

Appendice 6

EQUAZIONE DI HELMOTZ

Equazioni di Helmotz in coordinate ortogonali cartesiane

$$\nabla^2 f + k^2 f = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + k^2 f = 0$$

supponendo che f sia una funzione a variabili separabili ovvero:

$$f(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

si ha che:

$$\frac{1}{x} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k^2$$

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k_x^2 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 X}{dx^2} + k_x^2 X = 0$$

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k_y^2 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} + k_y^2 Y = 0$$

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k_z^2 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 Z}{dz^2} + k_z^2 Z = 0$$

$$\text{dove } k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$$

le soluzioni di queste equazioni differenziali sono:

$$X(x) = \begin{cases} e^{jk_x x} \\ e^{-jk_x x} \end{cases}$$

$$Y(y) = \begin{cases} e^{jk_y y} \\ e^{-jk_y y} \end{cases}$$

$$Z(z) = \begin{cases} e^{ik_z z} \\ e^{-ik_z z} \end{cases}$$

pertanto la soluzione generale ha la forma:

$$f(x, y, z) = \left(a_x e^{ik_x x} + b_x e^{-ik_x x} \right) \left(a_y e^{ik_y y} + b_y e^{-ik_y y} \right) \left(a_z e^{ik_z z} + b_z e^{-ik_z z} \right)$$

Equazioni di Helmotz in coordinate ortogonali cilindriche

$$\nabla^2 f + k^2 f = 0$$

Per semplicità si consideri il caso $\frac{\partial}{\partial z} = 0$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + k^2 f = 0$$

supponendo che f sia una funzione a variabili separabili ovvero:

$$f(r, \varphi) = R(r)\psi(\varphi)$$

$$\frac{1}{R} \left(r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} \right) + k^2 r^2 + \frac{1}{\psi} \frac{d^2 \psi}{d\varphi^2} = 0$$

separazione delle variabili:

$$\begin{cases} \frac{1}{R} \left(r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} \right) + k^2 r^2 = v^2 & \rightarrow r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + (k^2 r^2 - v^2) R = 0 \\ \frac{1}{\psi} \frac{d^2 \psi}{d\varphi^2} = -v^2 & \rightarrow \frac{d^2 \psi}{d\varphi^2} + v^2 \psi = 0 \end{cases}$$

$$u = kr$$

$$\frac{dR}{dr} = \frac{dR}{du} \frac{du}{dr} = k \frac{dR}{du}$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} = \frac{d}{dr} \left(\frac{dR}{dr} \right) = \frac{d}{du} \left(k \frac{dR}{du} \right) \frac{du}{dr} = k^2 \frac{d^2 R}{du^2}$$

$$u^2 \frac{d^2 R}{du^2} + u \frac{dR}{du} + (u^2 - v^2) R = 0$$

le soluzioni di queste equazioni differenziali sono:

$$R(u) = \begin{cases} J_v(kr) \\ Y_v(kr) \end{cases} \quad \text{se } v = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\psi(\varphi) = \begin{cases} \cos(v\varphi) & \text{se } v = 1, 2, 3, \dots \\ \sin(v\varphi) & \text{se } v = 1, 2, 3, \dots \\ \varphi & \text{se } v = 0 \\ \cos t & \text{se } v = 0 \end{cases}$$

pertanto la soluzione generale ha la forma:

$$f(r, \varphi) = a_0 J_0(kr) + b_0 Y_0(kr) + c_0 \varphi J_0(kr) + d_0 \varphi Y_0(kr) + \\ \sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v J_v(kr) \sin(v\varphi) + \sum_{v=1}^{\infty} b_v J_v(kr) \cos(v\varphi) + \sum_{v=1}^{\infty} c_v Y_v(kr) \sin(v\varphi) + \sum_{v=1}^{\infty} d_v Y_v(kr) \cos(v\varphi)$$

se f è una funzione ad un sol valore deve essere $c_0 = 0$ e $d_0 = 0$

Equazioni di Helmotz in coordinate ortogonali sferiche

$$\nabla^2 f + k^2 f = 0$$

Per semplicità si consideri il caso $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + k^2 f = 0$$

supponendo che f sia una funzione a variabili separabili ovvero:

$$f(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta)$$

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + k^2 r^2 + \frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = 0$$

si supponga poi che sia:

$$\begin{cases} \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + k^2 r^2 = l(l+1) \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -l(l+1) \end{cases} \quad \text{con } l = 0, 1, 2, 3, \dots$$

nella prima equazione si effettuano i cambi di variabile:

$$U = \sqrt{r} R$$

$$u = kr$$

$$u^2 \frac{d^2 U}{du^2} + u \frac{dU}{du} + \left(u^2 - \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 \right) U = 0$$

per quanto riguarda la seconda equazione:

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta}{d\theta} &= \frac{d\Theta}{d(\cos \theta)} \frac{d(\cos \theta)}{d\theta} = -\sin \theta \frac{d\Theta}{d(\cos \theta)} \\ \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} &= \frac{d}{d\theta} \left(\frac{d\Theta}{d\theta} \right) = \frac{d}{d\theta} \left(-\sin \theta \frac{d\Theta}{d(\cos \theta)} \right) = -\cos \theta \frac{d\Theta}{d(\cos \theta)} - \sin \theta \frac{d^2 \Theta}{d(\cos \theta)^2} \frac{d(\cos \theta)}{d\theta} \\ (1 - \cos^2 \theta) \frac{d^2 \Theta}{d(\cos \theta)^2} - 2 \cos \theta \frac{d\Theta}{d(\cos \theta)} + l(l+1) \Theta &= 0 \end{aligned}$$

la soluzione della prima equazione differenziale è:

$$U(u) = \begin{cases} J_{l+\frac{1}{2}}(u) \\ J_{-(l+\frac{1}{2})}(u) \end{cases} \quad \text{con } l = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$J_{l+\frac{1}{2}}(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} u^{l+\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{u} \right)^l \frac{d^l}{du^l} \left(\frac{\sin u}{u} \right) \quad \text{con } l = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$J_{-(l+\frac{1}{2})}(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} u^{l+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{u} \right)^l \frac{d^l}{du^l} \left(\frac{\cos u}{u} \right) \quad \text{con } l = 0, 1, 2, 3, \dots$$

e in definitiva:

$$R(r) = \begin{cases} \frac{J_{l+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}} \\ \frac{J_{-(l+\frac{1}{2})}(kr)}{\sqrt{r}} \end{cases} \quad \text{con } l = 0, 1, 2, 3, \dots$$

la soluzione della seconda equazione differenziale:

$$\Theta(\theta) \propto P_l(\cos \theta) \quad \text{polinomio di Legendre di grado } l \quad \text{con } l = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$P_l(\alpha) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\alpha^l} [(\alpha^2 - 1)^l]$$

pertanto la soluzione generale ha la forma:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(r, \theta) &= \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{l=0}^{\infty} a_l \sqrt{\frac{2}{\pi}} (kr)^{l+\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{kr} \right)^l \frac{1}{k^l} \frac{d^l}{dr^l} \left(\frac{\sin(kr)}{kr} \right) P_l(\cos \theta) + \\ &\quad \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{l=0}^{\infty} b_l \sqrt{\frac{2}{\pi}} (kr)^{l+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{kr} \right)^l \frac{1}{k^l} \frac{d^l}{dr^l} \left(\frac{\cos(kr)}{kr} \right) P_l(\cos \theta) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{l=0}^{\infty} k^{\frac{1}{2}-l} \left(a_l (-1)^l \frac{d^l}{dr^l} \left(\frac{\sin(kr)}{kr} \right) + b_l \frac{d^l}{dr^l} \left(\frac{\cos(kr)}{kr} \right) \right) P_l(\cos \theta) \end{aligned}$$

Efficacia di schermatura di uno strato piano rispetto ad un'onda piana incidente

Consideriamo la seguente onda piana uniforme:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{E}}_{inc}(z) &= \dot{E}_0 e^{-\dot{\sigma}_1 z} \hat{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{H}}_{inc}(z) &= \sqrt{\frac{\epsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega}}{\mu_1}} \dot{E}_0 e^{-\dot{\sigma}_1 z} \hat{\mathbf{y}}\end{aligned}$$

o equivalentemente:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{H}}_{inc}(z) &= \dot{H}_{inc} e^{-\dot{\sigma}_1 z} \hat{\mathbf{y}} \\ \dot{\mathbf{E}}_{inc}(z) &= \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega}}} \dot{H}_{inc} e^{-\dot{\sigma}_1 z} \hat{\mathbf{x}}\end{aligned}$$

$$\dot{\sigma}_1 = j\omega \sqrt{\mu_1 \left(\epsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega} \right)}$$

$$\dot{\sigma}_2 = j\omega \sqrt{\mu_2 \left(\epsilon_2 + \frac{\gamma_2}{j\omega} \right)}$$

$$\dot{\mathbf{E}}(z) = \begin{cases} \left(\dot{E}_0 e^{-\dot{\sigma}_1 z} - \dot{A} e^{\dot{\sigma}_1 z} \right) \hat{\mathbf{x}} & \text{per } z < 0 \\ \left(\dot{B} e^{-\dot{\sigma}_2 z} - \dot{C} e^{\dot{\sigma}_2 z} \right) \hat{\mathbf{x}} & \text{per } 0 < z < s \\ \dot{D} e^{-\dot{\sigma}_1 z} \hat{\mathbf{x}} & \text{per } z > s \end{cases}$$

$$\dot{\mathbf{H}}(z) = \begin{cases} \left(\sqrt{\frac{\epsilon_1 + \gamma_1}{\mu_1}} \frac{j\omega}{j\omega} \dot{E}_0 e^{-\dot{\gamma}_1 z} + \sqrt{\frac{\epsilon_1 + \gamma_1}{\mu_1}} \dot{A} e^{\dot{\gamma}_1 z} \right) \hat{\mathbf{y}} & \text{per } z < 0 \\ \left(\sqrt{\frac{\epsilon_2 + \gamma_2}{\mu_2}} \frac{j\omega}{j\omega} \dot{B} e^{-\dot{\gamma}_2 z} + \sqrt{\frac{\epsilon_2 + \gamma_2}{\mu_2}} \frac{j\omega}{j\omega} \dot{C} e^{\dot{\gamma}_2 z} \right) \hat{\mathbf{y}} & \text{per } 0 < z < s \\ \sqrt{\frac{\epsilon_1 + \gamma_1}{\mu_1}} \frac{j\omega}{j\omega} \dot{D} e^{-\dot{\gamma}_1 z} \hat{\mathbf{y}} & \text{per } z > s \end{cases}$$

o anche equivalentemente:

$$\dot{\mathbf{H}}(z) = \begin{cases} \dot{H}_0 e^{-\dot{\gamma}_1 z} + \dot{A} e^{\dot{\gamma}_1 z} & \text{per } z < 0 \\ \dot{B} e^{-\dot{\gamma}_2 z} + \dot{C} e^{\dot{\gamma}_2 z} & \text{per } 0 < z < s \\ \dot{D} e^{-\dot{\gamma}_1 z} & \text{per } z > s \end{cases}$$

$$\dot{\mathbf{E}}(z) = \begin{cases} \left(\sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1 + \gamma_1}} \frac{j\omega}{j\omega} \dot{H}_0 e^{-\dot{\gamma}_1 z} - \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1 + \gamma_1}} \dot{A} e^{\dot{\gamma}_1 z} \right) \hat{\mathbf{z}} & \text{per } z < 0 \\ \left(\sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2 + \gamma_2}} \frac{j\omega}{j\omega} \dot{B} e^{-\dot{\gamma}_2 z} - \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2 + \gamma_2}} \frac{j\omega}{j\omega} \dot{C} e^{\dot{\gamma}_2 z} \right) \hat{\mathbf{z}} & \text{per } 0 < z < s \\ \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1 + \gamma_1}} \frac{j\omega}{j\omega} \dot{D} e^{-\dot{\gamma}_1 z} \hat{\mathbf{z}} & \text{per } z > s \end{cases}$$

imponendo la continuità delle componenti tangenti di $\dot{\mathbf{E}}$ e di $\dot{\mathbf{H}}$ attraverso le superfici di interfaccia $z=0$ e $z=s$:

$$\begin{cases} \dot{E}_0 - \dot{A} = \dot{B} - \dot{C} \\ \sqrt{\frac{\epsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega}}{\mu_1}} \dot{E}_0 + \sqrt{\frac{\epsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega}}{\mu_1}} \dot{A} = \sqrt{\frac{\epsilon_2 + \frac{\gamma_2}{j\omega}}{\mu_2}} \dot{B} + \sqrt{\frac{\epsilon_2 + \frac{\gamma_2}{j\omega}}{\mu_2}} \dot{C} \\ \dot{B} e^{-\dot{\alpha} z} - \dot{C} e^{\dot{\alpha} z} = \dot{D} e^{-\dot{\alpha} z} \\ \sqrt{\frac{\epsilon_2 + \frac{\gamma_2}{j\omega}}{\mu_2}} \dot{B} e^{-\dot{\alpha} z} + \sqrt{\frac{\epsilon_2 + \frac{\gamma_2}{j\omega}}{\mu_2}} \dot{C} e^{\dot{\alpha} z} = \sqrt{\frac{\epsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega}}{\mu_1}} \dot{D} e^{-\dot{\alpha} z} \end{cases}$$

o equivalentemente:

