Appendice 1

SISTEMI DI COORDINATE ORTOGONALI

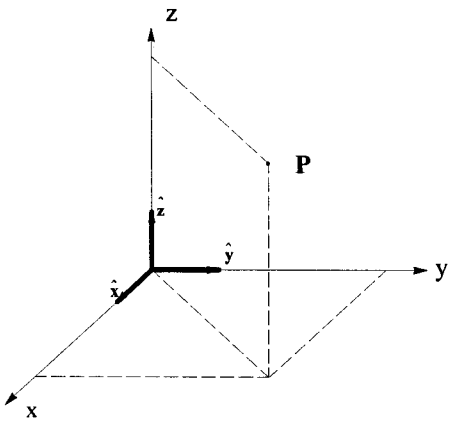
Coordinate ortogonali cartesiane

$$dV = dx\,dy\,dz$$

$$dS = dx\,dy \quad \textit{oppure} \quad dS = dy\,dz \quad \textit{oppure} \quad dS = dz dx$$

($\mathbf{f} = f_x\,\hat{\mathbf{x}} + f_y\,\hat{\mathbf{y}} + f_z\,\hat{\mathbf{z}}$ è una funzione vettoriale, f è una funzione scalare)

(I versori degli assi sono indicati da $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$)



$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{f} = \nabla^2 f_x \hat{\mathbf{x}} + \nabla^2 f_y \hat{\mathbf{y}} + \nabla^2 f_z \hat{\mathbf{z}}$$

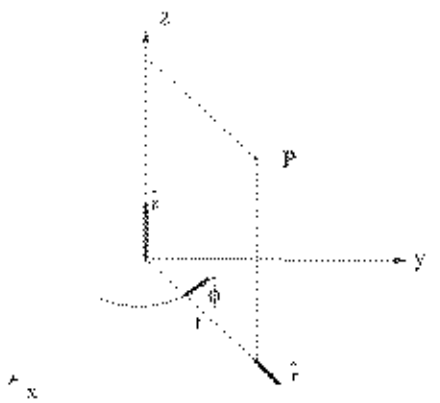
$$\nabla^2 \mathbf{f} = -\nabla \times \nabla \times \mathbf{f} + \nabla \nabla \cdot \mathbf{f}$$

Coordinate ortogonali cilindriche

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi & r \in [0, +\infty[\\ y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi & \varphi \in [0, 2\pi[\\ z = z & z \in]-\infty, +\infty[\end{cases} \qquad \begin{aligned} dV &= R\,dR\,d\varphi\,dz \\ dS &= R\;d\varphi\,dz \end{aligned}$$

($\mathbf{f} = f_r\,\hat{\mathbf{r}} + f_\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} + f_z\,\hat{\mathbf{z}}$ è una funzione vettoriale, f è una funzione scalare)

(I versori degli assi sono indicati da $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\varphi}}, \hat{\mathbf{z}}$)



$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r f_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial f_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{f} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & r\hat{\boldsymbol{\varphi}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_r & r f_\varphi & f_z \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial f_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial f_\varphi}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{\partial f_r}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial r}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r f_\varphi) - \frac{\partial f_r}{\partial \varphi}\right)\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{f} = \left(\nabla^2 f_r - \frac{f_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial f_\varphi}{\partial \varphi}\right)\hat{\mathbf{r}} + \left(\nabla^2 f_\varphi - \frac{f_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial f_r}{\partial \varphi}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \nabla^2 f_z\,\hat{\mathbf{z}}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -sen\varphi & 0 \\ sen\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{r}} \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{pmatrix}$$

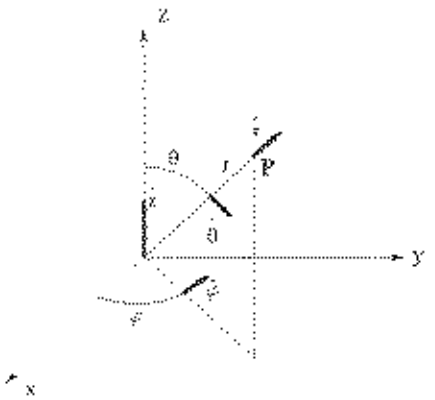
$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{r}} \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & sen\varphi & 0 \\ -sen\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{pmatrix}$$

Coordinate ortogonali sferiche

$$\begin{cases} x = r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi & r \in [0, +\infty[\\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi & \theta \in [0, \pi[\\ z = r\cos\theta & \varphi \in [0, 2\pi[\end{cases} \qquad dV = r^2 sen\theta\, dR\, d\varphi\, d\theta$$
$$\therefore dS = r^2 sen\theta\, d\varphi\, d\theta$$

($\mathbf{f} = f_r\,\hat{\mathbf{r}} + f_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + f_\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ è una funzione vettoriale, f è una funzione scalare)

(I versori degli assi sono indicati da $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\varphi}}$)



$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 f_r\right) + \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen\theta f_\theta\right) + \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial f_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\nabla \times \mathbf{f} = \frac{1}{r^2 sen\theta}\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & r\hat{\boldsymbol{\theta}} & rsen\theta\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ f_r & rf_\theta & rsen\theta f_\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{rsen\theta}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen\theta f_\varphi\right) - \frac{\partial f_\theta}{\partial \varphi}\right)\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{sen\theta}\frac{\partial f_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(rf_\varphi\right)\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(rf_\theta\right) - \frac{\partial f_r}{\partial \theta}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2 sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2 sen^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$$

$$\nabla^2\mathbf{f} = \left(\nabla^2 f_r - \frac{2}{r^2}f_r - \frac{2}{r^2 sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\theta f_\theta\right) - \frac{2}{r^2 sen\theta}\frac{\partial f_\varphi}{\partial\varphi}\right)\hat{\mathbf{r}} +$$
$$+\left(\nabla^2 f_\theta - \frac{f_\theta}{r^2 sen^2\theta}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial f_r}{\partial\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2 sen^2\theta}\frac{\partial f_\varphi}{\partial\varphi}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}}+$$
$$+\left(\nabla^2 f_\varphi - \frac{f_\varphi}{r^2 sen^2\theta}+\frac{2}{r^2 sen\theta}\frac{\partial f_r}{\partial\varphi}+\frac{2\cos\theta}{r^2 sen^2\theta}\frac{\partial f_\theta}{\partial\varphi}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\begin{pmatrix}\hat{\mathbf{x}}\\ \hat{\mathbf{y}}\\ \hat{\mathbf{z}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sen\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -sen\varphi\\ sen\theta sen\varphi & \cos\theta sen\varphi & \cos\varphi\\ \cos\theta & -sen\theta & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{\mathbf{r}}\\ \hat{\boldsymbol{\theta}}\\ \hat{\boldsymbol{\varphi}}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\hat{\mathbf{r}}\\ \hat{\boldsymbol{\theta}}\\ \hat{\boldsymbol{\varphi}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sen\theta\cos\varphi & sen\theta sen\varphi & \cos\theta\\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta sen\varphi & -sen\theta\\ -sen\varphi & \cos\varphi & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{\mathbf{x}}\\ \hat{\mathbf{y}}\\ \hat{\mathbf{z}}\end{pmatrix}$$

Appendice 2

EQUAZIONE DI LAPLACE

Equazione di Laplace in coordinate ortogonali cartesiane

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

supponendo che f sia una funzione a variabili separabili ovvero:

$$f(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

si ha che:

$$\frac{1}{x}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{z}\frac{d^2Z}{dz^2} = 0$$

