

METODI DI OTTIMIZZAZIONE GLOBALE PER PROBLEMI DI SINTESI ELETTROMAGNETICA

DOTTORATO DI RICERCA IN INGEGNERIA ELETTRONICA

SEDE DI BOLOGNA

VIII CICLO

TRIENNIO 1992-1995

Tesi di Dottorato di

Massimo Fabbri

INDICE

ELENCO DEI SIMBOLI.....	pag. 1
DEFINIZIONI.....	pag. 5
1. INTRODUZIONE	
1.1 Il Problema di Progetto di Sistemi Elettromagnetici...	pag. 8
1.2 Scopo della Tesi.....	pag. 11
2. IL PROBLEMA DI SINTESI ELETTROMAGNETICA	
2.1 Introduzione.....	pag. 12
2.2 Il Problema Inverso.....	pag. 13
2.3 Il Problema di Sintesi.....	pag. 18
2.4 Configurazioni Assialsimmetriche.....	pag. 20
2.5 Discretizzazione del Problema di Sintesi.....	pag. 23
3. METODI DI OTTIMIZZAZIONE	
3.1 Introduzione.....	pag. 29
3.2 Il Metodo Search Trajectories (ST).....	pag. 34
3.3 Il Metodo Evolution Strategies (ES).....	pag. 41
3.4 Il Metodo Filled Function (FF).....	pag. 45
4. PROBLEMI TEST	
4.1 Introduzione.....	pag. 50
4.2 Test 1 - Funzione di Griewank.....	pag. 52
4.3 Test 2 - Funzione di Goldstein-Price.....	pag. 62
5. APPLICAZIONI	
5.1 Introduzione.....	pag. 68
5.2 Applicazione al Sistema Poloidale	

	di una macchina TOKAMAK per configurazioni circolari con conduttori filiformi.....	pag. 69
5.3	Applicazione al Sistema Poloidale di una macchina TOKAMAK per configurazioni circolari con conduttori massicci.....	pag. 84
5.4	Applicazione al Sistema Poloidale di una macchina TOKAMAK per configurazioni con punti di nullo.....	pag. 92
5.5	Applicazione al Sistema di Bobine Principale di un NMR.....	pag. 100
6.	CONCLUSIONI.....	pag. 109
APPENDICI		
	A -.Stabilità del Problema di Sintesi Discretizzato.....	pag. 112
	B - Configurazioni Assialsimmetriche.....	pag. 115
	C - Conduttori Filiformi.....	pag. 122
	D - Conduttori Massicci.....	pag. 127
	BIBLIOGRAFIA.....	pag. 136

ELENCO DEI SIMBOLI

a	Raggio minore del toroide;
$\mathbf{A}(\cdot)$	Potenziale vettore magnetico;
$[A]$	Matrice dei coefficienti del sistema di equazioni che governa il problema inverso elettromagnetico per bobine massicce;
b	Termine noto del problema inverso;
B^*	Bacino di attrazione del punto di minimo globale $\mathbf{x}^*$;
B_j^*	Bacino di attrazione del punto di minimo locale $\mathbf{x}_j^*$;
$\mathbf{B}(\cdot)$	Vettore induzione magnetica;
c_d	Coefficiente di penalità sui vincoli di disuguaglianza;
c_e	Coefficiente di penalità sui vincoli di uguaglianza;
C	Target Level dell'algoritmo Search Trajectories;
$\mathbf{d}_k$	Direzione di ricerca in un algoritmo di ottimizzazione deterministico all'iterazione k ;
D	Triagolarità della sezione del plasma;
e	Parametro di sensitività dell'algoritmo Search Trajectories;
$E(\cdot)$	Integrale ellittico completo di seconda specie;
$f(\cdot)$	Funzione obiettivo del problema di ottimizzazione vincolato;
f^*	Minimo globale corrispondente al punto di minimo globale $\mathbf{x}^*$;
f_j^*	Minimo locale corrispondente al punto di minimo locale $\mathbf{x}_j^*$;
$\nabla f(\cdot)$	Vettore gradiente di f ;
$\nabla \nabla f(\cdot)$	Matrice Hessiana di f ;
$F(\cdot, \cdot)$	Funzione penalizzata associata al problema di ottimizzazione vincolato;
F	Classe delle funzioni vettoriali definite in τ_e : $F \equiv \{\mathbf{J} \mid \mathbf{J}: \tau_e \rightarrow \mathbb{R}^3\}$;
$g(\cdot)$	Funzione dei vincoli di disuguaglianza del problema di ottimizzazione vincolato;

$h(\cdot)$	Funzione dei vincoli di uguaglianza del problema di ottimizzazione vincolato;
[H]	Matrice dei coefficienti del sistema di equazioni che governa il problema inverso elettromagnetico per bobine filiformi;
$H(\cdot)$	Kernel dell'equazione integrale per il calcolo del flusso;
$\mathbf{I}$	Vettore delle intensità di corrente del sistema di bobine;
$\mathbf{J}(\cdot)$	Vettore densità di corrente elettrica;
$\mathbf{J}_b(\cdot)$	Vettore densità di corrente elettrica soluzione o quasi-soluzione dell'equazione $L[\mathbf{J}] = \mathbf{b}$;
$\mathbf{J}_e(\cdot)$	Vettore densità di corrente elettrica definita in τ_e ;
$\mathbf{J}_i(\cdot)$	Vettore densità di corrente elettrica definita in τ_i ;
$\mathbf{J}_0(\cdot)$	Vettore densità di corrente elettrica appartenente allo spazio nullo dell'operatore $L[\cdot]$;
$\mathbf{J}^*(\cdot)$	Vettore densità di corrente elettrica quasi-soluzione del problema inverso elettromagnetico;
$K(\cdot)$	Integrale ellittico completo di prima specie;
$L(\cdot)$	Funzione lagrangiana associata al problema di ottimizzazione vincolato;
$L[\cdot]$	Operatore che governa il problema inverso elettromagnetico in forma continua;
$\mathbf{m}$	Vettore del valore stimato del punto di minimo nell'algoritmo (1+1) Evolution Strategy;
[M]	Matrice dei coefficienti di auto e mutua induzione magnetica;
p_k	Passo associato alla direzione di ricerca in un algoritmo di ottimizzazione deterministico all'iterazione k ;
$P(\cdot)$	Filled Function;
$Q[\cdot]$	Indice di merito della configurazione;
r	Parametro del metodo delle Filled Functions;
R	Coordinata radiale del sistema di coordinate cilindriche;
R_0	Raggio maggiore del toroide;