$$\begin{cases} \dot{H}_0 + \dot{A} = \dot{B} + \dot{C} \\ \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega}}} \dot{H}_0 - \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega}}} \dot{A} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2 + \frac{\gamma_2}{j\omega}}} \dot{B} - \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2 + \frac{\gamma_2}{j\omega}}} \dot{C} \\ \dot{B} e^{-\dot{\alpha} z} + \dot{C} e^{\dot{\alpha} z} = \dot{D} e^{-\dot{\alpha} z} \\ \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2 + \frac{\gamma_2}{j\omega}}} \dot{B} e^{-\dot{\alpha} z} - \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2 + \frac{\gamma_2}{j\omega}}} \dot{C} e^{\dot{\alpha} z} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega}}} \dot{D} e^{-\dot{\alpha} z} \end{cases}$$

ponendo:

$$\dot{\alpha} \pm \sqrt{\frac{\epsilon_2 + \frac{\gamma_2}{j\omega}}{\mu_2}} \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega}}} \sqrt{\mu_2}$$

si ottengono i seguenti valori delle costanti:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \dot{E}_0 \frac{(1 - \dot{\alpha}^2)(e^{\dot{\alpha} z} - e^{-\dot{\alpha} z})}{(1 - \dot{\alpha})^2 e^{-\dot{\alpha} z} - (1 + \dot{\alpha})^2 e^{\dot{\alpha} z}} \\ \dot{B} &= -2 \dot{E}_0 \frac{(1 + \dot{\alpha}) e^{\dot{\alpha} z}}{(1 - \dot{\alpha})^2 e^{-\dot{\alpha} z} - (1 + \dot{\alpha})^2 e^{\dot{\alpha} z}} \\ \dot{C} &= -2 \dot{E}_0 \frac{(1 - \dot{\alpha}) e^{-\dot{\alpha} z}}{(1 - \dot{\alpha})^2 e^{-\dot{\alpha} z} - (1 + \dot{\alpha})^2 e^{\dot{\alpha} z}} \\ \dot{D} &= -\frac{2 \dot{E}_0}{e^{-\dot{\alpha} z}} \frac{2 \dot{\alpha}}{(1 - \dot{\alpha})^2 e^{-\dot{\alpha} z} - (1 + \dot{\alpha})^2 e^{\dot{\alpha} z}} \end{aligned}$$

o equivalentemente:

$$\begin{aligned}\dot{A} &= \dot{H}_{inc} \frac{(1 - \dot{\alpha}^2)(e^{\dot{\sigma}_2 s} - e^{-\dot{\sigma}_1 s})}{(1 - \dot{\alpha})^2 e^{-\dot{\sigma}_2 s} - (1 + \dot{\alpha})^2 e^{\dot{\sigma}_1 s}} \\ \dot{B} &= -2 \dot{H}_{inc} \dot{\alpha} \frac{(1 + \dot{\alpha})e^{\dot{\sigma}_1 s}}{(1 - \dot{\alpha}^2)e^{-\dot{\sigma}_2 s} - (1 + \dot{\alpha}^2)e^{\dot{\sigma}_1 s}} \\ \dot{C} &= -2 \dot{H}_{inc} \dot{\alpha} \frac{(1 - \dot{\alpha})e^{-\dot{\sigma}_1 s}}{(1 - \dot{\alpha}^2)e^{-\dot{\sigma}_2 s} - (1 + \dot{\alpha}^2)e^{\dot{\sigma}_1 s}} \\ \dot{D} &= -\frac{2 \dot{H}_{inc}}{e^{-\dot{\sigma}_1 s} (1 - \dot{\alpha}^2)e^{-\dot{\sigma}_2 s} - (1 + \dot{\alpha}^2)e^{\dot{\sigma}_1 s}} 2 \dot{\alpha}\end{aligned}$$

in entrambi i casi si ottiene la seguente espressione dell'efficacia di schermatura:

$$ES = \frac{\left| \frac{\dot{E}_{scat} \text{ in schermo}}{\dot{E}_{inc} \text{ in schermo}} \right|}{\left| \frac{\dot{H}_{scat} \text{ in schermo}}{\dot{H}_{inc} \text{ in schermo}} \right|} \approx \left| \frac{\dot{E}_{sc}}{\dot{D}} \right| = \frac{\left| (1 + \dot{\alpha})^2 e^{(\dot{\sigma}_2 - \dot{\sigma}_1)s} - (1 - \dot{\alpha})^2 e^{-(\dot{\sigma}_2 + \dot{\sigma}_1)s} \right|}{4 \left| \dot{\alpha} \right|}$$

$$\text{se } \begin{cases} \frac{\gamma_2}{\omega \varepsilon_2} \gg 1 \\ \operatorname{Re} \left[\dot{\sigma}_2 \right] s \ll 1 \end{cases}$$

$$\dot{\sigma}_2 = j\omega \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} \sqrt{1 - j \frac{\gamma_2}{\omega \varepsilon_2}} \approx \sqrt{\frac{\omega \mu_2 \gamma_2}{2}} (1 + j)$$

$$\dot{\sigma}_1 = j\omega \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} \sqrt{1 - j \frac{\gamma_1}{\omega \varepsilon_1}} \approx \sqrt{\frac{\omega \mu_1 \gamma_1}{2}} (1 + j)$$

$$\dot{\alpha} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2 + \frac{\gamma_2}{j\omega}}}{\sqrt{\varepsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega}}} \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} \sqrt{\frac{1 - j \frac{\gamma_2}{\omega \varepsilon_2}}{1 - j \frac{\gamma_1}{\omega \varepsilon_1}}} \approx \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}}$$

$$ES = \frac{\left| \left(1 + 2 \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}} + \frac{\mu_1 \gamma_2}{\mu_2 \gamma_1} \right) e^{\frac{j\omega}{2} \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} \sqrt{1 - j \frac{\gamma_2}{\omega \varepsilon_2}}} - \left(1 - 2 \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}} + \frac{\mu_1 \gamma_2}{\mu_2 \gamma_1} \right) e^{-\frac{j\omega}{2} \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} \sqrt{1 - j \frac{\gamma_2}{\omega \varepsilon_2}}} \right|}{4 \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}}}$$

se $\omega = 0$ si ha $ES = 1$

se $\text{Re}\left\{\dot{\sigma}_2\right\} s \gg 1$:

$$ES \approx \frac{\left|1 + \dot{\alpha}\right|^2}{4\left|\dot{\alpha}\right|^2} e^{\text{Re}\left\{\dot{\sigma}_2 - \dot{\sigma}_1\right\} s}$$

se $\begin{cases} \frac{\gamma_2}{\omega \varepsilon_2} \ll 1 \\ \text{Re}\left\{\dot{\sigma}_2\right\} s \gg 1 \end{cases}$

$$\dot{\sigma}_2 = j\omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}\sqrt{1 - j\frac{\gamma_2}{\omega\varepsilon_2}} \approx j\omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}\left(1 - j\frac{1}{2}\frac{\gamma_2}{\omega\varepsilon_2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}\gamma_2 + j\omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}$$

$$\dot{\sigma}_1 = j\omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}\sqrt{1 - j\frac{\gamma_1}{\omega\varepsilon_1}} \approx j\omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}\left(1 - j\frac{1}{2}\frac{\gamma_1}{\omega\varepsilon_1}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}\gamma_1 + j\omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}$$

$$\dot{\alpha} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 + \frac{\gamma_2}{j\omega}}{\varepsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega}} \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \sqrt{\frac{1 - j\frac{\gamma_2}{\omega\varepsilon_2}}{1 - j\frac{\gamma_1}{\omega\varepsilon_1}}} \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} \approx \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}$$

$$ES \approx \frac{\left[1 + 2\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{\mu_1}{\mu_2}\right] e^{\left(\frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}\gamma_2 - \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}\gamma_1\right) + j\omega(\sqrt{\mu_2\varepsilon_2} - \sqrt{\mu_1\varepsilon_1})\right)s}}{4\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}} \approx \frac{1}{4} \frac{1 + 2\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{\mu_1}{\mu_2}}{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}} e^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}\gamma_2 s}$$

Frequenze di risonanza in una cavità parallelepipeda

Per il calcolo delle frequenze di risonanza in un cavità parallelepipeda con pareti costituite da un conduttore elettrico perfetto o da un conduttore magnetico perfetto si parte dalle equazioni di Maxwell in assenza di correnti impresse espresse in coordinate cartesiane ortogonali.

$$\begin{aligned}\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} - \dot{\sigma}^2 \dot{\mathbf{E}} &= \dot{\mathbf{0}}, \quad \nabla^2 \dot{\mathbf{H}} - \dot{\sigma}^2 \dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{0}}, \\ \nabla^2 \dot{E}_x - \dot{\sigma}^2 \dot{E}_x &= \dot{0}, \quad \nabla^2 \dot{E}_y - \dot{\sigma}^2 \dot{E}_y = \dot{0}, \quad \nabla^2 \dot{E}_z - \dot{\sigma}^2 \dot{E}_z = \dot{0} \\ \nabla^2 \dot{H}_x - \dot{\sigma}^2 \dot{H}_x &= \dot{0}, \quad \nabla^2 \dot{H}_y - \dot{\sigma}^2 \dot{H}_y = \dot{0}, \quad \nabla^2 \dot{H}_z - \dot{\sigma}^2 \dot{H}_z = \dot{0}\end{aligned}\quad (6.1)$$

Si deve risolvere quindi un'equazione nella forma:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \dot{f} - \dot{\sigma}^2 \dot{f} &= \dot{0} \\ f(x, y, z) &= X(x)Y(y)Z(z)\end{aligned}\quad (6.2)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\dot{X}} \frac{d^2 \dot{X}}{dx^2} + \frac{1}{\dot{Y}} \frac{d^2 \dot{Y}}{dy^2} + \frac{1}{\dot{Z}} \frac{d^2 \dot{Z}}{dz^2} &= \dot{\sigma}^2 \\ \frac{1}{\dot{X}} \frac{d^2 \dot{X}}{dx^2} &= \dot{\sigma}_x^2 \\ \frac{1}{\dot{Y}} \frac{d^2 \dot{Y}}{dy^2} &= \dot{\sigma}_y^2 \\ \frac{1}{\dot{Z}} \frac{d^2 \dot{Z}}{dz^2} &= \dot{\sigma}_z^2\end{aligned}\quad (6.3)$$

Dove

$$\dot{\sigma}_x^2 + \dot{\sigma}_y^2 + \dot{\sigma}_z^2 = \dot{\sigma}^2 \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \dot{A}_x e^{-\dot{\sigma}_x x} + \dot{B}_x e^{\dot{\sigma}_x x} \\ \dot{Y} &= \dot{A}_y e^{-\dot{\sigma}_y y} + \dot{B}_y e^{\dot{\sigma}_y y}\end{aligned}\quad (6.5)$$

$$\dot{Z} = \dot{A}_z e^{-\dot{\sigma}_z z} + \dot{B}_z e^{\dot{\sigma}_z z}$$

$$\begin{aligned}\dot{E}_x &= \left(\dot{A}_{xz} e^{-\dot{\sigma}_z z} + \dot{B}_{xz} e^{\dot{\sigma}_z z} \right) \left(\dot{A}_{xy} e^{-\dot{\sigma}_y y} + \dot{B}_{xy} e^{\dot{\sigma}_y y} \right) \left(\dot{A}_{zx} e^{-\dot{\sigma}_x x} + \dot{B}_{zx} e^{\dot{\sigma}_x x} \right) \\ \dot{E}_y &= \left(\dot{A}_{yz} e^{-\dot{\sigma}_z z} + \dot{B}_{yz} e^{\dot{\sigma}_z z} \right) \left(\dot{A}_{xy} e^{-\dot{\sigma}_y y} + \dot{B}_{xy} e^{\dot{\sigma}_y y} \right) \left(\dot{A}_{yx} e^{-\dot{\sigma}_x x} + \dot{B}_{yx} e^{\dot{\sigma}_x x} \right) \\ \dot{E}_z &= \left(\dot{A}_{zx} e^{-\dot{\sigma}_x x} + \dot{B}_{zx} e^{\dot{\sigma}_x x} \right) \left(\dot{A}_{yz} e^{-\dot{\sigma}_y y} + \dot{B}_{yz} e^{\dot{\sigma}_y y} \right) \left(\dot{A}_{xz} e^{-\dot{\sigma}_z z} + \dot{B}_{xz} e^{\dot{\sigma}_z z} \right)\end{aligned}\quad (6.6)$$

Se le pareti della cavità sono costituite da un C.E.P si ha:

$$\begin{aligned}x=0 &\rightarrow \dot{E}_y = \dot{E}_z = 0 \rightarrow \begin{cases} \dot{A}_{xy} + \dot{B}_{xy} = \dot{0} \\ \dot{A}_{xz} + \dot{B}_{xz} = \dot{0} \end{cases} \\ x=l_x &\rightarrow \dot{E}_y = \dot{E}_z = 0 \rightarrow \begin{cases} \dot{A}_{xy} e^{-\dot{\sigma}_y l_y} + \dot{B}_{xy} e^{\dot{\sigma}_y l_y} = \dot{0} \\ \dot{A}_{xz} e^{-\dot{\sigma}_z l_z} + \dot{B}_{xz} e^{\dot{\sigma}_z l_z} = \dot{0} \end{cases} \\ y=0 &\rightarrow \dot{E}_x = \dot{E}_z = 0 \rightarrow \begin{cases} \dot{A}_{yx} + \dot{B}_{yx} = \dot{0} \\ \dot{A}_{yz} + \dot{B}_{yz} = \dot{0} \end{cases} \\ y=l_y &\rightarrow \dot{E}_x = \dot{E}_z = \dot{0} \rightarrow \begin{cases} \dot{A}_{yx} e^{-\dot{\sigma}_x l_x} + \dot{B}_{yx} e^{\dot{\sigma}_x l_x} = \dot{0} \\ \dot{A}_{yz} e^{-\dot{\sigma}_z l_z} + \dot{B}_{yz} e^{\dot{\sigma}_z l_z} = \dot{0} \end{cases} \\ z=0 &\rightarrow \dot{E}_x = \dot{E}_y = 0 \rightarrow \begin{cases} \dot{A}_{zx} + \dot{B}_{zx} = \dot{0} \\ \dot{A}_{zy} + \dot{B}_{zy} = \dot{0} \end{cases} \\ z=l_z &\rightarrow \dot{E}_x = \dot{E}_y = \dot{0} \rightarrow \begin{cases} \dot{A}_{zx} e^{-\dot{\sigma}_x l_x} + \dot{B}_{zx} e^{\dot{\sigma}_x l_x} = \dot{0} \\ \dot{A}_{zy} e^{-\dot{\sigma}_y l_y} + \dot{B}_{zy} e^{\dot{\sigma}_y l_y} = \dot{0} \end{cases}\end{aligned}\quad (6.7)$$

