:

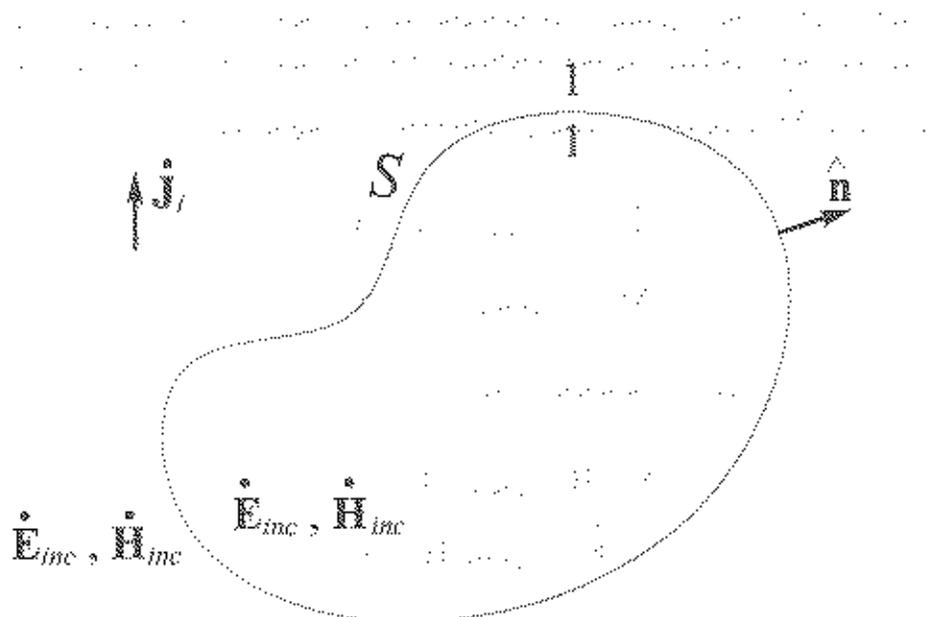
$$\nabla \times \dot{\mathbf{H}} = j\omega \dot{\epsilon}_{c1} \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{J}}_{pe} \quad (11)$$

$$\nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -j\omega \mu_1 \dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{M}}_{pm} \quad (12)$$



In sostanza introducendo le sorgenti  $\dot{\mathbf{J}}_{pe}$  e  $\dot{\mathbf{M}}_{pm}$  il dominio diventa ovunque omogeneo con proprietà  $\epsilon_1, \gamma_1, \mu_1$  e quindi il campo elettromagnetico può essere espresso analiticamente in funzione delle tre sorgenti  $\dot{\mathbf{J}}_i, \dot{\mathbf{J}}_{pe}$  e  $\dot{\mathbf{M}}_{pm}$ .

Indicando con  $\dot{\mathbf{E}}_{inc}, \dot{\mathbf{H}}_{inc}$  (campo incidente), il campo sostenuto dalla sorgente  $\dot{\mathbf{J}}_i$  in assenza della schermatura



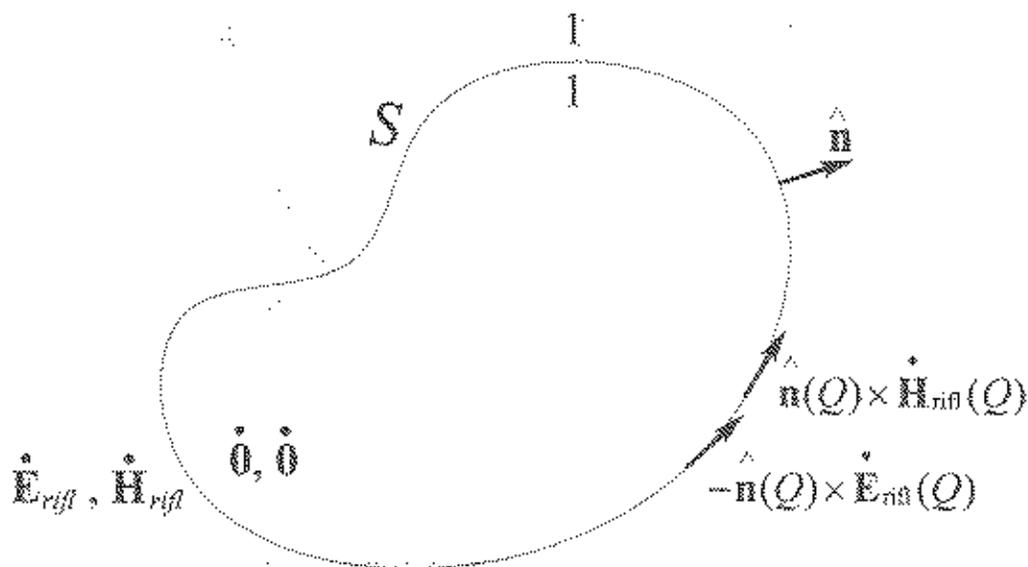
e con  $\dot{\mathbf{E}}_{rifi}, \dot{\mathbf{H}}_{rifi}$  (campo riflesso), il campo sostenuto dalle sorgenti  $\dot{\mathbf{J}}_{pe}$  e  $\dot{\mathbf{M}}_{pm}$  in assenza della sorgente  $\dot{\mathbf{J}}_i$ , dall'applicazione del principio di sovrapposizione degli effetti, reso possibile dall'ipotesi di linearità dei mezzi, consegue che il campo  $\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}$  sostenuto dalla sorgente  $\dot{\mathbf{J}}_i$  in presenza della schermatura è dato dalla somma di  $\dot{\mathbf{E}}_{inc}, \dot{\mathbf{H}}_{inc}$  e di  $\dot{\mathbf{E}}_{rifi}, \dot{\mathbf{H}}_{rifi}$ .

Si consideri il sistema reso omogeneo con proprietà  $\epsilon_1, \gamma_1, \mu_1$  dalle sorgenti  $\dot{\mathbf{J}}_{pe}$  e  $\dot{\mathbf{M}}_{pm}$ .

Sostituendo a  $\dot{\mathbf{J}}_{pe}$  e  $\dot{\mathbf{M}}_{pm}$  le correnti superficiali assorbenti  $\dot{\mathbf{J}}_S$  e  $\dot{\mathbf{M}}_S$  situate sulla superficie  $S$  di interfaccia fra lo schermo e l'aria [2], aventi espressione:

$$\dot{\mathbf{J}}_S(Q) = \hat{\mathbf{n}}(Q) \times \dot{\mathbf{H}}_{rifi}(Q) \quad (13)$$

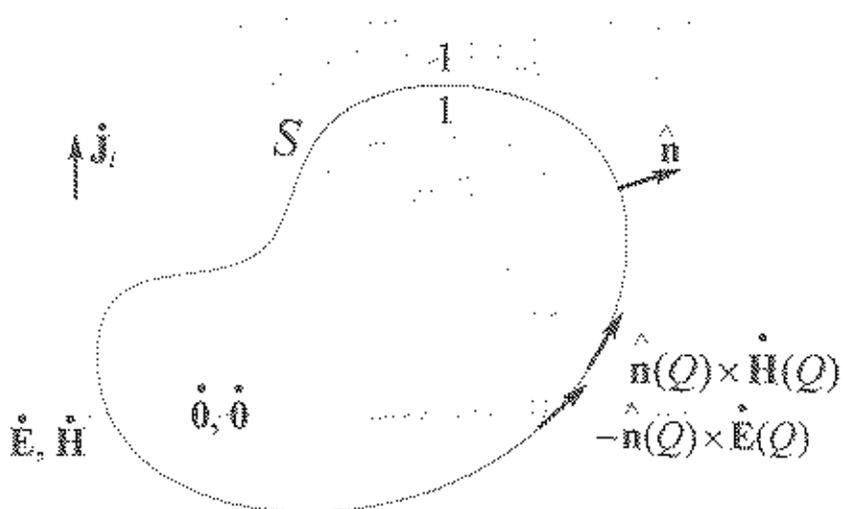
$$\dot{\mathbf{M}}_S(\mathcal{Q}) = -\hat{\mathbf{n}}(\mathcal{Q}) \times \dot{\mathbf{E}}_{rif}(\mathcal{Q}) \quad (14)$$



Il campo di corrente superficiale  $\dot{\mathbf{J}}_s$  è dato da

$$\dot{\mathbf{J}}_s = \hat{\mathbf{n}} \times (\dot{\mathbf{H}}_{rif} - \dot{\mathbf{H}}_{tr})$$

Il campo di corrente superficiale  $\dot{\mathbf{J}}_s$  è dato da

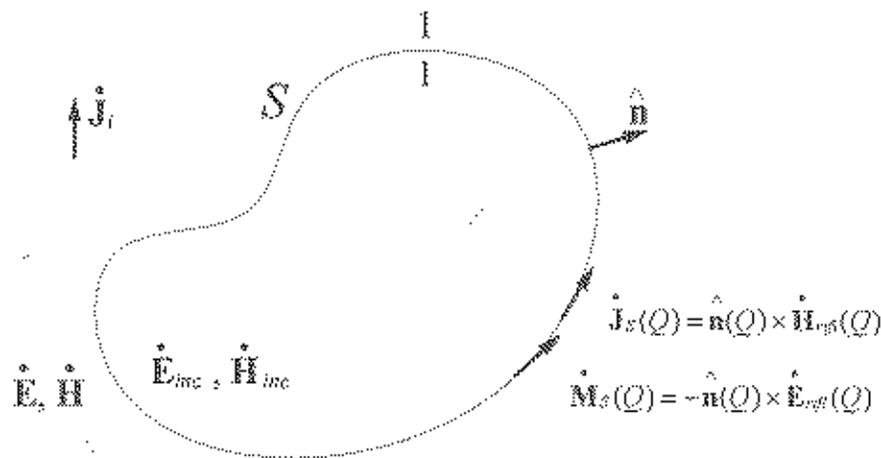
$$\dot{\mathbf{J}}_s = \hat{\mathbf{n}} \times (\dot{\mathbf{H}}_{rif} - \dot{\mathbf{H}}_{tr})$$


Il campo di corrente superficiale  $\dot{\mathbf{J}}_s$  è dato da

$$\dot{\mathbf{J}}_s = \hat{\mathbf{n}} \times (\dot{\mathbf{H}}_{rif} - \dot{\mathbf{H}}_{tr})$$

Il campo di corrente superficiale  $\dot{\mathbf{J}}_s$  è dato da

$$\dot{\mathbf{J}}_s = \hat{\mathbf{n}} \times (\dot{\mathbf{H}}_{rif} - \dot{\mathbf{H}}_{tr})$$



si ottiene una formulazione del teorema di equivalenza valida per la regione  $V_\infty \setminus V$  nella quale il campo elettromagnetico  $\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}$  è sostenuto dalle correnti elettriche  $\dot{\mathbf{J}}_s, \dot{\mathbf{J}}_s$  e dalla corrente magnetica  $\dot{\mathbf{M}}_s$  e quindi può essere espresso attraverso i seguenti potenziali vettore (App 5):

$$\dot{\mathbf{A}}_s(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \dot{\mathbf{m}} \frac{\exp(-\sigma_1 |P - P_0|)}{|P - P_0|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \dot{\mathbf{J}}_s(Q_0) \frac{\exp(-\sigma_1 |P - Q_0|)}{|P - Q_0|} dS_0 \quad (15)$$

$$\dot{\mathbf{F}}_s(P) = \frac{\epsilon_{s1}}{4\pi} \oint_S \dot{\mathbf{M}}_s(Q_0) \frac{\exp(-\sigma_1 |P - Q_0|)}{|P - Q_0|} dS_0 \quad (16)$$

$$P \in V_\infty \setminus V$$

$$Q_0 \in S$$

dai quali si ricavano i campi  $\dot{\mathbf{E}}$  ed  $\dot{\mathbf{H}}$  nella regione  $V_\infty \setminus V$  tramite le equazioni (App 5):

$$\dot{\mathbf{E}}(P) = -j\omega \dot{\mathbf{A}}_s(P) + \frac{\nabla(\nabla \cdot \dot{\mathbf{A}}_s(P))}{j\omega\mu_0 \epsilon_{s1}} - \frac{\nabla \times \dot{\mathbf{F}}_s(P)}{\epsilon_{s1}} \quad (17)$$

$$\dot{\mathbf{H}}(P) = \frac{\nabla \times \dot{\mathbf{A}}_s(P)}{\mu_0} - j\omega \dot{\mathbf{F}}_s(P) + \frac{\nabla(\nabla \cdot \dot{\mathbf{F}}_s(P))}{j\omega\mu_0 \epsilon_{s1}} \quad (18)$$

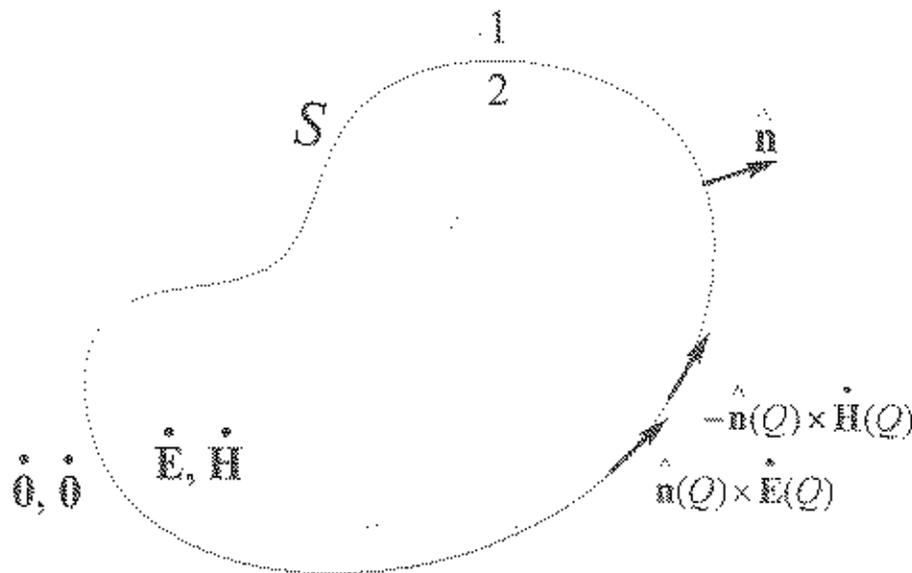
Si consideri ora nuovamente il sistema con la disomogeneità.

Sostituendo alla sorgente  $\dot{\mathbf{J}}_i$  le correnti superficiali assorbenti situate sulla superficie  $S$  aventi espressione:

$$-\hat{\mathbf{n}}(Q) \times \dot{\mathbf{H}}(Q) = -\hat{\mathbf{n}}(Q) \times \dot{\mathbf{H}}_i(Q) - \dot{\mathbf{J}}_s(Q) \quad (19)$$

$$\hat{\mathbf{n}}(Q) \times \dot{\mathbf{E}}(Q) = \hat{\mathbf{n}}(Q) \times \dot{\mathbf{E}}_i(Q) - \dot{\mathbf{M}}_s(Q) \quad (20)$$

Ci si riconduce nuovamente ad una situazione di spazio tutto omogeneo (stavolta con parametri  $\epsilon_2, \gamma_2, \mu_2$  grazie al fatto che nella regione di spazio occupata dall'aria si annulla il campo elettromagnetico).



Si ottiene così una formulazione del teorema di equivalenza valida per la regione  $V$  nella quale il campo elettromagnetico  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  è sostenuto dalla sorgente elettrica  $-\hat{\mathbf{n}}(Q) \times \mathbf{H}(Q)$  e dalla sorgente magnetica  $\hat{\mathbf{n}}(Q) \times \mathbf{E}(Q)$  e quindi può essere espresso attraverso i seguenti potenziali vettore:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{A}}_z(P) = & -\frac{\mu_2}{4\pi} \oint_S \left[ \hat{\mathbf{n}}(Q_0) \times \dot{\mathbf{H}}_{oc}(Q_0) \right] \frac{\exp\left(-\dot{\sigma}_2 |P - Q_0|\right)}{|P - Q_0|} dS_0 + \\ & -\frac{\mu_2}{4\pi} \oint_S \dot{\mathbf{J}}_s(Q_0) \frac{\exp\left(-\dot{\sigma}_2 |P - Q_0|\right)}{|P - Q_0|} dS_0 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{F}}_2(P) &= \frac{\dot{\epsilon}_{c2}}{4\pi} \oint_S \left[ \dot{\mathbf{n}}(Q_0) \times \dot{\mathbf{E}}_{inc}(Q_0) \right] \frac{\exp\left(-\dot{\sigma}_2 |P-Q_0|\right)}{|P-Q_0|} dS_0 \\ &\quad - \frac{\dot{\epsilon}_{c2}}{4\pi} \oint_S \dot{\mathbf{M}}_s(Q_0) \frac{\exp\left(-\dot{\sigma}_2 |P-Q_0|\right)}{|P-Q_0|} dS_0 \end{aligned} \quad (22)$$

$$P \in V$$

$$Q_0 \in S$$

dai quali si ricavano i campi  $\dot{\mathbf{E}}$  ed  $\dot{\mathbf{H}}$  nella regione  $V$  tramite le equazioni (App 5):

$$\dot{\mathbf{E}}(P) \doteq -j\omega \dot{\mathbf{A}}_2(P) + \frac{\nabla(\nabla \cdot \dot{\mathbf{A}}_2(P))}{j\omega\mu_2\epsilon_{c2}} - \frac{\nabla \times \dot{\mathbf{F}}_2(P)}{\epsilon_{c2}} \quad (23)$$

$$\dot{\mathbf{H}}(P) = \frac{\nabla \times \dot{\mathbf{A}}_2(P)}{\mu_2} - j\omega \dot{\mathbf{F}}_2(P) + \frac{\nabla(\nabla \cdot \dot{\mathbf{F}}_2(P))}{j\omega\mu_2\epsilon_{c2}} \quad (24)$$

Si noti che in generale non si verifica la condizione di continuità per i potenziali  $\dot{\mathbf{A}}_1, \dot{\mathbf{A}}_2$  e  $\dot{\mathbf{F}}_1, \dot{\mathbf{F}}_2$  attraverso la superficie di interfaccia fra lo schermo e l'aria; ciò è dovuto al fatto che dalla disomogeneità dei materiali conseguono diverse definizioni della scelta di Lorentz. La condizione di continuità deve essere invece rispettata dalle componenti tangenti di  $\dot{\mathbf{E}}$  ed  $\dot{\mathbf{H}}$  e imponendola si ottengono 2 equazioni vettoriali integro differenziali che consentono di risalire alle incognite costituite dalle correnti superficiali  $\dot{\mathbf{J}}_s(Q)$  e  $\dot{\mathbf{M}}_s(Q)$ .