$R_{\Gamma, m}$	Raggio del punto m-esimo degli M punti che discretizzano Γ ;
R^n	Spazio euclideo reale n-dimensionale;
$\mathbf{R}$	Vettore dei raggi nel problema di sintesi discretizzato con bobine filiformi e vettore dei raggi dei centri delle sezioni delle bobine massicce nel problema di sintesi discretizzato con bobine massicce a sezione rettangolare;
$\mathbf{s}$	Vettore delle varianze della funzione densità di probabilità n-dimensionale;
$s(\cdot), \tilde{s}(\cdot)$	Funzioni sensitività relative all'algoritmo Search Trajectories;
$\mathbf{S}_R$	Vettore dei semi-spessori radiali del sistema di bobine;
$\mathbf{S}_Z$	Vettore dei semi-spessori assiali del sistema di bobine;
$\mathbf{u}_R$	Versore radiale del sistema di coordinate cilindriche;
$\mathbf{u}_Z$	Versore assiale del sistema di coordinate cilindriche;
$\mathbf{u}_\phi$	Versore azimutale del sistema di coordinate cilindriche;
$v(\cdot)$	Funzione velocità relativa all'algoritmo Search Trajectories;
W_m	Energia magnetica del sistema di bobine;
$\mathbf{x}$	Vettore delle variabili discretizzate;
$\mathbf{x}^*$	Punto di minimo globale;
$\mathbf{x}_j^*$	Punto di minimo locale;
$\mathbf{z}$	Vettore delle variabili addizionali associato al Problema di ottimizzazione non lineare con vincoli di disuguaglianza;
Z	Coordinata assiale del sistema di coordinate cilindriche;
$Z_{\Gamma, m}$	Coordinata assiale del punto m-esimo degli M punti che discretizzano Γ ;
$\mathbf{Z}$	Vettore delle quote nel problema di sintesi discretizzato con bobine filiformi e vettore delle quote dei centri delle sezioni delle bobine massicce nel problema di sintesi discretizzato con bobine massicce a sezione rettangolare;
Γ	Curva chiusa ottenuta dall'intersezione del bordo di τ_i con il generico piano azimutale Ω_∞ : $\Gamma \equiv \partial\tau_i \cap \Omega_\infty$;
δ	Tolleranza sul residuo;
δ	Triangolarità per un plasma a D;

$\delta(\cdot)$	Funzione delta di Dirac;
$\Delta(\cdot)$	Funzione monodimensionale definita da $\Delta(x,a)=\begin{cases} 1 & , \text{ se } x < a \\ 0 & , \text{ se } x > a \end{cases}$;
κ	curvatura della traiettoria relativa all'algoritmo Search Trajectories;
κ	elongazione per un plasma a D;
λ, μ	Vettori dei moltiplicatori di Lagrange;
μ_0	Permeabilità magnetica del vuoto;
$\rho(\cdot)$	Funzione densità di probabilità;
ρ^2	Parametro del metodo delle Filled Functions;
τ_e	Sottospazio di τ_∞ esterno a τ_i ;
τ_i	Sottospazio di τ_∞ in cui è imposto il campo di induzione magnetica;
τ_∞	Spazio euclideo reale tridimensionale ($\tau_\infty \equiv \mathbb{R}^3$);
$\partial\tau_i$	Bordo di τ_i ;
ϕ	Coordinata azimutale del sistema di coordinate cilindriche;
$\Pi(\cdot, \cdot)$	Integrale ellittico completo di terza specie;
ψ	Funzione flusso scalare magnetico;
Ψ	Vettore dei valori della funzione flusso magnetico scalare calcolata negli M punti che discretizzano la curva Γ ;
Ω_e	Sottospazio di Ω_∞ ottenuto dall'intersezione di τ_e con il generico piano azimutale: $\Omega_e \equiv \tau_e \cap \Omega_\infty$;
Ω_i	Sottospazio di Ω_∞ ottenuto dall'intersezione di τ_i con il generico piano azimutale: $\Omega_e \equiv \tau_i \cap \Omega_\infty$;
Ω_∞	Piano azimutale in τ_∞ .

DEFINIZIONI

PUNTO DI MINIMO LOCALE

Data la funzione $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}^*$ è un punto di minimo locale se esiste ε positivo tale che $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in \Omega \cap \{ \mathbf{x} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| < \varepsilon \}$.

PUNTO DI MINIMO GLOBALE

Data la funzione $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}^*$ è un punto di minimo globale se risulta $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in \Omega$.

MINIMO LOCALE

Si definisce minimo locale il valore f^* che la funzione $f(\mathbf{x})$ assume in corrispondenza del punto di minimo locale $\mathbf{x}^*$.

MINIMO GLOBALE

Si definisce minimo globale il valore f^* che la funzione $f(\mathbf{x})$ assume in corrispondenza del minimo globale $\mathbf{x}^*$.

PUNTO DI MINIMO INFERIORE

Dato il punto di minimo $\mathbf{x}_1^*$ della funzione $f(\mathbf{x})$, un altro punto di minimo $\mathbf{x}_2^*$ si dice punto di minimo inferiore rispetto ad $\mathbf{x}_1^*$ se risulta $f(\mathbf{x}_2^*) < f(\mathbf{x}_1^*)$.