L'equazione trascendente:

$$e^{-\dot{\sigma} l} - e^{\dot{\sigma} l} = \dot{0} \xrightarrow{\dot{\sigma} = \alpha + j\beta} (e^{-\alpha l} - e^{\alpha l}) \cos(\beta l) - j(e^{-\alpha l} - e^{\alpha l}) \sin(\beta l) = 0$$

$$(e^{-\alpha l} - e^{\alpha l}) \cos(\beta l) = 0$$

$$(e^{-\alpha l} - e^{\alpha l}) \sin(\beta l) = 0$$

Ammette soluzione solo se $\alpha = 0$

$$\text{sen}(\beta l) = 0 \rightarrow \beta l = n\pi \quad \text{con} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Quindi nel nostro caso deve essere:

$$\dot{\sigma}_x = jk_x$$

$$\dot{\sigma}_y = jk_y \rightarrow k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

$$\dot{\sigma}_z = jk_z$$

$$\begin{cases} k_x l_x = n_x \pi & \text{con} \quad n_x = 0, 1, 2, \dots \\ k_y l_y = n_y \pi & \text{con} \quad n_y = 0, 1, 2, \dots \\ k_z l_z = n_z \pi & \text{con} \quad n_z = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \xrightarrow[\frac{c \sqrt{\mu \epsilon}}{\sqrt{j\omega}}]{\frac{e^{-j2\pi f}}{e^{-j2\pi f}}} f_{\text{mod}} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{n_x}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{l_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{l_z}\right)^2}$$

Si noti che dei coefficienti n_x, n_y, n_z solo uno può essere nullo altrimenti il campo elettromagnetico si annulla.

$$\begin{aligned} E_x &= -4A_y A_z \left\{ (A_x + B_y) \cos(k_x x) + j(-A_x + B_y) \text{sen}(k_x x) \right\} \text{sen}(k_y y) \text{sen}(k_z z) \\ E_y &= -4A_x A_z \left\{ (A_y + B_x) \cos(k_y y) + j(-A_y + B_x) \text{sen}(k_y y) \right\} \text{sen}(k_x x) \text{sen}(k_z z) \\ E_z &= -4A_x A_y \left\{ (A_z + B_x) \cos(k_z z) + j(-A_z + B_x) \text{sen}(k_z z) \right\} \text{sen}(k_x x) \text{sen}(k_y y) \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$\dot{\mathbf{H}} = -\frac{1}{j\omega\mu} \nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -\frac{1}{j\omega\mu} \left[\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}} \right]$$

$$\begin{aligned} \dot{H}_x &= -\frac{1}{j\omega\mu} \left\{ -4k_y \dot{A}_y \dot{A}_z \text{sen}(k_x x) \cos(k_y y) \left[(\dot{A}_z + \dot{B}_z) \cos(k_z z) + j(-\dot{A}_z + \dot{B}_z) \text{sen}(k_z z) \right] + \right. \\ &\quad \left. 4k_z \dot{A}_y \dot{A}_z \text{sen}(k_x x) \cos(k_z z) \left[(\dot{A}_y + \dot{B}_y) \cos(k_y y) + j(-\dot{A}_y + \dot{B}_y) \text{sen}(k_y y) \right] \right\} \\ \dot{H}_y &= -\frac{1}{j\omega\mu} \left\{ -4k_x \dot{A}_x \dot{A}_z \text{sen}(k_y y) \cos(k_z z) \left[(\dot{A}_x + \dot{B}_x) \cos(k_x x) + j(-\dot{A}_x + \dot{B}_x) \text{sen}(k_x x) \right] + \right. \\ &\quad \left. 4k_z \dot{A}_x \dot{A}_z \text{sen}(k_y y) \cos(k_z z) \left[(\dot{A}_y + \dot{B}_y) \cos(k_y y) + j(-\dot{A}_y + \dot{B}_y) \text{sen}(k_y y) \right] \right\} \\ \dot{H}_z &= -\frac{1}{j\omega\mu} \left\{ -4k_x \dot{A}_y \dot{A}_x \text{sen}(k_z z) \cos(k_x x) \left[(\dot{A}_y + \dot{B}_y) \cos(k_y y) + j(-\dot{A}_y + \dot{B}_y) \text{sen}(k_y y) \right] + \right. \\ &\quad \left. 4k_y \dot{A}_x \dot{A}_y \text{sen}(k_z z) \cos(k_y y) \left[(\dot{A}_x + \dot{B}_x) \cos(k_x x) + j(-\dot{A}_x + \dot{B}_x) \text{sen}(k_x x) \right] \right\} \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{H}} = \dot{0} \rightarrow \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial y} + \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial z} = \dot{0}$$

andando a sostituire le relazioni ottenute precedentemente si ottiene un'identità

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{E}} = \dot{0} \rightarrow \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial z} = \dot{0}$$

andando a sostituire le relazioni ottenute precedentemente si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{B}_x &= \dot{A}_x \\ \dot{B}_y &= \dot{A}_y \\ \dot{B}_z &= \dot{A}_z \\ K_x \dot{A}_{xx} \dot{A}_{yy} \dot{A}_{zz} + K_y \dot{A}_{yy} \dot{A}_{xx} \dot{A}_{zz} + K_z \dot{A}_{zz} \dot{A}_{xx} \dot{A}_{yy} &= \dot{0} \end{aligned} \quad (6.10)$$

E quindi si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= -8 \dot{A}_{yy} \dot{A}_{zz} \dot{A}_{xx} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \\ \dot{E}_y &= -8 \dot{A}_{xx} \dot{A}_{zz} \dot{A}_{yy} \cos(k_y y) \sin(k_x x) \sin(k_z z) \\ \dot{E}_z &= -8 \dot{A}_{xx} \dot{A}_{yy} \dot{A}_{zz} \cos(k_z z) \sin(k_x x) \sin(k_y y) \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} \dot{H}_x &= \frac{8}{j\omega\mu} \left(k_y \dot{A}_{xx} \dot{A}_{yy} \dot{A}_{zz} - k_z \dot{A}_{yy} \dot{A}_{zz} \dot{A}_{xx} \right) \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \\ \dot{H}_y &= \frac{8}{j\omega\mu} \left(k_z \dot{A}_{yy} \dot{A}_{zz} \dot{A}_{xx} - k_x \dot{A}_{zz} \dot{A}_{xx} \dot{A}_{yy} \right) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \cos(k_x x) \\ \dot{H}_z &= \frac{8}{j\omega\mu} \left(k_x \dot{A}_{yy} \dot{A}_{zz} \dot{A}_{xx} - k_y \dot{A}_{zz} \dot{A}_{xx} \dot{A}_{yy} \right) \cos(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \end{aligned} \quad (6.12)$$

Se si pone

$$\begin{aligned} \dot{C}_x &= -8 \dot{A}_{xx} \dot{A}_{yy} \dot{A}_{zz} \\ \dot{C}_y &= -8 \dot{A}_{yy} \dot{A}_{zz} \dot{A}_{xx} \\ \dot{C}_z &= -8 \dot{A}_{zz} \dot{A}_{xx} \dot{A}_{yy} \end{aligned} \quad (6.13)$$

Si ha che:

$$\begin{aligned}\dot{E}_x &= \dot{C}_x \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \\ \dot{E}_y &= \dot{C}_y \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \\ \dot{E}_z &= \dot{C}_z \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z)\end{aligned}\quad (6.14)$$

$$\begin{aligned}\dot{H}_x &= -\frac{1}{j\omega\mu} \left(k_y \dot{C}_z - k_z \dot{C}_y \right) \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \\ \dot{H}_y &= -\frac{1}{j\omega\mu} \left(k_z \dot{C}_x - k_x \dot{C}_z \right) \cos(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \\ \dot{H}_z &= -\frac{1}{j\omega\mu} \left(k_x \dot{C}_y - k_y \dot{C}_x \right) \cos(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z)\end{aligned}\quad (6.15)$$

E dalla relazione

$$k_x \dot{C}_x + k_y \dot{C}_y + k_z \dot{C}_z = 0$$

risulta evidente che le componenti del campo elettrico e del campo magnetico non sono indipendenti fra di loro.

L'energia elettrica immagazzinata in V all'istante t è:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_e(t) &= \int_0^l \int_0^b \int_0^c \frac{1}{2} \varepsilon \mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{E}(t) dx dy dz \\ \mathcal{E}_m(t) &= \int_0^l \int_0^b \int_0^c \frac{1}{2} \mu \mathbf{H}(t) \cdot \mathbf{H}(t) dx dy dz\end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_e(t) + \mathcal{E}_m(t) = \frac{1}{2} \varepsilon \frac{l b c}{8} \left(\left| \dot{C}_x \right|^2 + \left| \dot{C}_y \right|^2 + \left| \dot{C}_z \right|^2 \right) = \cos t$$

Mentre la media in un periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ dell'energia elettrica e magnetica

immagazzinata in V è data da $Q = 2\omega(\mathcal{E}_{m, media} - \mathcal{E}_{e, media})$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{emiss} &= \int_0^L \int_0^L \int_0^L \varepsilon \frac{\dot{\mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{E}}}{4} dx dy dz = \frac{1}{4} \varepsilon \frac{L_x L_y L_z}{8} \left(|\dot{C}_x|^2 + |\dot{C}_y|^2 + |\dot{C}_z|^2 \right) \\ \mathcal{E}_{mot} &= \int_0^L \int_0^L \int_0^L \mu \frac{\dot{\mathbf{H}} \cdot \dot{\mathbf{H}}}{4} dx dy dz = \frac{1}{4} \varepsilon \frac{L_x L_y L_z}{8} \left(|\dot{C}_x|^2 + |\dot{C}_y|^2 + |\dot{C}_z|^2 \right)\end{aligned}$$

E si ottiene

$$\mathcal{E}_{emiss} = \mathcal{E}_{mot} = \frac{1}{4} \varepsilon \frac{L_x L_y L_z}{8} \left(|\dot{C}_x|^2 + |\dot{C}_y|^2 + |\dot{C}_z|^2 \right)$$

quindi

$$Q = 0$$

Campo elettromagnetico generato da una corrente elettrica sinusoidale di lunghezza infinita

Se $\dot{\mathbf{J}} = \dot{J} \hat{\mathbf{z}}$ si ha che $\dot{\mathbf{A}} = \dot{A} \hat{\mathbf{z}}$ e quindi:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \dot{\sigma}^2 \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} - \dot{\sigma}^2 \mathbf{A} = -\mu \dot{I}$$

pertanto la soluzione generale ha la forma:

ponendo $\dot{u} = -j \dot{\sigma} r$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{A}}(r, \phi) = & a_0 J_0(-j \dot{\sigma} r) + b_0 Y_0(-j \dot{\sigma} r) + c_0 \phi J_0(-j \dot{\sigma} r) + d_0 \phi Y_0(-j \dot{\sigma} r) + \\ & \sum_{v=1}^{\infty} a_v J_v(-j \dot{\sigma} r) \sin(v\phi) + \sum_{v=1}^{\infty} b_v Y_v(-j \dot{\sigma} r) \cos(v\phi) + \sum_{v=1}^{\infty} c_v Y_v(-j \dot{\sigma} r) \sin(v\phi) + \sum_{v=1}^{\infty} d_v Y_v(-j \dot{\sigma} r) \cos(v\phi) \end{aligned}$$

se $\mathbf{A}$ è una funzione ad un sol valore deve essere $c_0 = 0$ e $d_0 = 0$

per simmetria attorno all'asse z deve essere:

$$\begin{cases} a_v = 0 \\ b_v = 0 \\ c_v = 0 \\ d_v = 0 \end{cases} \text{ per } v = 1, 2, 3, \dots$$

$$\dot{\mathbf{A}}(r, \phi) = \dot{a}_0 J_0(-j \dot{\sigma} r) + \dot{b}_0 Y_0(-j \dot{\sigma} r)$$

per la determinazione delle costanti si determina il campo magnetico:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{B}} = \nabla \times \dot{\mathbf{A}} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & r\hat{\phi} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A \end{vmatrix} = - \left[\dot{a}_0 \frac{dJ_0(-j \dot{\sigma} r)}{dr} + \dot{b}_0 \frac{dY_0(-j \dot{\sigma} r)}{dr} \right] \hat{\phi} = \\ = -j \dot{\sigma} \left[\dot{a}_0 J_1(-j \dot{\sigma} r) + \dot{b}_0 Y_1(-j \dot{\sigma} r) \right] \hat{\phi} \xrightarrow{\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}} \mathbf{H} = \frac{-j \dot{\sigma}}{\mu} \left[\dot{a}_0 J_1(-j \dot{\sigma} r) + \dot{b}_0 Y_1(-j \dot{\sigma} r) \right] \hat{\phi} \end{aligned}$$