Andando a svolgere i passaggi si ottengono le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}(P) &= \dot{\mathbf{E}}_{inc}(P) + \frac{1}{4\pi} \left\{ -j\omega\mu_1 \oint_S \left[ \dot{\mathbf{n}}(Q_0) \times \dot{\mathbf{H}}_{inc}(Q_0) \right] \frac{\exp\left(-\dot{\sigma}_1 |P-Q_0|\right)}{|P-Q_0|} dS_0 + \right. \\ &\quad + \frac{1}{j\omega\epsilon_{c1}} \nabla \nabla \cdot \oint_S \left[ \dot{\mathbf{n}}(Q_0) \times \dot{\mathbf{H}}_{inc}(Q_0) \right] \frac{\exp\left(-\dot{\sigma}_1 |P-Q_0|\right)}{|P-Q_0|} dS_0 \\ &\quad \left. + \nabla \times \oint_S \left[ \dot{\mathbf{n}}(Q_0) \times \dot{\mathbf{E}}_{inc}(Q_0) \right] \frac{\exp\left(-\dot{\sigma}_1 |P-Q_0|\right)}{|P-Q_0|} dS_0 \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{H}}(P) = \dot{\mathbf{H}}_{inc}(P) + \frac{1}{4\pi} & \left\{ \nabla \times \oint_S \left[ \dot{\mathbf{n}}(Q_0) \times \dot{\mathbf{H}}_{inc}(Q_0) \right] \frac{\exp\left(-\dot{\sigma}_1 |P-Q_0|\right)}{|P-Q_0|} dS_0 + \right. \\
 + j\omega \dot{\epsilon}_1 \oint_S & \left[ \dot{\mathbf{n}}(Q_0) \times \dot{\mathbf{E}}_{inc}(Q_0) \right] \frac{\exp\left(-\dot{\sigma}_1 |P-Q_0|\right)}{|P-Q_0|} dS_0 + \\
 - \frac{1}{j\omega\mu_1} \nabla \nabla \cdot \oint_S & \left[ \dot{\mathbf{n}}(Q_0) \times \dot{\mathbf{E}}_{inc}(Q_0) \right] \frac{\exp\left(-\dot{\sigma}_1 |P-Q_0|\right)}{|P-Q_0|} dS_0 \left. \right\}
 \end{aligned} \tag{18}$$

Dove considerando come corrente impressa quella dovuta ad un dipolo elettrico sinusoidale si ha che:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{E}}_{inc}(P) = \frac{j}{4\pi} & \left\{ -j\omega\mu_1 \dot{m} \frac{\exp\left(-\dot{\sigma}_1 |P-Q|\right)}{|P-Q|} \hat{\mathbf{z}} + \frac{1}{j\omega\dot{\epsilon}_1} \dot{m} \nabla \nabla \cdot \left[ \frac{\exp\left(-\dot{\sigma}_1 |P-Q|\right)}{|P-Q|} \hat{\mathbf{z}} \right] \right\} \\
 \dot{\mathbf{H}}_{inc}(P) = \frac{1}{4\pi} & \dot{m} \nabla \times \left[ \frac{\exp\left(-\dot{\sigma}_1 |P-Q|\right)}{|P-Q|} \hat{\mathbf{z}} \right]
 \end{aligned}$$

Nella regione 2 si è invece visto che il campo può essere espresso attraverso i potenziali vettore (21, 21) dai quali si ricavano i campi  $\dot{\mathbf{E}}$  ed  $\dot{\mathbf{H}}$  tramite le equazioni (23, 24):

Andando a svolgere i passaggi si ottengono le seguenti equazioni:

$$\dot{\mathbf{E}}(P) = \frac{1}{4\pi} \left\{ j\omega\mu_1 \oint_S \left[ \dot{\mathbf{n}}(Q_s) \times \dot{\mathbf{H}}_{\text{inc}}(Q_s) \right] \frac{\exp\left(-\dot{\sigma}_1 |P-Q_s|\right)}{|P-Q_s|} dS_s + \right. \quad (17)$$

$$- \frac{1}{j\omega \dot{\epsilon}_1} \nabla \nabla \cdot \oint_S \left[ \dot{\mathbf{n}}(Q_s) \times \dot{\mathbf{H}}_{\text{inc}}(Q_s) \right] \frac{\exp\left(-\dot{\sigma}_1 |P-Q_s|\right)}{|P-Q_s|} dS_s +$$

$$- \nabla \times \oint_S \left[ \dot{\mathbf{n}}(Q_s) \times \dot{\mathbf{E}}_{\text{inc}}(Q_s) \right] \frac{\exp\left(-\dot{\sigma}_1 |P-Q_s|\right)}{|P-Q_s|} dS_s +$$

$$j\omega\mu_2 \oint_S \left[ \dot{\mathbf{n}}(Q_s) \times \dot{\mathbf{H}}_{\text{inc}}(Q_s) \right] \frac{\exp\left(-\dot{\sigma}_2 |P-Q_s|\right)}{|P-Q_s|} dS_s +$$

$$- \frac{1}{j\omega \dot{\epsilon}_2} \nabla \nabla \cdot \oint_S \left[ \dot{\mathbf{n}}(Q_s) \times \dot{\mathbf{H}}_{\text{inc}}(Q_s) \right] \frac{\exp\left(-\dot{\sigma}_2 |P-Q_s|\right)}{|P-Q_s|} dS_s +$$

$$- \nabla \times \oint_S \left[ \dot{\mathbf{n}}(Q_s) \times \dot{\mathbf{E}}_{\text{inc}}(Q_s) \right] \frac{\exp\left(-\dot{\sigma}_2 |P-Q_s|\right)}{|P-Q_s|} dS_s \left. \right\}$$

$$\dot{\mathbf{H}}(P) = \frac{1}{4\pi} \left\{ - \nabla \times \oint_S \left[ \dot{\mathbf{n}}(Q_s) \times \dot{\mathbf{H}}_{\text{inc}}(Q_s) \right] \frac{\exp\left(-\dot{\sigma}_1 |P-Q_s|\right)}{|P-Q_s|} dS_s + \right. \quad (18)$$

$$- j\omega \dot{\epsilon}_1 \oint_S \left[ \dot{\mathbf{n}}(Q_s) \times \dot{\mathbf{E}}_{\text{inc}}(Q_s) \right] \frac{\exp\left(-\dot{\sigma}_1 |P-Q_s|\right)}{|P-Q_s|} dS_s +$$

$$+ \frac{1}{j\omega\mu_1} \nabla \nabla \cdot \oint_S \left[ \dot{\mathbf{n}}(Q_s) \times \dot{\mathbf{E}}_{\text{inc}}(Q_s) \right] \frac{\exp\left(-\dot{\sigma}_1 |P-Q_s|\right)}{|P-Q_s|} dS_s$$

$$- \nabla \times \oint_S \left[ \dot{\mathbf{n}}(Q_s) \times \dot{\mathbf{H}}_{\text{inc}}(Q_s) \right] \frac{\exp\left(-\dot{\sigma}_2 |P-Q_s|\right)}{|P-Q_s|} dS_s$$

$$- j\omega \dot{\epsilon}_2 \oint_S \left[ \dot{\mathbf{n}}(Q_s) \times \dot{\mathbf{E}}_{\text{inc}}(Q_s) \right] \frac{\exp\left(-\dot{\sigma}_2 |P-Q_s|\right)}{|P-Q_s|} dS_s +$$

$$+ \frac{1}{j\omega\mu_2} \nabla \nabla \cdot \oint_S \left[ \dot{\mathbf{n}}(Q_s) \times \dot{\mathbf{E}}_{\text{inc}}(Q_s) \right] \frac{\exp\left(-\dot{\sigma}_2 |P-Q_s|\right)}{|P-Q_s|} dS_s \left. \right\}$$

Si noti che le equazioni risolutive nella regione 1 possono essere espresse nella forma equivalente:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}(P) = \dot{\mathbf{E}}_{inc}(P) + \frac{1}{4\pi} \left\{ -j\omega\mu_0 \oint_S \left[ \dot{\mathbf{n}}(Q_s) \times \dot{\mathbf{H}}(Q_s) \right] \frac{\exp\left(-\dot{\sigma}_1 |P-Q_s|\right)}{|P-Q_s|} dS_s + \right. \\ \left. + \frac{1}{j\omega\dot{\epsilon}_{12}} \nabla\nabla \cdot \oint_S \left[ \dot{\mathbf{n}}(Q_s) \times \dot{\mathbf{H}}(Q_s) \right] \frac{\exp\left(-\dot{\sigma}_1 |P-Q_s|\right)}{|P-Q_s|} dS_s + \right. \\ \left. + \nabla \times \oint_S \left[ \dot{\mathbf{n}}(Q_s) \times \dot{\mathbf{E}}(Q_s) \right] \frac{\exp\left(-\dot{\sigma}_1 |P-Q_s|\right)}{|P-Q_s|} dS_s \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}(P) = \dot{\mathbf{H}}_{inc}(P) + \frac{1}{4\pi} \left\{ \nabla \times \oint_S \left[ \dot{\mathbf{n}}(Q_s) \times \dot{\mathbf{H}}(Q_s) \right] \frac{\exp\left(-\dot{\sigma}_1 |P-Q_s|\right)}{|P-Q_s|} dS_s + \right. \\ \left. + j\omega\dot{\epsilon}_{12} \nabla\nabla \cdot \oint_S \left[ \dot{\mathbf{n}}(Q_s) \times \dot{\mathbf{E}}(Q_s) \right] \frac{\exp\left(-\dot{\sigma}_1 |P-Q_s|\right)}{|P-Q_s|} dS_s + \right. \\ \left. - \frac{1}{j\omega\mu_0} \nabla\nabla \cdot \oint_S \left[ \dot{\mathbf{n}}(Q_s) \times \dot{\mathbf{E}}(Q_s) \right] \frac{\exp\left(-\dot{\sigma}_1 |P-Q_s|\right)}{|P-Q_s|} dS_s \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

E conseguentemente dato che:

$$\dot{\mathbf{E}}(P) = \dot{\mathbf{E}}_{inc}(P) + \dot{\mathbf{E}}_{sc}(P)$$

$$\dot{\mathbf{H}}(P) = \dot{\mathbf{H}}_{inc}(P) + \dot{\mathbf{H}}_{sc}(P)$$

risulta conveniente esprimere le equazioni relative alla regione 2 nella forma:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}(P) = \frac{1}{4\pi} \left\{ j\omega\mu_0 \oint_S \left[ \dot{\mathbf{n}}(Q_s) \times \dot{\mathbf{H}}(Q_s) \right] \frac{\exp\left(-\dot{\sigma}_1 |P-Q_s|\right)}{|P-Q_s|} dS_s + \right. \\ \left. - \frac{1}{j\omega\dot{\epsilon}_{12}} \nabla\nabla \cdot \oint_S \left[ \dot{\mathbf{n}}(Q_s) \times \dot{\mathbf{H}}(Q_s) \right] \frac{\exp\left(-\dot{\sigma}_1 |P-Q_s|\right)}{|P-Q_s|} dS_s + \right. \\ \left. - \nabla \times \oint_S \left[ \dot{\mathbf{n}}(Q_s) \times \dot{\mathbf{E}}(Q_s) \right] \frac{\exp\left(-\dot{\sigma}_1 |P-Q_s|\right)}{|P-Q_s|} dS_s \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}(P) = & \frac{j}{4\pi} \left\{ -\nabla \times \oint_S \left[ \dot{\mathbf{n}}(Q_s) \times \dot{\mathbf{H}}(Q_s) \right] \frac{\exp\left(-\dot{\sigma}_z |P - Q_s|\right)}{|P - Q_s|} dS_s + \right. \\ & -j\omega \dot{\epsilon}_{1z} \nabla \nabla \cdot \oint_S \left[ \dot{\mathbf{n}}(Q_s) \times \dot{\mathbf{E}}(Q_s) \right] \frac{\exp\left(-\dot{\sigma}_z |P - Q_s|\right)}{|P - Q_s|} dS_s + \\ & \left. + \frac{j}{j\omega\mu_2} \nabla \nabla \cdot \oint_S \left[ \dot{\mathbf{n}}(Q_s) \times \dot{\mathbf{E}}(Q_s) \right] \frac{\exp\left(-\dot{\sigma}_z |P - Q_s|\right)}{|P - Q_s|} dS_s \right\} \end{aligned}$$

Tranne che nel caso monodimensionale la complessità delle equazioni integro differenziali ne inibisce in pratica l'integrazione analitica mentre l'integrazione numerica di tali equazioni, previa discretizzazione del sistema, è invece possibile.

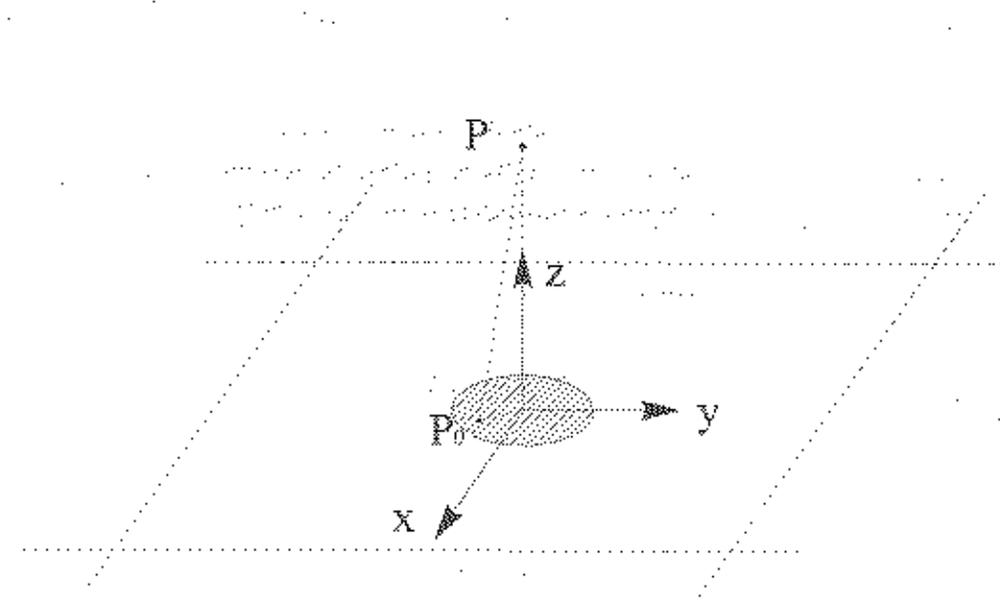
## Capitolo 2

# SOLUZIONE EQUAZIONE INTEGRALE NEL CASO DI PROBLEMI MONODIMENSIONALI

### 2.1 Impostazione della soluzione

Nel caso monodimensionale la superficie di interfaccia è un piano di estensione infinita e la corrente impressa è costituita da una corrente superficiale anch'essa distribuita su un piano di estensione infinita; conseguentemente il campo impresso è un'onda piana uniforme.