PUNTO DI MINIMO SUPERIORE

Si dice punto di minimo superiore un punto di minimo non inferiore. Si noti che $\mathbf{x}_1^*$ è un punto di minimo superiore rispetto a se stesso.

BACINO DI ATTRAZIONE

Dati un algoritmo di ottimizzazione locale ed un punto di minimo $\mathbf{x}^*$, si definisce bacino di attrazione di $\mathbf{x}^*$ l'insieme B^* formato da tutti i punti che utilizzati come punti iniziali dell'algoritmo conducono a quel punto di minimo.

NORMA EUCLIDEA

Data la funzione $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, si definisce norma euclidea di f la quantità

$\|f\|_2 = \sqrt{\int_{\Omega} |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}}$. Dato il vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ si definisce norma euclidea di $\mathbf{x}$ la

quantità $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

NORMA DI FROBENIUS

Data la funzione $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, si definisce norma di Frobenius (o norma infinita)

di f la quantità $\|f\|_{\infty} = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} |f(\mathbf{x})|$. Dato il vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ si definisce norma di Frobenius

(o norma infinita) di $\mathbf{x}$ la quantità $\|\mathbf{x}\|_{\infty} = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$.

RESIDUO

Data l'equazione $L[J] = b$, con J incognita e b termine noto, si definisce residuo dell'equazione la quantità $\|L[J] - b\|$.

SPAZIO NULLO

Dato l'operatore $L[\cdot]$, si definisce spazio nullo di L l'insieme degli elementi J_0 che soddisfano l'equazione $L[J_0] = 0$.

FUNZIONE OBIETTIVO

Dato il problema di ottimizzazione vincolato:

$$\begin{array}{ll} \min & f(\mathbf{x}) \\ \text{soggetto a} & \begin{cases} h(\mathbf{x}) = 0 \\ g(\mathbf{x}) \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

la funzione $f(\mathbf{x})$ si dice funzione obiettivo del problema di ottimizzazione vincolato.

FUNZIONE PENALIZZATA

Sia dato il problema di ottimizzazione vincolato definito dalla funzione obiettivo $f(\mathbf{x})$ e dai vincoli di uguaglianza $h(\mathbf{x}) = 0$ e disuguaglianza $g(\mathbf{x}) \geq 0$. Si definisce come funzione penalizzata l'espressione:

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} c_e \cdot \|h(\mathbf{x})\|^2 + \frac{1}{2} c_d \sum_{j=1}^r \|g_j(\mathbf{x}) - z_j\|^2$$

FILLED FUNCTION

Data la funzione $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, sia $\mathbf{x}^*$ un punto di minimo locale di f . La funzione $P: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è una Filled Function se presenta:

1. un massimo in $\mathbf{x}^*$;
2. almeno un punto di minimo o di sella nel bacino di attrazione di un punto di minimo inferiore di f rispetto a $\mathbf{x}^*$;
3. non ha punti di minimo o punti di sella nei bacini di attrazione dei punti di minimo superiori di f rispetto a $\mathbf{x}^*$.

1. INTRODUZIONE

1.1 Il Problema di Progetto di Sistemi Elettromagnetici

Quando si intende progettare un sistema elettromagnetico sorge un problema di sintesi elettromagnetica. Lo scopo del progetto e le limitazioni teoriche e tecnologiche impongono al sistema vincoli particolari. In un problema di sintesi elettromagnetica il campo elettromagnetico viene imposto in una regione finita di spazio. In particolare, nel progetto di un elettromagnete, nella regione di interesse è noto il campo di induzione magnetica. Si deve quindi determinare il sistema delle correnti che genera il dato campo magnetico. Il sistema delle correnti è posto nello spazio esterno alla regione di interesse. Le incognite sono le posizioni e le intensità del sistema di correnti (causa) mentre è noto il campo magnetico (effetto).

Il problema che si propone è un problema inverso che, se ammette soluzione, ha infinite soluzioni. Infatti, uno stesso effetto può essere determinato da molte cause diverse. Questo significa che possono esistere infiniti sistemi di correnti che producono lo specificato campo magnetico. Il problema inverso risulta non lineare essendo non lineare la relazione fra il campo magnetico e le posizioni delle correnti incognite. Tuttavia, la relazione fra campo magnetico e intensità delle correnti incognite è lineare. Questa linearità permette di determinare le proprietà del problema inverso.

La determinazione di una soluzione particolare del problema inverso costituisce un problema di sintesi elettromagnetica. Il problema di sintesi richiede dunque la capacità di trovare una delle infinite soluzioni del problema inverso. La soluzione da determinare viene scelta sulla base di un indice di merito del sistema. Si richiede quindi non solo la soluzione delle equazioni di campo che descrivono il problema fisico ma anche la possibilità di calcolare tutte le caratteristiche del sistema che possono essere indici di merito.

In particolare il problema di sintesi elettromagnetica di nostro interesse riguarda il progetto del campo magnetico assial-simmetrico sia nelle macchine toroidali per esperimenti sulla fusione termonucleare controllata a confinamento magnetico (TOKAMAK), sia nelle macchine per Risonanza Magnetica Nucleare (NMR). I dati di ingresso del problema di sintesi considerato sono il valore del campo magnetico, mentre i dati di uscita sono le posizioni e le intensità delle correnti del sistema di bobine esterne. In realtà, grazie al Teorema di Unicità, i dati di ingresso necessari sono il valore del componente tangente del campo di induzione sul contorno della zona di interesse e la eventuale densità di corrente nella zona di interesse.

Nella formulazione del problema di progetto non si può prescindere dagli aspetti tecnici ed economici. Da questi è possibile definire l'indice di merito del sistema al fine di risolvere il problema di sintesi elettromagnetica. Ad esempio, l'indice di merito per sistemi elettromagnetici può essere scelto fra l'energia magnetica, la potenza dissipata per effetto Joule, il volume dei conduttori, il campo disperso oppure il campo magnetico esterno.