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = c_x \quad \rightarrow \quad \frac{d^2X}{dx^2} - c_x X = 0$$

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = c_y \quad \rightarrow \quad \frac{d^2Y}{dy^2} - c_y Y = 0$$

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = c_z \quad \rightarrow \quad \frac{d^2Z}{dz^2} - c_z Z = 0$$

dove $c_x + c_y + c_z = 0$

le soluzioni di queste equazioni differenziali sono:

$$X(x) = \begin{cases} e^{\sqrt{c_x}x} \\ e^{-\sqrt{c_x}x} \end{cases} \quad dove \quad c_x = \alpha i \quad con \quad i = 1,2,3,4....$$

$$Y(y) = \begin{cases} e^{\sqrt{c_y}y} \\ e^{-\sqrt{c_y}y} \end{cases} \quad dove \quad c_y = \beta j \quad con \quad j = 1,2,3,4....$$

$$Z(z) = \begin{cases} e^{\sqrt{c_z}z} \\ e^{-\sqrt{c_z}z} \end{cases} \quad dove \quad c_z = -\alpha i - \beta j$$

pertanto la soluzione generale ha la forma:

$$f(x,y,z)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(a_i e^{\sqrt{\alpha_i}x}+b_i e^{-\sqrt{\alpha_i}x}\right)\left(a_j e^{\sqrt{\beta_j}y}+b_j e^{-\sqrt{\beta_j}y}\right)\left(a_{ij} e^{\sqrt{-\alpha_i-\beta_j}z}+b_{ij} e^{-\sqrt{-\alpha_i-\beta_j}z}\right)$$

Equazione di Laplace in coordinate ortogonali cilindriche

Per semplicità si consideri il caso $\frac{\partial}{\partial z} = 0$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = 0$$

supponendo che f sia una funzione a variabili separabili ovvero:

$$f(r,\varphi) = R(r)\psi(\varphi)$$

$$\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{\psi}\frac{d^2\psi}{d\varphi^2} = 0$$

$$\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) = \nu^2 \quad \rightarrow \quad r^2\frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} - \nu^2 R = 0$$

$$\frac{1}{\psi}\frac{d^2\psi}{d\varphi^2} = -\nu^2 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2\psi}{d\varphi^2} + \nu^2\psi = 0$$

le soluzioni di queste equzioni differenziali sono:

$$R(r) = \begin{cases} r^{\nu} & se \quad \nu = 1,2,3,..... \\ r^{-\nu} & se \quad \nu = 1,2,3,..... \\ \ln r & se \quad \nu = 0 \\ \text{cost} & se \quad \nu = 0 \end{cases}$$

$$\psi(\varphi) = \begin{cases} \cos(\nu\varphi) & se \quad \nu = 1,2,3,..... \\ \sin(\nu\varphi) & se \quad \nu = 1,2,3,..... \\ \varphi & se \quad \nu = 0 \\ \text{cost} & se \quad \nu = 0 \end{cases}$$

pertanto la soluzione generale ha la forma:

$$f(r,\varphi) = a_0 + b_0 \ln r + c_0\varphi + d_0\varphi \ln r + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu r^\nu sen(\nu\varphi) + \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu r^\nu \cos(\nu\varphi) + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu r^{-\nu} sen(\nu\varphi) + \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu r^{-\nu} \cos(\nu\varphi)$$

se f è una funzione ad un sol valore deve essere $c_0 = 0$ e $d_0 = 0$

Equazione di Laplace in coordinate ortogonali sferiche

Per semplcità si consideri il caso $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sen\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) = 0$$

supponendo che f sia una funzione a variabili separabili ovvero:

$$f(r,\varphi) = R(r)\Theta(\theta)$$

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{sen\theta}\frac{1}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(sen\theta \frac{d\Theta}{d\theta}\right) = 0$$

si supponga poi che sia:

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) = l(l+1) \quad \rightarrow \quad r^2 \frac{d^2}{dr^2}(rR) - l(l+1)rR = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow r^2 \frac{d^2}{dr^2}\left(\sqrt{r}R\right) + r\frac{d}{dr}\left(\sqrt{r}R\right) - \left(l+\tfrac{1}{2}\right)^2 \sqrt{r}R = 0$$

$$\frac{1}{sen\theta}\frac{1}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(sen\theta \frac{d\Theta}{d\theta}\right) = -l(l+1)$$

$$\frac{d\Theta}{d\theta} = \frac{d\Theta}{d(\cos\theta)}\frac{d(\cos\theta)}{d\theta} = -sen\theta \frac{d\Theta}{d(\cos\theta)}$$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{d\Theta}{d\theta}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(-sen\theta \frac{d\Theta}{d(\cos\theta)}\right) = -\cos\theta \frac{d\Theta}{d(\cos\theta)} - sen\theta \frac{d^2\Theta}{d(\cos\theta)^2}\frac{d(\cos\theta)}{d\theta}$$

$$(1-\cos^2\theta)\frac{d^2\Theta}{d(\cos\theta)^2} - 2\cos\theta \frac{d\Theta}{d(\cos\theta)} + l(l+1)\Theta = 0$$

la soluzione della prima equazione differenziale:

$$R(r) \propto \begin{cases} r^l \\ r^{-l-1} \end{cases} \quad con \quad l = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots$$

la soluzione della seconda equazione differenziale:

$$\Theta(\theta) \propto P_l(\cos\theta) \quad polinomio\ di\ Legendre\ di\ grado\ l \quad con \quad l = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots$$

$$P_l(\alpha) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{d\alpha^l}\left[(\alpha^2 - 1)^l\right]$$

pertanto la soluzione generale ha la forma:

$$\tilde{v}(r,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l r^l P_l(\cos\theta) + \sum_{l=0}^{\infty} b_l r^{-(l+1)} P_l(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(a_l r^l + b_l r^{-(l+1)} \right) P_l(\cos\theta)$$

Campo elettrico generato da una densità di carica elettrica di lunghezza infinita

Se $\rho = \rho_L \hat{z}$ si ha che $\phi_z = \phi_z(r)$ e quindi:

$$\nabla^2 \phi_z = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\phi_z}{dr}\right) = 0$$

pertanto la soluzione generale ha la forma:

$$\phi_z(r) = a_0 + b_0 \ln r$$

$$\hat{\mathbf{E}} = -\nabla \phi_z = -\frac{d\phi_z}{dr}\hat{\mathbf{r}} = -\frac{b_0}{r}\hat{\mathbf{r}}$$

applicando il teorema della divergenza si ha che:

$$-2\pi b_0 = \frac{\rho_L}{\varepsilon} \quad \rightarrow \quad b_0 = -\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon}$$

mentre a_0 resta indeterminata

$$\phi_z(r) = a_0 - \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon}\ln r$$

$$\hat{\mathbf{E}}(r) = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{r}\hat{\mathbf{r}}$$

si noti che $\phi_z \xrightarrow[r\to\infty]{} \infty$ e quindi in questo caso non solo non sono soddisfatte le condizioni normali all'infinito ma addirittura il potenziale scalare diverge

questo accade perchè all'infinito per soddisfare la conservazione della carica elettrica ci deve essere una carica uguale e di segno opposta a quella distribuita sull'asse z.