Quindi si ha che  $\hat{\mathbf{J}}_s(P_0) = \text{cost}$  e  $\hat{\mathbf{M}}_s(P_0) = \text{cost} \quad \forall P_0 \in S$ . Consideriamo come esempio il caso in cui la superficie piana è diretta lungo gli assi  $x$  ed  $y$ :



$$\hat{\mathbf{A}} = \frac{\mu}{4\pi} \hat{\mathbf{J}}_s \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\hat{\sigma}|P-P_0|}}{|P-P_0|} dx_0 dy_0$$

$$|P-P_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

$$\dot{\mathbf{J}}_S = \dot{J}_{S_x} \hat{\mathbf{x}} + \dot{J}_{S_y} \hat{\mathbf{y}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\sigma|p-p_0|}}{|p-p_0|} dx_0 dy_0 = *$$

sostituendo ad  $x_0$  ed  $y_0$  le coordinate polari  $r$  e  $\varphi$  si ha che:

$$\begin{cases} x_0 - x = r \cos \varphi \\ y_0 - y = r \sin \varphi \\ z - z_0 = \varepsilon \end{cases} \rightarrow dx_0 dy_0 = r dr d\varphi$$

$$* = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sigma\sqrt{r^2+\varepsilon^2}}}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}} r dr d\varphi = 2\pi \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sigma\sqrt{r^2+\varepsilon^2}}}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}} r dr$$

effettuando il cambio di variabile:  $\alpha^2 \triangleq r^2 + \varepsilon^2 \rightarrow \alpha d\alpha = r dr$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sigma\sqrt{r^2+\varepsilon^2}}}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}} r dr = \int_{|\varepsilon|}^{+\infty} e^{-\sigma\alpha} d\alpha = \left[ -\frac{e^{-\sigma\alpha}}{\sigma} \right]_{|\varepsilon|}^{+\infty} = -\frac{1}{\sigma} \left( e^{-\sigma\sqrt{r^2+\varepsilon^2}} - e^{-\sigma|\varepsilon|} \right) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{e^{-\sigma|\varepsilon|}}{\sigma} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma}$$

NB: si noti che affinché questo limite sia definito deve essere  $\text{Re}\{\sigma\} > 0$  e quindi deve essere  $\gamma > 0$ ; cosa che tra l'altro è fra le ipotesi del teorema di unicità per i campi elettromagnetici in regime sinusoidale [Corazza, 1994].

quindi in definitiva si ha che per  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\frac{\mu}{4\pi} \dot{\mathbf{J}}_S(P_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\sigma|p-p_0|}}{|p-p_0|} dx_0 dy_0 = \frac{\mu}{4\pi} \dot{\mathbf{J}}_S(P_0) \frac{2\pi}{\sigma}$$

$$\nabla \times \dot{\mathbf{A}} = \frac{\mu}{4\pi} \nabla \times \left[ \dot{\mathbf{J}}_S \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\sigma|p-p_0|}}{|p-p_0|} dx_0 dy_0 \right] = *$$

$$\dot{\mathbf{J}}_S = \dot{J}_{S_x} \hat{\mathbf{x}} + \dot{J}_{S_y} \hat{\mathbf{y}}$$

$$* = \frac{\mu}{4\pi} \left\{ \dot{J}_{S_x} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \nabla \times \left[ \frac{e^{-\sigma|p-p_0|}}{|p-p_0|} \hat{\mathbf{x}} \right] dx_0 dy_0 + \dot{J}_{S_y} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \nabla \times \left[ \frac{e^{-\sigma|p-p_0|}}{|p-p_0|} \hat{\mathbf{y}} \right] dx_0 dy_0 \right\} = *$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \nabla \times \left[ \frac{e^{-\sigma|P-P_0|}}{|P-P_0|} \hat{x} \right] dx_0 dy_0 = \hat{y} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{e^{-\sigma|P-P_0|}}{|P-P_0|} \right) dx_0 dy_0 - \hat{x} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{e^{-\sigma|P-P_0|}}{|P-P_0|} \right) dx_0 dy_0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \nabla \times \left[ \frac{e^{-\sigma|P-P_0|}}{|P-P_0|} \hat{y} \right] dx_0 dy_0 = \hat{z} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{e^{-\sigma|P-P_0|}}{|P-P_0|} \right) dx_0 dy_0 - \hat{x} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{e^{-\sigma|P-P_0|}}{|P-P_0|} \right) dx_0 dy_0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{e^{-\sigma|P-P_0|}}{|P-P_0|} \right) dx_0 dy_0 = - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\sigma|P-P_0|}}{|P-P_0|} \left( \frac{\sigma}{|P-P_0|} + \frac{1}{|P-P_0|^2} \right) (z-z_0) dx_0 dy_0 = *$$

sostituendo alle coordinate cartesiane  $x_0$  ed  $y_0$  le coordinate polari  $r$  ed  $\varphi$  :

$$* = - \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sigma\sqrt{r^2+\varepsilon^2}}}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}} \left( \frac{\sigma}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}} + \frac{1}{r^2+\varepsilon^2} \right) e r dr d\varphi = -2\pi e \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sigma\sqrt{r^2+\varepsilon^2}}}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}} \left( \frac{\sigma}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}} + \frac{1}{r^2+\varepsilon^2} \right) r dr = *$$

effettuando il cambio di variabile:  $\alpha^2 := r^2 + \varepsilon^2$

$$* = -2\pi \varepsilon \int_{\varepsilon^2}^{+\infty} \frac{e^{-\sigma\alpha}}{\alpha} e^{-\sigma\alpha} \left( \frac{\sigma}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \right) d\alpha = *$$

$$\int_{\varepsilon^2}^{+\infty} e^{-\sigma\alpha} \left( \frac{\sigma}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \right) d\alpha = \left[ -\frac{e^{-\sigma\alpha}}{\alpha} \right]_{\varepsilon^2}^{+\infty} = -\frac{e^{-\sigma\sqrt{\varepsilon^2+\varepsilon^2}}}{\sqrt{\varepsilon^2+\varepsilon^2}} + \frac{e^{-\sigma\varepsilon}}{|\varepsilon|} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{-\sigma\varepsilon}}{|\varepsilon|}$$

$$* = -2\pi \varepsilon \frac{e^{-\sigma\varepsilon}}{|\varepsilon|} = \begin{cases} -2\pi & \text{se } \varepsilon \rightarrow 0^+ \\ 2\pi & \text{se } \varepsilon \rightarrow 0^- \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{e^{-\sigma|P-P_0|}}{|P-P_0|} \right) dx_0 dy_0 = - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\sigma|P-P_0|}}{|P-P_0|} \left( \frac{\sigma}{|P-P_0|} + \frac{1}{|P-P_0|^2} \right) (y-y_0) dx_0 dy_0 = *$$

sostituendo alle coordinate cartesiane  $x_0$  ed  $y_0$  le coordinate polari  $r$  ed  $\varphi$  :

$$* = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sigma\sqrt{r^2+\varepsilon^2}}}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}} \left( \frac{\sigma}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}} + \frac{1}{r^2+\varepsilon^2} \right) r \sin\varphi r dr d\varphi \underset{\int_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi = 0}{=} 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{e^{-\sigma|P-P_0|}}{|P-P_0|} \right) dx_0 dy_0 = - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\sigma|P-P_0|}}{|P-P_0|} \left( \frac{\sigma}{|P-P_0|} + \frac{1}{|P-P_0|^2} \right) (x-x_0) dx_0 dy_0 = *$$

sostituendo alle coordinate cartesiane  $x_0$  ed  $y_0$  le coordinate polari  $r$  ed  $\varphi$  :

$$* = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sigma\sqrt{r^2+\varepsilon^2}}}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}} \left( \frac{\sigma}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}} + \frac{1}{r^2+\varepsilon^2} \right) r \cos\varphi r dr d\varphi \underset{\int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi = 0}{=} 0$$

in definitiva si ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \nabla \times \left[ \frac{e^{-\sigma|p-p_0|}}{|p-p_0|} \hat{\mathbf{x}} \right] dx_0 dy_0 = \begin{cases} -2\pi \hat{\mathbf{y}} & \text{se } \varepsilon \rightarrow 0^+ \\ 2\pi \hat{\mathbf{y}} & \text{se } \varepsilon \rightarrow 0^- \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \nabla \times \left[ \frac{e^{-\sigma|p-p_0|}}{|p-p_0|} \hat{\mathbf{y}} \right] dx_0 dy_0 = \begin{cases} 2\pi \hat{\mathbf{x}} & \text{se } \varepsilon \rightarrow 0^+ \\ -2\pi \hat{\mathbf{x}} & \text{se } \varepsilon \rightarrow 0^- \end{cases}$$

$$\nabla \times \dot{\mathbf{A}} = \begin{cases} \frac{\mu}{2} \left( -\dot{J}_{sx} \hat{\mathbf{y}} + \dot{J}_{sy} \hat{\mathbf{x}} \right) & \text{se } \varepsilon \rightarrow 0^+ \\ \frac{\mu}{2} \left( \dot{J}_{sx} \hat{\mathbf{y}} - \dot{J}_{sy} \hat{\mathbf{x}} \right) & \text{se } \varepsilon \rightarrow 0^- \end{cases}$$

$$\nabla \nabla \cdot \dot{\mathbf{A}} = \frac{\mu}{4\pi} \nabla \nabla \cdot \left[ \dot{\mathbf{J}}_S \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\sigma|p-p_0|}}{|p-p_0|} dx_0 dy_0 \right] = *$$

$$\dot{\mathbf{J}}_S = \dot{J}_{Sx} \hat{\mathbf{x}} + \dot{J}_{Sy} \hat{\mathbf{y}}$$

$$* = \frac{\mu}{4\pi} \left\{ \dot{J}_{Sx} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \nabla \nabla \cdot \left[ \frac{e^{-\sigma|p-p_0|}}{|p-p_0|} \hat{\mathbf{x}} \right] dx_0 dy_0 + \dot{J}_{Sy} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \nabla \nabla \cdot \left[ \frac{e^{-\sigma|p-p_0|}}{|p-p_0|} \hat{\mathbf{y}} \right] dx_0 dy_0 \right\} = *$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \nabla \nabla \cdot \left[ \frac{e^{-\sigma|p-p_0|}}{|p-p_0|} \hat{\mathbf{x}} \right] dx_0 dy_0 = \hat{\mathbf{x}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{e^{-\sigma|p-p_0|}}{|p-p_0|} \right) dx_0 dy_0 +$$

$$\hat{\mathbf{y}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{e^{-\sigma|p-p_0|}}{|p-p_0|} \right) dx_0 dy_0 +$$

$$\hat{\mathbf{z}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left( \frac{e^{-\sigma|p-p_0|}}{|p-p_0|} \right) dx_0 dy_0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \nabla \times \left[ \frac{e^{-\sigma|p-p_0|}}{|p-p_0|} \hat{\mathbf{y}} \right] dx_0 dy_0 = \hat{\mathbf{x}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \left( \frac{e^{-\sigma|p-p_0|}}{|p-p_0|} \right) dx_0 dy_0 +$$

$$\hat{\mathbf{y}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{e^{-\sigma|p-p_0|}}{|p-p_0|} \right) dx_0 dy_0 +$$

$$\hat{\mathbf{z}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left( \frac{e^{-\sigma|p-p_0|}}{|p-p_0|} \right) dx_0 dy_0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{e^{-\sigma|y-y_0|}}{|p-p_0|} \right) dx_0 dy_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -\frac{e^{-\sigma|y-y_0|}}{|p-p_0|} \left( \frac{\sigma}{|p-p_0|} + \frac{1}{|p-p_0|^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{(x-x_0)^2 e^{-\sigma|y-y_0|}}{|p-p_0|^2 |p-p_0|} \left( \sigma^2 + \frac{3\sigma}{|p-p_0|} + \frac{3}{|p-p_0|^2} \right) \right] dx_0 dy_0 = *$$

sostituendo alle coordinate cartesiane  $x_0$  ed  $y_0$  le coordinate polari  $r$  ed  $\varphi$ :

$$* = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \left[ -\frac{e^{-\sigma\sqrt{r^2+\varepsilon^2}}}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}} \left( \frac{\sigma}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}} + \frac{1}{r^2+\varepsilon^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{r^2 \cos^2 \varphi}{r^2+\varepsilon^2} \frac{e^{-\sigma\sqrt{r^2+\varepsilon^2}}}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}} \left( \sigma^2 + \frac{3\sigma}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}} + \frac{3}{r^2+\varepsilon^2} \right) \right] r dr d\varphi = \\ = 2\pi \int_0^{\infty} \left[ -\frac{e^{-\sigma\sqrt{r^2+\varepsilon^2}}}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}} \left( \frac{\sigma}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}} + \frac{1}{r^2+\varepsilon^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{r^2}{r^2+\varepsilon^2} \frac{e^{-\sigma\sqrt{r^2+\varepsilon^2}}}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}} \left( \sigma^2 + \frac{3\sigma}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}} + \frac{3}{r^2+\varepsilon^2} \right) \right] r dr = *$$

effettuando il cambio di variabile:  $\alpha^2 := r^2 + \varepsilon^2$

$$* = 2\pi \int_{\varepsilon^2}^{\infty} \left[ -\frac{e^{-\sigma\alpha}}{\alpha} \left( \frac{\sigma}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\alpha^2 - \varepsilon^2}{\alpha^2} \frac{e^{-\sigma\alpha}}{\alpha} \left( \sigma^2 + \frac{3\sigma}{\alpha} + \frac{3}{\alpha^2} \right) \right] \alpha d\alpha = \\ = 2\pi \frac{1}{2} \int_{\varepsilon^2}^{\infty} \left[ e^{-\sigma\alpha} \left( \sigma^2 + \frac{\sigma}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \right) - \varepsilon^2 \frac{e^{-\sigma\alpha}}{\alpha^2} \left( \sigma^2 + \frac{3\sigma}{\alpha} + \frac{3}{\alpha^2} \right) \right] \alpha d\alpha = \\ = 2\pi \frac{1}{2} \left[ -\frac{e^{-\sigma\alpha}}{\alpha} (1 + \sigma\alpha) + \varepsilon^2 \frac{e^{-\sigma\alpha}}{\alpha^2} (1 + \sigma\alpha) \right]_{\varepsilon^2}^{\infty} = \\ = 2\pi \frac{1}{2} \left[ -\frac{e^{-\sigma\alpha}}{\alpha^2} (\alpha^2 - \varepsilon^2) (1 + \sigma\alpha) \right]_{\varepsilon^2}^{\infty} = \\ = -\frac{1}{2} R^2 \frac{e^{-\sigma\sqrt{R^2+\varepsilon^2}}}{(R^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} \left( 1 + \sigma\sqrt{R^2 + \varepsilon^2} \right) \Big|_{R \rightarrow \infty} \rightarrow 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{e^{-\sigma|y-y_0|}}{|p-p_0|} \right) dx_0 dy_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-x_0)(y-y_0) e^{-\sigma|y-y_0|}}{|p-p_0|^2 |p-p_0|} \left( \sigma^2 + \frac{3\sigma}{|p-p_0|} + \frac{3}{|p-p_0|^2} \right) dx_0 dy_0 = *$$

sostituendo alle coordinate cartesiane  $x_0$  ed  $y_0$  le coordinate polari  $r$  ed  $\varphi$ :

$$* = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{r^2 \sin \varphi \cos \varphi}{r^2 + \varepsilon^2} \frac{e^{-\sigma\sqrt{r^2+\varepsilon^2}}}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}} \left( \sigma^2 + \frac{3\sigma}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}} + \frac{3}{r^2+\varepsilon^2} \right) r dr d\varphi \Big|_{\varphi=0}^{2\pi} = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left( \frac{e^{-\sigma|y-y_0|}}{|p-p_0|} \right) dx_0 dy_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-x_0)(z-z_0) e^{-\sigma|y-y_0|}}{|p-p_0|^2 |p-p_0|} \left( \sigma^2 + \frac{3\sigma}{|p-p_0|} + \frac{3}{|p-p_0|^2} \right) dx_0 dy_0 = *$$

sostituendo alle coordinate cartesiane  $x_0$  ed  $y_0$  le coordinate polari  $r$  ed  $\varphi$ :

$$* = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{-r \sin \varphi \sigma}{r^2 + \varepsilon^2} \frac{e^{-\sigma \sqrt{r^2 + \varepsilon^2}}}{\sqrt{r^2 + \varepsilon^2}} \left( \sigma^2 + \frac{3\sigma}{\sqrt{r^2 + \varepsilon^2}} + \frac{3}{r^2 + \varepsilon^2} \right) r dr d\varphi \Big|_{\sigma=0}^{\infty} = 0$$

analogamente si ottiene che:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{e^{-\sigma |y - P_0|}}{|P - P_0|} \right) dx_0 dy_0 = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{2} R^2 \frac{e^{-\sigma \sqrt{R^2 + \varepsilon^2}}}{(R^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} \left( 1 + \sigma \sqrt{R^2 + \varepsilon^2} \right) \right] \rightarrow 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \left( \frac{e^{-\sigma |y - P_0|}}{|P - P_0|} \right) dx_0 dy_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \left( \frac{e^{-\sigma |y - P_0|}}{|P - P_0|} \right) dx_0 dy_0 = 0$$

## 2.2 Campo generato da una corrente superficiale uniforme distribuita su un piano di estensione infinita

Sfruttando i risultati appena ottenuti si può determinare il campo generato da una corrente superficiale elettrica o magnetica avente come supporto un piano di estensione infinita:

Come esempio si determina il campo generato da una corrente elettrica superficiale diretta lungo l'asse  $x$  e da una corrente magnetica superficiale diretta lungo l'asse  $y$ :

$$\dot{\mathbf{A}}(P) = \frac{\mu}{4\pi} \int_S \dot{\mathbf{J}}_S \frac{e^{-\sigma|P-Q_0|}}{|P-Q_0|} dS_0$$

$$\dot{\mathbf{F}}(P) = \frac{\varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega}}{4\pi} \int_S \dot{\mathbf{M}}_S \frac{e^{-\sigma|P-P_0|}}{|P-P_0|} dS_0$$

$$\dot{\mathbf{E}}(P) = -j\omega \dot{\mathbf{A}}(P) + \frac{\nabla \nabla \cdot \dot{\mathbf{A}}(P)}{j\omega \mu \left( \varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega} \right)} - \frac{\nabla \times \dot{\mathbf{F}}(P)}{\varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega}}$$

$$\dot{\mathbf{H}}(P) = -j\omega \dot{\mathbf{F}}(P) + \frac{\nabla \nabla \cdot \dot{\mathbf{F}}(P)}{j\omega \mu \left( \varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega} \right)} + \frac{\nabla \times \dot{\mathbf{A}}(P)}{\mu}$$

sostituendo le equazioni ( ), ( ), ( ) si ottiene il seguente campo elettromagnetico caratteristico di un'onda piana uniforme:

$$\dot{\mathbf{H}}(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\frac{\varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega}}{\mu}} \dot{\mathbf{M}}_S - \dot{\mathbf{J}}_S \right] e^{-\hat{z}z} \hat{\mathbf{y}} = \sqrt{\frac{\varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega}}{\mu}} \dot{E}(z) \hat{\mathbf{y}} & \text{per } z > 0 \\ \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\frac{\varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega}}{\mu}} \dot{\mathbf{M}}_S + \dot{\mathbf{J}}_S \right] e^{\hat{z}z} \hat{\mathbf{y}} = -\sqrt{\frac{\varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega}}{\mu}} \dot{E}(z) \hat{\mathbf{y}} & \text{per } z < 0 \end{cases}$$

$$\dot{\mathbf{E}}(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ \frac{\mu}{\varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega}} \dot{\mathbf{J}}_s - \dot{\mathbf{M}}_s \right] e^{-\hat{\alpha}z} \hat{\mathbf{x}} = \frac{\mu}{\sqrt{\varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega}}} \dot{H}(z) \hat{\mathbf{x}} & \text{per } z > 0 \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{\mu}{\varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega}} \dot{\mathbf{J}}_s + \dot{\mathbf{M}}_s \right] e^{\hat{\alpha}z} \hat{\mathbf{x}} = - \frac{\mu}{\sqrt{\varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega}}} \dot{H}(z) \hat{\mathbf{x}} & \text{per } z < 0 \end{cases}$$

in definitiva si deduce che un'onda piana uniforme può essere generata da correnti superficiali elettriche o magnetiche distribuite su un piano di estensione infinita.