Il problema di sintesi elettromagnetica consiste dunque nella scelta di una particolare soluzione del problema inverso elettromagnetico che soddisfi un prefissato indice di merito del sistema. Tale problema può essere risolto mediante una procedura di ottimizzazione. Si impone che il sistema di correnti prescelto renda minima una data funzione obiettivo, indice di merito della configurazione. Questo rende possibile isolare una soluzione di progetto fra le infinite soluzioni del problema inverso elettromagnetico.

In un problema di ottimizzazione viene richiesto di trovare il valore ottimale (minimo o massimo) di una funzione su un dominio dato ed i valori delle variabili in cui questo è ottenuto. Quando la procedura di ottimizzazione si applica ai problemi di sintesi elettromagnetica in generale compaiono funzioni obiettivo con molte variabili e non lineari. Inoltre si è in presenza di vincoli di uguaglianza e di disuguaglianza anch'essi non lineari. Si presentano quindi diversi minimi locali. Il numero di questi

minimi è spesso molto elevato e molti di essi sono senza alcun valore pratico in quanto corrispondono a grandi valori della funzione obiettivo.

La minimizzazione locale è stata ampiamente studiata e per essa sono disponibili molti metodi numerici (metodo del gradiente coniugato, metodo dei moltiplicatori, metodi quasi-Newtoniani ecc.). Questi metodi sono standard, ben testati e con ampie possibilità applicative, tuttavia in presenza di più minimi locali la ricerca fatta con tali metodi non dà altre indicazioni oltre al minimo trovato e converge a soluzioni diverse a seconda del punto iniziale scelto per la ricerca. Nei problemi di sintesi elettromagnetica le condizioni necessarie per l'applicazione di un metodo numerico di ottimizzazione locale (convessità, differenziabilità) possono non essere soddisfatte e l'ottimizzazione diventa un processo casuale. Inoltre l'inaccuratezza nel calcolo del gradiente e dell'Hessiano della funzione obiettivo, necessari nei metodi Newtoniani, può condurre, a causa dei limiti numerici, a soluzioni prive di significato. Per tutti questi motivi è preferibile utilizzare un metodo di ottimizzazione globale che risolva il problema su tutto il dominio della funzione.

Lo studio per la determinazione della soluzione globale del problema di ottimizzazione è una problematica piuttosto recente, infatti solo recentemente è stato possibile utilizzare strumenti di calcolo sufficientemente potenti da permettere la soluzione di tali problemi. E' stato dimostrato che è impossibile costruire un algoritmo che possa localizzare il minimo globale di una funzione definita qualsiasi, per esempio non continua [1]. Quindi l'ottimizzazione globale non va intesa come la procedura teorica per la determinazione del minimo globale, dato che questo è in generale impossibile, bensì va considerata come la costruzione e l'implementazione di procedure euristiche per la determinazione dei minimi locali più profondi, cioè di quei minimi a cui corrispondono i valori che sono fra i più bassi della funzione obiettivo.

1.2 Scopo della Tesi

L'oggetto di questa tesi è l'analisi di alcuni metodi di ottimizzazione globale e la loro applicazione ad alcuni problemi di sintesi elettromagnetica. I metodi studiati sono tre:

- il metodo di ottimizzazione globale delle Search Trajectories (ST)
- il metodo di ottimizzazione globale delle Evolution Strategies (ES)
- il metodo di ottimizzazione globale delle Filled Functions (FF)

Le procedure di calcolo che sono state ottenute a partire dai suddetti metodi sono state prima testate su funzioni note e poi applicate ai problemi di sintesi elettromagnetica. Ogni metodo ha le sue particolarità che si sono evidenziate nella trattazione teorica e nella validazione con i problemi test. Sono stati effettuati confronti incrociati fra i risultati ottenuti dai tre metodi, in particolare per determinarne la convergenza al minimo globale.

2. IL PROBLEMA DI SINTESI ELETTROMAGNETICA

2.1 Introduzione

Nel progetto di un elettromagnete si deve determinare il sistema di correnti che genera un dato campo magnetico in una determinata regione finita dello spazio. Questo risulta essere un problema inverso ad infinite soluzioni. Il problema di sintesi richiede la capacità di trovare una delle infinite soluzioni del problema inverso. La soluzione da determinare viene scelta sulla base di un indice di merito del sistema. Sono da calcolare quindi non solo la soluzione delle equazioni di campo che descrivono il problema fisico ma anche la possibilità di calcolare tutte le caratteristiche del sistema che sono gli indici di merito utilizzati per il problema di sintesi.

Il problema di sintesi elettromagnetica di nostro interesse riguarda il progetto di campi magnetici assialsimmetrici. Vengono poi considerate due applicazioni:

- il progetto del sistema di bobine poloidali nelle macchine toroidali per esperimenti sulla fusione termonucleare controllata a confinamento magnetico;
- il progetto del sistema di bobine principali di una macchina per Risonanza Magnetica Nucleare (NMR).

Nel primo caso un certo campo magnetico serve a garantire l'equilibrio del plasma in una desiderata configurazione (posizione e forma) e per poter produrre la variazione di flusso necessaria per la crescita e il mantenimento della corrente di plasma. I dati di ingresso del problema di sintesi considerato sono i valori sul contorno del plasma del campo magnetico poloidale, generato dalle correnti interne ed esterne al plasma, mentre i dati di uscita sono le posizioni e le intensità delle correnti del sistema di bobine poloidali. La corrente nel plasma si è supposta nota a priori. In questo caso si è considerato come criterio di merito la riduzione dell'alimentazione degli

avvolgimenti poloidali. Assegnati dunque i parametri principali del plasma (posizione, forma e densità di corrente del plasma), si devono determinare le posizioni, le dimensioni e le correnti delle bobine. Da queste è possibile calcolare l'energia magnetica del sistema, indice di merito del problema di sintesi elettromagnetica. Come indice di merito per questo sistema elettromagnetico può essere scelto, oltre all'energia magnetica, la potenza dissipata per effetto Joule o il volume dei conduttori.