Campo elettrico generato da una coppia di densità di carica elettrica di lunghezza infinita aventi stesso modulo e segno opposto

Per il principio di sovrapposizione degli effetti e imponendo l'annullamento del potenziale scalare nella mezzeria:

$$\phi_2(r,\varphi) = \left(-a_0 + \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon}\ln r_2\right) + \left(a_0 - \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon}\ln r_1\right) = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon}(\ln r_2 - \ln r_1) = \frac{\rho_l d}{2\pi\varepsilon}\left(\frac{\ln r_2 - \ln r_1}{d}\right)$$

dato che $d \approx \frac{r_2 - r_1}{\cos\varphi}$

$$\phi_2(r,\varphi) = \frac{\rho_l d}{2\pi\varepsilon}\left(\frac{\ln r_2 - \ln r_1}{r_2 - r_1}\right)\cos\varphi \xrightarrow[r_2 \to r_1 = r]{} \frac{\rho_l d}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{r}\cos\varphi$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi_2 = -\frac{\partial\phi_2}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{r}\frac{\partial\phi_2}{\partial\varphi}\hat{\varphi} = \frac{\rho_l d}{2\pi\varepsilon}\left(\frac{\cos\varphi}{r^2}\hat{\mathbf{r}} + \frac{sen\varphi}{r^2}\hat{\varphi}\right)$$

Campo magnetico generato da una corrente stazionaria di lunghezza infinita

Se $\mathbf{J} = J\hat{\mathbf{z}}$ si ha che $\mathbf{A} = A_z\hat{\mathbf{z}}$ e quindi:

$$\nabla^2 \mathrm{A} = -\mu J \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \varphi^2} = 0$$

$$\nabla^2 \mathrm{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \mathrm{A}}{\partial \varphi^2} = -\mu J$$

pertanto la soluzione generale ha la forma:

$$A(r,\varphi) = a_0 + b_0 \ln r + c_0\varphi + d_0\varphi \ln r +$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu r^\nu sen(\nu\varphi) + \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu r^\nu \cos(\nu\varphi) + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu r^{-\nu} sen(\nu\varphi) + \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu r^{-\nu} \cos(\nu\varphi)$$

se A è una funzione ad un sol valore deve essere $c_0 = 0$ e $d_0 = 0$

per simmetria attorno all'asse z deve essere:

$$\begin{cases} a_\nu = 0 \\ b_\nu = 0 \\ c_\nu = 0 \\ d_\nu = 0 \end{cases} \quad per \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots$$

$$A(r,\varphi) = a_0 + b_0 \ln r$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & r\hat{\boldsymbol{\varphi}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \mathrm{A} \end{vmatrix} = -\frac{b_0}{r}\hat{\varphi} \xrightarrow{\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}} \mathbf{H} = -\frac{b_0}{\mu r}\hat{\varphi}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathrm{J}\hat{\mathbf{z}}$$

applicando il teorema del rotore si ottiene

$$H 2\pi r = I$$

e in conclusione:

$$b_0 = -\frac{\mu}{2\pi} I$$

mentre a_0 rimane indeterminato.

Si noti che $A \xrightarrow[r\to\infty]{} \infty$ e quindi non solo in questo caso non sono soddisfatte le condizioni normali all'infinito ma addirittura il potenziale vettore diverge questo accade perchè all'infinito per soddisfare l'equazione di continuità ci deve essere una corrente uguale in modulo e opposta in verso alla corrente passante per l'origine.

Campo magnetico generato da coppia di correnti stazionarie di lunghezza infinita aventi stesso modulo e verso opposto

Per il principio di sovrapposizione degli effetti e imponendo l'annullamento del potenziale vettore nella mezzeria:

$$A(r,\varphi) = (-a_0 + \frac{\mu}{2\pi} I \ln r_2) + (a_0 - \frac{\mu}{2\pi} I \ln r_1) = \frac{\mu}{2\pi} I(\ln r_2 - \ln r_1) = \frac{\mu}{2\pi} Id\left(\frac{\ln r_2 - \ln r_1}{d}\right)$$

dato che $d \approx \frac{r_2 - r_1}{\cos\varphi}$

$$A(r,\varphi) = \frac{\mu}{2\pi} Id\left(\frac{\ln r_2 - \ln r_1}{r_2 - r_1}\right)\cos\varphi \xrightarrow[r_2 - r_1 \to 0]{} \frac{\mu}{2\pi} Id\frac{1}{r}\cos\varphi$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & r\hat{\boldsymbol{\varphi}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & r0 & A \end{vmatrix} = \frac{\mu}{2\pi} Id\left(-\frac{sen\varphi}{r^2}\hat{\mathbf{r}} + \frac{\cos\varphi}{r^2}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right) \xrightarrow[B=\mu H]{}$$

$$\xrightarrow[B=\mu H]{} \mathbf{H} = \frac{1}{2\pi} Id\left(-\frac{sen\varphi}{r^2}\hat{\mathbf{r}} + \frac{\cos\varphi}{r^2}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right)$$

Schermatura di un campo elettrostatico uniforme con guscio sferico conduttore

Consideriamo un capo elettrostatico uniforme nello spazio vuoto diretto ad esempio lungo l'asse z:

$$\mathbf{E} = E_0 \hat{\mathbf{k}}$$

Si immerga in tale campo una corona sferia conduttrice; le linee del campo elettrico risulteranno deformate rispetto alla situazione precedente

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{E} = -\nabla \phi_e \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_S \underset{\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}}{\rightarrow} \nabla \cdot \mathbf{E} = \dfrac{\rho_S}{\varepsilon} \end{cases} \qquad \rightarrow \nabla^2 \phi_e = -\frac{\rho_S}{\varepsilon}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi_e = -\frac{\partial \phi_e}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{r}\frac{\partial \phi_e}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

imponendo le seguenti condizioni al contorno:

$\dot{\mathbf{E}} \underset{r\to\infty}{\rightarrow} \dot{E}_0 \hat{\mathbf{z}} = \dot{E}_0(\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} - sen\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}})$ *e quindi* $\dot{\phi}_e \underset{r\to\infty}{\rightarrow} -\dot{E}_0 r\cos\theta$ *a meno di una costante*

$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{0}}$ *per* $R_1 < r < R_2$ *e quindi* $\phi_e = \text{cost}$ *per* $-R_1 < r < R_2$

$\dot{\phi}_e \underset{r\to 0}{\rightarrow}$ *valore finito*

si ottengono le seguenti espressioni per $\dot{\phi}_e$ nelle diverse regioni:

$$\dot{\phi}_e(r,\theta) = -\dot{E}_0 r\cos\theta + \text{costante} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha_i}{r^{i+1}} P_i(\cos\theta) \qquad r > R_2$$

$$\dot{\phi}_e(r,\theta) = \beta_0 \qquad R_1 < r < R_2$$

$$\dot{\phi}_e(r,\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i r^i P_i(\cos\theta) \qquad r < R_1$$

E conseguentemente:

$$\dot{\mathbf{E}}(r,\theta) = \dot{E}_0\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} + \dot{E}_0\, sen\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + \sum_{i=0}^{\infty}(i+1)\frac{\alpha_i}{r^{i+2}}P_i(\cos\theta)\hat{\mathbf{r}} + sen\theta\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\alpha_i}{r^{i+2}}\frac{dP_i}{d\cos\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} \qquad r > R_2$$

$$\dot{\mathbf{E}}(r,\theta) = \dot{\mathbf{0}} \qquad R_1 < r < R_2$$

$$\dot{\mathbf{E}}(r,\theta) = -\sum_{i=0}^{\infty} i\delta_i r^{i-1} P_i(\cos\theta)\hat{\mathbf{r}} + sen\theta\sum_{i=0}^{\infty}\delta_i r^{i-1}\frac{dP_i}{d\cos\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} \qquad r < R_1$$