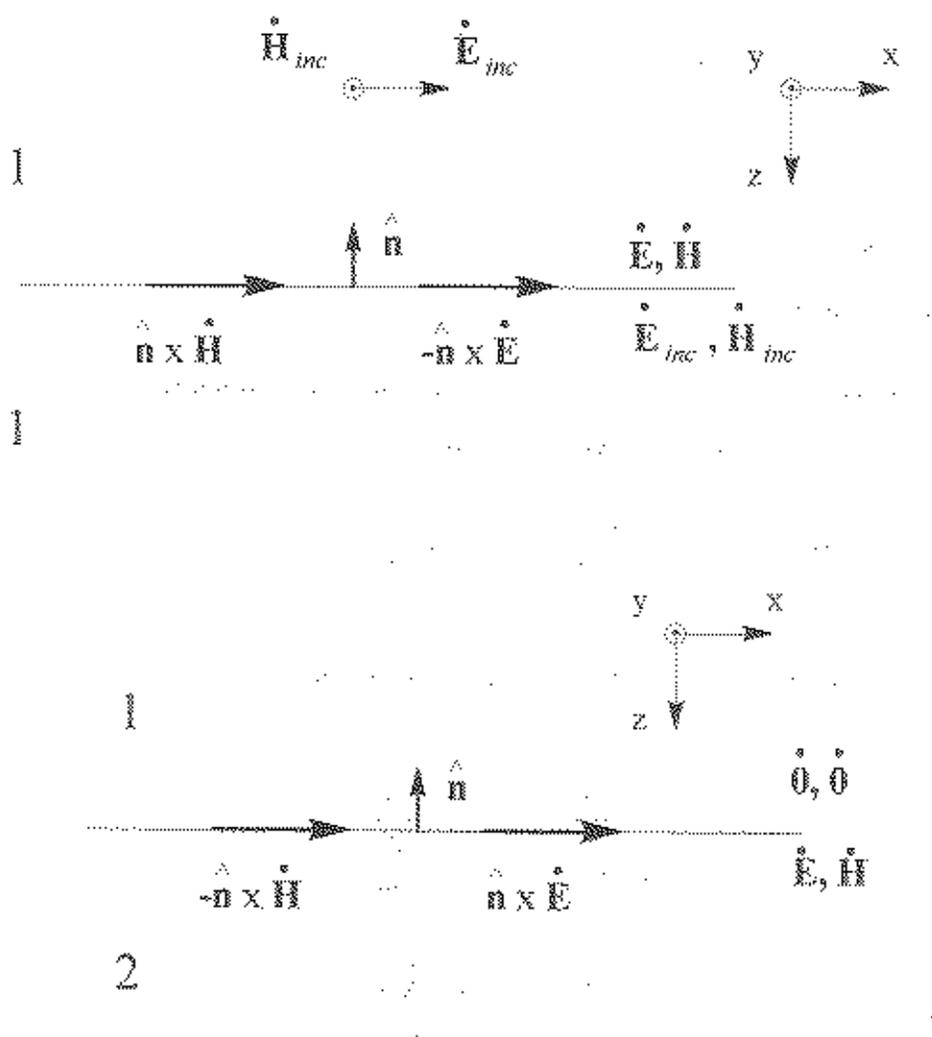
Una verifica delle equazioni ottenute è fornita dalle equazioni di raccordo attraverso la superficie di supporto per le correnti  $\dot{\mathbf{J}}_s$  ed  $\dot{\mathbf{M}}_s$ :

$$-\hat{\mathbf{n}} \times \left[ \dot{\mathbf{E}} \Big|_{z=0^+} - \dot{\mathbf{E}} \Big|_{z=0^-} \right] = -\hat{\mathbf{z}} \times \left[ -\dot{\mathbf{M}}_s \hat{\mathbf{x}} \right] = \dot{\mathbf{M}}_s \hat{\mathbf{y}}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \left[ \dot{\mathbf{H}} \Big|_{z=0^+} - \dot{\mathbf{H}} \Big|_{z=0^-} \right] = \hat{\mathbf{z}} \times \left[ -\dot{\mathbf{J}}_s \hat{\mathbf{y}} \right] = \dot{\mathbf{J}}_s \hat{\mathbf{x}}$$

### 2.3 Onda piana uniforme incidente una superficie piana di estensione infinita

Nel seguente paragrafo si vuole determinare, con il metodo proposto, il campo elettromagnetico derivante da un'onda piana uniforme incidente su di uno strato piano infinitamente esteso.



Per  $z < 0$

$$\dot{\mathbf{A}}_s(P) = \dot{\mathbf{A}}_{inc}(P) + \frac{\mu_1}{4\pi} \int_S \dot{\mathbf{J}}_s(P_0) \frac{e^{-\alpha_1 |P-P_0|}}{|P-P_0|} dS_0$$

$$\hat{\mathbf{F}}_1(P) = \hat{\mathbf{F}}_{oz}(P) + \frac{\epsilon_2 + \gamma_2}{4\pi} \int_S \hat{\mathbf{M}}_s(P_0) \frac{e^{-\hat{\sigma}_2|P-P_0|}}{|P-P_0|} dS_0$$

per  $z > 0$

$$\hat{\mathbf{A}}_2(P) = -\frac{\mu_2}{4\pi} \int_S \hat{\mathbf{J}}_s(P_0) \frac{e^{-\hat{\sigma}_2|P-P_0|}}{|P-P_0|} dS_0$$

$$\hat{\mathbf{F}}_2(P) = -\frac{\epsilon_2 + \gamma_2}{4\pi} \int_S \hat{\mathbf{M}}_s(P_0) \frac{e^{-\hat{\sigma}_2|P-P_0|}}{|P-P_0|} dS_0$$

dove:

$$\hat{\mathbf{J}}_s = \hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{H}}$$

$$\hat{\mathbf{M}}_s = -\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{E}}$$

dove dato che si sta considerando un caso monodimensionale si ha che

$\hat{\mathbf{J}}_s(P_0) = \cos t$  e  $\hat{\mathbf{M}}_s(P_0) = \cos t$  e quindi:

$$\hat{\mathbf{J}}_s = \hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{H}} = -\hat{\mathbf{z}} \times (\hat{H}_x \hat{\mathbf{x}} + \hat{H}_y \hat{\mathbf{y}}) = \hat{H}_y \hat{\mathbf{x}} - \hat{H}_x \hat{\mathbf{y}} = \hat{J}_{sx} \hat{\mathbf{x}} + \hat{J}_{sy} \hat{\mathbf{y}}$$

$$\hat{\mathbf{M}}_s = -\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{z}} \times (\hat{E}_x \hat{\mathbf{x}} + \hat{E}_y \hat{\mathbf{y}}) = -\hat{E}_y \hat{\mathbf{x}} + \hat{E}_x \hat{\mathbf{y}} = \hat{M}_{sx} \hat{\mathbf{x}} + \hat{M}_{sy} \hat{\mathbf{y}}$$

$$\hat{\mathbf{E}}(P) = -j\omega \hat{\mathbf{A}}(P) + \frac{\nabla \nabla \cdot \hat{\mathbf{A}}(P)}{j\omega\mu \left( \epsilon + \frac{\gamma}{j\omega} \right)} - \frac{\nabla \times \hat{\mathbf{F}}(P)}{\epsilon + \frac{\gamma}{j\omega}}$$

$$\hat{\mathbf{H}}(P) = -j\omega \hat{\mathbf{F}}(P) + \frac{\nabla \nabla \cdot \hat{\mathbf{F}}(P)}{j\omega\mu \left( \epsilon + \frac{\gamma}{j\omega} \right)} + \frac{\nabla \times \hat{\mathbf{A}}(P)}{\mu}$$

ovviamente si ha che:

$$\hat{\mathbf{E}}_{inc}(z) = -j\omega \hat{\mathbf{A}}_{inc}(z) + \frac{\nabla \nabla \cdot \hat{\mathbf{A}}_{inc}(z)}{j\omega \mu_1 \left( \epsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega} \right)} - \frac{\nabla \times \hat{\mathbf{F}}_{inc}(z)}{\epsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega}} = \hat{\mathbf{E}}_{inc}(z) \hat{\mathbf{i}} = \hat{E}_{inc0} e^{-j\omega \sqrt{\mu_1 \left( \epsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega} \right)} z} \hat{\mathbf{i}}$$

$$\hat{\mathbf{H}}_{inc}(z) = -j\omega \hat{\mathbf{F}}_{inc}(z) + \frac{\nabla \nabla \cdot \hat{\mathbf{F}}_{inc}(z)}{j\omega \mu_1 \left( \epsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega} \right)} - \frac{\nabla \times \hat{\mathbf{A}}_{inc}(z)}{\mu_1} = \hat{\mathbf{H}}_{inc}(z) \hat{\mathbf{j}} = \sqrt{\frac{\epsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega}}{\mu_1}} \hat{E}_{inc0} \hat{\mathbf{j}}$$

$$= \sqrt{\frac{\epsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega}}{\mu_1}} \hat{E}_{inc0} e^{-j\omega \sqrt{\mu_1 \left( \epsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega} \right)} z} \hat{\mathbf{j}}$$

$$\hat{\mathbf{E}}_{inc}(z) = \hat{E}_{inc0} \hat{\mathbf{x}} = \hat{E}_{inc0} e^{-j\omega \sqrt{\mu_1 \left( \epsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega} \right)} z} \hat{\mathbf{x}} = \hat{E}_{inc0} e^{-\hat{\sigma}_1 z} \hat{\mathbf{x}}$$

$$\hat{\mathbf{H}}_{inc}(z) = \hat{H}_{inc0} \hat{\mathbf{y}} = \sqrt{\frac{\epsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega}}{\mu_1}} \hat{E}_{inc0} \hat{\mathbf{y}} = \sqrt{\frac{\epsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega}}{\mu_1}} \hat{E}_{inc0} e^{-j\omega \sqrt{\mu_1 \left( \epsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega} \right)} z} \hat{\mathbf{y}} = \sqrt{\frac{\epsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega}}{\mu_1}} \hat{E}_{inc0} e^{-\hat{\sigma}_1 z} \hat{\mathbf{y}}$$

$$\begin{cases} x_0 - x = r \cos \varphi \\ y_0 - y = r \sin \varphi & \rightarrow dx_0 dy_0 = r dr d\varphi \\ z - z_0 = \varepsilon \end{cases}$$

e si effettui il cambio di variabile:  $\alpha^2 := r^2 + \varepsilon^2 \rightarrow \alpha d\alpha = r dr$

$$\hat{\mathbf{j}}_s = \hat{j}_{sx} \hat{\mathbf{x}} + \hat{j}_{sy} \hat{\mathbf{y}}$$

$$\hat{j}_s \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\hat{\sigma}_1 |p - p_0|}}{|p - p_0|} dx_0 dy_0 = -\frac{2\pi \hat{j}_s}{\hat{\sigma}_1} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( e^{-\hat{\sigma}_1 \sqrt{(x^2 + \varepsilon^2)}} - e^{-\hat{\sigma}_1 |x|} \right) = \frac{2\pi \hat{j}_s}{\hat{\sigma}_1} e^{-\hat{\sigma}_1 \varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2\pi \hat{j}_s}{\hat{\sigma}_1}$$

$$\hat{j}_s \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\hat{\sigma}_2 |p - p_0|}}{|p - p_0|} dx_0 dy_0 = -\frac{2\pi \hat{j}_s}{\hat{\sigma}_2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( e^{-\hat{\sigma}_2 \sqrt{(x^2 + \varepsilon^2)}} - e^{-\hat{\sigma}_2 |x|} \right) = \frac{2\pi \hat{j}_s}{\hat{\sigma}_2} e^{-\hat{\sigma}_2 \varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2\pi \hat{j}_s}{\hat{\sigma}_2}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \left[ \hat{\mathbf{j}}_s \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\hat{\sigma}_1 |P-P_0|}}{|P-P_0|} dx_0 dy_0 \right] &= \\
 &= \hat{j}_{sx} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \nabla \times \left[ \frac{e^{-\hat{\sigma}_1 |P-P_0|}}{|P-P_0|} \hat{\mathbf{i}} \right] dx_0 dy_0 + \hat{j}_{sy} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \nabla \times \left[ \frac{e^{-\hat{\sigma}_1 |P-P_0|}}{|P-P_0|} \hat{\mathbf{j}} \right] dx_0 dy_0 = \\
 &= -2\pi \left( -\hat{j}_{sy} \hat{\mathbf{i}} + \hat{j}_{sx} \hat{\mathbf{j}} \right) \varepsilon \left( -\frac{e^{-\hat{\sigma}_1 \sqrt{R^2 + \varepsilon^2}}}{\sqrt{R^2 + \varepsilon^2}} + \frac{e^{-\hat{\sigma}_1 R}}{R} \right) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \\
 &= -2\pi \left( -\hat{j}_{sy} \hat{\mathbf{i}} + \hat{j}_{sx} \hat{\mathbf{j}} \right) \varepsilon \frac{e^{-\hat{\sigma}_1 |R|}}{|R|} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 2\pi \left( \hat{j}_{sy} \hat{\mathbf{y}} - \hat{j}_{sx} \hat{\mathbf{x}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \left[ \hat{\mathbf{j}}_s \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\hat{\sigma}_1 |P-P_0|}}{|P-P_0|} dx_0 dy_0 \right] &= \hat{j}_{sx} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \nabla \times \left[ \frac{e^{-\hat{\sigma}_1 |P-P_0|}}{|P-P_0|} \hat{\mathbf{x}} \right] dx_0 dy_0 + \\
 &+ \hat{j}_{sy} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \nabla \times \left[ \frac{e^{-\hat{\sigma}_1 |P-P_0|}}{|P-P_0|} \hat{\mathbf{y}} \right] dx_0 dy_0 = \\
 &= -2\pi \left( -\hat{j}_{sy} \hat{\mathbf{x}} + \hat{j}_{sx} \hat{\mathbf{y}} \right) \varepsilon \left( -\frac{e^{-\hat{\sigma}_1 \sqrt{R^2 + \varepsilon^2}}}{\sqrt{R^2 + \varepsilon^2}} + \frac{e^{-\hat{\sigma}_1 |R|}}{|R|} \right) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \\
 &= -2\pi \left( -\hat{j}_{sy} \hat{\mathbf{x}} + \hat{j}_{sx} \hat{\mathbf{y}} \right) \varepsilon \frac{e^{-\hat{\sigma}_1 |R|}}{|R|} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 2\pi \left( -\hat{j}_{sy} \hat{\mathbf{y}} + \hat{j}_{sx} \hat{\mathbf{x}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla \nabla \cdot \left[ \hat{\mathbf{j}}_s \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\hat{\sigma}_1 |P-P_0|}}{|P-P_0|} dx_0 dy_0 \right] &= \\
 &= \hat{j}_{sx} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \nabla \nabla \cdot \left[ \frac{e^{-\hat{\sigma}_1 |P-P_0|}}{|P-P_0|} \hat{\mathbf{i}} \right] dx_0 dy_0 + \hat{j}_{sy} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \nabla \nabla \cdot \left[ \frac{e^{-\hat{\sigma}_1 |P-P_0|}}{|P-P_0|} \hat{\mathbf{j}} \right] dx_0 dy_0 = \\
 &= \left( \hat{j}_{sx} \hat{\mathbf{i}} + \hat{j}_{sy} \hat{\mathbf{j}} \right) \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{2} R^2 \frac{e^{-\hat{\sigma}_1 \sqrt{R^2 + \varepsilon^2}}}{(R^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} \left( 1 + \hat{\sigma}_1 \sqrt{R^2 + \varepsilon^2} \right) \right] = \hat{\mathbf{0}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \nabla \cdot \left[ \hat{\mathbf{j}}_s \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\hat{\sigma}_2 |P-P_0|}}{|P-P_0|} dx_0 dy_0 \right] &= \dots \\ &= \hat{J}_{sx} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \nabla \nabla \cdot \left[ \frac{e^{-\hat{\sigma}_2 |P-P_0|}}{|P-P_0|} \hat{\mathbf{i}} \right] dx_0 dy_0 + \hat{J}_{sy} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \nabla \nabla \cdot \left[ \frac{e^{-\hat{\sigma}_2 |P-P_0|}}{|P-P_0|} \hat{\mathbf{j}} \right] dx_0 dy_0 = \\ &= \left( \hat{J}_{sx} \hat{\mathbf{i}} + \hat{J}_{sy} \hat{\mathbf{j}} \right) \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{2} R^2 \frac{e^{-\hat{\sigma}_2 \sqrt{R^2 + \varepsilon^2}}}{(R^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} \left( 1 + \hat{\sigma}_2 \sqrt{R^2 + \varepsilon^2} \right) \right] = \hat{\mathbf{0}} \end{aligned}$$

le stesse equazioni valgono per la sorgente magnetica  $\hat{\mathbf{M}}_s$

imponendo la continuità della componente tangente del campo elettrico e del campo magnetico:

$$\hat{\mathbf{E}} \Big|_{z=0^+} = \hat{\mathbf{E}}_{inc0} \hat{\mathbf{i}} - j\omega \frac{\mu_1}{4\pi \hat{\sigma}_1} \left( \hat{J}_{sx} \hat{\mathbf{i}} + \hat{J}_{sy} \hat{\mathbf{j}} \right) - \frac{1}{4\pi} 2\pi \left( -\hat{M}_{sy} \hat{\mathbf{i}} + \hat{M}_{sx} \hat{\mathbf{j}} \right)$$

$$\hat{\mathbf{E}} \Big|_{z=0^-} = j\omega \frac{\mu_2}{4\pi \hat{\sigma}_2} \left( \hat{J}_{sx} \hat{\mathbf{i}} + \hat{J}_{sy} \hat{\mathbf{j}} \right) + \frac{1}{4\pi} \left[ -2\pi \left( -\hat{M}_{sy} \hat{\mathbf{i}} + \hat{M}_{sx} \hat{\mathbf{j}} \right) \right]$$

$$\hat{\mathbf{E}}_{inc0} - j\omega \frac{\mu_1}{2} \frac{1}{\hat{\sigma}_1} \hat{J}_{sx} + \frac{1}{2} \hat{M}_{sy} = j\omega \frac{\mu_2}{4\pi} \frac{2\pi}{\hat{\sigma}_2} \hat{J}_{sx} + \frac{1}{2} \hat{M}_{sy}$$

tenendo presente che:

$$\hat{\mathbf{E}}_{inc0} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega}}} \hat{\mathbf{H}}_{inc0}$$

si ottiene:

$$\hat{J}_{sx} = \frac{2 \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega}}}}{\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega}} + \frac{\mu_2}{\varepsilon_2 + \frac{\gamma_2}{j\omega}}}} \hat{\mathbf{H}}_{inc0} \rightarrow \hat{H}_y = \frac{2 \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega}}}}{\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega}} + \frac{\mu_2}{\varepsilon_2 + \frac{\gamma_2}{j\omega}}}} \hat{\mathbf{H}}_{inc0}$$

$$-j\omega \frac{\mu_1}{4\pi} \frac{2\pi}{\hat{\sigma}_1} \hat{J}_{sy} - \frac{1}{2} \hat{M}_{sx} = j\omega \frac{\mu_2}{4\pi} \frac{2\pi}{\hat{\sigma}_2} \hat{J}_{sy} - \frac{1}{2} \hat{M}_{sx} \rightarrow \hat{J}_{sy} = \hat{\mathbf{0}} \rightarrow \hat{H}_z = \hat{\mathbf{0}}$$

$$\dot{\mathbf{H}} \Big|_{z=0} = \dot{\mathbf{H}}_{inc0} \hat{\mathbf{i}} - j\omega \frac{\epsilon_1 + \gamma_1}{4\pi} \frac{j\omega 2\pi}{\dot{\sigma}_1} \left( \dot{M}_{Sx} \hat{\mathbf{i}} + \dot{M}_{Sy} \hat{\mathbf{j}} \right) + \frac{1}{4\pi} 2\pi \left( -\dot{J}_{Sx} \hat{\mathbf{i}} + \dot{J}_{Sy} \hat{\mathbf{j}} \right)$$

$$\dot{\mathbf{H}} \Big|_{z=0} = j\omega \frac{\epsilon_2 + \gamma_2}{4\pi} \frac{j\omega 2\pi}{\dot{\sigma}_2} \left( \dot{M}_{Sx} \hat{\mathbf{i}} + \dot{M}_{Sy} \hat{\mathbf{j}} \right) - \frac{1}{4\pi} \left[ -2\pi \left( -\dot{J}_{Sx} \hat{\mathbf{i}} + \dot{J}_{Sy} \hat{\mathbf{j}} \right) \right]$$

$$-j\omega \frac{\epsilon_1 + \gamma_1}{4\pi} \frac{j\omega 2\pi}{\dot{\sigma}_1} \dot{M}_{Sx} - \frac{1}{2} \dot{J}_{Sy} = j\omega \frac{\epsilon_2 + \gamma_2}{4\pi} \frac{j\omega 2\pi}{\dot{\sigma}_2} \dot{M}_{Sx} - \frac{1}{2} \dot{J}_{Sy} \rightarrow \dot{M}_{Sx} = 0 \rightarrow \dot{E}_y = 0$$

$$\dot{\mathbf{H}}_{inc0} - j\omega \frac{\epsilon_1 + \gamma_1}{4\pi} \frac{j\omega 2\pi}{\dot{\sigma}_1} \dot{M}_{Sy} + \frac{1}{2} \dot{J}_{Sx} = -j\omega \frac{\epsilon_2 + \gamma_2}{4\pi} \frac{j\omega 2\pi}{\dot{\sigma}_2} \dot{M}_{Sy} + \frac{1}{2} \dot{J}_{Sx}$$

$$\dot{\mathbf{H}}_{inc0} = \sqrt{\frac{\epsilon_1 + \gamma_1}{\mu_1}} \dot{\mathbf{E}}_{inc0}$$

$$\dot{M}_{Sy} = \frac{2\sqrt{\frac{\epsilon_1 + \gamma_1}{\mu_1}}}{\sqrt{\frac{\epsilon_1 + \gamma_1}{\mu_1}} + \sqrt{\frac{\epsilon_2 + \gamma_2}{\mu_2}}} \dot{\mathbf{E}}_{inc0} \rightarrow \dot{E}_x = \frac{2\sqrt{\frac{\epsilon_1 + \gamma_1}{\mu_1}}}{\sqrt{\frac{\epsilon_1 + \gamma_1}{\mu_1}} + \sqrt{\frac{\epsilon_2 + \gamma_2}{\mu_2}}} \dot{\mathbf{E}}_{inc0}$$

### 2.4 Efficacia di schermatura di uno strato piano di estensione infinita rispetto ad un'onda piana uniforme

Nel seguente paragrafo si vuole determinare, con il metodo proposto nei precedenti capitoli, l'efficacia di schermatura rispetto ad un'onda piana uniforme di uno strato piano infinitamente esteso.

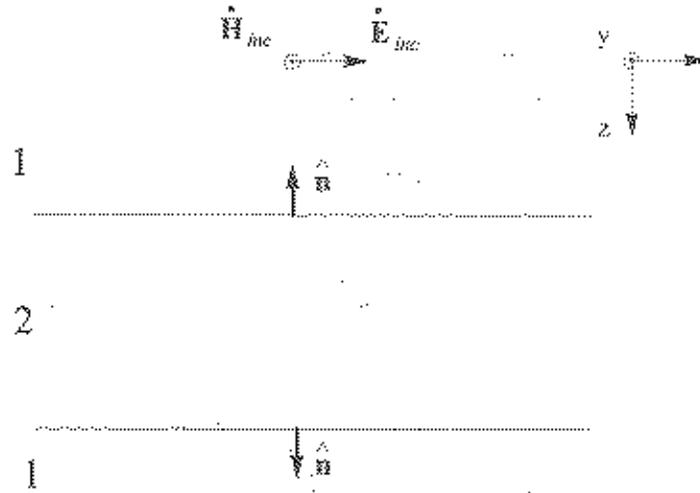


Fig. 1.— Strato piano infinitamente esteso.

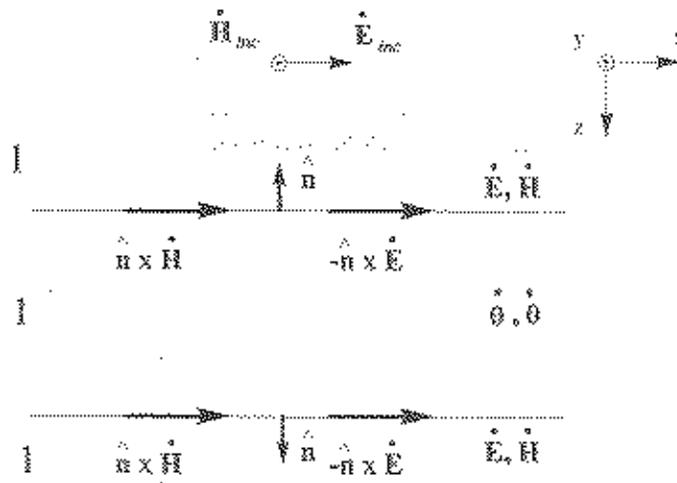


Fig. 2 —teorema di equivalenza per la regione di spazio occupata dall'aria.

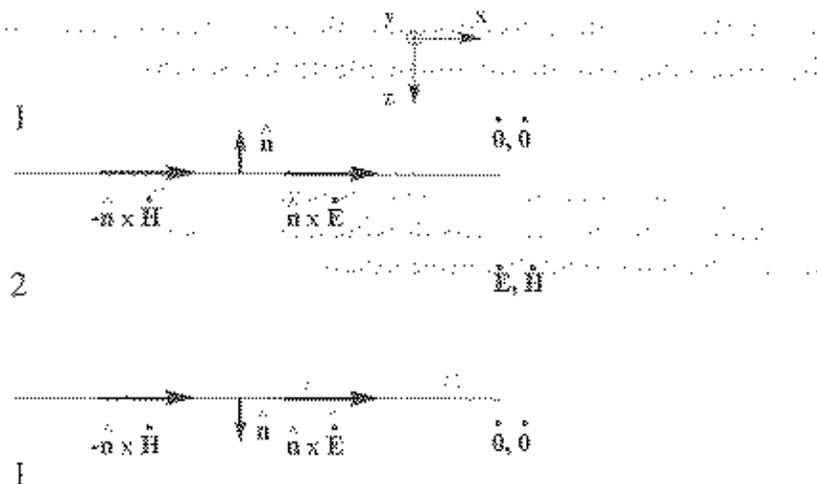


Fig. 3 - teorema di equivalenza per la regione di spazio occupata dallo schermo

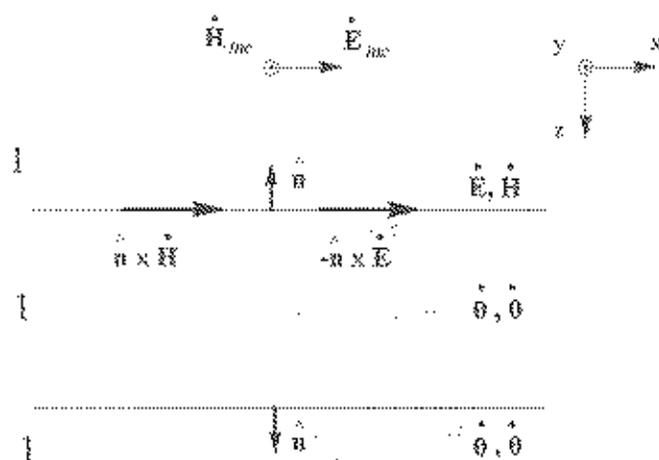


Fig. 4 - Formulazione alternativa del teorema di equivalenza per la regione di spazio occupata dall'aria all'interno dello schermo

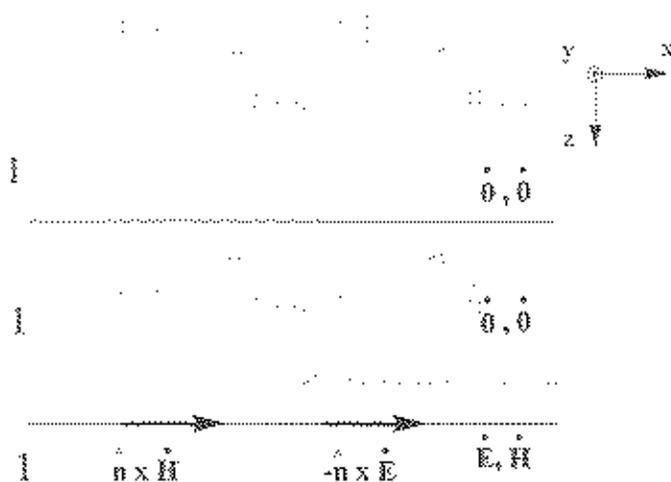


Fig. 5 - Formulazione alternativa del teorema di equivalenza per la regione di spazio occupata dall'aria all'esterno dello schermo

con un procedimento analogo a quello visto nel paragrafo precedente si ottiene la seguente espressione dell'efficacia di schermatura di uno strato piano di spessore finito  $s$  rispetto ad un'onda piana uniforme:

$$ES \triangleq \frac{\left| \frac{\dot{E}_{\text{senza lo schermo}}}{\dot{E}_{\text{con lo schermo}}} \right|}{\left| \frac{\dot{H}_{\text{senza lo schermo}}}{\dot{H}_{\text{con lo schermo}}} \right|} = \frac{\left| (1 + \dot{\alpha})^2 e^{(\dot{\sigma}_2 - \dot{\sigma}_1)s} - (1 - \dot{\alpha})^2 e^{-(\dot{\sigma}_2 + \dot{\sigma}_1)s} \right|}{4 |\dot{\alpha}|}$$

dove:

$$\dot{\sigma}_1 \triangleq j\omega \sqrt{\mu_1 \left( \epsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega} \right)}$$

$$\dot{\sigma}_2 \triangleq j\omega \sqrt{\mu_2 \left( \epsilon_2 + \frac{\gamma_2}{j\omega} \right)}$$

$$\dot{\alpha} \triangleq \frac{\sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2 + \frac{\gamma_2}{j\omega}}}}{\sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega}}}} = \frac{\dot{Z}_w}{\dot{Z}_s}$$

$$\dot{Z}_w \triangleq \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega}}} \quad \text{impedenza d'onda (impedenza del vuoto)}$$

$$\dot{Z}_s \triangleq \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2 + \frac{\gamma_2}{j\omega}}} \quad \text{impedenza dello schermo}$$

tale risultato può essere ottenuto andando a considerare il procedimento più canonico che considera le onde piane uniformi riflesse e trasmesse in corrispondenza delle superfici di interfaccia (App 6):

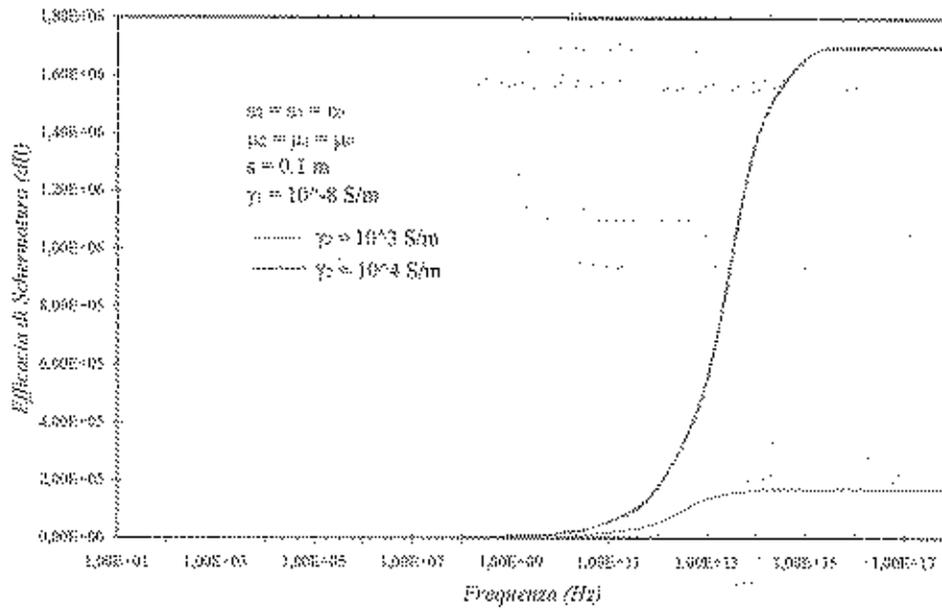


Fig. 6 -

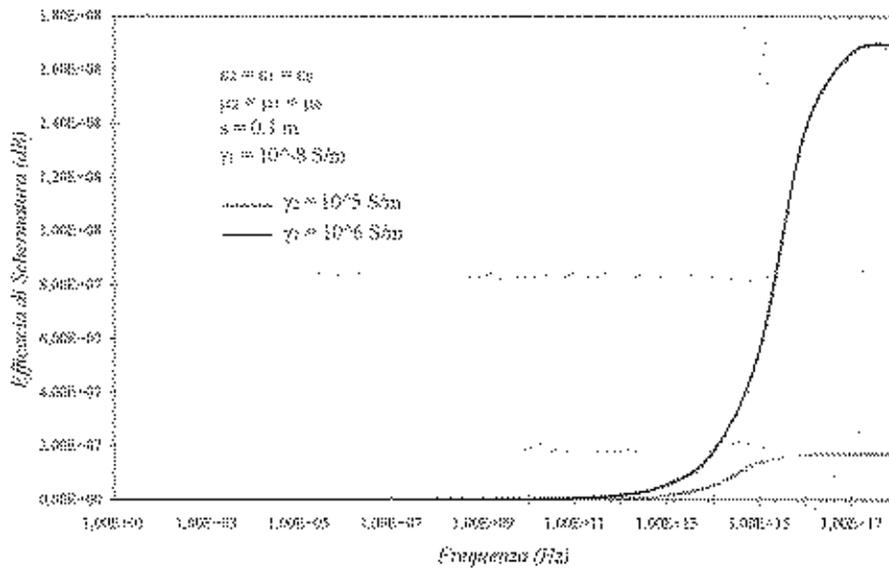


Fig. 7 -

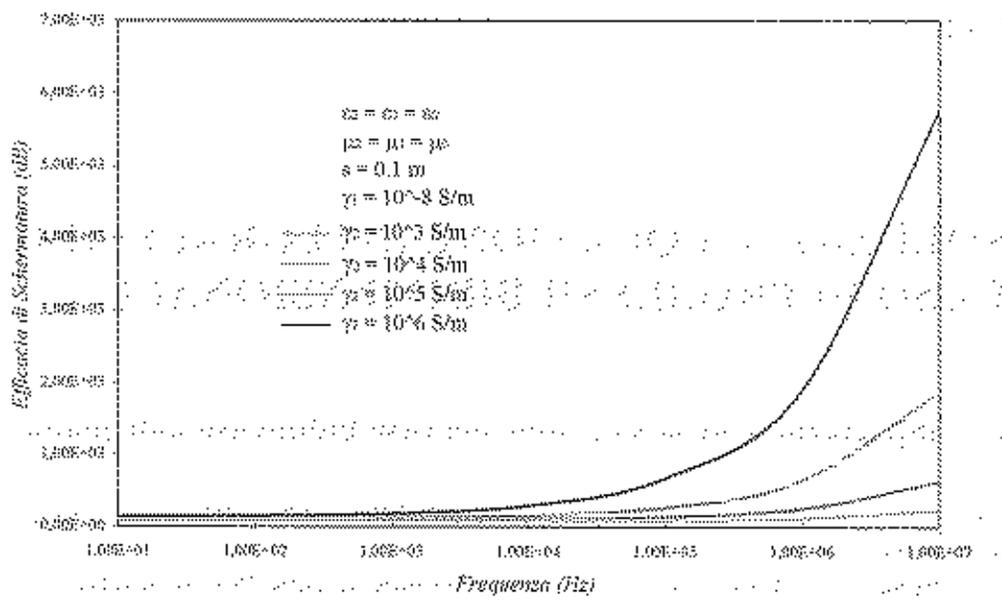


Fig. 8-

## Capitolo 3

# SOLUZIONE EQUAZIONE INTEGRALE NEL CASO DI PROBLEMI BIDIMENSIONALI

### 3.1 Impostazione della soluzione nel caso bidimensionale piano

Nel caso bidimensionale la soluzione analitica delle equazioni integro differenziali è proibitiva.