Nel secondo caso si richiede un campo magnetico estremamente uniforme in una zona sferica al centro del sistema di bobine. Questa regione è destinata a contenere l'oggetto da esaminare. Il campo prodotto orienta il momento magnetico di spin dei protoni presenti all'interno dell'oggetto. I protoni sono quindi eccitati da un campo a radiofrequenza. La misura del campo riflesso permette di determinare la distribuzione dei protoni all'interno dell'oggetto in esame. L'uniformità del campo è dunque una richiesta fondamentale al fine di minimizzare la perdita di segnale e la conseguente distorsione dell'immagine. L'indice di merito per questo sistema elettromagnetico può essere scelto fra il volume dei conduttori, il campo disperso oppure l'omogeneità del campo magnetico nella zona di interesse.

Al fine dunque di scegliere una particolare soluzione del problema inverso elettromagnetico, rispetto ad un prefissato indice di merito del sistema, il problema di sintesi elettromagnetica si è risolto mediante una procedura di ottimizzazione.

2.2 Il Problema Inverso

Assumendo il mezzo infinito, lineare, isotropo, omogeneo e a permeabilità μ_0 in tutto lo spazio, la relazione fra il campo di induzione magnetica e la densità di corrente é data dalla legge di Biot-Savart nella sua forma più generale:

$$\mathbf{B}(\bar{\mathbf{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau_\infty} \mathbf{J}(\bar{\mathbf{r}}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} d\mathbf{r}' \quad (2.2.1)$$

Se la densità di corrente all'interno alla regione di interesse τ_i è nota, allora il Teorema di Unicità garantisce che il campo magnetico in τ_i è unicamente determinato dal suo componente tangente al bordo di τ_i [2]. L'equazione precedente diventa:

$$\begin{aligned} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau_e} \mathbf{J}_e(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'\|^3} \cdot \mathbf{t}(\mathbf{r}_s) d\mathbf{r}' = \\ = \mathbf{B}(\mathbf{r}_s) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{r}_s) - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau_i} \mathbf{J}_i(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'\|^3} \cdot \mathbf{t}(\mathbf{r}_s) d\mathbf{r}' \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

dove $\mathbf{r}_s$ appartiene al bordo di τ_i (indicato con $\partial\tau_i$) e $\mathbf{t}$ è il versore del componente del campo magnetico tangente al bordo di τ_i . Le densità di corrente $\mathbf{J}_e$ e $\mathbf{J}_i$ sono rispettivamente definite in τ_e e τ_i . L'equazione (2.2.2) ha la forma di una equazione integrale di Fredholm di prima specie. Se si indica con $L[\cdot]$ l'operatore lineare definito dal primo membro dell'uguaglianza e con b il secondo membro, allora l'equazione può essere scritta nella forma:

$$L[\mathbf{J}_e] = b \quad (2.2.3)$$

La generica soluzione $\mathbf{J}_e$ appartiene alla classe F delle funzioni vettoriali definite nel dominio τ_e , esterno alla regione di interesse τ_i . Il termine noto b è definito sul bordo di τ_i ed ivi continuo.

Il corrispondente problema omogeneo, che definisce lo spazio nullo dell'operatore lineare $L[\cdot]$, ammette soluzione non identicamente nulla [3, 4]. Esiste pertanto almeno una densità di corrente $\mathbf{J}_0$ tale che:

$$L[\mathbf{J}_0] = 0, \quad \mathbf{J}_0 \neq 0 \quad (2.2.4)$$

Per verificare la (2.2.4) si consideri un sistema a simmetria azimutale ed equatoriale in coordinate sferiche (r, θ, ϕ) . Si assegnino quattro superfici sferiche concentriche percorse da correnti azimutali. La densità di corrente sia definita come:

$$\mathbf{J}_0(r, \theta, \phi) = \frac{3}{2} H_0 \sin \theta [\delta(r - R_1) - \delta(r - R_2) - \delta(r - R_3) + \delta(r - R_4)] \mathbf{u}_\phi \quad (2.2.5)$$

dove $R_3 > R_2 > R_1$ ed $R_4^3 = R_3^3 + R_2^3 - R_1^3$. Tale densità di corrente produce un campo di induzione magnetica nullo nel volume interno alla sfera di raggio R_1 e nel volume esterno alla sfera di raggio R_4 . Infatti, inserendo la (2.2.5) nella (2.2.1), il campo di induzione magnetica risulta essere:

$$\mathbf{B}(r, \theta, \phi) = \frac{\mu_0 H_0}{r^3} \begin{cases} 0 & , 0 < r < R_1 \\ \left[R_1^3 - r^3 \right] \cos \theta \mathbf{u}_r + \left[\frac{R_1^3}{2} + r^3 \right] \sin \theta \mathbf{u}_\theta & , R_1 < r < R_2 \\ \left[R_1^3 - R_2^3 \right] \left(\cos \theta \mathbf{u}_r + \frac{1}{2} \sin \theta \mathbf{u}_\theta \right) & , R_2 < r < R_3 \\ \left[-R_4^3 + r^3 \right] \cos \theta \mathbf{u}_r - \left[\frac{R_4^3}{2} + r^3 \right] \sin \theta \mathbf{u}_\theta & , R_3 < r < R_4 \\ 0 & , R_4 < r \end{cases} \quad (2.2.6)$$

Le linee di flusso del campo di induzione, evidenziate in Fig. 2.2.1, sono dunque confinate all'interno del guscio sferico $R_1 < r < R_4$.