Andando ora ad imporre le condizioni di raccordo attraverso le superfici sferiche di interfaccia:

$$\phi_e\big|_{r=R_2} = \phi_i\big|_{r=R_2} \quad \rightarrow \quad 0 = -E_0 r\cos\theta + \text{costante} + \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\alpha_i}{R_2^{i+1}} P_i(\cos\theta)$$

$$\phi_i\big|_{r=R_1} = \phi_c\big|_{r=R_1} \quad \rightarrow \quad \sum_{i=0}^{+\infty} \delta_i R_1^i P_i(\cos\theta) = \beta_0$$

Dalla prima equazione si ricava:

$\alpha_0 = (\beta_0 - \text{costante})R_2$
$\alpha_1 = R_2^3 E_0$
$\alpha_i = 0 \; i = 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots\ldots$

Dalla seconda equazione si ricava:

$\delta_0 = \beta_0$
$\delta_i = 0 \quad i = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\left.\vec{E}_\theta\right|_{r=R_2} = \left.\vec{E}_\theta\right|_{r=R_2} \quad \rightarrow \quad 0 = -E_0 sen\theta + sen\theta \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\alpha_i}{R_2^{i+2}} \frac{dP_i}{d\cos\theta}$$

$$\left.\vec{E}_\theta\right|_{r=R_1} = \left.\vec{E}_\theta\right|_{r=R_1} \quad \rightarrow \quad sen\theta \sum_{i=0}^{+\infty} \delta_i R_1^{i-1} \frac{dP_i}{d\cos\theta} = 0$$

Dalla prima equazione si ricava:

α_0 indeterminato
$\alpha_1 = R_2^3 E_0$
$\alpha_i = 0 \quad i = 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots\ldots$

Dalla seconda equazione si ricava:

δ_0 indeterminato
$\delta_i = 0 \quad i = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots\ldots$

E quindi in definitiva:

$$\phi_e(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta + \text{costante} + \frac{\alpha_0}{r} + \frac{\alpha_1}{r^2}\cos\theta \qquad r > R_2$$

$$\phi_i(r,\theta) = \beta_0 \qquad R_1 < r < R_2$$

$$\phi_1(r,\theta) = \beta_0 \qquad r < R_1$$

$$\mathbf{E}(r,\theta) = \left(E_0 \cos\theta + \frac{\alpha_0}{r^2} + 2\frac{\alpha_1}{r^3}\cos\theta \right)\hat{\mathbf{r}} + \left(-E_0 sen\theta + \frac{\alpha_1}{r^3} sen\theta \right)\hat{\theta} \qquad r > R_2$$

$$\mathbf{E}(r,\theta) = 0 \qquad R_1 < r < R_2$$

$$\mathbf{E}(r,\theta) = 0 \qquad r < R_1$$

Appendice 3

RAPPRESENTAZIONE SIMBOLICA DELLE GRANDEZZE SINUSOIDALI VETTORIALI

Si consideri la funzione vettoriale:

$$\mathbf{f}_{\sim}(\mathbf{r},t) = f_{x\sim}(\mathbf{r},t)\hat{\mathbf{x}} + f_{y\sim}(\mathbf{r},t)\hat{\mathbf{y}} + f_{z\sim}(\mathbf{r},t)\hat{\mathbf{z}} \tag{3.1}$$

avente componenti sinusoidali con pulsazione ω:

$$f_{x\sim}(\mathbf{r},t) = f_{xm}(\mathbf{r})\cos(\omega t + \varphi_x) \tag{3.2}$$

$$f_{y\sim}(\mathbf{r},t) = f_{ym}(\mathbf{r})\cos(\omega t + \varphi_y) \tag{3.3}$$

$$f_{z\sim}(\mathbf{r},t) = f_{zm}(\mathbf{r})\cos(\omega t + \varphi_z) \tag{3.4}$$

dove:

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$$

Sostituendo le equazioni (3.2), (3.3) e (3.4) nella (3.1) si ottiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_{\sim} = {} & (f_{xm}\cos\varphi_x\,\hat{\mathbf{x}} + f_{ym}\cos\varphi_y\,\hat{\mathbf{y}} + f_{zm}\cos\varphi_z\,\hat{\mathbf{z}})\cos(\omega t) - \\ & (f_{xm}\,\mathrm{sen}\,\varphi_x\,\hat{\mathbf{x}} + f_{ym}\,\mathrm{sen}\,\varphi_y\,\hat{\mathbf{y}} + f_{zm}\,\mathrm{sen}\,\varphi_z\,\hat{\mathbf{z}})\,\mathrm{sen}(\omega t)\end{aligned} \tag{3.5}$$

Definendo i vettori reali indipendenti dal tempo:

$$\mathbf{f}_1 = (f_{xm}\cos\varphi_x\mathbf{i} + f_{ym}\cos\varphi_y\mathbf{j} + f_{zm}\cos\varphi_z\mathbf{k}) \tag{3.6}$$

$$\mathbf{f}_2 = (f_{xm}\,\text{sen}\,\varphi_x\mathbf{i} + f_{ym}\,\text{sen}\,\varphi_y\mathbf{j} + f_{zm}\,\text{sen}\,\varphi_z\mathbf{k}) \tag{3.7}$$

e sostituendo le equazioni (3.6) e (3.7) nella (3.5), risulta evidente che il vettore $\mathbf{f}_{\sim}$ può essere espresso come:

$$\mathbf{f}_{\sim} = \text{Re}\left[(\mathbf{f}_1 + j\mathbf{f}_2)e^{j\omega t}\right] \tag{3.8}$$

Si definisce Rappresentazione Simbolica o Trasformata di Steinmetz di $\mathbf{f}_{\sim}$ il vettore complesso:

$$\dot{\mathbf{f}} = \mathbf{f}_1 + j\mathbf{f}_2 \tag{3.9}$$

Fra il vettore complesso $\dot{\mathbf{f}}$ ed il vettore reale $\mathbf{f}_{\sim}$ esiste una corrispondenza biunivoca ovvero ad ogni vettore $\dot{\mathbf{f}}$ corrisponde uno ed un solo vettore $\mathbf{f}_{\sim}$ e viceversa. Quindi in regime sinusoidale è assolutamente equivalente lavorare nel dominio del tempo o nel dominio della Trasformata di Steinmetz. Si noti che la Trasformata di Steinmetz costituisce il caso particolare della Trasformata di Fourier applicata a grandezze di tipo sinusoidale.

Appendice 4

EQUAZIONE DI BESSEL

La risoluzione dell'equazione di Helmotz in coodinate cilindriche e sferiche con il metodo di separazione delle variabili, riconduce all'equazione di Bessel:

$$\overset{*}{u}^2 \frac{d^2 \overset{*}{f}}{d\overset{*}{u}^2} + \overset{*}{u} \frac{df}{d\overset{*}{u}} + (\overset{*}{u}^2 - n^2) f = 0 \tag{4.1}$$

Dove in generale $\overset{*}{u} \in \mathbb{C}$ *con* $\mathrm{Re}\{\overset{*}{u}\} > 0$ [libro russo] e per semplicità si suppone che sia $n \in \mathbb{R}^+$.