Tali equazioni si risolvono dunque discretizzando la superficie di interfaccia e considerando in ciascun elemento di superficie un'approssimazione

polinomiale di  $\mathbf{J}_s$  ed  $\mathbf{M}_s$ .

Gli integrali che definiscono i coefficienti del sistema lineare vengono valutati numericamente nel caso in cui la normale all'elemento di superficie non passa per il punto in cui si vuole calcolare il campo. Nel caso in cui la normale all'elemento di superficie passa per il punto in cui si vuole calcolare il campo, è possibile per alcuni termini un'integrazione analitica. Tale integrazione analitica consente tra l'altro di valutare con la massima rapidità e precisione gli integrali del sistema che tendono ad essere singolari.

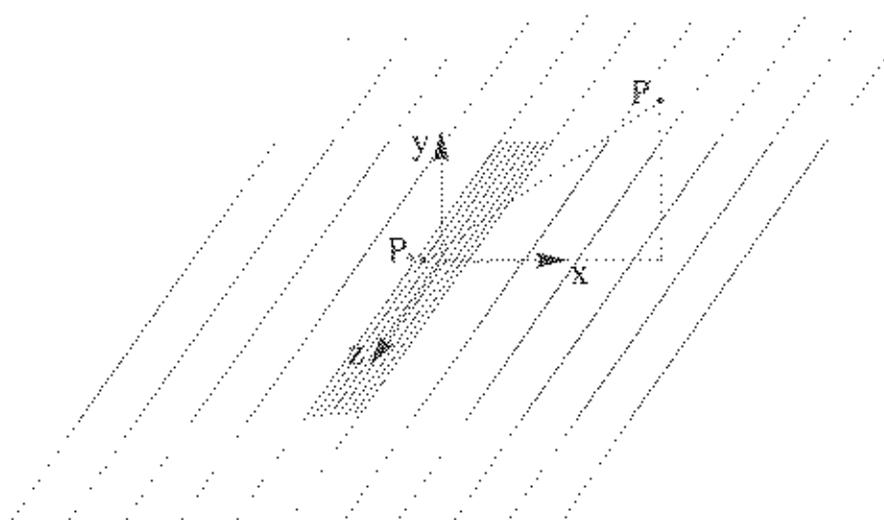


Fig. 3.1 - Caso 1) Elemento di superficie nel piano  $xz$ . La normale all'elemento di superficie non passa per il punto  $P$  in cui si vuole calcolare il campo.

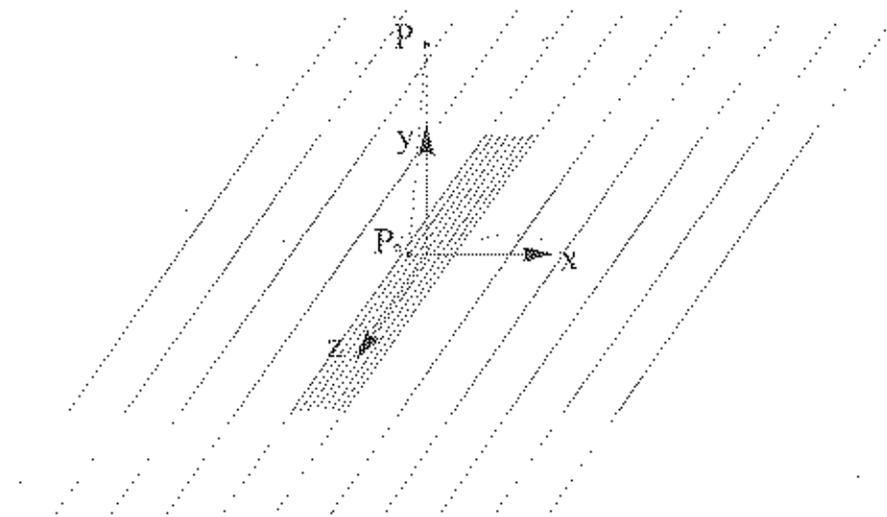


Fig. 3.2 --Caso 2) Elemento di superficie nel piano zx. La normale all'elemento di superficie passa per il punto P in cui si vuole calcolare il campo.

Nel caso bidimensionale le correnti superficiali situate sulla superficie di interfaccia possono essere dirette lungo l'asse z o nel piano x,y.

Facendo riferimento alle Figure (3.1) e (3.2), il contributo di tali correnti può essere determinato integrando lungo l'asse x il campo generato dalle seguenti sorgenti elementari:

- 1) corrente sinusoidale diretta lungo l'asse z
- 2) dipolo sinusoidale distribuito sull'asse z, e diretto lungo l'asse x.

Il campo generato da una corrente elettrica sinusoidale diretta lungo l'asse z è (App. 6):

$$\hat{\mathbf{E}}(P) = -\omega \frac{\mu \hat{I}}{4} \hat{\mathbf{H}}_0^{(2)}(-j \hat{\sigma} r) \hat{\mathbf{z}}$$

$$\hat{\mathbf{H}}(P) = -\frac{\hat{\sigma} \hat{I}}{4} \hat{\mathbf{H}}_1^{(2)}(-j \hat{\sigma} r) \hat{\phi}$$

dove  $\hat{\phi} = -\sin \varphi \hat{\mathbf{x}} + \cos \varphi \hat{\mathbf{y}}$ .

Conseguentemente, il campo generato in corrispondenza dell'asse y da una densità di corrente elettrica superficiale diretta lungo l'asse z e di spessore finito lungo l'asse x è dato dalla seguente espressione:

$$\hat{\mathbf{E}}(P) = -\omega \frac{\mu \hat{J}_z}{4} \hat{\mathbf{z}} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \hat{\mathbf{H}}_0^{(2)}\left(-j \hat{\sigma} \sqrt{x_0^2 + \delta^2}\right) dx_0$$

$$\hat{\mathbf{H}}(P) = -\frac{\hat{\sigma} \hat{I}_s}{4} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \hat{H}_1^{(2)} \left( -j \hat{\sigma} \sqrt{x_0^2 + \delta^2} \right) \left( -\frac{\delta}{\sqrt{x_0^2 + \delta^2}} \hat{x} - \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \delta^2}} \hat{y} \right) dx_0$$

dove si è posto  $z - z_0 = \delta$ .

Il caso duale è costituito dal campo generato da una corrente magnetica diretta lungo l'asse  $z$  e la sua espressione è data dalle seguenti equazioni :

$$\hat{\mathbf{H}}(P) = -\omega \frac{\left( \varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega} \right) \hat{K}}{4} \hat{H}_0^{(2)}(-j \hat{\sigma} r) \hat{z}$$

$$\hat{\mathbf{E}}(P) = \frac{\hat{\sigma} \hat{K}}{4} \hat{H}_1^{(2)}(-j \hat{\sigma} r) \hat{\varphi}$$

e quindi il campo generato in corrispondenza dell'asse  $y$  da una densità di corrente magnetica superficiale diretta lungo l'asse  $z$  e di spessore finito lungo l'asse  $x$  è:

$$\hat{\mathbf{H}}(P) = -\omega \frac{\mu \hat{K}_s}{4} \hat{z} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \hat{H}_0^{(2)} \left( -j \hat{\sigma} \sqrt{x_0^2 + \delta^2} \right) dx_0$$

$$\hat{\mathbf{E}}(P) = \frac{\hat{\sigma} \hat{K}_s}{4} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \hat{H}_1^{(2)} \left( -j \hat{\sigma} \sqrt{x_0^2 + \delta^2} \right) \left( -\frac{\delta}{\sqrt{x_0^2 + \delta^2}} \hat{x} - \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \delta^2}} \hat{y} \right) dx_0$$

Il campo generato da un dipolo elettrico sinusoidale distribuito lungo l'asse  $z$  e diretto lungo l'asse  $x$  è (App. 6):

$$\hat{\mathbf{E}}(P) = \frac{\hat{\sigma}}{4} \frac{\hat{I}}{j\omega \hat{\varepsilon}_c} \left\{ -\hat{H}_1^{(2)}(-j \hat{\sigma} r) \frac{\cos \varphi}{r} \hat{r} + \left[ \hat{H}_1^{(2)}(-j \hat{\sigma} r) + j \hat{\sigma} r \hat{H}_2^{(2)}(-j \hat{\sigma} r) \right] \frac{\sin \varphi}{r} \hat{\varphi} \right\}$$

$$\hat{\mathbf{H}}(P) = -\frac{\hat{\sigma} \hat{I}}{4} \hat{H}_1^{(2)}(-j \hat{\sigma} r) \sin \varphi \hat{z}$$

dove  $\hat{r} = \cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y}$ ,  $\hat{\varphi} = -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y}$ .

Il campo generato in corrispondenza dell'asse  $y$  da un dipolo elettrico sinusoidale di spessore finito distribuito lungo l'asse  $z$  e diretto lungo l'asse  $x$  è dato dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}(P) &= \frac{\dot{\sigma}}{4} \frac{\dot{J}_y}{j\omega \left( \varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega} \right)} \int_{-\frac{x_0}{2}}^{\frac{x_0}{2}} \left\{ -\dot{H}_1^{(2)} \left( -j\dot{\sigma} \sqrt{x_0^2 + \delta^2} \right) \frac{-x_0}{x_0^2 + \delta^2} \left( -\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \delta^2}} \hat{x} + \frac{\delta}{\sqrt{x_0^2 + \delta^2}} \hat{y} \right) + \right. \\ &+ \left. \left[ \dot{H}_1^{(2)} \left( -j\dot{\sigma} \sqrt{x_0^2 + \delta^2} \right) + j\dot{\sigma} \sqrt{x_0^2 + \delta^2} \dot{H}_2^{(2)} \left( -j\dot{\sigma} \sqrt{x_0^2 + \delta^2} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. \frac{\gamma}{x_0^2 + \delta^2} \left( -\frac{\delta}{\sqrt{x_0^2 + \delta^2}} \hat{x} - \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \delta^2}} \hat{y} \right) \right\} dx_0 \\ \dot{\mathbf{H}}(P) &= -\frac{\dot{\sigma}}{4} \dot{J}_y \hat{z} \int_{-\frac{x_0}{2}}^{\frac{x_0}{2}} \dot{H}_1^{(2)} \left( -j\dot{\sigma} \sqrt{x_0^2 + \delta^2} \right) \left( -\frac{\delta}{\sqrt{x_0^2 + \delta^2}} \hat{x} - \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \delta^2}} \hat{y} \right) dx_0 \end{aligned}$$

Il caso duale è costituito dal campo generato da un dipolo magnetico sinusoidale distribuito lungo l'asse z e diretto lungo l'asse x:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}(P) &= \frac{\dot{\sigma}}{4} \frac{\dot{K}_x}{j\omega\mu} \left\{ -\dot{H}_1^{(2)}(-j\dot{\sigma}r) \frac{\cos\varphi}{r} \hat{\mathbf{r}} + \left[ \dot{H}_1^{(2)}(-j\dot{\sigma}r) + j\dot{\sigma}r \dot{H}_2^{(2)}(-j\dot{\sigma}r) \right] \frac{\sin\varphi}{r} \hat{\boldsymbol{\phi}} \right\} \\ \dot{\mathbf{E}}(P) &= \frac{\dot{\sigma} \dot{K}_x}{4} \dot{H}_1^{(2)}(-j\dot{\sigma}r) \sin\varphi \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

e conseguentemente il campo generato in corrispondenza dell'asse y da un dipolo magnetico oscillante di spessore finito distribuito lungo l'asse z e diretto lungo l'asse x e:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}(P) &= \frac{\dot{\sigma}}{4} \frac{\dot{K}_x}{j\omega\mu} \int_{-\frac{x_0}{2}}^{\frac{x_0}{2}} \left\{ -\dot{H}_1^{(2)} \left( -j\dot{\sigma} \sqrt{x_0^2 + \delta^2} \right) \frac{-x_0}{x_0^2 + \delta^2} \left( -\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \delta^2}} \hat{x} + \frac{\delta}{\sqrt{x_0^2 + \delta^2}} \hat{y} \right) + \right. \\ &+ \left. \left[ \dot{H}_1^{(2)} \left( -j\dot{\sigma} \sqrt{x_0^2 + \delta^2} \right) + j\dot{\sigma} \sqrt{x_0^2 + \delta^2} \dot{H}_2^{(2)} \left( -j\dot{\sigma} \sqrt{x_0^2 + \delta^2} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. \frac{\delta}{x_0^2 + \delta^2} \left( -\frac{\delta}{\sqrt{x_0^2 + \delta^2}} \hat{x} - \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \delta^2}} \hat{y} \right) \right\} dx_0 \\ \dot{\mathbf{E}}(P) &= \frac{\dot{\sigma}}{4} \dot{K}_x \hat{z} \int_{-\frac{x_0}{2}}^{\frac{x_0}{2}} \dot{H}_1^{(2)} \left( -j\dot{\sigma} \sqrt{x_0^2 + \delta^2} \right) \left( -\frac{\delta}{\sqrt{x_0^2 + \delta^2}} \hat{x} - \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \delta^2}} \hat{y} \right) dx_0 \end{aligned}$$

## Capitolo 3

### 3.1 Efficacia di schermatura di un guscio cilindrico a sezione quadrata rispetto ad una corrente passante per l'asse.

Nel seguente paragrafo si vuole determinare, con il metodo proposto nei precedenti capitoli, l'efficacia di schermatura di un guscio cilindrico a sezione quadrata considerando come eccitazione una corrente elettrica sinusoidale passante per l'asse.

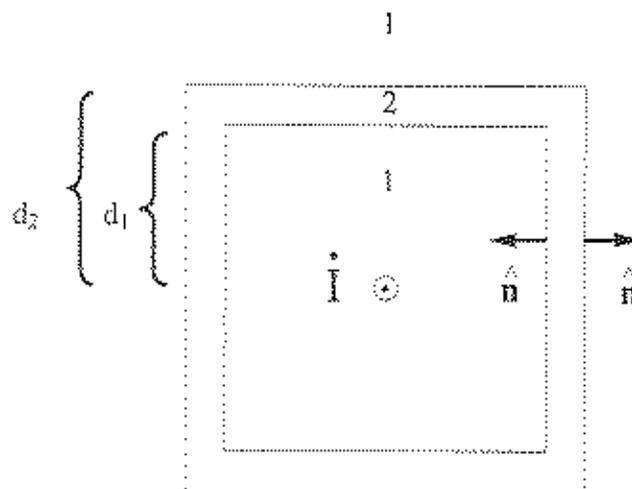


Fig. 3.1 – Struttura schermante cilindrica a sezione quadrata

Nel caso in esame le correnti superficiali che consentono di determinare il campo nella regione occupata dall'aria e in quella occupata dallo schermo, sono quelle evidenziate nelle Figure (3.2)-(3.5).

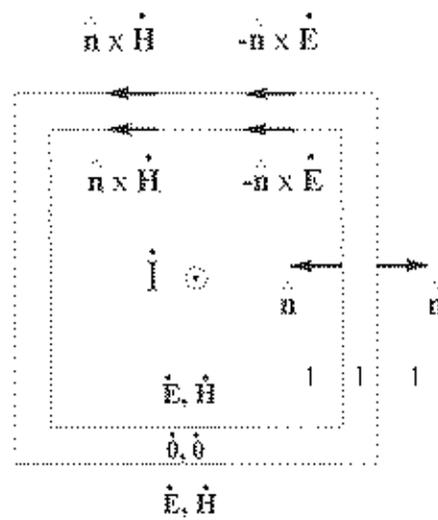


Fig.3.2 –Teorema di equivalenza per la regione di spazio occupata dall'aria.

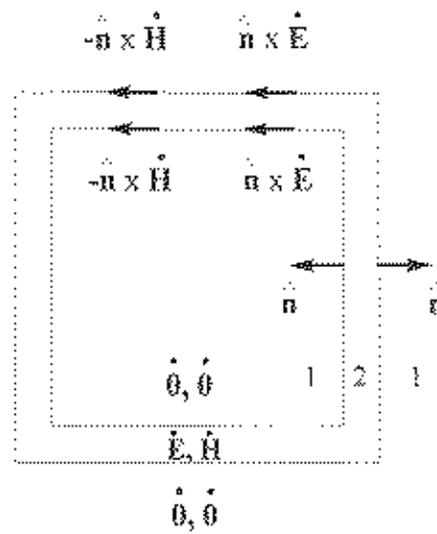


Fig.3.3 –Teorema di equivalenza per la regione di spazio occupata dallo schermo.

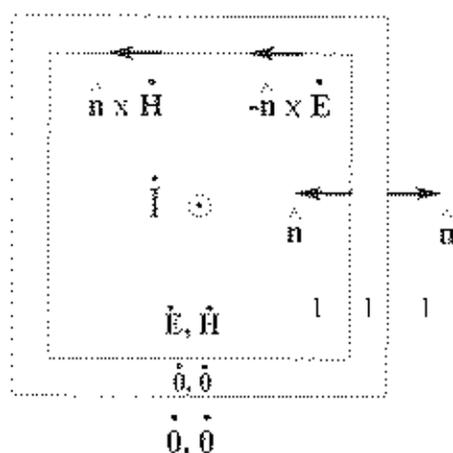


Fig.3.4 – Formulazione alternativa del teorema di equivalenza per la regione di spazio occupata dall'aria all'interno dello schermo.

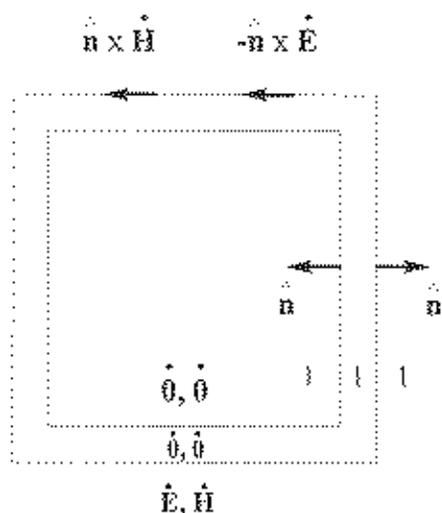


Fig.3.5 – Formulazione alternativa del teorema di equivalenza per la regione di spazio occupata dall'aria all'esterno dello schermo.