L'energia magnetica associata risulta essere:

$$W_m = 2\pi\mu_0 H_0^2 (R_2^3 - R_1^3) \quad (2.2.7)$$

La regione di interesse τ_i sia posta all'interno della sfera di raggio R_1 . Le quattro superfici sferiche definite dalla (2.2.5) sono quindi contenute nel dominio τ_e , esterno alla regione di interesse τ_i . Poiché il campo magnetico in τ_i non è influenzato in alcun modo dal campo di induzione generato dalla densità di corrente $\mathbf{J}_0$, $\mathbf{J}_0$ appartiene allo spazio nullo di $L[\cdot]$. Si conferma dunque la relazione (2.2.4).

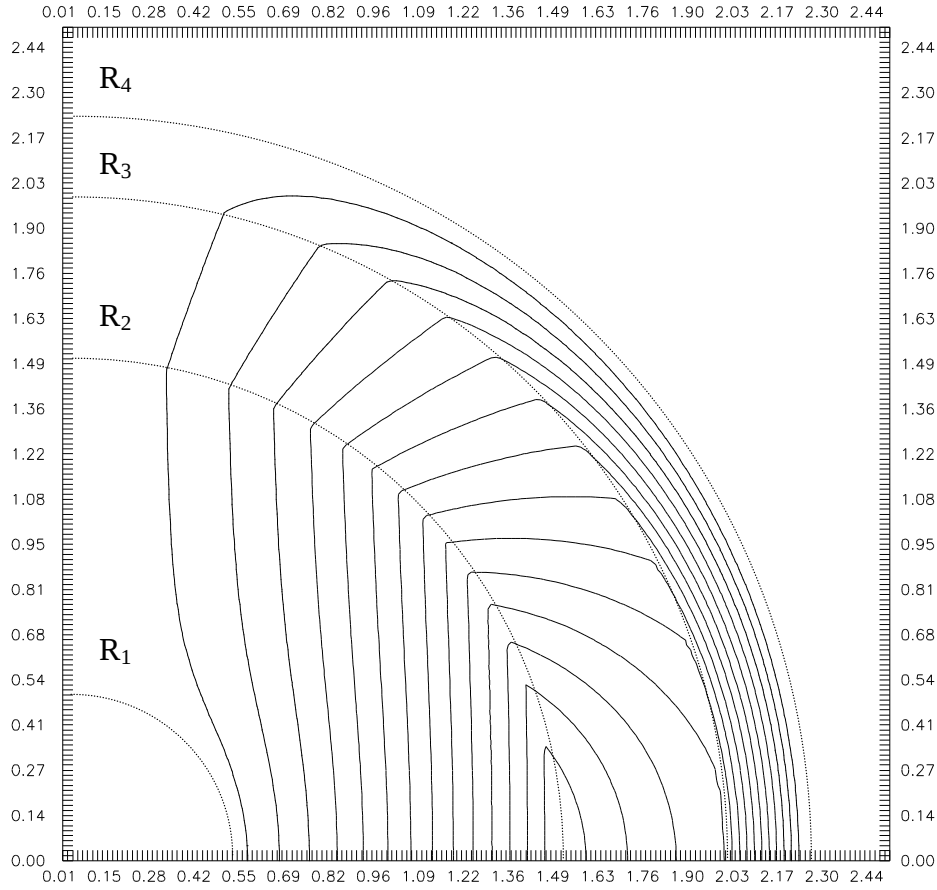


Fig. 2.2.1 - Mappa delle linee del campo di induzione magnetica generato dalla densità di corrente $\mathbf{J}_0$ definita dalla (2.2.5).

Lo spazio nullo dell'operatore lineare $L[\cdot]$, definito dalla (2.2.4), contiene dunque elementi non nulli. Il generico elemento $\mathbf{J}_0$ di questo insieme è una densità di corrente che produce un componente tangenziale nullo del campo magnetico sul bordo di τ_i .

Ciò ha tre importanti conseguenze:

1. il problema inverso (2.2.3) ha nessuna od infinite soluzioni. Infatti, se la densità di corrente $\mathbf{J}_b$ è una prefissata soluzione della (2.2.3), allora è una soluzione anche la densità di corrente $\mathbf{J}$ definita da:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_b + \alpha \mathbf{J}_0 \quad (2.2.8)$$

dove α è una costante arbitraria. Risulta infatti:

$$L[\bar{\mathbf{J}}] = L[\bar{\mathbf{J}}_b + \alpha \bar{\mathbf{J}}_0] = L[\bar{\mathbf{J}}_b] + \alpha L[\bar{\mathbf{J}}_0] = L[\bar{\mathbf{J}}_b] = \mathbf{b}$$

2. il problema inverso (2.2.3) non è stabile, cioè ad una piccola variazione dell'effetto (campo magnetico) non corrisponde necessariamente una piccola variazione della causa (densità di corrente). Infatti, definite le norme sul dominio τ_e e sul contorno di τ_i , si dimostra che:

$$\|b_2 - b_1\|_{\partial\tau_i} < \delta_\varepsilon \not\Rightarrow \|J_2 - J_1\|_{\tau_e} < \varepsilon \quad (2.2.9)$$

dove b_1 e b_2 sono due differenti termini noti della (2.2.3) e dove J_1 e J_2 sono le corrispondenti soluzioni. Dalla (2.2.8) risulta dunque:

$$J_2 - J_1 = (J_{b_2} - J_{b_1}) + (\alpha_2 - \alpha_1) J_0$$

Per le disuguaglianze triangolari si ha che:

$$\|J_2 - J_1\| \geq \left| \alpha_2 - \alpha_1 \right| \cdot \|J_0\| - \|J_{b_2} - J_{b_1}\|$$

Poiché i parametri α_1 e α_2 possono essere scelti a piacere la $\|J_2 - J_1\|$ può diventare arbitrariamente grande.