Si può dimostrare che la soluzione dell'equazione di Bessel può essere espressa come combinazione lineare delle seguenti funzioni note come funzioni di Bessel del 1° tipo di ordine n:

$$\overset{*}{J}_n(\overset{*}{u}) \triangleq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(n+m+1)} \left(\frac{\overset{*}{u}}{2} \right)^{n+2m} \tag{4.2}$$

$$\overset{*}{J}_{-n}(\overset{*}{u}) \triangleq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(-n+m+1)} \left(\frac{\overset{*}{u}}{2} \right)^{-n+2m} \tag{4.3}$$

Dove $\Gamma(v) \triangleq \int_0^{\infty} e^{-t} t^{v-1} dt$ con $v \in \mathbb{R}^+$ è nota come funzione gamma di Eulero.

Integrando per parti si deduce la seguente relazione:

$$\Gamma(v) = (v-1)\Gamma(v-1) \tag{4.4}$$

Tale formula fornisce lo spunto per costruire il prolungamento analitico della funzione Γ nella regione $v \leq 0$:

$$\Gamma(v) = \int_0^\infty \left[e^{-t} - \sum_{n=0}^{k} \frac{(-t^n)^n}{n!} \right] t^{v-1} dt \quad \text{con} \quad \begin{cases} -(k+1) < v < -k \\ k = 0, -1, -2, -3, \ldots \end{cases} \tag{4.5}$$

Se $n \in \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Z}$ le funzioni (4.2) e (4.3) sono linearmente indipendenti fra di loro, mentre se $n \in \mathbb{Z}$ si ha che:

$$\Gamma(v) = \begin{cases} (v-1)! \quad per \quad v = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots \\ \infty \quad per \quad v = 0, -1, -2, -3, -4, \ldots\ldots \end{cases}$$

quindi i primi $n-1$ termini della $\dot{J}_{-n}(\dot{u})$ si annullano e conseguentemente si ha che:

$$\dot{J}_{-n}(\dot{u}) = (-1)^n \dot{J}_n(\dot{u}) \tag{4.5}$$

quindi in tale caso le due funzioni cessano di essere linearmente indipendenti.

Il problema della determinazione di un'altra funzione linearmente indipendente rispetto a $\dot{J}_n(\dot{u})$ si risolve considerando al posto della $\dot{J}_{-n}(\dot{u})$ una combinazione lineare di $\dot{J}_n(\dot{u})$ e di $\dot{J}_{-n}(\dot{u})$ nella forma:

$$\dot{Y}_n(\dot{u}) \triangleq \frac{\dot{J}_n(\dot{u})\cos(n\pi) - \dot{J}_{-n}(\dot{u})}{sen(n\pi)} \quad \text{con } n \in \mathbb{R}^+ \tag{4.6}$$

nota come funzione di Bessel del 2° tipo di ordine n.

per $n \in \mathbb{R} \cap \mathbb{Z}$ è evidente per la sua stessa definizione che $\dot{Y}_n(\dot{u})$ è linearmente indipendente da $\dot{J}_n(\dot{u})$.

al limite per $n \in \mathbb{Z}$ si può dimostrare che $\overset{*}{Y}_n(\overset{*}{u})$ è ancora linearmente indipendente da $\overset{*}{J}_n(\overset{*}{u})$ e può essere espressa nel seguente modo:

$$\overset{*}{Y}_0(\overset{*}{u}) = \frac{1}{\pi}\left[2\overset{*}{LN}\left(\frac{\overset{*}{u}}{2}\right) + \gamma - \Psi(1)\right]\overset{*}{J}_0(\overset{*}{u}) - \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m \frac{\left(\frac{\overset{*}{u}}{2}\right)^{2m}}{(m!)^2}\left(2\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\right) \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}\overset{*}{Y}_n(\overset{*}{u}) &= \frac{1}{\pi}\left[2LN\left(\frac{\overset{*}{u}}{2}\right) + \gamma - \Psi(n+1)\right]\overset{*}{J}_n(\overset{*}{u}) - \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(m-1)!}\left(\frac{\overset{*}{u}}{2}\right)^{-n+2(m-1)} \\ &- \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(n+m)!}\left(\frac{\overset{*}{u}}{2}\right)^{n+2m}\left(\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n+k}\right)\right) \quad \text{dove} \quad n = 1,2,3,4,.....\end{aligned} \tag{4.8}$$

con $\overset{*}{LN}$ si è indicato il logaritmo naturale in campo complesso dato da:

$$\overset{*}{LN}(\overset{*}{u}) \triangleq \ln|\overset{*}{u}| + j(\varphi + 2\pi k) \quad \text{con } k \in \mathbb{Z} \tag{4.9}$$

la cui definizione deriva direttamente dalla formula $\overset{*}{u} = |\overset{*}{u}|e^{j(\varphi+2\pi k)}$

d'ora in poi si supporrà $k = 0$ e quindi si considererà l'argomeno principale φ.

con $\Psi(v) \triangleq (\ln(v))' = \dfrac{\Gamma'(v)}{\Gamma(v)}$ si è indicata la funzione digamma di Eulero

$$\begin{aligned}\Gamma'(v) &= \lim_{h\to 0}\frac{\Gamma(v+h)-\Gamma(v)}{h} = \lim_{h\to 0}\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}t^{v+h-1}-e^{-t}t^{v-1}}{h}dt = \\ &= \lim_{h\to 0}\int_0^{\infty}e^{-t}t^{v-1}\frac{t^{h-1}-1}{h}dt = \int_0^{\infty}e^{-t}t^{v-1}\left(\lim_{h\to 0}\frac{t^{h-1}-1}{h}\right)dt = \\ &= \int_0^{\infty}e^{-t}t^{v-1}\ln t\,dt\end{aligned}$$

se $v = 1,2,3,4,.....$ si ha che

$$\Gamma'(v) = (-\gamma + \sum_{k=1}^{v-1} \frac{1}{k})(v-1)!$$

e quindi la funzione digamma assume la forma:

$$\Psi(v) = \begin{cases} -\gamma \quad per \quad v = 1 \\ -\gamma + H_{v-1} \quad per \quad v = 2,3,4,5,..... \end{cases} \tag{4.10}$$

dove $H_{v-1} \triangleq \sum_{k=1}^{v-1} \frac{1}{k}$ è il numero armonico v-1 esimo

in definitiva per $n \in \mathbb{Z}$, ed utilizzando per $\dot{Y}_n(\dot{u})$ lo sviluppo in serie di $\dot{J}_n(\dot{u})$ si ottengono le seguenti espressioni:

$$\dot{J}_n(\dot{u}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n+m)!} \left(\frac{\dot{u}}{2}\right)^{n+2m} \quad \text{con n=0,1,2,3,4,.....} \tag{4.11}$$

$$\dot{Y}_0(\dot{u}) = \frac{2}{\pi}\left[LN\left(\frac{u}{2}\right) + \gamma \right] \dot{J}_0(\dot{u}) - \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{u}{2}\right)^{2m} \left(2\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}\right) \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned} \dot{Y}_n(\dot{u}) = {} & \frac{2}{\pi}\left[LN\left(\frac{u}{2}\right) + \gamma \right] \dot{J}_n(\dot{u}) - \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(m-1)!} \left(\frac{u}{2}\right)^{-n+2(m-1)} \\ & - \frac{1}{\pi} \frac{1}{n!} \left(\frac{u}{2}\right)^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n+m)!} \left(\frac{u}{2}\right)^{n+2m} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n+m} \frac{1}{k} \right) \quad dove \quad n = 1,2,3,4,..... \end{aligned} \tag{4.13}$$

possono essere utili i seguenti sviluppi asintotici:

$$\dot{J}_0(\dot{u}) \xrightarrow[u \to 0]{} 1 \tag{4.14}$$

$$\dot{J}_n(\dot{u}) \xrightarrow[u \to 0]{} 0 \quad per \quad n = 1,2,3,..... \tag{4.15}$$

$$\dot{Y}_0(\dot{u}) \xrightarrow[u\to 0]{} \frac{2}{\pi}\ln|\dot{u}| \tag{4.16}$$

$$\dot{Y}_n(\dot{u}) \xrightarrow[u\to 0]{} -\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{\dot{u}}\right)^n \quad con \quad n=1,2,3,..... \tag{4.17}$$

$$\dot{J}_n(\dot{u}) \xrightarrow[u\to\infty]{} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos\left(u-\frac{\pi}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sqrt{u}} \quad per \quad n=0,1,2,3,..... \tag{4.18}$$

$$\dot{Y}_n(\dot{u}) \xrightarrow[u\to\infty]{} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{sen\left(u-\frac{\pi}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sqrt{u}} \quad per \quad n=0,1,2,3,..... \tag{4.19}$$

dove:

$$\cos(u)=\frac{1}{2}\left(e^{ju}+e^{-ju}\right)$$

$$sen(u)=\frac{1}{2j}\left(e^{ju}-e^{-ju}\right)$$

è utile introdurre anche le seguenti funzioni derivate:

$\dot{H}_n^{(1)}(\dot{u}) \triangleq \dot{J}_n(\dot{u}) + j\dot{Y}_n(\dot{u})$ funzione di Hankel del 1° tipo di ordine n

$\dot{H}_n^{(2)}(\dot{u}) \triangleq \dot{J}_n(\dot{u}) - j\dot{Y}_n(\dot{u})$ funzione di Hankel del 2° tipo di ordine n

$$\dot{H}_0^{(1)}(\dot{u}) \xrightarrow[u\to 0]{} j\frac{2}{\pi}\ln|\dot{u}|$$

$$\dot{H}_n^{(1)}(\dot{u}) \xrightarrow[u\to 0]{} -j\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{\dot{u}}\right)^n \quad per \quad n=1,2,3,.....$$

$$\dot{H}_0^{(2)}(\dot{u}) \xrightarrow[u\to 0]{} -j\frac{2}{\pi}\ln|\dot{u}|$$

$$\dot{H}_n^{(2)}(\dot{u}) \xrightarrow[v\to 0]{} j\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{\dot{u}}\right)^n \quad per \quad n=1,2,3,.....$$

$$\dot{H}_n^{(1)}(\dot{u}) \xrightarrow[x\to\infty]{} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{\left(\dot{u}-\frac{\pi}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)}}{\sqrt{\dot{u}}} \quad per \quad n=0,1,2,3,.....$$

$$\dot{H}_n^{(2)}(\dot{u}) \xrightarrow[u\to\infty]{} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{-\left(\dot{u}-\frac{\pi}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)}}{\sqrt{\dot{u}}} \quad per \quad n=0,1,2,3,.....$$

Se si pone $\dot{u}=j\dot{\alpha}$ e si sostituisce nell'equazione di Bessel si ottiene un primo tipo di equazione di Bessel modificata e conseguentemente:

$$\dot{J}_n(j\dot{\alpha})=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(n+m+1)}\left(\frac{j\dot{\alpha}}{2}\right)^{n+2m}=j^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!\Gamma(n+m+1)}\left(\frac{\dot{\alpha}}{2}\right)^{n+2m}$$

$$\dot{I}_n(\dot{\alpha})\triangleq\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!\Gamma(n+m+1)}\left(\frac{\dot{\alpha}}{2}\right)^{n+2m}$$

$\dot{I}_n$ è nota come funzione di Bessel del 1°tipo modificata di ordine n

$$\dot{J}_n(j\dot{\alpha})=j^n\dot{I}_n(\dot{\alpha})$$

$$\dot{K}_n(\dot{\alpha})\triangleq\frac{(-1)^n\dot{I}_n(\dot{\alpha})\cos(n\pi)-\dot{I}_{-n}(\dot{\alpha})}{sen(n\pi)}$$

$\dot{K}_n$ è nota come funzione di Bessel del 2°tipo modificata di ordine n

$$\dot{K}_n(\dot{\alpha}) = j^n \dot{Y}_n(j\dot{\alpha})$$

per $\dot{K}_n$ è diffusa anche la seguente definizione alternativa non equivalente

$$\dot{K}_n(\dot{\alpha}) = \frac{\pi}{2}\frac{\dot{I}_{-n}(\dot{\alpha}) - \dot{I}_n(\dot{\alpha})}{sen(n\pi)} = \frac{\pi}{2} j^{n+1}\left[\dot{J}_n(j\dot{\alpha}) + j\dot{Y}_n(j\dot{\alpha})\right] = \frac{\pi}{2} j^{n+1}\dot{H}_n^{(1)}(j\dot{\alpha})$$

se $\dot{\alpha} \in \mathbb{R}$ si ha che $\dot{I}_n \in \mathbb{R}$, $\dot{Y}_n \in \mathbb{R}$ nella prima definizione

$$\dot{I}_0(\dot{\alpha}) \xrightarrow[\alpha \to 0]{} 1$$

$$\dot{I}_n(\dot{\alpha}) \xrightarrow[\alpha \to 0]{} 0 \quad per \quad n = 1,2,3,.....$$

$$\dot{K}_0(\dot{\alpha}) \xrightarrow[\alpha \to 0]{} \frac{2}{\pi}\ln|\dot{\alpha}|$$

$$\dot{K}_n(\dot{\alpha}) \xrightarrow[\alpha \to 0]{} \frac{-(n-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{\alpha}\right)^n \quad con \quad n = 1,2,3,.....$$

oppure nella seconda definizione

$$\dot{K}_0(\dot{\alpha}) \xrightarrow[\alpha \to 0]{} -\ln|\dot{\alpha}|$$

$$\dot{K}_n(\dot{\alpha}) \xrightarrow[\alpha \to 0]{} \frac{1}{2}(n-1)!\left(\frac{2}{\alpha}\right)^n \quad con \quad n = 1,2,3,.....$$

$$\dot{I}_n(\dot{\alpha}) \xrightarrow[\alpha \to \infty]{} j^{-n}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos\left(j\dot{\alpha} - \frac{\pi}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sqrt{j\dot{\alpha}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{\dot{\alpha}}}{\sqrt{\dot{\alpha}}} \; per \; n = 0,1,2,3,.....$$

$$\dot{Y}_n(\dot{\alpha}) \xrightarrow[z\to\infty]{} j^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{sen\left(j\dot{\alpha} - \frac{\pi}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sqrt{j\dot{\alpha}}} \quad per \quad n = 0,1,2,3,.....$$

oppure

$$\dot{Y}_n(\dot{\alpha}) \xrightarrow[z\to\infty]{} \frac{\pi}{2} j^{n-1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{\left(j\dot{\alpha} - \frac{\pi}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)}}{\sqrt{j\dot{\alpha}}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\dot{\alpha}}}{\sqrt{\dot{\alpha}}} \; per \quad n = 0,1,2,3,.....$$