Nell'esempio considerato la soluzione analitica è proibitiva e quindi l'equazione integrale si risolve discretizzando la superficie di interfaccia e

considerando in ciascun elemento di superficie  $\hat{\mathbf{J}}_S = \text{cost}$  ed  $\hat{\mathbf{M}}_S = \text{cost}$ .

I risultati forniti dal codice realizzato sono stati confrontati con quelli forniti dal software agli elementi finiti Femlab ma i tempi di calcolo sono più elevati. Utilizzando un PC Pentium IV 1.80 GHz l'algoritmo realizzato è giunto a convergenza considerando 100 elementi di discretizzazione. Il tempo di calcolo è approssimativamente di 4 ore.

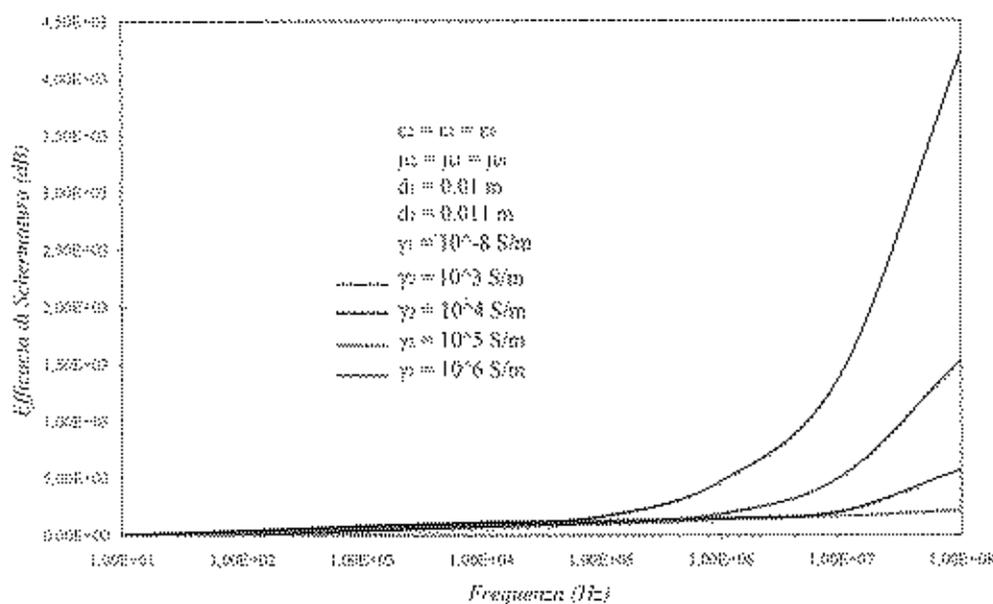


Fig. 3.6 – Efficacia di schermatura di un guscio cilindrico a sezione quadrata avente dimensioni  $d_1 = 0.01$  m,  $d_2 = 0.011$  m, per diversi valori della conducibilità dello schermo.

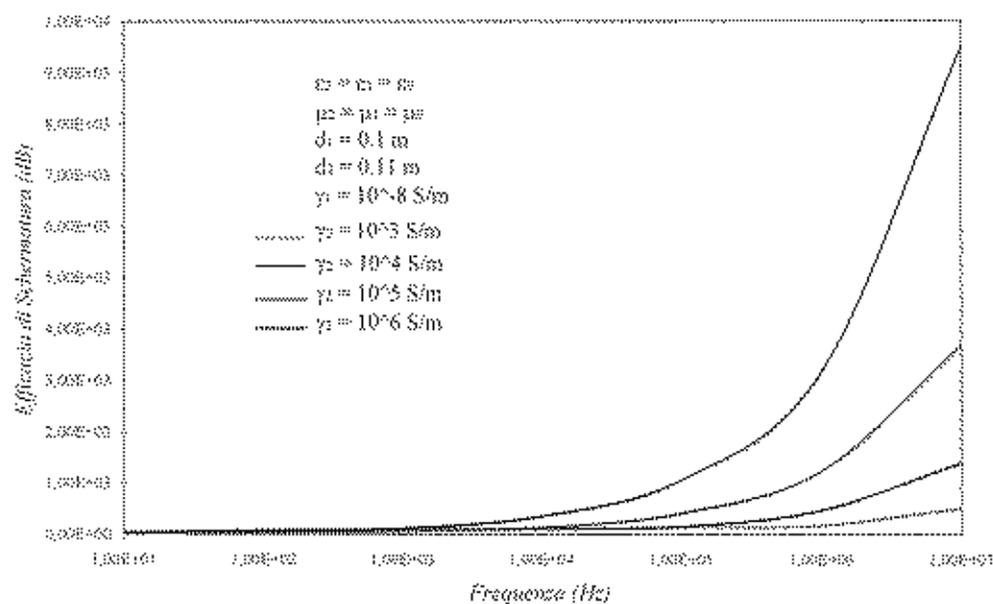


Fig. 3.7 – Efficacia di schermatura di un guscio cilindrico a sezione quadrata avente dimensioni  $d_1 = 0.1$  m,  $d_2 = 0.11$  m, per diversi valori della conducibilità dello schermo.

Le figure (3.6) e (3.7) rappresentano l'efficacia di schermatura di un guscio cilindrico a sezione quadrata in funzione della frequenza della corrente per diversi valori delle dimensioni dello schermo e della conducibilità dello stesso.

## Capitolo 4

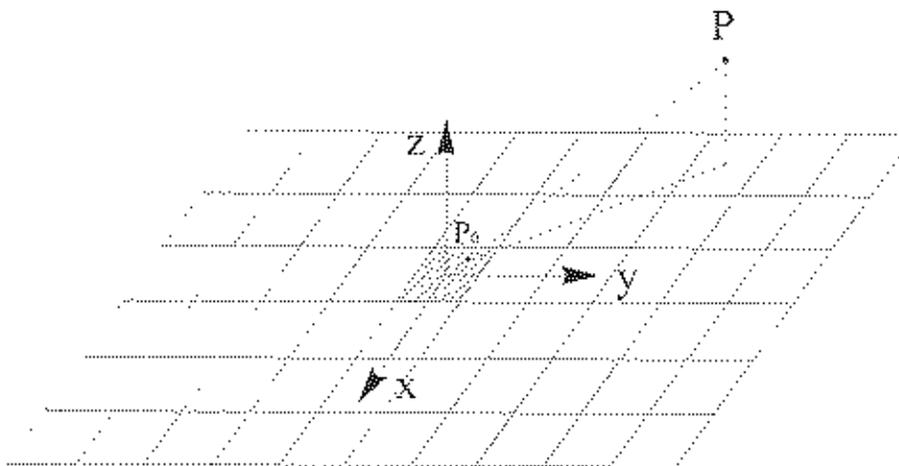
### SOLUZIONE EQUAZIONE INTEGRALE NEL CASO DI PROBLEMI TRIDIMENSIONALI

Nel caso tridimensionale la soluzione analitica è proibitiva e quindi si risolve l'equazione integrale discretizzando la superficie di interfaccia fra i due materiali e supponendo che sia  $\vec{J}_s(P_0) = \text{cost}$  in ciascun elemento.

Nel caso in cui la superficie di interfaccia è piana e l'elemento di discretizzazione coincide con il punto in cui si vuole calcolare il campo, per la risoluzione degli integrali si può ricorrere allo stesso procedimento analitico utilizzato nel caso monodimensionale.

Gli integrali che definiscono i coefficienti del sistema lineare vengono valutati numericamente tranne nei casi in cui la normale all'elemento di superficie passa per il punto in cui si vuole calcolare il campo. In tale situazione infatti è nuovamente possibile un'integrazione analitica che consente tra l'altro di valutare con la massima rapidità e precisione gli integrali del sistema che tendono ad essere singolari.

Consideriamo come esempio il caso in cui la superficie di interfaccia è diretta lungo gli assi  $x$  ed  $y$ :  
 se la normale all'elemento di superficie non passa per il punto in cui si vuole calcolare il campo



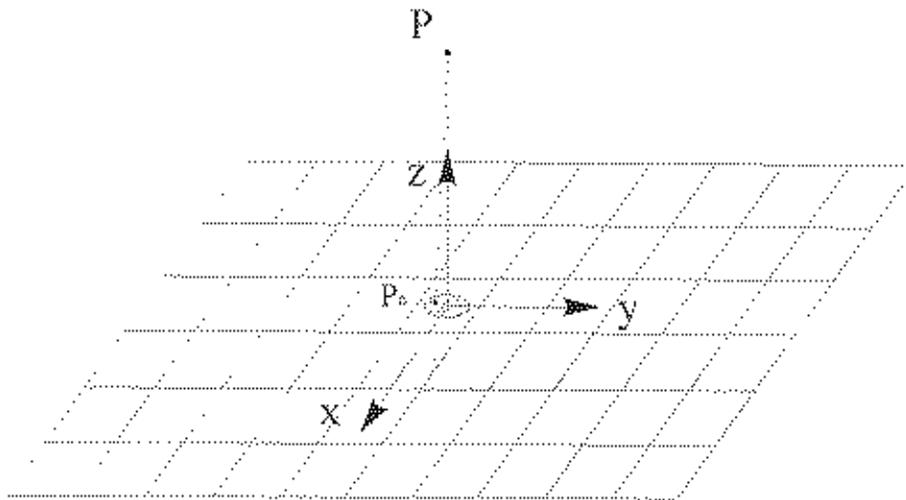
$$\dot{\mathbf{A}}(P) = \frac{\mu}{4\pi} \sum_{i=1}^N \mathbf{j}_{S_i} \int_{\Delta S_i} \frac{e^{-\hat{\rho}|P-P_0|}}{|P-P_0|} dx_0 dy_0$$

$$\mathbf{j}_{S_i} = \hat{\mathbf{j}}_{S_i,x} \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{j}}_{S_i,y} \hat{\mathbf{y}}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \dot{\mathbf{A}} &= \frac{\mu}{4\pi} \sum_{i=1}^N \nabla \times \left[ \mathbf{j}_{S_i} \int_{\Delta S_i} \frac{e^{-\hat{\rho}|P-P_0|}}{|P-P_0|} dx_0 dy_0 \right] = \frac{\mu}{4\pi} \sum_{i=1}^N \nabla \times \left[ \left( \hat{\mathbf{j}}_{S_i,x} \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{j}}_{S_i,y} \hat{\mathbf{y}} \right) \int_{\Delta S_i} \frac{e^{-\hat{\rho}|P-P_0|}}{|P-P_0|} dx_0 dy_0 \right] = \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \sum_{i=1}^N \left\{ \hat{\mathbf{j}}_{S_i,x} \nabla \times \left[ \hat{\mathbf{x}} \int_{\Delta S_i} \frac{e^{-\hat{\rho}|P-P_0|}}{|P-P_0|} dx_0 dy_0 \right] + \hat{\mathbf{j}}_{S_i,y} \nabla \times \left[ \hat{\mathbf{y}} \int_{\Delta S_i} \frac{e^{-\hat{\rho}|P-P_0|}}{|P-P_0|} dx_0 dy_0 \right] \right\} = \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \left[ \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{j}}_{S_i,x} \hat{\mathbf{y}} \int_{\Delta S_i} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{e^{-\hat{\rho}|P-P_0|}}{|P-P_0|} \right) dx_0 dy_0 - \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{j}}_{S_i,y} \hat{\mathbf{x}} \int_{\Delta S_i} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{e^{-\hat{\rho}|P-P_0|}}{|P-P_0|} \right) dx_0 dy_0 + \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{j}}_{S_i,y} \hat{\mathbf{z}} \int_{\Delta S_i} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{e^{-\hat{\rho}|P-P_0|}}{|P-P_0|} \right) dx_0 dy_0 - \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{j}}_{S_i,x} \hat{\mathbf{z}} \int_{\Delta S_i} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{e^{-\hat{\rho}|P-P_0|}}{|P-P_0|} \right) dx_0 dy_0 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \nabla \cdot \dot{\mathbf{A}} &= \frac{\mu}{4\pi} \sum_{i=1}^N \nabla \nabla \cdot \left[ \mathbf{j}_{S_i} \int_{\Delta S_i} \frac{e^{-\hat{\rho}|P-P_0|}}{|P-P_0|} dx_0 dy_0 \right] = \frac{\mu}{4\pi} \sum_{i=1}^N \nabla \nabla \cdot \left[ \left( \hat{\mathbf{j}}_{S_i,x} \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{j}}_{S_i,y} \hat{\mathbf{y}} \right) \int_{\Delta S_i} \frac{e^{-\hat{\rho}|P-P_0|}}{|P-P_0|} dx_0 dy_0 \right] = \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \left[ \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{j}}_{S_i,x} \hat{\mathbf{x}} \int_{\Delta S_i} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{e^{-\hat{\rho}|P-P_0|}}{|P-P_0|} \right) dx_0 dy_0 + \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{j}}_{S_i,y} \hat{\mathbf{y}} \int_{\Delta S_i} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{e^{-\hat{\rho}|P-P_0|}}{|P-P_0|} \right) dx_0 dy_0 + \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{j}}_{S_i,x} \hat{\mathbf{z}} \int_{\Delta S_i} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left( \frac{e^{-\hat{\rho}|P-P_0|}}{|P-P_0|} \right) dx_0 dy_0 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{j}}_{S_i,y} \hat{\mathbf{x}} \int_{\Delta S_i} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \left( \frac{e^{-\hat{\rho}|P-P_0|}}{|P-P_0|} \right) dx_0 dy_0 + \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{j}}_{S_i,y} \hat{\mathbf{y}} \int_{\Delta S_i} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{e^{-\hat{\rho}|P-P_0|}}{|P-P_0|} \right) dx_0 dy_0 + \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{j}}_{S_i,y} \hat{\mathbf{z}} \int_{\Delta S_i} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left( \frac{e^{-\hat{\rho}|P-P_0|}}{|P-P_0|} \right) dx_0 dy_0 \right] \end{aligned}$$

Invece se la normale all'elemento di superficie passa per il punto in cui si vuole calcolare il campo



$$\hat{\mathbf{j}}_s(P_0) \left[ \frac{\Delta z}{2} \int_{-\frac{\Delta r}{2}}^{\frac{\Delta r}{2}} \frac{e^{-\sigma|P-P_0|}}{|P-P_0|} dx_0 dy_0 \right]$$

$$|P - P_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

$$\hat{\mathbf{j}}_s(P_0) = \hat{j}_{s,x}(P_0) \hat{\mathbf{i}} + \hat{j}_{s,y}(P_0) \hat{\mathbf{j}}$$

sostituendo ad  $x_0$  ed  $y_0$  le coordinate polari  $r$  e  $\varphi$  si ha che:

$$\begin{cases} x_0 - x = r \cos \varphi \\ y_0 - y = r \sin \varphi \\ z - z_0 = \varepsilon \end{cases} \rightarrow dx_0 dy_0 = r dr d\varphi$$

quindi in una superficie circolare di raggio tale da essere contenuta all'interno dell'elemento di discretizzazione si ha che:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{e^{-\sigma\sqrt{r^2+\varepsilon^2}}}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}} r dr d\varphi = 2\pi \int_0^a \frac{e^{-\sigma\sqrt{r^2+\varepsilon^2}}}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}} r dr = *$$

effettuando il cambio di variabile:  $\alpha^2 = r^2 + \varepsilon^2 \rightarrow \alpha d\alpha = r dr$

$$\int_0^a \frac{e^{-\sigma\sqrt{r^2+\varepsilon^2}}}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}} r dr = \int_{|\varepsilon|}^{\sqrt{R^2+\varepsilon^2}} e^{-\sigma\alpha} d\alpha = \left[ -\frac{e^{-\sigma\alpha}}{\sigma} \right]_{|\varepsilon|}^{\sqrt{R^2+\varepsilon^2}} = -\frac{1}{\sigma} \left( e^{-\sigma\sqrt{R^2+\varepsilon^2}} - e^{-\sigma|\varepsilon|} \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{\sigma} (e^{-\sigma R} - 1)$$

$$* = -\frac{2\pi}{\sigma} (e^{-\sigma R} - 1)$$

$$\nabla \times \left[ \int_{\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \int_{\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \hat{\mathbf{j}}_s(P_0) \frac{e^{-\hat{\sigma}|P-P_0|}}{|P-P_0|} dx_0 dy_0 \right] = *$$

$$\hat{\mathbf{j}}_s(P_0) = \hat{\mathbf{j}}_{s,x}(P_0) \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{j}}_{s,y}(P_0) \hat{\mathbf{y}}$$

$$\begin{aligned} * &= \hat{\mathbf{j}}_{s,x}(P_0) \int_{\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \int_{\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \nabla \times \left[ \frac{e^{-\hat{\sigma}|P-P_0|}}{|P-P_0|} \hat{\mathbf{x}} \right] dx_0 dy_0 + \hat{\mathbf{j}}_{s,y}(P_0) \int_{\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \int_{\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \nabla \times \left[ \frac{e^{-\hat{\sigma}|P-P_0|}}{|P-P_0|} \hat{\mathbf{y}} \right] dx_0 dy_0 = * \\ &\int_{\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \int_{\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \nabla \times \left[ \frac{e^{-\hat{\sigma}|P-P_0|}}{|P-P_0|} \hat{\mathbf{x}} \right] dx_0 dy_0 = \hat{\mathbf{y}} \int_{\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \int_{\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{e^{-\hat{\sigma}|P-P_0|}}{|P-P_0|} \right) dx_0 dy_0 - \hat{\mathbf{z}} \int_{\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \int_{\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{e^{-\hat{\sigma}|P-P_0|}}{|P-P_0|} \right) dx_0 dy_0 \\ &\int_{\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \int_{\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \nabla \times \left[ \frac{e^{-\hat{\sigma}|P-P_0|}}{|P-P_0|} \hat{\mathbf{y}} \right] dx_0 dy_0 = \hat{\mathbf{z}} \int_{\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \int_{\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{e^{-\hat{\sigma}|P-P_0|}}{|P-P_0|} \right) dx_0 dy_0 - \hat{\mathbf{x}} \int_{\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \int_{\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{e^{-\hat{\sigma}|P-P_0|}}{|P-P_0|} \right) dx_0 dy_0 \\ &\int_{\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \int_{\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{e^{-\hat{\sigma}|P-P_0|}}{|P-P_0|} \right) dx_0 dy_0 = - \int_{\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \int_{\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \frac{e^{-\hat{\sigma}|P-P_0|}}{|P-P_0|} \left( \frac{\sigma}{|P-P_0|} + \frac{1}{|P-P_0|^3} \right) (z - z_0) dx_0 dy_0 = * \end{aligned}$$