3. il problema è malposto secondo la definizione di Hadamard (la soluzione non esiste o non è unica o non è stabile) [5].

Per garantire l'esistenza di un insieme di soluzioni si introduce la tolleranza δ . In questo modo una soluzione del problema inverso (2.2.3) è una densità di corrente J_δ per la quale risulta:

$$\|L[J_\delta] - b\|_{\partial\tau_i} < \delta \quad (2.2.10)$$

E' infatti sempre possibile trovare un valore positivo δ per il quale l'equazione (2.2.10) sia soddisfatta da un'infinità di funzioni J_δ . Se il problema ammette soluzione, il residuo $\|L[J_e] - b\|$ si annulla in corrispondenza di tali soluzioni. Se invece il problema non ammette soluzione, si può determinare una quasi-soluzione del problema (2.2.3). Tale quasi-soluzione si definisce come la densità di corrente J^* per la quale il residuo raggiunge il minimo valore [6]:

$$\mathbf{J}^* = \arg\{\min \|L[\mathbf{J}_e] - \mathbf{b}\|\} \quad (2.2.11)$$

Si noti che la definizione (2.2.11), pur garantendo sempre l'esistenza di una quasi-soluzione del problema inverso (2.2.3), non garantisce affatto né l'unicità della quasi-soluzione né la stabilità del problema. Si può infatti dimostrare, analogamente a quanto visto sopra, che il problema della minimizzazione del residuo ammette infinite soluzioni e che, di conseguenza, non è stabile.

2.3 Il Problema di Sintesi

Come si è visto nella sezione precedente, il problema inverso definito dalla (2.2.3) ammette infinite soluzioni. La determinazione di una soluzione particolare del problema inverso costituisce un problema di sintesi elettromagnetica. Si è scelto di risolvere tale problema di sintesi attraverso una procedura di ottimizzazione. A questo scopo si è introdotto un opportuno funzionale $Q[\cdot]$ che è un indice di merito della configurazione e dipende dalla natura del problema. L'introduzione di $Q[\cdot]$ rende possibile isolare una soluzione fra le infinite soluzioni del problema inverso elettromagnetico, purché $Q[\cdot]$ sia limitato inferiormente. Il problema di sintesi può dunque essere formulato come un problema di ottimizzazione:

$$\begin{array}{ll} \min & Q[\mathbf{J}_e] \\ \text{soggetto a} & \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{J}_e \in F \\ \|L[\mathbf{J}_e] - \mathbf{b}\| = 0 \end{array} \right. \end{array} \quad (2.3.1)$$

Il problema (2.3.1) ammette sicuramente soluzione. Infatti, come si è visto nel paragrafo precedente, è sempre possibile trovare una densità di corrente soluzione o quasi-soluzione della (2.2.3). Sia $\mathbf{J}_b$ tale densità di corrente. Allora anche $\mathbf{J} = \mathbf{J}_b + \alpha\mathbf{J}_0$, con α costante arbitraria, soddisfa la (2.2.3), vincolo del problema (2.3.1), se $\mathbf{J}_0$ appartiene allo spazio nullo dell'operatore $L[\cdot]$. Il problema (2.3.1) diventa dunque un problema di minimizzazione rispetto al parametro α :

$$\min_{\alpha} \quad Q[\mathbf{J}_b + \alpha \mathbf{J}_0]$$

soggetto a $\mathbf{J}_b \in F'$

dove F' è lo spazio delle soluzioni della (2.2.3). Poiché si è supposto Q limitato inferiormente, questo problema ammette dunque almeno una soluzione.

Al problema (2.3.1) vengono aggiunti anche vincoli di disuguaglianza che tengono conto di alcune delle esigenze tecnologiche del sistema.

Nei particolari problemi di sintesi elettromagnetica di nostro interesse, che riguardano il progetto di campi magnetici assialsimmetrici, si sono adottati funzionali Q diversi:

- Nel progetto del sistema di bobine poloidali nelle macchine toroidali per esperimenti sulla fusione termonucleare controllata a confinamento magnetico si è scelto di imporre che il sistema di correnti renda minima l'energia magnetica della configurazione. Si noti che l'energia magnetica è definita positiva e quindi limitata inferiormente. Per quanto riguarda i vincoli tecnologici, si impone al sistema di correnti esterne di essere oltre una certa distanza minima dal plasma. Questo corrisponde fisicamente a imporre che il sistema di correnti sia esterno alla camera di contenimento del plasma. Inoltre, nel caso di bobine massicce, è necessario imporre una condizione di non compenetrazione fra bobine ed un vincolo di area minima delle sezioni delle bobine per evitare di ottenere soluzioni indesiderate.
- Nel progetto del sistema di bobine principali di una macchina per Risonanza Magnetica Nucleare (NMR) si è scelto di imporre che il sistema di correnti renda minimo il campo di induzione magnetica disperso oppure la disuniformità del campo di induzione magnetica nella zona di interesse. Entrambe le grandezze sono limitate inferiormente dato che si considera il modulo del campo in un certo numero di punti. Per quanto riguarda i vincoli tecnologici, si impone al sistema di correnti esterne di restare all'interno di un certo volume finito. Questo corrisponde fisicamente a imporre che il sistema di correnti sia all'interno del criostato. Infatti, solitamente, le bobine principali di una macchina NMR sono superconduttive.

Inoltre, è necessario imporre una condizione di non compenetrazione fra bobine ed un vincolo di area minima delle sezioni delle bobine per evitare di ottenere soluzioni non desiderate. Si è scelto quindi di non vincolare la densità di corrente all'interno delle bobine, riservandosi poi di controllare a posteriori la validità delle soluzioni trovate.