Se si pone $\dot{u} = j\sqrt{j}\,\dot{\alpha}$ e si sostituisce nell'equazione di Bessel si ottiene un secondo tipo di equazione di Bessel modificata e conseguentemente:

$$\dot{J}_n(j\sqrt{j}\,\dot{\alpha}) = j^n \dot{I}_n(\sqrt{j}\,\dot{\alpha}) \triangleq ber_n(\dot{\alpha}) + jbei_n(\dot{\alpha})$$

$$\dot{Y}_n(j\sqrt{j}\,\dot{\alpha}) = j^{-n} \dot{K}_n(\sqrt{j}\,\dot{\alpha}) \triangleq ker_n(\dot{\alpha}) + jkei_n(\dot{\alpha})$$

oppure:

$$j\frac{\pi}{2}\left[\dot{J}_n(j\sqrt{j}\,\dot{\alpha}) + j\dot{Y}_n(j\sqrt{j}\,\dot{\alpha})\right] = j^{-n} \dot{K}_n(\sqrt{j}\,\dot{\alpha}) \triangleq ker_n(\dot{\alpha}) + jkei_n(\dot{\alpha})$$

dove $ber, bei, \ker, kei \in \mathbb{R}$

Un altro caso importante è quello in cui $n = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, ...$

In tal caso si ha che con k=0,1,2,3,…… si ha che:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx \underset{x=y^2}{=} 2\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

.....

$$\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)=\left(k-1+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k-1+\frac{1}{2}\right)=\left(k-1+\frac{1}{2}\right)\left(k-2+\frac{1}{2}\right).....\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\quad con\ k=1,2,3,.....$$

si ottiene così:

$$\mathring{J}_{k+\frac{1}{2}}(\mathring{u})=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(k+\frac{1}{2}+m+1)}\left(\frac{\mathring{u}}{2}\right)^{k+\frac{1}{2}+2m}=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\mathring{u}^{k+\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{\mathring{u}}\frac{d}{d\mathring{u}}\right)^k\left(\frac{sen\,\mathring{u}}{\mathring{u}}\right)$$

$$\mathring{J}_{-k-\frac{1}{2}}(\mathring{u})=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(-k+\frac{1}{2}+m+1)}\left(\frac{\mathring{u}}{2}\right)^{-k-\frac{1}{2}+2m}=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\mathring{u}^{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\mathring{u}}\frac{d}{d\mathring{u}}\right)^k\left(\frac{\cos\mathring{u}}{\mathring{u}}\right)$$

Altre formule importanti sono:

$$\frac{d}{du}\left[u^n Z_n(u)\right]=u^n Z_{n-1}(u)$$

$$\frac{d}{du}\left[\frac{Z_n(u)}{u^n}\right]=-\frac{Z_{n+1}(u)}{u^n}$$

dove

$$Z_n(u)=aJ_n(u)+bY_n(u)$$

è una soluzione qualsiasi dell'equazione di Bessel.

Appendice 5

POTENZIALI SCALARI E VETTORIALI IN REGIME SINUSOIDALE

Ai fini dell'utilizzo del teorema di equivalenza è utile esprimere le equazioni di Maxwell e di continuità in una forma che tenga conto della presenza di cariche magnetiche e correnti magnetiche ovviamente fittizie ma utili per descrivere il problema da un punto di vista matematico:

$$\begin{cases} \nabla \times \dot{\mathbf{H}} = (j\omega\varepsilon + \gamma)\dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{J}}_i \\ \nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\,\dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{M}}_i \\ \nabla\left(\gamma\,\dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{J}}_i\right) = -j\omega\rho \\ \nabla\,\dot{\mathbf{M}}_i = -j\omega\lambda_i \end{cases}$$

da queste equazioni derivano le seguenti equazioni di raccordo attraverso superfici di separazione fra materiali diversi e/o superfici di supporto per correnti superficiali:

$$\hat{\mathbf{n}} \times \left[\dot{\mathbf{H}}_{S^+} - \dot{\mathbf{H}}_{S^-}\right] = \dot{\mathbf{J}}_s$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \left[\dot{\mathbf{E}}_{S^+} - \dot{\mathbf{E}}_{S^-}\right] = -\dot{\mathbf{M}}_s$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \left[\dot{\mathbf{D}}_{S^+} - \dot{\mathbf{D}}_{S^-}\right] = \dot{\rho}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \left[\dot{\mathbf{J}}_{S^+} - \dot{\mathbf{J}}_{S^-}\right] = -j\omega\,\dot{\rho}_S$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \left[\dot{\mathbf{B}}_{S^+} - \dot{\mathbf{B}}_{S^-}\right] = \dot{\lambda}_S$$

il problema può essere risolto introducendo opportuni potenziali scalari e vettoriali

consideriamo prima il caso in cui sono presenti le sole sorgenti elettriche e successivamente il caso in ci sono presenti le sole sorgenti magnetiche:

$$\begin{cases} \nabla \times \dot{\mathbf{H}} = \left(j\omega\varepsilon + \gamma \right) \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{J}}_i \\ \nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu \dot{\mathbf{H}} \\ \nabla \left(\gamma \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{J}}_i \right) = -j\omega\rho \end{cases}$$

dalla seconda equazione di Maxwell considerando la proprietà degli operatori differenziali $\nabla\nabla\times = \dot{0}$ si ottiene che il campo magnetico $\dot{\mathbf{H}}$ può essere espresso come $\dot{\mathbf{H}} \propto \nabla \times \dot{\mathbf{A}}$

solitamente si effettua la scelta $\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \dot{\mathbf{A}}$

dove $\dot{\mathbf{A}}$ è detto potenziale vettore magnetico

e conseguentemente andando a sostituire nuovamente nel'equazione ( ) si ha che:

$$\nabla \times \left(\dot{\mathbf{E}} + j\omega \dot{\mathbf{A}} \right) = \dot{\mathbf{0}}$$

considerando la proprietà degli operatori differenziali $\nabla \times \nabla \cdot = \dot{\mathbf{0}}$ si ottiene che il campo elettrico $\dot{\mathbf{E}}$ può essere espresso come $\dot{\mathbf{E}} + j\omega \dot{\mathbf{A}} \propto \nabla \dot{\phi}$

solitamente si effettua la scelta $\dot{\mathbf{E}} + j\omega \dot{\mathbf{A}} = -\nabla \cdot \dot{\phi}$

dove $\dot{\phi}$ è detto potenziale scalare elettrico

andando a sostituire le due equazioni nella prima equazione e ponendo
$\nabla^2 \doteq \nabla \cdot \nabla - \nabla \times \nabla \times$
si ottiene:

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{A}} - \dot{\sigma}^2 \dot{\mathbf{A}} - \nabla \cdot \left[\nabla \dot{\mathbf{A}} + j\omega\mu \left(\varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega} \right) \dot{\phi} \right] = -\mu \dot{\mathbf{J}}_i$$

per il teorema di Helmotz si ha che $\dot{\mathbf{A}}$ è univocamente determinato se conosciamo $\nabla \times \dot{\mathbf{A}}$ e $\nabla \dot{\mathbf{A}}$

nel caso in esame il $\nabla \times \dot{\mathbf{A}}$ è fissato e quindi rimane un grado di libertà costituito dalla $\nabla \dot{\mathbf{A}}$

effettuiamo la scelta $\nabla \dot{\mathbf{A}} \triangleq -j\omega\mu\left(\varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega}\right)\dot{\phi}$ nota come scelta di Lorentz

e conseguentemente si ottiene:

$$\dot{\mathbf{E}} = -j\omega\,\dot{\mathbf{A}} + \frac{1}{j\omega\mu\left(\varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega}\right)}\nabla \cdot \nabla \dot{\mathbf{A}}$$