e si utilizza il teorema del rotore per $r \rightarrow 0$:

$$Y_1(\dot{u}) \xrightarrow{\dot{u} \rightarrow 0} \frac{-1}{\pi} \left(\frac{2}{\dot{u}} \right)$$



$$\frac{-j\dot{\sigma}}{\mu} \left[\dot{b}_0 \frac{-1}{\pi} \left(\frac{2}{-j\dot{\sigma}r} \right) \right] 2\pi r = \dot{I} \quad \rightarrow \quad \dot{b}_0 = -\frac{\mu \dot{I}}{4}$$

si noti che per $r \rightarrow 0$ la soluzione in regime sinusoidale ha lo stesso andamento della soluzione in regime stazionario ovvero:

$$\dot{A} = \dot{b}_0 \frac{2}{\pi} \ln r = -\frac{\mu \dot{I}}{2\pi} \ln r$$

nel caso del regime sinusoidale il potenziale vettore $\dot{A}$ per $r \rightarrow \infty$ viene annullato dalla presenza del campo elettrico e quindi del termine $(\gamma + j\omega\epsilon)\dot{E}$

$$\dot{a}_0 \cos\left(j\sigma r - \frac{\pi}{4}\right) + \dot{b}_0 \cos\left(j\sigma r - \frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$$

ovvero

$$\left(\dot{a}_0 - j\dot{b}_0\right)e^{j\left(-j\sigma r - \frac{\pi}{4}\right)} + \left(\dot{a}_0 + j\dot{b}_0\right)e^{-j\left(-j\sigma r - \frac{\pi}{4}\right)} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \quad \text{quindi} \quad \dot{a}_0 = j\dot{b}_0$$

in definitiva:

$$\dot{A}(r, \varphi) = -j\frac{\mu \dot{I}}{4} \left[J_0(-j\dot{\sigma}r) - jY_0(-j\dot{\sigma}r) \right] \hat{z} = -j\frac{\mu \dot{I}}{4} H_0^{(2)}(-j\dot{\sigma}r) \hat{z}$$

$$\dot{H}(r, \varphi) = -\dot{\sigma} \frac{\dot{I}}{4} \left[J_1(-j\dot{\sigma}r) - jY_1(-j\dot{\sigma}r) \right] \hat{\phi} = -\dot{\sigma} \frac{\dot{I}}{4} H_1^{(2)}(-j\dot{\sigma}r) \hat{\phi}$$

$$\dot{E} = -j\omega \dot{A} + \frac{\nabla \nabla \cdot \dot{A}}{j\omega\mu \left(\epsilon + \frac{\gamma}{j\omega} \right)}$$

$$\nabla \cdot \dot{A} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial z}(rA_z) \right] = 0$$

$$\dot{E}(r, \varphi) = -j\omega \frac{\mu \dot{I}}{4} \left[J_0(-j\dot{\sigma}r) - jY_0(-j\dot{\sigma}r) \right] \hat{z} = -j\omega \frac{\mu \dot{I}}{4} H_0^{(2)}(-j\dot{\sigma}r) \hat{z}$$

per $r \rightarrow 0$ si ha:

$$\dot{\mathbf{A}} \xrightarrow{r \rightarrow 0} -\frac{\mu \dot{I}}{2\pi} \ln r \hat{\mathbf{z}}$$

$$\dot{\mathbf{H}} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \frac{\dot{I}}{2\pi} \frac{1}{r} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\dot{\mathbf{E}} \xrightarrow{r \rightarrow 0} -j\omega \frac{\mu \dot{I}}{2\pi} \ln r \hat{\mathbf{z}}$$

Campo elettromagnetico generato da una coppia di correnti elettriche sinusoidali di lunghezza infinita aventi stesso modulo e verso opposto

Per il principio di sovrapposizione degli effetti e imponendo l'annullamento del potenziale vettore nella mezzzeria:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{A}}(r, \varphi) &= -j \frac{\mu \dot{I}}{4} \left[J_0(-j \dot{\sigma} r_2) - j Y_0(-j \dot{\sigma} r_2) \right] - j \frac{\mu \dot{I}}{4} \left[J_0(-j \dot{\sigma} r_1) - j Y_0(-j \dot{\sigma} r_1) \right] = \\ &= j \frac{\mu \dot{I}}{4} \left\{ \left[J_0(-j \dot{\sigma} r_2) - J_0(-j \dot{\sigma} r_1) \right] - j \left[Y_0(-j \dot{\sigma} r_2) - Y_0(-j \dot{\sigma} r_1) \right] \right\} = \\ &= j \frac{\mu \dot{I} d}{4} \left\{ \frac{\left[J_0(j \dot{\sigma} r_2) - J_0(j \dot{\sigma} r_1) \right]}{d} - j \frac{\left[Y_0(j \dot{\sigma} r_2) - Y_0(j \dot{\sigma} r_1) \right]}{d} \right\} \end{aligned}$$

se $r_1 \gg d$ e $r_2 \gg d$ si ha che $d \approx \frac{r_2 - r_1}{\cos \varphi}$ e quindi:

$$\dot{\mathbf{A}}(r, \varphi) = j \frac{\mu \dot{I} d}{4} \left\{ \frac{\left[J_0(j \dot{\sigma} r_2) - J_0(j \dot{\sigma} r_1) \right]}{r_2 - r_1} - j \frac{\left[Y_0(j \dot{\sigma} r_2) - Y_0(j \dot{\sigma} r_1) \right]}{r_2 - r_1} \right\} \cos \varphi$$

se $r_2 - r_1 \rightarrow 0$ si ha che $r_2 \rightarrow r_1 \rightarrow r$ e quindi:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{A}}(r, \varphi) &= j \frac{\mu \dot{I} d}{4} \left\{ \frac{dJ_0(-j\dot{\sigma}r)}{dr} - j \frac{dY_0(-j\dot{\sigma}r)}{dr} \right\} \cos \varphi = j \frac{\mu \dot{I} d}{4} (-j\dot{\sigma}) \left\{ \frac{dJ_0(-j\dot{\sigma}r)}{d(-j\dot{\sigma}r)} - j \frac{dY_0(-j\dot{\sigma}r)}{d(-j\dot{\sigma}r)} \right\} \cos \varphi = \\ &= j \frac{\mu \dot{I} d}{4} (-j\dot{\sigma})(-1) \left[J_1(-j\dot{\sigma}r) - jY_1(-j\dot{\sigma}r) \right] \cos \varphi = -\frac{\mu \dot{I} d}{4} \dot{\sigma} \left[J_1(-j\dot{\sigma}r) - jY_1(-j\dot{\sigma}r) \right] \cos \varphi = \\ &= -\frac{\mu \dot{I} d}{4} \dot{\sigma} H_1^{(2)}(-j\dot{\sigma}r) \cos \varphi\end{aligned}$$

in definitiva:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{A}}(r, \varphi) &= -\frac{\mu \dot{I} d}{4} \dot{\sigma} \left[J_1(-j\dot{\sigma}r) - jY_1(-j\dot{\sigma}r) \right] \cos \varphi \hat{\mathbf{z}} = -\frac{\mu \dot{I} d}{4} \dot{\sigma} H_1^{(2)}(-j\dot{\sigma}r) \cos \varphi \hat{\mathbf{z}} \\ \dot{\mathbf{B}} = \nabla \times \dot{\mathbf{A}} &= \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & r\hat{\boldsymbol{\varphi}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} = \mu \dot{I} d \left\{ \frac{\dot{\sigma}}{4r} H_1^{(2)}(-j\dot{\sigma}r) \text{sen} \varphi \hat{\mathbf{r}} - j \frac{\dot{\sigma}^2 r}{4} \left[\frac{1}{-j\dot{\sigma}r} H_1^{(2)}(-j\dot{\sigma}r) - H_2^{(2)}(-j\dot{\sigma}r) \right] \cos \varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}} \right\} = \\ \frac{\dot{\sigma}}{4} \mu \dot{I} d \left\{ H_1^{(2)}(-j\dot{\sigma}r) \frac{\text{sen} \varphi}{r} \hat{\mathbf{r}} + \left[H_1^{(2)}(-j\dot{\sigma}r) + j\sigma r H_2^{(2)}(-j\dot{\sigma}r) \right] \frac{\cos \varphi}{r} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \right\}\end{aligned}$$

$$\dot{\mathbf{E}} = -j\omega \dot{\mathbf{A}} + \frac{\nabla \nabla \cdot \dot{\mathbf{A}}}{j\omega \mu \left(\varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega} \right)}$$

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{A}} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (rA_r) + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial z} (rA_z) \right] = 0$$

$$\dot{\mathbf{E}}(r, \varphi) = j\omega \frac{\mu \dot{I} d}{4} \dot{\sigma} \left[J_1(-j\dot{\sigma}r) - jY_1(-j\dot{\sigma}r) \right] \cos \varphi \hat{\mathbf{z}} = j\omega \frac{\mu \dot{I} d}{4} \dot{\sigma} H_1^{(2)}(-j\dot{\sigma}r) \cos \varphi \hat{\mathbf{z}}$$

per $r \rightarrow 0$ si ha:

$$\dot{\mathbf{A}} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \frac{\mu \dot{I} d \cos \varphi}{2\pi} \frac{\dot{\sigma}}{r} \hat{\mathbf{z}}$$

$$\dot{\mathbf{B}} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \frac{\dot{I} d}{2\pi} \left(-\frac{\text{sen} \varphi}{r^2} \hat{\mathbf{r}} + \frac{\cos \varphi}{r^2} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \right)$$

$$\dot{\mathbf{E}} \xrightarrow{r \rightarrow 0} -j\omega \frac{\mu \dot{I} d \cos \varphi}{2\pi} \frac{\dot{\sigma}}{r} \hat{\mathbf{z}}$$

Efficacia di schermatura di un guscio cilindrico contenente una corrente elettrica sinusoidale di lunghezza infinita

Se $\hat{\mathbf{J}} = \hat{J} \hat{\mathbf{z}}$ si ha che $\hat{\mathbf{A}} = \hat{A} \hat{\mathbf{z}}$ e quindi dalla () :

pertanto la soluzione generale ha la forma:

$$\hat{\mathbf{A}}(r) = \begin{cases} \hat{b}_0 J_0(-j \hat{\sigma}_1 r) + \hat{d}_0 Y_0(-j \hat{\sigma}_1 r) & \text{per } r < R_1 \\ \hat{f}_0 J_0(-j \hat{\sigma}_2 r) + \hat{h}_0 Y_0(-j \hat{\sigma}_2 r) & \text{per } R_1 < r < R_2 \\ \hat{l}_0 J_0(-j \hat{\sigma}_1 r) + \hat{n}_0 Y_0(-j \hat{\sigma}_1 r) & \text{per } r > R_2 \end{cases}$$

$$\hat{\mathbf{A}}(r) = \begin{cases} \hat{a}_0 J_0(-j \hat{\sigma}_1 r) + \hat{b}_0 Y_0(-j \hat{\sigma}_1 r) & \text{per } r < R_1 \\ \hat{c}_0 J_0(-j \hat{\sigma}_2 r) + \hat{d}_0 Y_0(-j \hat{\sigma}_2 r) & \text{per } R_1 < r < R_2 \\ \hat{e}_0 J_0(-j \hat{\sigma}_1 r) + \hat{f}_0 Y_0(-j \hat{\sigma}_1 r) & \text{per } r > R_2 \end{cases}$$

$$\hat{\mathbf{E}}(r) = -j\omega \hat{\mathbf{A}}(r) \hat{\mathbf{z}} = \begin{cases} -j\omega \left[\hat{a}_0 J_0(-j \hat{\sigma}_1 r) + \hat{b}_0 Y_0(-j \hat{\sigma}_1 r) \right] \hat{\mathbf{z}} & \text{per } r < R_1 \\ -j\omega \left[\hat{c}_0 J_0(-j \hat{\sigma}_2 r) + \hat{d}_0 Y_0(-j \hat{\sigma}_2 r) \right] \hat{\mathbf{z}} & \text{per } R_1 < r < R_2 \\ -j\omega \left[\hat{e}_0 J_0(-j \hat{\sigma}_1 r) + \hat{f}_0 Y_0(-j \hat{\sigma}_1 r) \right] \hat{\mathbf{z}} & \text{per } r > R_2 \end{cases}$$

$$\hat{\mathbf{H}}(r) = -\frac{1}{\mu} \frac{d \hat{\mathbf{A}}}{dr} \hat{\phi} = \begin{cases} \omega \sqrt{\frac{\epsilon_1 + \gamma_1}{\mu_1}} \left[\hat{a}_0 J_1(-j \hat{\sigma}_1 r) + \hat{b}_0 Y_1(-j \hat{\sigma}_1 r) \right] \hat{\mathbf{z}} \\ \omega \sqrt{\frac{\epsilon_2 + \gamma_2}{\mu_2}} \left[\hat{c}_0 J_1(-j \hat{\sigma}_2 r) + \hat{d}_0 Y_1(-j \hat{\sigma}_2 r) \right] \hat{\mathbf{z}} \\ \omega \sqrt{\frac{\epsilon_1 + \gamma_1}{\mu_1}} \left[\hat{e}_0 J_1(-j \hat{\sigma}_1 r) + \hat{f}_0 Y_1(-j \hat{\sigma}_1 r) \right] \hat{\mathbf{z}} \end{cases}$$