sostituendo alle coordinate cartesiane  $x_0$  e  $y_0$  le coordinate polari  $r$  ed  $\varphi$  e valutando l'integrale di superficie in una superficie circolare di raggio  $R$  tale da essere contenuta all'interno dell'elemento di discretizzazione si ha che:

$$* = - \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{e^{-\hat{\sigma}\sqrt{r^2+\epsilon^2}}}{\sqrt{r^2+\epsilon^2}} \left( \frac{\sigma}{\sqrt{r^2+\epsilon^2}} + \frac{1}{r^2+\epsilon^2} \right) \epsilon r dr d\varphi = -2\pi\epsilon \int_0^R \frac{e^{-\hat{\sigma}\sqrt{r^2+\epsilon^2}}}{\sqrt{r^2+\epsilon^2}} \left( \frac{\sigma}{\sqrt{r^2+\epsilon^2}} + \frac{1}{r^2+\epsilon^2} \right) r dr = *$$

effettuando il cambio di variabile:  $\alpha^2 = r^2 + \epsilon^2$

$$* = -2\pi\epsilon \int_{\epsilon}^{\sqrt{R^2+\epsilon^2}} e^{-\hat{\sigma}\alpha} \left( \frac{\sigma}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \right) d\alpha = *$$

$$\int_{\epsilon}^{\sqrt{R^2+\epsilon^2}} e^{-\hat{\sigma}\alpha} \left( \frac{\sigma}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \right) d\alpha = \left[ -\frac{e^{-\hat{\sigma}\alpha}}{\alpha} \right]_{\epsilon}^{\sqrt{R^2+\epsilon^2}} = -\frac{e^{-\hat{\sigma}\sqrt{R^2+\epsilon^2}}}{\sqrt{R^2+\epsilon^2}} + \frac{e^{-\hat{\sigma}\epsilon}}{\epsilon}$$

$$* = -2\pi\epsilon \left[ -\frac{e^{-\hat{\sigma}\sqrt{R^2+\epsilon^2}}}{\sqrt{R^2+\epsilon^2}} + \frac{e^{-\hat{\sigma}\epsilon}}{\epsilon} \right] = \begin{cases} -2\pi & \text{se } \epsilon \rightarrow 0^+ \\ 2\pi & \text{se } \epsilon \rightarrow 0^- \end{cases}$$

$$\int_{\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \int_{\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{e^{-\hat{\sigma}|P-P_0|}}{|P-P_0|} \right) dx_0 dy_0 = - \int_{\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \int_{\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \frac{e^{-\hat{\sigma}|P-P_0|}}{|P-P_0|} \left( \frac{\sigma}{|P-P_0|} + \frac{1}{|P-P_0|^3} \right) (y - y_0) dx_0 dy_0$$

sostituendo alle coordinate cartesiane  $x$  ed  $y_0$  le coordinate polari  $r$  ed  $\varphi$  e valutando l'integrale di superficie in una superficie circolare di raggio  $R$  tale da essere contenuta all'interno dell'elemento di discretizzazione si ha che:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{e^{-\sigma\sqrt{r^2+\varepsilon^2}}}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}} \left( \frac{\sigma}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}} + \frac{1}{r^2+\varepsilon^2} \right) r \sin\varphi r dr d\varphi \Big|_{r \cos\varphi = 0} = \hat{0}$$

$$\int_{\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \int_{\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{e^{-\hat{\sigma}|P-P_0|}}{|P-P_0|} \right) dx_0 dy_0 = - \int_{\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \int_{\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \frac{e^{-\hat{\sigma}|P-P_0|}}{|P-P_0|} \left( \frac{\hat{\sigma}}{|P-P_0|} + \frac{1}{|P-P_0|^2} \right) (x-x_0) dx_0 dy_0$$

sostituendo alle coordinate cartesiane  $x$  ed  $y_0$  le coordinate polari  $r$  ed  $\varphi$  e valutando l'integrale di superficie in una superficie circolare di raggio  $R$  tale da essere contenuta all'interno dell'elemento di discretizzazione si ha che:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{e^{-\hat{\sigma}\sqrt{r^2+\varepsilon^2}}}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}} \left( \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}} + \frac{1}{r^2+\varepsilon^2} \right) r \cos\varphi r dr d\varphi \Big|_{r \cos\varphi = 0} = \hat{0}$$

in definitiva si ha:

$$\iint_{S_\varepsilon} \nabla \times \left[ \frac{e^{-\hat{\sigma}|P-P_0|}}{|P-P_0|} \hat{\mathbf{i}} \right] dx_0 dy_0 = \begin{cases} -2\pi \hat{\mathbf{j}} & \text{se } \varepsilon \rightarrow 0^+ \\ 2\pi \hat{\mathbf{j}} & \text{se } \varepsilon \rightarrow 0^- \dots \dots \end{cases}$$

$$\iint_{S_\varepsilon} \nabla \times \left[ \frac{e^{-\hat{\sigma}|P-P_0|}}{|P-P_0|} \hat{\mathbf{i}} \right] dx_0 dy_0 = \begin{cases} 2\pi \hat{\mathbf{i}} & \text{se } \varepsilon \rightarrow 0^+ \\ -2\pi \hat{\mathbf{i}} & \text{se } \varepsilon \rightarrow 0^- \end{cases}$$

$$\nabla \times \left[ \iint_{S_\varepsilon} \hat{\mathbf{j}}_S(P_0) \frac{e^{-\hat{\sigma}|P-P_0|}}{|P-P_0|} dx_0 dy_0 \right] = \begin{cases} 2\pi \left( -\hat{\mathbf{j}}_{S_x}(P_0) \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{j}}_{S_y}(P_0) \hat{\mathbf{i}} \right) & \text{se } \varepsilon \rightarrow 0^+ \\ 2\pi \left( \hat{\mathbf{j}}_{S_x}(P_0) \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{j}}_{S_y}(P_0) \hat{\mathbf{i}} \right) & \text{se } \varepsilon \rightarrow 0^- \end{cases}$$

$$\nabla \nabla \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{j}}_S(P_0) \frac{e^{-\hat{\sigma}|P-P_0|}}{|P-P_0|} dx_0 dy_0 \right] = *$$

$$\hat{\mathbf{j}}_S(P_0) = \hat{\mathbf{j}}_{S_x}(P_0) \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}_{S_y}(P_0) \hat{\mathbf{j}}$$

$$* = \hat{\mathbf{j}}_{S_x}(P_0) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \nabla \nabla \left[ \frac{e^{-\hat{\sigma}|P-P_0|}}{|P-P_0|} \hat{\mathbf{i}} \right] dx_0 dy_0 + \hat{\mathbf{j}}_{S_y}(P_0) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \nabla \nabla \left[ \frac{e^{-\hat{\sigma}|P-P_0|}}{|P-P_0|} \hat{\mathbf{j}} \right] dx_0 dy_0 = *$$

$$\int_{\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \int_{\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \nabla \nabla \cdot \left[ \frac{e^{-\sigma|P-P_0|}}{|P-P_0|} \hat{i} \right] dx_0 dy_0 = \hat{i} \int_{\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \int_{\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{e^{-\sigma|P-P_0|}}{|P-P_0|} \right) dx_0 dy_0 +$$

$$\hat{j} \int_{\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \int_{\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{e^{-\sigma|P-P_0|}}{|P-P_0|} \right) dx_0 dy_0 +$$

$$\hat{k} \int_{\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \int_{\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left( \frac{e^{-\sigma|P-P_0|}}{|P-P_0|} \right) dx_0 dy_0$$

$$\int_{\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \int_{\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \nabla \times \left[ \frac{e^{-\sigma|P-P_0|}}{|P-P_0|} \hat{j} \right] dx_0 dy_0 = \hat{i} \int_{\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \int_{\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \left( \frac{e^{-\sigma|P-P_0|}}{|P-P_0|} \right) dx_0 dy_0 +$$

$$\hat{j} \int_{\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \int_{\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{e^{-\sigma|P-P_0|}}{|P-P_0|} \right) dx_0 dy_0 +$$

$$\hat{k} \int_{\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \int_{\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left( \frac{e^{-\sigma|P-P_0|}}{|P-P_0|} \right) dx_0 dy_0$$

$$\int_{\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \int_{\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{e^{-\sigma|P-P_0|}}{|P-P_0|} \right) dx_0 dy_0 = \int_{\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \int_{\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \left[ -\frac{e^{-\sigma|P-P_0|}}{|P-P_0|} \left( \frac{\sigma}{|P-P_0|} + \frac{1}{|P-P_0|^3} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{(z-z_0)^2}{|P-P_0|^3} \frac{e^{-\sigma|P-P_0|}}{|P-P_0|} \left( \sigma^2 + \frac{3\sigma}{|P-P_0|} + \frac{3}{|P-P_0|^2} \right) \right] dx_0 dy_0 = *$$

sostituendo alle coordinate cartesiane  $x_0$  ed  $y_0$  le coordinate polari  $r$  ed  $\varphi$ :

$$* = \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[ -\frac{e^{-\sigma\sqrt{r^2+\varepsilon^2}}}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}} \left( \frac{\sigma}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}} + \frac{1}{r^2+\varepsilon^2} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{r^2 \cos^2 \varphi}{r^2+\varepsilon^2} \frac{e^{-\sigma\sqrt{r^2+\varepsilon^2}}}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}} \left( \sigma^2 + \frac{3\sigma}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}} + \frac{3}{r^2+\varepsilon^2} \right) \right] r dr d\varphi =$$

$$= 2\pi \int_0^a \left[ -\frac{e^{-\sigma\sqrt{r^2+\varepsilon^2}}}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}} \left( \frac{\sigma}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}} + \frac{1}{r^2+\varepsilon^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{r^2}{r^2+\varepsilon^2} \frac{e^{-\sigma\sqrt{r^2+\varepsilon^2}}}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}} \left( \sigma^2 + \frac{3\sigma}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}} + \frac{3}{r^2+\varepsilon^2} \right) \right] r dr = *$$

effettuando il cambio di variabile:  $\alpha^2 := r^2 + \varepsilon^2$

$$\begin{aligned}
 * &= 2\pi \int_{\alpha}^{\sqrt{R^2-\epsilon^2}} \left[ -\frac{e^{-\sigma\alpha}}{\alpha} \left( \frac{\sigma}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\alpha^2 - \epsilon^2}{\alpha^2} \frac{e^{-\sigma\alpha}}{\alpha} \left( \sigma^2 + \frac{3\sigma}{\alpha} + \frac{3}{\alpha^2} \right) \right] \alpha d\alpha = \\
 &= 2\pi \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\sqrt{R^2-\epsilon^2}} \left[ e^{-\sigma\alpha} \left( \sigma^2 + \frac{\sigma}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \right) - \epsilon^2 \frac{e^{-\sigma\alpha}}{\alpha^2} \left( \sigma^2 + \frac{3\sigma}{\alpha} + \frac{3}{\alpha^2} \right) \right] d\alpha = \\
 &= 2\pi \frac{1}{2} \left[ -\frac{e^{-\sigma\alpha}}{\alpha} (1 + \sigma\alpha) + \epsilon^2 \frac{e^{-\sigma\alpha}}{\alpha^2} (1 + \sigma\alpha) \right]_{\alpha}^{\sqrt{R^2-\epsilon^2}} = \\
 &= 2\pi \frac{1}{2} \left[ -\frac{e^{-\sigma R}}{\alpha} (\alpha^2 - \epsilon^2) (1 + \sigma\alpha) \right]_{\alpha}^{\sqrt{R^2-\epsilon^2}} = \\
 &= -\pi R^2 \frac{e^{-\sigma\sqrt{R^2-\epsilon^2}}}{(R^2 + \epsilon^2)^{3/2}} (1 + \sigma\sqrt{R^2 + \epsilon^2}) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} -\pi R^2 \frac{e^{-\sigma R}}{R^3} (1 + \sigma R)
 \end{aligned}$$

$$\int_{\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \int_{\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{e^{-\sigma|P-P_0|}}{|P-P_0|} \right) dx_0 dy_0 = \int_{\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \int_{\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{|P-P_0|^3} \frac{e^{-\sigma|P-P_0|}}{|P-P_0|} \left( \sigma^2 + \frac{3\sigma}{|P-P_0|} + \frac{3}{|P-P_0|^2} \right) dx_0 dy_0 = *$$

sostituendo alle coordinate cartesiane  $x_0$  e  $y_0$  le coordinate polari  $r$  ed  $\varphi$ :

$$* = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^R \frac{r^3 \sin\varphi \cos\varphi}{r^2 + \epsilon^2} \frac{e^{-\sigma\sqrt{r^2+\epsilon^2}}}{\sqrt{r^2+\epsilon^2}} \left( \sigma^2 + \frac{3\sigma}{\sqrt{r^2+\epsilon^2}} + \frac{3}{r^2+\epsilon^2} \right) r dr d\varphi \Big|_{\int_{-\pi}^{\pi} \sin\varphi \cos\varphi d\varphi = 0} = \hat{0}$$

$$\int_{\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \int_{\frac{\Delta z}{2}}^{\frac{\Delta z}{2}} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left( \frac{e^{-\sigma|P-P_0|}}{|P-P_0|} \right) dx_0 dz_0 = \int_{\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \int_{\frac{\Delta z}{2}}^{\frac{\Delta z}{2}} \frac{(x-x_0)(z-z_0)}{|P-P_0|^3} \frac{e^{-\sigma|P-P_0|}}{|P-P_0|} \left( \sigma^2 + \frac{3\sigma}{|P-P_0|} + \frac{3}{|P-P_0|^2} \right) dx_0 dz_0 = *$$

sostituendo alle coordinate cartesiane  $x_0$  e  $y_0$  le coordinate polari  $r$  ed  $\varphi$ :

$$* = \int_0^{\pi} \int_0^R \frac{r^3 \sin\varphi}{r^2 + \epsilon^2} \frac{e^{-\sigma\sqrt{r^2+\epsilon^2}}}{\sqrt{r^2+\epsilon^2}} \left( \sigma^2 + \frac{3\sigma}{\sqrt{r^2+\epsilon^2}} + \frac{3}{r^2+\epsilon^2} \right) r dr d\varphi \Big|_{\int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi = 0} = \hat{0}$$

$$\int_{\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \int_{\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \nabla \cdot \left[ \frac{e^{-\sigma|P-P_0|}}{|P-P_0|} \hat{\mathbf{i}} \right] dx_0 dy_0 = -\pi \frac{e^{-\sigma R}}{R} (1 + \sigma R) \hat{\mathbf{i}}$$

## CONCLUSIONI

Nel lavoro svolto si propone un modello differenziale che consente di analizzare schermi reali, per forma e materiale, valido per materiali lineari, omogenei, isotropi, tempo invarianti in regime sinusoidale con frequenza qualsiasi purché non nulla.

Il procedimento utilizzato si basa sul teorema di equivalenza e sul principio di sovrapposizione degli effetti. Esso consente di definire il problema separatamente nella regione di spazio occupata dall'aria ed in quella occupata dallo schermo introducendo correnti superficiali incognite situate sulla superficie di interfaccia fra i due materiali.

Imponendo la continuità della componente tangente del campo elettromagnetico attraverso la superficie di interfaccia fra le due regioni si ottengono due equazioni vettoriali integro differenziali nelle incognite del problema costituite dalle correnti superficiali.

Nel caso monodimensionale le correnti superficiali sono costanti in ogni punto della superficie di interfaccia e quindi in tale situazione l'approccio proposto costituisce un vero e proprio metodo di

soluzione analitica delle equazioni di Maxwell in quanto è stato possibile ricavare le primitive dei vari termini delle equazioni integro differenziali e ricondursi così alla soluzione di un sistema lineare non omogeneo di equazioni algebriche.

Invece nel caso bidimensionale e tridimensionale le correnti superficiali non sono costanti e quindi per ricondursi ad un sistema di equazioni algebriche si è ricorso ad una discretizzazione della superficie di interfaccia e ad un'approssimazione polinomiale delle correnti incognite in ciascun elemento di superficie.

Gli integrali che definiscono i coefficienti del sistema lineare vengono valutati numericamente tranne nei casi in cui la normale all'elemento di superficie passa per il punto in cui si vuole calcolare il campo. In tale situazione infatti è nuovamente possibile un'integrazione analitica che consente tra l'altro di valutare con la massima rapidità e precisione gli integrali del sistema che tendono ad essere singolari.

Il modello è stato implementato in un codice di calcolo che è stato sottoposto a verifica confrontandone i risultati con quelli forniti da altri metodi di analisi. Nel caso bidimensionale si è esaminato il problema di una struttura cilindrica avente sezione rettangolare e spessore finito, contenente una corrente elettrica sinusoidale oppure una coppia di correnti elettriche parallele, isofrequenziali, uguali in modulo e aventi verso opposto. Nel caso tridimensionale si è invece esaminato il problema di una struttura parallelepipeda di

dimensione e spessore finiti, contenente un dipolo sinusoidale, elettrico o magnetico.

Nel caso bidimensionale i risultati ottenuti sono in ottimo accordo con quelli ricavati da metodi già consolidati mentre nel caso tridimensionale il codice realizzato fornisce risultati accettabili, ma presenta problemi di convergenza e i tempi di calcolo divengono elevati, tanto da mettere in discussione l'utilità di questo approccio al problema. In pratica la caratterizzazione completa del metodo potrà avvenire solamente dopo ulteriore attività di ricerca finalizzata sia a risolvere le difficoltà di convergenza, la cui causa non è ancora completamente chiarita, sia a effettuare valutazioni comparative con altri metodi, in particolare con quelli ad elementi finiti, su varie classi di problemi.