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{A}} - \dot{\sigma}^2 \dot{\mathbf{A}} = -\mu \dot{\mathbf{J}}_i$$

andando a applicare la divergenza ∇ alla prima equazione di maxwell e sostituendo nell'equazione di continuità si ottiene:

$$\nabla \dot{\mathbf{E}} = \frac{\dot{\rho}}{\varepsilon}$$

andando a sostituire nelle equazioni:

$$\nabla^2 \dot{\phi} - \dot{\sigma}^2 \dot{\phi} = -\frac{\dot{\rho}}{\varepsilon}$$

dove: $\dot{\rho} = \dot{\rho}_i + \dot{\rho}_\gamma$

$$\nabla(\gamma \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{J}}_i) = -j\omega\rho \xrightarrow[\dot{\rho} = \dot{\rho}_i + \dot{\rho}_\gamma]{} \begin{cases} \nabla \dot{\mathbf{E}} = -\dfrac{\dot{\rho}_\gamma}{\frac{\gamma}{j\omega}} \\ \nabla \dot{\mathbf{J}}_i = -j\omega\,\dot{\rho}_i \end{cases}$$

$$\nabla \dot{\mathbf{E}} = \frac{\dot{\rho}}{\varepsilon}$$

$$\frac{\dot{\rho}_i + \dot{\rho}_\gamma}{\varepsilon} = -\frac{\dot{\rho}_\gamma}{\frac{\gamma}{j\omega}} \rightarrow \dot{\rho}_\gamma = -\frac{\frac{\gamma}{j\omega}}{\varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega}}\dot{\rho}_i$$

e quindi si ha che: $\frac{\dot{\rho}}{\varepsilon} = \frac{\dot{\rho}_i + \dot{\rho}_\gamma}{\varepsilon} = \frac{\dot{\rho}_i - \frac{\gamma}{j\omega}\dot{\rho}_i}{\varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega}} = \frac{\dot{\rho}_i}{\varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega}}$

passando al caso delle sorgenti magnetiche:

$$\begin{cases} \nabla \times \dot{\mathbf{H}} = (j\omega\varepsilon + \gamma)\dot{\mathbf{E}} \\ \nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{M}}_i \\ \nabla \dot{\mathbf{M}}_i = -j\omega\lambda_i \end{cases}$$

dalla seconda equazione di Maxwell considerando la proprietà degli operatori differenziali $\nabla\nabla\times = \dot{0}$ si ottiene che il campo magnetico $\dot{\mathbf{E}}$ può essere espresso come $\dot{\mathbf{E}} \propto \nabla \times \dot{\mathbf{F}}$

solitamente si effettua la scelta $\dot{\mathbf{E}} = -\frac{1}{\varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega}} \nabla \times \dot{\mathbf{F}}$

dove $\dot{\mathbf{F}}$ è detto potenziale vettore elettrico

e conseguentemente andando a sostituire nuovamente nell'equazione ( ) si ha che:

$$\nabla \times \left(\dot{\mathbf{H}} + j\omega\dot{\mathbf{F}} \right) = \dot{\mathbf{0}}$$

e quindi considerando la proprietà degli operatori differenziali $\nabla \times \nabla \cdot = \dot{\mathbf{0}}$ si ottiene che il campo elettrico $\dot{\mathbf{H}}$ può essere espresso come $\dot{\mathbf{H}} + j\omega\dot{\mathbf{F}} \propto \nabla\dot{\psi}$

solitamente si effettua la scelta $\dot{\mathbf{H}} + j\omega\dot{\mathbf{F}} = -\nabla\dot{\psi}$

dove $\dot{\psi}$ è detto potenziale scalare magnetico

andando a sostituire le due equazioni nella prima equazione e ponendo $\nabla^2 \triangleq \nabla \cdot \nabla - \nabla \times \nabla \times$
si ottiene:

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{F}} - \dot{\sigma}^2 \dot{\mathbf{F}} - \nabla \cdot \left[\nabla \dot{\mathbf{F}} + j\omega\mu \left(\varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega} \right) \dot{\psi} \right] = -\left(\varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega} \right) \dot{\mathbf{M}}_i$$

per il teorema di Helmotz si ha che $\dot{\mathbf{F}}$ è univocamente determinato se conosciamo $\nabla \times \dot{\mathbf{F}}$ e $\nabla \dot{\mathbf{F}}$

nel caso in esame il $\nabla \times \dot{\mathbf{F}}$ è fissato e quindi rimane un grado di libertà costituito dalla $\nabla \dot{\mathbf{F}}$

effettuiamo la scelta $\nabla \dot{\mathbf{F}} \triangleq -j\omega\mu \left(\varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega} \right) \dot{\psi}$ nota come scelta di Lorentz

e conseguentemente si ottiene:

$$\dot{\mathbf{H}} = -j\omega \dot{\mathbf{F}} + \frac{1}{j\omega\mu \left(\varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega} \right)} \nabla \cdot \nabla \dot{\mathbf{F}}$$

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{F}} - \dot{\sigma}^2 \dot{\mathbf{F}} = -\left(\varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega} \right) \dot{\mathbf{M}}_i$$

andando a applicare la divergenza ∇ alla prima equazione di maxwell e sostituendo nell'equazione di continuità si ottiene:

$$\nabla \dot{\mathbf{H}} = \frac{\dot{\lambda}}{\mu}$$

andando a sostituire nelle equazioni:

$$\nabla^2 \dot{\psi} - \dot{\sigma}^2 \dot{\psi} = -\frac{\dot{\lambda}}{\mu}$$

applicando il principio di sovrapposizione degli effetti si ottiene:

$$\dot{\mathbf{E}} = -j\omega \dot{\mathbf{A}} + \frac{1}{j\omega\mu \left(\varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega} \right)} \nabla \cdot \nabla \dot{\mathbf{A}} - \frac{1}{\varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega}} \nabla \times \dot{\mathbf{F}}$$

$$\dot{\mathbf{H}} = -j\omega \dot{\mathbf{F}} + \frac{1}{j\omega\mu \left(\varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega} \right)} \nabla \cdot \nabla \dot{\mathbf{F}} + \frac{1}{\mu} \nabla \times \dot{\mathbf{A}}$$

Principio di dualità

Si verifica che le ( ), ( ), ( ), ( ), ( ) sono invarianti sotto il seguente insieme di sostituzioni formali

$$\dot{\mathbf{J}}_i \rightarrow \dot{\mathbf{M}}_i$$

$$\dot{\mathbf{M}}_i \rightarrow -\dot{\mathbf{J}}_i$$

$$\dot{\rho}_i \rightarrow \dot{\lambda}_i$$

$$\dot{\lambda}_i \rightarrow -\dot{\rho}_i$$

$$\dot{\mathbf{A}} \rightarrow \dot{\mathbf{F}}$$

$$\dot{\mathbf{F}} \rightarrow -\dot{\mathbf{A}}$$

$$\dot{\phi} \rightarrow \dot{\psi}$$

$$\dot{\psi} \rightarrow -\dot{\phi}$$

$$\dot{\epsilon}_r \leftrightarrow \mu$$

$$\dot{\mathbf{E}} \rightarrow \dot{\mathbf{H}}$$

$$\dot{\mathbf{H}} \rightarrow -\dot{\mathbf{E}}$$

tale proprietà permette di ottenere le formule valide nel caso $\dot{\mathbf{J}}_i = \dot{\mathbf{0}}$, $\dot{\mathbf{M}}_i \neq \dot{\mathbf{0}}$ da quelle valide nel caso $\dot{\mathbf{J}}_i \neq \dot{\mathbf{0}}$, $\dot{\mathbf{M}}_i = \dot{\mathbf{0}}$ e viceversa.