per la determinazione delle costanti si impongono le condizioni di raccordo attraverso le superfici di interfaccia e le condizioni ai limiti:

$$\text{se } r \rightarrow 0 \quad b_0 \frac{2}{\pi} \ln r = -\frac{\mu_1}{2\pi} \dot{I} \ln r \rightarrow b_0 = -\frac{\mu_1}{4} \dot{I}$$

se $r \rightarrow \infty$ per l'equazione (1) si ha che $e_0 = j f_0$

$$A = \frac{Y_0(-j\dot{\sigma}_2 R_1)}{J_0(-j\dot{\sigma}_1 R_1)} \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_2 + \frac{Y_2}{j\omega}}{\mu_2}}}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1 + \frac{Y_1}{j\omega}}{\mu_1}}} \frac{Y_1(-j\dot{\sigma}_2 R_1)}{J_1(-j\dot{\sigma}_1 R_1)}$$

$$B = \frac{J_0(-j\dot{\sigma}_2 R_1)}{J_0(-j\dot{\sigma}_1 R_1)} \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_1 + \frac{Y_1}{j\omega}}{\mu_1}}}{\sqrt{\frac{\varepsilon_2 + \frac{Y_2}{j\omega}}{\mu_2}}} \frac{J_1(-j\dot{\sigma}_2 R_1)}{J_1(-j\dot{\sigma}_1 R_1)}$$

$$C = \frac{Y_0(-j\dot{\sigma}_1 R_1)}{J_0(-j\dot{\sigma}_1 R_1)} \frac{Y_1(-j\dot{\sigma}_1 R_1)}{J_1(-j\dot{\sigma}_1 R_1)}$$

$$\begin{aligned} \dot{f}_0 = \dot{b}_0 \frac{C}{jB} & \left\{ \left[AJ_0(-j\dot{\sigma}_2 R_2) - BY_0(-j\dot{\sigma}_2 R_2) \right] J_1(-j\dot{\sigma}_2 R_2) + \right. \\ & \left. - \left[AJ_1(-j\dot{\sigma}_2 R_2) - BY_1(-j\dot{\sigma}_2 R_2) \right] J_0(-j\dot{\sigma}_2 R_2) \right\} / \\ & \left\{ \left[AJ_0(-j\dot{\sigma}_2 R_2) - BY_0(-j\dot{\sigma}_2 R_2) \right] \frac{\eta_2}{\eta_1} H_1^{(3)}(-j\dot{\sigma}_1 R_2) + \right. \\ & \left. - \left[AJ_1(-j\dot{\sigma}_2 R_2) - BY_1(-j\dot{\sigma}_2 R_2) \right] H_0^{(3)}(-j\dot{\sigma}_1 R_2) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ES = \frac{\dot{b}_0}{\dot{f}_0} = \frac{jB}{C} & \left\{ \left[AJ_0(-j\dot{\sigma}_2 R_2) - BY_0(-j\dot{\sigma}_2 R_2) \right] \frac{\eta_1}{\eta_2} H_1^{(3)}(-j\dot{\sigma}_1 R_2) + \right. \\ & \left. - \left[AJ_1(-j\dot{\sigma}_2 R_2) - BY_1(-j\dot{\sigma}_2 R_2) \right] H_0^{(3)}(-j\dot{\sigma}_1 R_2) \right\} / \\ & \left\{ \left[AJ_0(-j\dot{\sigma}_2 R_2) - BY_0(-j\dot{\sigma}_2 R_2) \right] J_1(-j\dot{\sigma}_2 R_2) + \right. \\ & \left. - \left[AJ_1(-j\dot{\sigma}_2 R_2) - BY_1(-j\dot{\sigma}_2 R_2) \right] J_0(-j\dot{\sigma}_2 R_2) \right\} \end{aligned}$$

Efficacia di schermatura di un guscio cilindrico contenente una coppia di correnti elettriche sinusoidali di lunghezza infinita aventi stesso modulo e verso opposto

$$\dot{A}(r, \varphi) = \begin{cases} \dot{b}_1 J_1(-j\dot{\sigma}_1 r) \cos \varphi + \dot{d}_1 Y_1(-j\dot{\sigma}_1 r) \cos \varphi & \text{per } r < R_1 \\ \dot{f}_1 J_1(-j\dot{\sigma}_2 r) \cos \varphi + \dot{h}_1 Y_1(-j\dot{\sigma}_2 r) \cos \varphi & \text{per } R_1 < r < R_2 \\ \dot{i}_1 J_0(-j\dot{\sigma}_1 r) \cos \varphi + \dot{n}_1 Y_0(-j\dot{\sigma}_1 r) \cos \varphi & \text{per } r > R_2 \end{cases}$$

per la determinazione delle costanti si impongono le condizioni di raccordo attraverso le superfici di interfaccia e le condizioni ai limiti:

$$\text{se } r \rightarrow 0 \quad \dot{d}_1 \left(-\frac{1}{\pi} \right) \left(\frac{2}{-j\dot{\sigma}_1 r} \right) \cos \varphi = \frac{\mu_1}{2\pi} \dot{I} d \frac{\cos \varphi}{r} \rightarrow \dot{d}_1 = j\dot{\sigma}_1 \frac{\mu_1}{4} \dot{I} d$$

$$\text{se } r \rightarrow \infty \quad \text{per l'equazione () si ha che } \dot{I}_1 = -\dot{\sigma}_1 \frac{\mu}{4} \dot{I} d$$

Campo elettromagnetico generato da una corrente magnetica sinusoidale di lunghezza infinita

Se $\dot{\mathbf{K}} = \dot{h} \hat{\mathbf{z}}$ si ha che $\dot{\mathbf{F}} = \dot{F} \hat{\mathbf{z}}$ e quindi:

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{F}} - \dot{\sigma}^2 \dot{\mathbf{F}} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \dot{\mathbf{F}}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{\mathbf{F}}}{\partial \phi^2} - \dot{\sigma}^2 \dot{\mathbf{F}} = - \left(\varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega} \right) \dot{h}$$

pertanto per il principio di dualità la soluzione generale ha la forma:

$$\dot{\mathbf{F}}(r, \phi) = -j \frac{\left(\varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega} \right) \dot{h}}{4} \left[J_0(-j \dot{\sigma} r) - j Y_0(-j \dot{\sigma} r) \right] \hat{\mathbf{z}} = -j \frac{\left(\varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega} \right) \dot{h}}{4} H_0^{(2)}(-j \dot{\sigma} r) \hat{\mathbf{z}}$$

$$\dot{\mathbf{E}}(r, \phi) = \dot{\sigma} \frac{\dot{h}}{4} \left[J_1(-j \dot{\sigma} r) - j Y_1(-j \dot{\sigma} r) \right] \hat{\phi} = \dot{\sigma} \frac{\dot{h}}{4} H_1^{(2)}(-j \dot{\sigma} r) \hat{\phi}$$

$$\dot{\mathbf{H}}(r, \phi) = -\omega \frac{\left(\varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega} \right) \dot{h}}{4} \left[J_0(-j \dot{\sigma} r) - j Y_0(-j \dot{\sigma} r) \right] \hat{\mathbf{z}} = -\omega \frac{\left(\varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega} \right) \dot{h}}{4} H_0^{(2)}(-j \dot{\sigma} r) \hat{\mathbf{z}}$$

per $r \rightarrow 0$ si ha:

$$\dot{\mathbf{F}} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \frac{\left(\varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega} \right) \dot{h}}{2\pi} \ln r \hat{\mathbf{z}}$$

$$\dot{\mathbf{E}} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \frac{\dot{h}}{2\pi r} \hat{\phi}$$

$$\dot{\mathbf{H}} \xrightarrow{r \rightarrow 0} -j\omega \frac{\left(\varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega} \right) \dot{h}}{2\pi} \ln r \hat{\mathbf{z}}$$

Campo elettromagnetico generato da una coppia di correnti magnetiche sinusoidali di lunghezza infinita aventi stesso modulo e verso opposto

per il principio di dualità la soluzione generale ha la forma:

$$\begin{aligned}\vec{F}(r, \varphi) &= -\frac{\left(\varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega}\right) \dot{h} d}{4} \dot{\sigma} \left[J_1(-j \dot{\sigma} r) - j Y_1(-j \dot{\sigma} r) \right] \cos \varphi = -\frac{\left(\varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega}\right) \dot{h} d}{4} \dot{\sigma} H_1^{(2)}(-j \dot{\sigma} r) \cos \varphi \\ \vec{E}(r, \varphi) &= -\frac{\dot{\sigma}}{4} \dot{h} d \left\{ H_1^{(2)}(-j \dot{\sigma} r) \frac{\sin \varphi}{r} \hat{r} + \left[H_1^{(2)}(-j \dot{\sigma} r) + j \sigma r H_2^{(2)}(-j \dot{\sigma} r) \right] \frac{\cos \varphi}{r} \hat{\varphi} \right\} \\ \vec{H}(r, \varphi) &= j\omega \frac{\left(\varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega}\right) \dot{h} d}{4} \dot{\sigma} \left[J_1(-j \dot{\sigma} r) - j Y_1(-j \dot{\sigma} r) \right] \cos \varphi \hat{z} = j\omega \frac{\left(\varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega}\right) \dot{h} d}{4} \dot{\sigma} H_1^{(2)}(-j \dot{\sigma} r) \cos \varphi \hat{z}\end{aligned}$$

per $r \rightarrow 0$ si ha:

$$\begin{aligned}\vec{F} &\xrightarrow{r \rightarrow 0} \frac{\left(\varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega}\right) \dot{h} d}{2\pi} \frac{\cos \varphi}{r} \hat{z} \\ \vec{E} &\xrightarrow{r \rightarrow 0} -\frac{\dot{h} d}{2\pi} \left(-\frac{\sin \varphi}{r^2} \hat{r} + \frac{\cos \varphi}{r^2} \hat{\varphi} \right) \\ \vec{H} &\xrightarrow{r \rightarrow 0} -j\omega \frac{\left(\varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega}\right) \dot{h} d}{2\pi} \frac{\cos \varphi}{r} \hat{z}\end{aligned}$$

Campo elettromagnetico generato da un dipolo sinusoidale di carica elettrica distribuito su una linea di lunghezza infinita

Per il teorema di equivalenza di ampere [Corazza, 1994] si ha che il campo generato da una distribuzione lungo l'asse z di dipoli sinusoidali di carica elettrica diretti lungo l'asse x è identico al campo generato da una coppia di correnti magnetiche dirette lungo l'asse y e disposte come in figura:

Dove $\dot{M}_x d \rightarrow \text{costante}$ e $\dot{M}_x = \frac{\dot{\rho}_x}{\epsilon + \frac{\gamma}{j\omega}} \dot{j}_x = \frac{\dot{j}_x}{j\omega \left(\epsilon + \frac{\gamma}{j\omega} \right) d}$, quindi:

$$\dot{\mathbf{E}}(r, \varphi) = \frac{\dot{\sigma}}{4} \frac{\dot{j}_x}{j\omega \left(\epsilon + \frac{\gamma}{j\omega} \right)} \left\{ -H_1^{(2)}(-j\dot{\sigma}r) \frac{\cos\varphi}{r} \dot{\mathbf{r}} + \left[H_1^{(2)}(-j\dot{\sigma}r) + j\sigma r H_2^{(2)}(-j\dot{\sigma}r) \right] \frac{\sin\varphi}{r} \dot{\boldsymbol{\varphi}} \right\}$$

$$\dot{\mathbf{H}}(r, \varphi) = -\frac{j_x}{4} \dot{\sigma} H_0^{(2)}(-j\dot{\sigma}r) \sin\varphi \dot{\mathbf{z}}$$

per $r \rightarrow 0$ si ha:

$$\dot{\mathbf{E}} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \frac{\dot{\rho}_x d}{2\pi \left(\epsilon + \frac{\gamma}{j\omega} \right)} \left\{ \frac{\cos\varphi}{r^2} \dot{\mathbf{r}} + \frac{\sin\varphi}{r^2} \dot{\boldsymbol{\varphi}} \right\}$$

$$\dot{\mathbf{H}} \xrightarrow{r \rightarrow 0} j\omega \frac{\dot{\rho}_x d \sin\varphi}{2\pi r} \dot{\mathbf{z}}$$

Campo elettromagnetico generato da un dipolo sinusoidale di carica magnetica distribuito su una linea di lunghezza infinita

Per il principio di dualità:

$$\dot{M}_l = j\omega \dot{\lambda}_l d$$

$$\dot{\mathbf{H}}(r, \varphi) = \frac{\dot{\sigma}}{4} \frac{\dot{M}_l}{j\omega \left(\varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega} \right)} \left\{ -H_1^{(2)}(-j\dot{\sigma}r) \frac{\cos\varphi}{r} \hat{\mathbf{r}} + \left[H_1^{(2)}(-j\dot{\sigma}r) + j\sigma r H_2^{(2)}(-j\dot{\sigma}r) \right] \frac{\sin\varphi}{r} \hat{\boldsymbol{\phi}} \right\}$$

$$\dot{\mathbf{E}}(r, \varphi) = \frac{\dot{M}_l}{4} \dot{\sigma} H_1^{(2)}(-j\dot{\sigma}r) \sin\varphi \hat{\mathbf{z}}$$

per $r \rightarrow 0$ si ha:

$$\dot{\mathbf{H}} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \frac{\dot{\lambda}_l d}{2\pi\mu} \left\{ \frac{\cos\varphi}{r^2} \hat{\mathbf{r}} + \frac{\sin\varphi}{r^2} \hat{\boldsymbol{\phi}} \right\}$$

$$\dot{\mathbf{E}} \xrightarrow{r \rightarrow 0} -j\omega \frac{\dot{\lambda}_l d}{2\pi} \frac{\sin\varphi}{r} \hat{\mathbf{z}}$$

Efficacia di schermatura di un guscio sferico contenente un dipolo elettrico oscillante

Si consideri un dipolo elettrico oscillante $\dot{\mathbf{J}}_p = j\omega \hat{\mathbf{m}} \cdot \hat{\mathbf{z}}$ situato al centro di una cavità sferica avente raggio interno R_1 e raggio esterno R_2 ; conseguentemente si ha $\dot{\mathbf{A}} = \dot{A} \hat{\mathbf{z}}$ e dalla () si deduce che la soluzione generale ha la forma:

$$\dot{\mathbf{A}} = \begin{cases} \left(\dot{\mathbf{A}}_1 \frac{e^{-\dot{\epsilon}_1 r}}{r} + \dot{\mathbf{B}}_1 \frac{e^{j\dot{\epsilon}_1 r}}{r} \right) \hat{\mathbf{z}} & \text{per } r < R_1 \\ \left(\dot{\mathbf{A}}_2 \frac{e^{-\dot{\epsilon}_2 r}}{r} + \dot{\mathbf{B}}_2 \frac{e^{j\dot{\epsilon}_2 r}}{r} \right) \hat{\mathbf{z}} & \text{per } R_1 < r < R_2 \\ \left(\dot{\mathbf{A}}_3 \frac{e^{-\dot{\epsilon}_3 r}}{r} + \dot{\mathbf{B}}_3 \frac{e^{j\dot{\epsilon}_3 r}}{r} \right) \hat{\mathbf{z}} & \text{per } r > R_2 \end{cases}$$

si noti che dato che si sono effettuate le scelte di Lorentz:

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{A}} = \begin{cases} -j\omega\mu_1 \left(\epsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega} \right) \dot{\phi} & \text{per } r < R_1 \\ -j\omega\mu_2 \left(\epsilon_2 + \frac{\gamma_2}{j\omega} \right) \dot{\phi} & \text{per } R_1 < r < R_2 \\ -j\omega\mu_3 \left(\epsilon_3 + \frac{\gamma_3}{j\omega} \right) \dot{\phi} & \text{per } r > R_2 \end{cases}$$

in generale si ha che il potenziale vettore e il potenziale scalare non sono continui attraversoi le superfici di interfaccia.

Si determinano ora i campi elettrico e magnetico:

dalla () si ha che:

$$\dot{\mathbf{E}} = -j\omega \dot{\mathbf{A}} + \frac{\nabla \cdot \nabla \dot{\mathbf{A}}}{j\omega\mu \left(\epsilon + \frac{\gamma}{j\omega} \right)}$$

e quindi nella regione $r < R_1$ si ha:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} = \frac{j\omega}{\dot{\sigma}_1^2} \left\{ \left[2\dot{\mathbf{A}} \frac{e^{\dot{\sigma}_1 r}}{r^3} (\dot{\sigma}_1 r + 1) + 2\dot{\mathbf{B}} \frac{e^{\dot{\sigma}_1 r}}{r^3} (-\dot{\sigma}_1 r + 1) \right] \cos \vartheta \hat{\mathbf{r}} + \right. \\ \left. + \left[\dot{\mathbf{A}} \frac{e^{\dot{\sigma}_1 r}}{r^3} ((\dot{\sigma}_1 r)^2 + \dot{\sigma}_1 r + 1) + \dot{\mathbf{B}} \frac{e^{\dot{\sigma}_1 r}}{r^3} ((\dot{\sigma}_1 r)^2 - \dot{\sigma}_1 r + 1) \right] \sin \vartheta \hat{\boldsymbol{\theta}} \right\} \end{aligned}$$

nella regione $R_1 < r < R_2$ si ha:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} = \frac{j\omega}{\dot{\sigma}_2^2} \left\{ \left[2\dot{\mathbf{A}} \frac{e^{\dot{\sigma}_2 r}}{r^3} (\dot{\sigma}_2 r + 1) + 2\dot{\mathbf{B}} \frac{e^{\dot{\sigma}_2 r}}{r^3} (-\dot{\sigma}_2 r + 1) \right] \cos \vartheta \hat{\mathbf{r}} + \right. \\ \left. + \left[\dot{\mathbf{A}} \frac{e^{\dot{\sigma}_2 r}}{r^3} ((\dot{\sigma}_2 r)^2 + \dot{\sigma}_2 r + 1) + \dot{\mathbf{B}} \frac{e^{\dot{\sigma}_2 r}}{r^3} ((\dot{\sigma}_2 r)^2 - \dot{\sigma}_2 r + 1) \right] \sin \vartheta \hat{\boldsymbol{\theta}} \right\} \end{aligned}$$

nella regione $r > R_2$ si ha:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} = \frac{j\omega}{\dot{\sigma}_1^2} \left\{ \left[2\dot{\mathbf{A}} \frac{e^{\dot{\sigma}_1 r}}{r^3} (\dot{\sigma}_1 r + 1) + 2\dot{\mathbf{B}} \frac{e^{\dot{\sigma}_1 r}}{r^3} (-\dot{\sigma}_1 r + 1) \right] \cos \vartheta \hat{\mathbf{r}} + \right. \\ \left. + \left[\dot{\mathbf{A}} \frac{e^{\dot{\sigma}_1 r}}{r^3} ((\dot{\sigma}_1 r)^2 + \dot{\sigma}_1 r + 1) + \dot{\mathbf{B}} \frac{e^{\dot{\sigma}_1 r}}{r^3} ((\dot{\sigma}_1 r)^2 - \dot{\sigma}_1 r + 1) \right] \sin \vartheta \hat{\boldsymbol{\theta}} \right\} \end{aligned}$$

per quanto riguarda il campo magnetico:

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{\nabla \times \dot{\mathbf{A}}}{\mu} = \begin{cases} \frac{1}{\mu_1} \left[\dot{\mathbf{A}} \frac{e^{\dot{\sigma}_1 r}}{r^3} (\dot{\sigma}_1 r + 1) + \dot{\mathbf{B}} \frac{e^{\dot{\sigma}_1 r}}{r^3} (-\dot{\sigma}_1 r + 1) \right] \sin \vartheta \hat{\boldsymbol{\phi}} & \text{per } r < R_1 \\ \frac{1}{\mu_2} \left[\dot{\mathbf{A}} \frac{e^{\dot{\sigma}_2 r}}{r^3} (\dot{\sigma}_2 r + 1) + \dot{\mathbf{B}} \frac{e^{\dot{\sigma}_2 r}}{r^3} (-\dot{\sigma}_2 r + 1) \right] \sin \vartheta \hat{\boldsymbol{\phi}} & \text{per } R_1 < r < R_2 \\ \frac{1}{\mu_1} \left[\dot{\mathbf{A}} \frac{e^{\dot{\sigma}_1 r}}{r^3} (\dot{\sigma}_1 r + 1) + \dot{\mathbf{B}} \frac{e^{\dot{\sigma}_1 r}}{r^3} (-\dot{\sigma}_1 r + 1) \right] \sin \vartheta \hat{\boldsymbol{\phi}} & \text{per } r > R_2 \end{cases}$$

per la determinazione delle costanti si impongono le condizioni di raccordo per il campo elettrico e magnetico attraverso le superfici di interfaccia tra l'aria lo schermo e le condizioni ai limiti per $r \rightarrow 0$ ed $r \rightarrow \infty$:

innanzitutto per $r \rightarrow 0$ il campo elettromagnetico assume il seguente andamento:

$$\begin{aligned}\vec{E} &\xrightarrow{r \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega}} \frac{\dot{m}_e}{4\pi} \left(2 \frac{\cos\theta}{r^3} \vec{r} + \frac{\sin\theta}{r^3} \vec{\theta} \right) \\ \vec{H} &\xrightarrow{r \rightarrow 0} \frac{j\omega \dot{m}_e \sin\theta}{4\pi r^3} \vec{\phi}\end{aligned}$$

che deve coincidere con quello del campo generato da un dipolo oscillante nello spazio libero e quindi deve essere soddisfatta la relazione:

$$\vec{A} + \vec{B} = \frac{\mu_1}{4\pi} j\omega \dot{m}_e$$

si considerino ora le condizioni di raccordo per la superficie $r = R_1$

dalla condizione di raccordo:

$$\vec{E}_a \Big|_{r=R_1} - \vec{E}_s \Big|_{r=R_1} = 0$$

si ottiene:

$$\begin{aligned}& \frac{1}{\mu_1 \left(\epsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega} \right)} \left[\vec{A} e^{-\hat{\sigma}_1 R_1} \left((\hat{\sigma}_1 R_1)^2 + \hat{\sigma}_1 R_1 + 1 \right) + \vec{B} e^{\hat{\sigma}_1 R_1} \left((\hat{\sigma}_1 R_1)^2 - \hat{\sigma}_1 R_1 + 1 \right) \right] = \\ & \frac{1}{\mu_2 \left(\epsilon_2 + \frac{\gamma_2}{j\omega} \right)} \left[\vec{A} e^{-\hat{\sigma}_2 R_1} \left((\hat{\sigma}_2 R_1)^2 + \hat{\sigma}_2 R_1 + 1 \right) + \vec{B} e^{\hat{\sigma}_2 R_1} \left((\hat{\sigma}_2 R_1)^2 - \hat{\sigma}_2 R_1 + 1 \right) \right]\end{aligned}$$

mentre dall'equazione:

$$\dot{H}_s \Big|_{r=R_1'} - \dot{H}_s \Big|_{r=R_1'} = 0$$

oppure dall'equazione:

$$\left(\varepsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega} \right) \dot{E}_r \Big|_{r=R_1'} - \left(\varepsilon_2 + \frac{\gamma_2}{j\omega} \right) \dot{E}_r \Big|_{r=R_1'} = 0$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu_1} \left[\dot{A} e^{-\dot{\sigma}_1 R_1} \left(\dot{\sigma}_1 R_1 + 1 \right) + \dot{B} e^{\dot{\sigma}_1 R_1} \left(-\dot{\sigma}_1 R_1 + 1 \right) \right] = \\ & \frac{1}{\mu_2} \left[\dot{A} e^{-\dot{\sigma}_2 R_1} \left(\dot{\sigma}_2 R_1 + 1 \right) + \dot{B} e^{\dot{\sigma}_2 R_1} \left(-\dot{\sigma}_2 R_1 + 1 \right) \right] \end{aligned}$$

allo stesso modo per la superficie $r = R_2$ si ottengono le equazioni:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu_2 \left(\varepsilon_2 + \frac{\gamma_2}{j\omega} \right)} \left[\dot{A} e^{-\dot{\sigma}_2 R_2} \left((\dot{\sigma}_2 R_2)^2 + \dot{\sigma}_2 R_2 + 1 \right) + \dot{B} e^{\dot{\sigma}_2 R_2} \left((\dot{\sigma}_2 R_2)^2 - \dot{\sigma}_2 R_2 + 1 \right) \right] = \\ & \frac{1}{\mu_1 \left(\varepsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega} \right)} \left[\dot{A} e^{-\dot{\sigma}_1 R_2} \left((\dot{\sigma}_1 R_2)^2 + \dot{\sigma}_1 R_2 + 1 \right) + \dot{B} e^{\dot{\sigma}_1 R_2} \left((\dot{\sigma}_1 R_2)^2 - \dot{\sigma}_1 R_2 + 1 \right) \right] = \\ & \frac{1}{\mu_2} \left[\dot{A} e^{-\dot{\sigma}_2 R_2} \left(\dot{\sigma}_2 R_2 + 1 \right) + \dot{B} e^{\dot{\sigma}_2 R_2} \left(-\dot{\sigma}_2 R_2 + 1 \right) \right] = \\ & \frac{1}{\mu_1} \left[\dot{A} e^{-\dot{\sigma}_1 R_2} \left(\dot{\sigma}_1 R_2 + 1 \right) + \dot{B} e^{\dot{\sigma}_1 R_2} \left(-\dot{\sigma}_1 R_2 + 1 \right) \right] \end{aligned}$$

infine per $r \rightarrow \infty$ il campo elettromagnetico deve tendere a zero:

$$\dot{\mathbf{E}} \xrightarrow{\gamma \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{0}}$$

$$\dot{\mathbf{H}} \xrightarrow{1 \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{0}}$$

e quindi deve essere:

$$\dot{\mathbf{B}}^* = \dot{\mathbf{0}}$$

si ottiene in definitiva un sistema algebrico lineare non omogeneo di 6 quazioni in 6 incognite. Ponendo:

$$f(\dot{u}) = e^{\dot{b}}(\dot{u}^2 - \dot{u} + 1)$$

$$g(\dot{u}) = e^{\dot{b}}(-\dot{u} + 1)$$

$$h(\dot{u}) = \frac{f(-\dot{u}) - f(\dot{u})}{g(-\dot{u}) - g(\dot{u})}$$

si ha che la soluzione del sistema di equazioni fornisce il seguente valore per la costante $\dot{A}^*$:

$$\begin{aligned}
\hat{A} = & \frac{\mu}{4\pi} j\omega \hat{m}_r \left\{ \left[f(\vec{\sigma}_1, R_1) - h(\vec{\sigma}_1, R_1)g(\vec{\sigma}_1, R_1) \right] / g(-\vec{\sigma}_1, R_2) \right\} \\
& \left\{ g(-\vec{\sigma}_1, R_1) \left[\frac{\varepsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega}}{\varepsilon_2 + \frac{\gamma_2}{j\omega}} f(\vec{\sigma}_2, R_2)g(-\vec{\sigma}_1, R_2) - g(\vec{\sigma}_2, R_2)f(-\vec{\sigma}_1, R_2) \right] + \right. \\
& \left. - g(\vec{\sigma}_1, R_2) \left[\frac{\varepsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega}}{\varepsilon_2 + \frac{\gamma_2}{j\omega}} f(-\vec{\sigma}_2, R_2)g(-\vec{\sigma}_1, R_2) - g(-\vec{\sigma}_2, R_2)f(-\vec{\sigma}_1, R_2) \right] \right\} / \\
& \left\{ \left[\frac{\varepsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega}}{\varepsilon_2 + \frac{\gamma_2}{j\omega}} f(-\vec{\sigma}_2, R_1) - h(\vec{\sigma}_1, R_1)g(-\vec{\sigma}_2, R_1) \right] \left[\frac{\varepsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega}}{\varepsilon_2 + \frac{\gamma_2}{j\omega}} f(\vec{\sigma}_2, R_1)g(-\vec{\sigma}_1, R_2) - g(\vec{\sigma}_2, R_2)f(-\vec{\sigma}_1, R_2) \right] + \right. \\
& \left. - \left[\frac{\varepsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega}}{\varepsilon_2 + \frac{\gamma_2}{j\omega}} f(\vec{\sigma}_2, R_1) - h(\vec{\sigma}_1, R_1)g(\vec{\sigma}_2, R_1) \right] \left[\frac{\varepsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega}}{\varepsilon_2 + \frac{\gamma_2}{j\omega}} f(-\vec{\sigma}_2, R_2)g(-\vec{\sigma}_1, R_2) - g(-\vec{\sigma}_2, R_2)f(-\vec{\sigma}_1, R_2) \right] \right\}
\end{aligned}$$

o anche

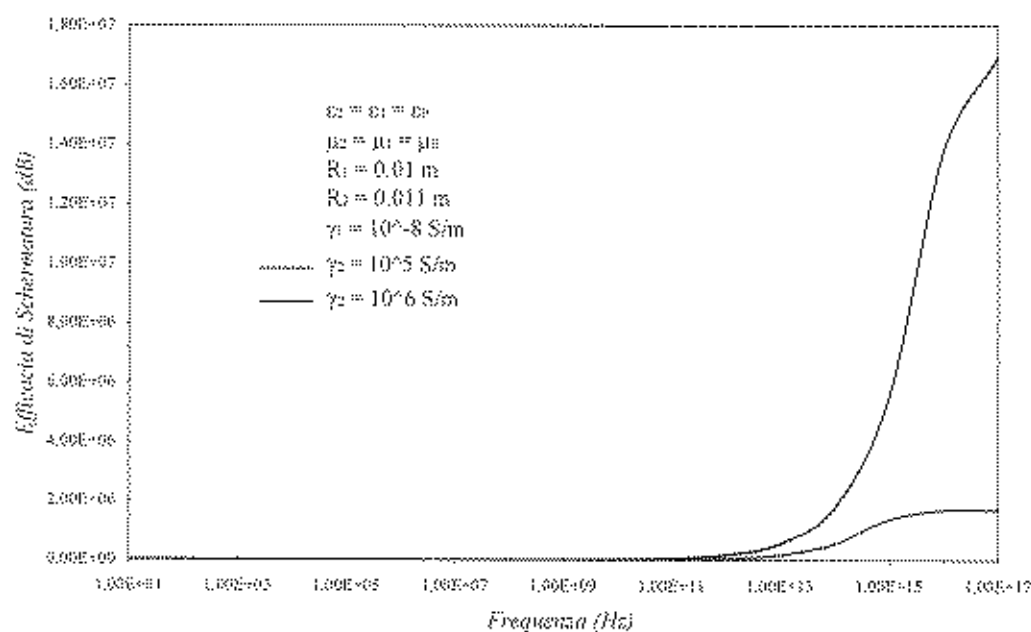
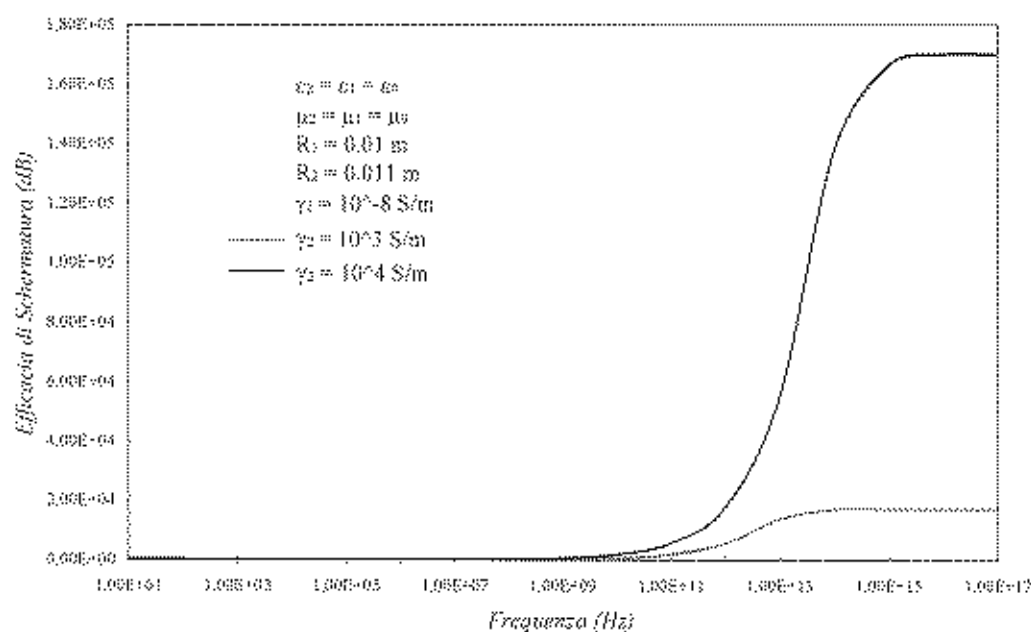
$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{A}}'' &= \frac{\mu_0}{4\pi} j\omega \dot{m}_e \left\{ \left[f(\dot{\sigma}_1 R_1) - h(\dot{\sigma}_1 R_1)g(\dot{\sigma}_1 R_1) \right] / g(-\dot{\sigma}_1 R_2) \right\} \\
&\left\{ (\dot{\sigma}_2 R_2 + 1) \left[\frac{\varepsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega}}{\varepsilon_2 + \frac{\gamma_2}{j\omega}} ((\dot{\sigma}_2 R_2)^2 - \dot{\sigma}_2 R_2 + 1)g(-\dot{\sigma}_1 R_2) - (-\dot{\sigma}_2 R_2 + 1)f(-\dot{\sigma}_1 R_2) \right] + \right. \\
&\left. - (-\dot{\sigma}_2 R_2 + 1) \left[\frac{\varepsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega}}{\varepsilon_2 + \frac{\gamma_2}{j\omega}} ((\dot{\sigma}_2 R_2)^2 + \dot{\sigma}_2 R_2 + 1)g(-\dot{\sigma}_1 R_2) - (\dot{\sigma}_2 R_2 + 1)f(-\dot{\sigma}_1 R_2) \right] \right\} / \\
&\left\{ e^{j_1(R_2 - R_1)} \left[\frac{\varepsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega}}{\varepsilon_2 + \frac{\gamma_2}{j\omega}} ((\dot{\sigma}_2 R_1)^2 + \dot{\sigma}_2 R_1 + 1) - h(\dot{\sigma}_1 R_1)(\dot{\sigma}_2 R_1 + 1) \right] \right. \\
&\left. \left[\frac{\varepsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega}}{\varepsilon_2 + \frac{\gamma_2}{j\omega}} ((\dot{\sigma}_2 R_2)^2 - \dot{\sigma}_2 R_2 + 1)g(-\dot{\sigma}_1 R_2) - (-\dot{\sigma}_2 R_2 + 1)f(-\dot{\sigma}_1 R_2) \right] + \right. \\
&\left. - e^{j_2(R_2 - R_1)} \left[\frac{\varepsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega}}{\varepsilon_2 + \frac{\gamma_2}{j\omega}} ((\dot{\sigma}_2 R_1)^2 - \dot{\sigma}_2 R_1 + 1) - h(\dot{\sigma}_1 R_1)(-\dot{\sigma}_2 R_1 + 1) \right] \right. \\
&\left. \left[\frac{\varepsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega}}{\varepsilon_2 + \frac{\gamma_2}{j\omega}} ((\dot{\sigma}_2 R_2)^2 + \dot{\sigma}_2 R_2 + 1)g(-\dot{\sigma}_1 R_2) - (\dot{\sigma}_2 R_2 + 1)f(-\dot{\sigma}_1 R_2) \right] \right\}
\end{aligned}$$

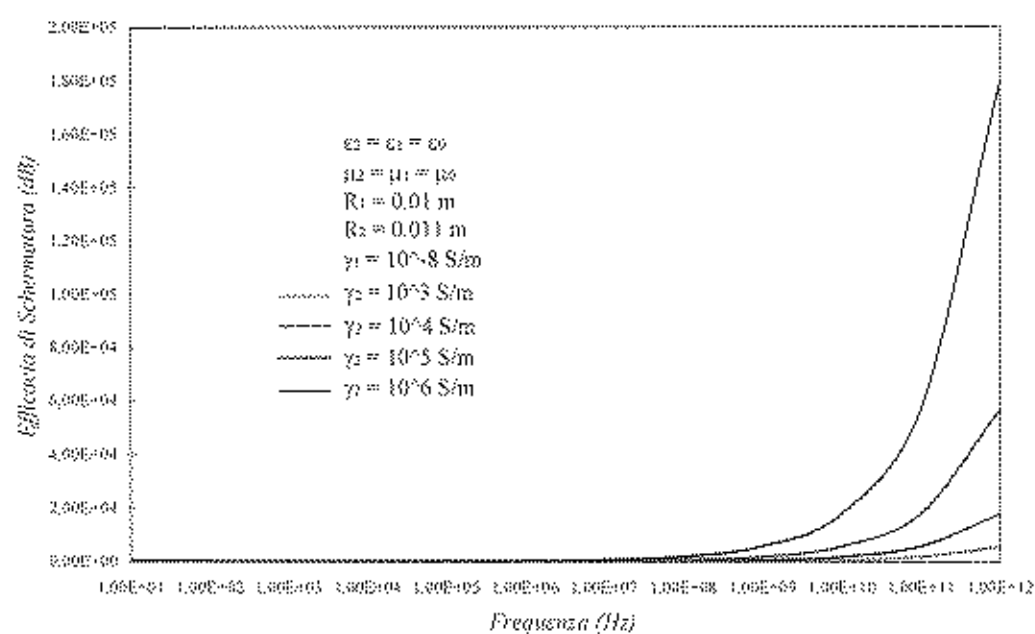
e conseguentemente l'efficacia di schermatura è espressa dalla formula:

$$SE = \left| \frac{\dot{\mathbf{E}}_{\text{avvicina alla schermatura}}}{\dot{\mathbf{E}}_{\text{allontana dalla schermatura}}} \right| = \left| \frac{\dot{\mathbf{H}}_{\text{prima della schermatura}}}{\dot{\mathbf{H}}_{\text{dopo la schermatura}}} \right| = \left| \frac{\frac{\mu_0}{4\pi} j\omega \dot{m}_e}{\dot{\mathbf{A}}''} \right|$$

se $\text{Re}\{\dot{\sigma}_2\}(R_2 - R_1) \gg 1$ si ha che:

$$\begin{aligned}
\hat{A}^r &= \frac{\mu_0}{4\pi} j\omega \hat{m}_e \left\{ \left[f(\dot{\sigma}_1, R_1) - h(\dot{\sigma}_1, R_1) g(\dot{\sigma}_1, R_1) \right] / g(-\dot{\sigma}_1, R_2) \right\} e^{-\dot{\sigma}_2(R_2 - R_1)} \\
&\left\{ (\dot{\sigma}_2, R_2 + 1) \left[\frac{\varepsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega}}{\varepsilon_2 + \frac{\gamma_2}{j\omega}} ((\dot{\sigma}_2, R_2)^2 - \dot{\sigma}_2, R_2 + 1) g(-\dot{\sigma}_1, R_2) - (-\dot{\sigma}_2, R_2 + 1) f(-\dot{\sigma}_1, R_2) \right] + \right. \\
&\quad \left. - (-\dot{\sigma}_2, R_2 + 1) \left[\frac{\varepsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega}}{\varepsilon_2 + \frac{\gamma_2}{j\omega}} ((\dot{\sigma}_2, R_2)^2 + \dot{\sigma}_2, R_2 + 1) g(-\dot{\sigma}_1, R_2) - (\dot{\sigma}_2, R_2 + 1) f(-\dot{\sigma}_1, R_2) \right] \right\} / \\
&\left[\frac{\varepsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega}}{\varepsilon_2 + \frac{\gamma_2}{j\omega}} ((\dot{\sigma}_2, R_1)^2 + \dot{\sigma}_2, R_1 + 1) - h(\dot{\sigma}_1, R_1)(\dot{\sigma}_2, R_1 + 1) \right] \\
&\left[\frac{\varepsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega}}{\varepsilon_2 + \frac{\gamma_2}{j\omega}} ((\dot{\sigma}_2, R_2)^2 - \dot{\sigma}_2, R_2 + 1) g(-\dot{\sigma}_1, R_2) - (-\dot{\sigma}_2, R_2 + 1) f(-\dot{\sigma}_1, R_2) \right] \\
SE &= e^{\operatorname{Re}(\dot{\sigma}_2)(R_2 - R_1)} \left| g(-\dot{\sigma}_1, R_2) \left| \frac{\varepsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega}}{\varepsilon_2 + \frac{\gamma_2}{j\omega}} ((\dot{\sigma}_2, R_1)^2 + \dot{\sigma}_2, R_1 + 1) - h(\dot{\sigma}_1, R_1)(\dot{\sigma}_2, R_1 + 1) \right| \right. \\
&\quad \left| \frac{\varepsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega}}{\varepsilon_2 + \frac{\gamma_2}{j\omega}} ((\dot{\sigma}_2, R_2)^2 - \dot{\sigma}_2, R_2 + 1) g(-\dot{\sigma}_1, R_2) - (-\dot{\sigma}_2, R_2 + 1) f(-\dot{\sigma}_1, R_2) \right| / \\
&\quad \left| f(\dot{\sigma}_1, R_1) - h(\dot{\sigma}_1, R_1) g(\dot{\sigma}_1, R_1) \right| \\
&\quad \left| (\dot{\sigma}_2, R_2 + 1) \left[\frac{\varepsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega}}{\varepsilon_2 + \frac{\gamma_2}{j\omega}} ((\dot{\sigma}_2, R_2)^2 - \dot{\sigma}_2, R_2 + 1) g(-\dot{\sigma}_1, R_2) - (-\dot{\sigma}_2, R_2 + 1) f(-\dot{\sigma}_1, R_2) \right] + \right. \\
&\quad \left. - (-\dot{\sigma}_2, R_2 + 1) \left[\frac{\varepsilon_1 + \frac{\gamma_1}{j\omega}}{\varepsilon_2 + \frac{\gamma_2}{j\omega}} ((\dot{\sigma}_2, R_2)^2 + \dot{\sigma}_2, R_2 + 1) g(-\dot{\sigma}_1, R_2) - (\dot{\sigma}_2, R_2 + 1) f(-\dot{\sigma}_1, R_2) \right] \right| \Bigg|
\end{aligned}$$





Frequenze di risonanza in una cavità sferica

Per il calcolo delle frequenze di risonanza in un cavità sferica di raggio R con pareti costituite da un conduttore elettrico perfetto o da un conduttore magnetico perfetto si parte dalle equazioni di Maxwell in assenza di correnti impresse.

Senza che la soluzione ottenuta in termini di frequenze di risonanza perda di generalità si può considerare il caso di simmetria assiale $\vec{A} = \vec{A}(r, \vartheta) \hat{z}$

Si deve risolvere quindi un'equazione nella forma:

$$\nabla^2 \vec{A} - \vec{\sigma}^2 \vec{A} = \vec{0} \quad \text{per } r < R$$

Si utilizza il metodo di separazione delle variabili:

$$\vec{A}(r, \vartheta) = \vec{R}(r) \vec{\Theta}(\vartheta) \quad (1.3)$$

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \vec{\sigma}^2 r^2 + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \vec{\sigma}^2 r^2 = l(l+1) \\ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) = -l(l+1) \end{cases}$$

dall'appendice () si ha che:

$$\vec{\Theta} \propto P_l(\cos \vartheta)$$

$$\vec{R}(r) = \begin{cases} \frac{J_{l+1/2}(j \vec{\sigma} r)}{\sqrt{r}} \\ \frac{Y_{l+1/2}(j \vec{\sigma} r)}{\sqrt{r}} \end{cases} \quad \text{con } l = 0, 1, 2, 3, \dots$$

in definitiva si ha:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{A}}(r, \theta) &= \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{l=0}^{\infty} a_l \sqrt{\frac{2}{\pi}} (j\dot{\sigma}r)^{l-1/2} \left(\frac{1}{j\dot{\sigma}r} \right)^l \frac{1}{(j\dot{\sigma}r)^l} \frac{d^l}{dr^l} \left(\frac{\text{sen}(j\dot{\sigma}r)}{j\dot{\sigma}r} \right) P_l(\cos\theta) + \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{l=0}^{\infty} b_l \sqrt{\frac{2}{\pi}} (j\dot{\sigma}r)^{l-1/2} \left(\frac{1}{j\dot{\sigma}r} \right)^l \frac{1}{(j\dot{\sigma}r)^l} \frac{d^l}{dr^l} \left(\frac{\cos(j\dot{\sigma}r)}{j\dot{\sigma}r} \right) P_l(\cos\theta) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{l=0}^{\infty} (j\dot{\sigma})^{l-1/2} \left(a_l (-1)^l \frac{d^l}{dr^l} \left(\frac{\text{sen}(j\dot{\sigma}r)}{j\dot{\sigma}r} \right) + b_l \frac{d^l}{dr^l} \left(\frac{\cos(j\dot{\sigma}r)}{j\dot{\sigma}r} \right) \right) P_l(\cos\theta)
\end{aligned}$$

consideriamo il contributo del solo termine $l=0$ e determiniamo le frequenze di risonanza associate ad esso:

$$\dot{\mathbf{A}}(r, \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (j\dot{\sigma})^{1/2} \left[a_0 \frac{\text{sen}(j\dot{\sigma}r)}{j\dot{\sigma}r} + b_0 \frac{\cos(j\dot{\sigma}r)}{j\dot{\sigma}r} \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (j\dot{\sigma})^{-1/2} \left[a_0 \frac{\text{sen}(j\dot{\sigma}r)}{r} + b_0 \frac{\cos(j\dot{\sigma}r)}{r} \right]$$

$$\text{sen}(j\dot{\sigma}r) = \frac{1}{2j} \left(e^{-\dot{\sigma}r} - e^{\dot{\sigma}r} \right)$$

$$\cos(j\dot{\sigma}r) = \frac{1}{2} \left(e^{-\dot{\sigma}r} + e^{\dot{\sigma}r} \right)$$

$$\dot{\mathbf{A}}(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (j\dot{\sigma})^{-1/2} \left[\left(\frac{\dot{a}_0}{j} + \dot{b}_0 \right) \frac{e^{-\dot{\sigma}r}}{r} + \left(-\frac{\dot{a}_0}{j} + \dot{b}_0 \right) \frac{e^{\dot{\sigma}r}}{r} \right] = \dot{A}_0 \frac{e^{-\dot{\sigma}r}}{r} + \dot{B}_0 \frac{e^{\dot{\sigma}r}}{r}$$

$$\dot{A}_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (j\dot{\sigma})^{-1/2} \left(\frac{\dot{a}_0}{j} + \dot{b}_0 \right)$$

$$\dot{B}_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (j\dot{\sigma})^{-1/2} \left(-\frac{\dot{a}_0}{j} + \dot{b}_0 \right)$$

$$\dot{\mathbf{E}} = -j\omega \dot{\mathbf{A}} + \frac{\nabla \nabla \cdot \dot{\mathbf{A}}}{j\omega \mu \left(\epsilon + \frac{\gamma}{j\omega} \right)}$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{\nabla \times \dot{\mathbf{A}}}{\mu}$$

il campo elettromagnetico deve essere finito in ogni punto della cavità e quindi

$$\begin{aligned} \dot{A}_0 \frac{e^{-j\dot{\sigma}r}}{r} + \dot{B}_0 \frac{e^{j\dot{\sigma}r}}{r} &= \dot{A}_0 \frac{1 - \dot{\sigma}r + \frac{1}{2}(\dot{\sigma}r)^2 - \frac{1}{6}(\dot{\sigma}r)^3 + \dots}{r} + \dot{B}_0 \frac{1 + \dot{\sigma}r + \frac{1}{2}(\dot{\sigma}r)^2 + \frac{1}{6}(\dot{\sigma}r)^3 + \dots}{r} \\ &= \left(\dot{A}_0 + \dot{B}_0 \right) \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2}\dot{\sigma}^2 r + \dots \right) + \left(-\dot{A}_0 + \dot{B}_0 \right) \left(\dot{\sigma} + \frac{1}{6}\dot{\sigma}^3 r^2 + \dots \right) \xrightarrow{r \rightarrow 0} \text{finito} \end{aligned}$$

quindi deve essere $\dot{B}_0 = -\dot{A}_0$ e quindi $\dot{b}_0 = 0$

e conseguentemente $\dot{A}_0 \frac{e^{-j\dot{\sigma}r}}{r} + \dot{B}_0 \frac{e^{j\dot{\sigma}r}}{r} \xrightarrow{r \rightarrow 0} -2\dot{\sigma} \dot{A}_0$

$$\dot{A}_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (j\dot{\sigma})^{-1/2} \frac{\dot{a}_0}{j}$$

$$\dot{B}_0 = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} (j\dot{\sigma})^{-1/2} \frac{\dot{a}_0}{j}$$

$$\dot{\mathbf{A}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (j\dot{\sigma})^{-1/2} \dot{a}_0 \frac{\text{sen}(j\dot{\sigma}r)}{r} \hat{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (j\dot{\sigma})^{-1/2} \dot{a}_0 \frac{\text{sen}(j\dot{\sigma}r)}{r} \left(\cos\theta \hat{\mathbf{r}} - \text{sen}\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \right)$$

e quindi:

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \dot{\mathbf{A}} = \frac{\dot{K}}{\mu} \frac{\text{sen}\theta}{r} \left[\frac{\text{sen}(j\dot{\sigma}r)}{j\dot{\sigma}r} - \cos(j\dot{\sigma}r) \right] \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} &= -j\omega \dot{\mathbf{A}} + \frac{\nabla \nabla \cdot \dot{\mathbf{A}}}{j\omega\mu \left(\varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega} \right)} = -j\omega \dot{\mathbf{A}} + \frac{j\omega}{\dot{\sigma}^2} \nabla \nabla \cdot \dot{\mathbf{A}} = \\ &= \frac{j\omega}{\dot{\sigma}^2} 2\dot{K} \frac{\cos\theta}{r^2} \left[\frac{\text{sen}(j\dot{\sigma}r)}{j\dot{\sigma}r} - \cos(j\dot{\sigma}r) \right] \hat{\mathbf{r}} + \\ &\quad - \frac{j\omega}{\dot{\sigma}^2} \dot{K} \frac{\text{sen}\theta}{r^2} \left[\text{sen}(j\dot{\sigma}r) \left(j\dot{\sigma}r - \frac{1}{j\dot{\sigma}r} \right) + \cos(j\dot{\sigma}r) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned}$$

$$\text{dove } \dot{K} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (j\dot{\sigma})^{-1/2} \dot{a}_0$$

il caso di cavità aventi pareti con conducibilità elettrica o permittività elettrica infinita si ottiene andando ad imporre l'annullamento della componente tangente del campo elettrico in corrispondenza delle pareti della cavità; si ottiene così la seguente equazione trascendente:

$$\operatorname{tg}(\omega\sqrt{\mu\epsilon}R) = \frac{\omega\sqrt{\mu\epsilon}R}{1 - (\omega\sqrt{\mu\epsilon}R)^2}$$

che può essere risolta numericamente in funzione di $\omega\sqrt{\mu\epsilon}R$; le prime 6 soluzioni sono le seguenti:

2,7437
6,1168
9,3166
12,4859
15,6439
18,7963

E quindi se, ad esempio $\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = 2,9979 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ e $R = 1 \text{ m}$, tenendo presente che $\omega = 2\pi f$ si ha ottengono le seguenti frequenze di risonanza:

$1,3091 \cdot 10^8 \text{ Hz}$
 $2,9185 \cdot 10^8 \text{ Hz}$
 $4,4452 \cdot 10^8 \text{ Hz}$
 $5,9570 \cdot 10^8 \text{ Hz}$
 $7,4637 \cdot 10^8 \text{ Hz}$
 $8,9677 \cdot 10^8 \text{ Hz}$

il caso di cavità aventi pareti con permeabilità magnetica infinita si ottiene andando ad imporre l'annullamento della componente tangente del campo magnetico (che coincide con l'annullamento della componente normale del campo elettrico), in corrispondenza delle pareti della cavità; si ottiene così la seguente equazione trascendente:

$$\operatorname{tg}(\omega\sqrt{\mu\epsilon}R) = \omega\sqrt{\mu\epsilon}R$$

che può essere risolta numericamente in funzione di $\omega\sqrt{\mu\epsilon}R$; le prime 6 soluzioni sono le seguenti:

4,4
7,8
10,9
14,1

E quindi se, ad esempio $\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = 2,9979 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ e $R = 1 \text{ m}$, tenendo presente che $\omega = 2\pi f$ si ha ottengono le seguenti frequenze di risonanza:

$$2,0992 \cdot 10^8 \text{ Hz}$$

$$3,7214 \cdot 10^8 \text{ Hz}$$

$$5,2004 \cdot 10^8 \text{ Hz}$$

$$6,7271 \cdot 10^8 \text{ Hz}$$

Bibliografia

- Belomestnykh S. (1995). Spherical Cavity: Analytical formulas. Comparison of computer codes, SRF Reports 941208-13.
- Corazza G.C.(1994). Campi Elettromagnetici, Zanichelli Editore S.p.A., Bologna.
- Jackson J.D.Classical Electrodynamics, second edition (1998) John Wiley Publishing
- Ledermann W., Vajda S. (1982). Handbook of Applicable Mathematics Volume IV: Analysis, John Wiley & Sons Ltd.
- Tichnov A.N., Samarskij, Budak B.M (1982), Problemi della fisica matematica, Edizioni Mir
- Shastry S.V.K., Rao M.N., Katti V.R. (1990) Shielding of electromagnetic fields of current sources by spherical enclosures, 1990 IEEE International Symposium on electromagnetic compatibility.