Il problema di ottimizzazione vincolato (2.3.1) risulta essere stabile. Infatti, il problema di ottimizzazione così formulato, qualora sia risolto con un metodo di ottimizzazione globale, può essere facilmente messo in relazione con il problema regolarizzato per mezzo del metodo di Tikhonov (appendice A).

2.4 Configurazioni Assial-Simmetriche

Si consideri un sistema a geometria assial-simmetrica (Fig. 2.4.1, Fig. 2.4.2) in coordinate cilindriche (R, ϕ, Z) con l'asse Z coincidente con l'asse di simmetria del sistema. Si assuma quindi che la densità di corrente sia costituita soltanto dalla componente azimutale:

$$\mathbf{J}(R, Z, \phi) = J(R, Z) \mathbf{u}_\phi \quad (2.4.1)$$

Si dimostra (appendice B) che il campo induzione magnetica, calcolato con l'equazione di Biot-Savart (2.2.1), è anch'esso a simmetria azimutale ed ha componenti solo nel piano (R, Z) . Il potenziale vettore, definito dalle relazioni $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, risulta dunque essere indipendente da ϕ e costituito dalla sola componente azimutale:

$$\mathbf{A}(R, Z, \phi) = A_\phi(R, Z) \mathbf{u}_\phi$$

Si definisce la funzione flusso scalare ψ [7]:

$$\psi(R, Z) = 2\pi R A_\phi(R, Z) \quad (2.4.1)$$

Essa rappresenta il flusso del campo induzione magnetica attraverso il cerchio di raggio R e centro $(0, Z)$. Si dimostra (appendice B) che è possibile esprimere il campo magnetico in funzione del flusso scalare:

$$\mathbf{B}(R, Z) = \frac{\nabla \psi(R, Z) \times \mathbf{u}_\phi}{2\pi R} \quad (2.4.2)$$

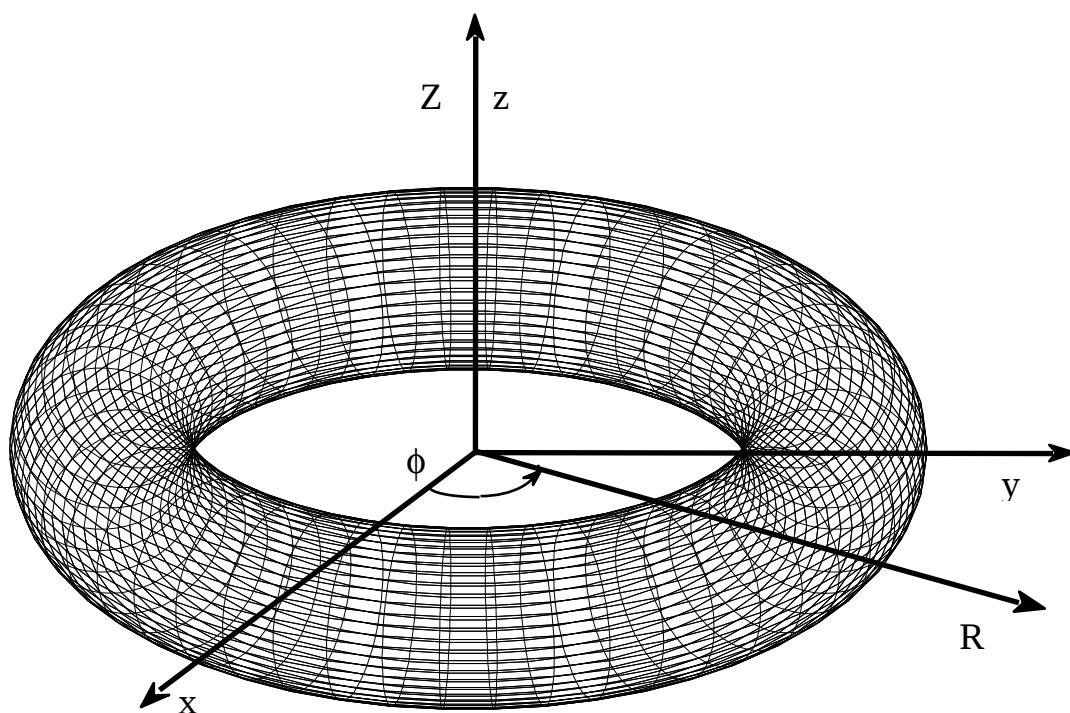


Fig. 2.4.1 - Configurazione toroidale assial-simmetrica.

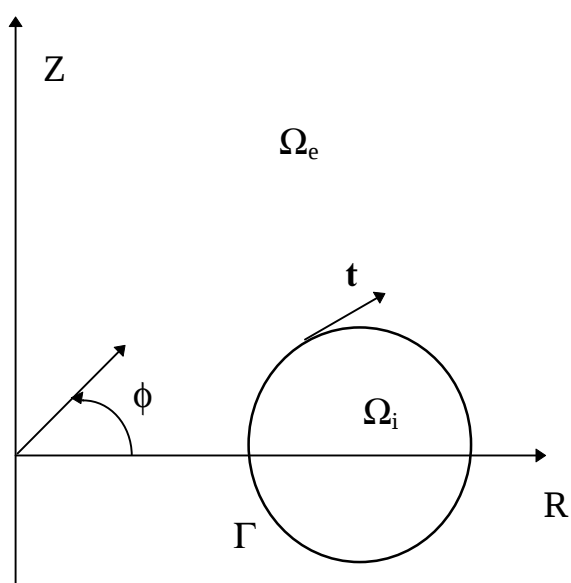


Fig. 2.4.2 - Sezione circolare nel piano (R, Z) della configurazione toroidale assial-simmetrica.

Anche il flusso scalare non dipende dalla coordinata azimutale e può essere calcolato a partire dall'equazione di Biot-Savart (2.2.1). Si può dimostrare (appendice B) che il flusso magnetico è dato da:

$$\psi(R, Z) = \int_{\Omega_{\infty}} H(R, Z, R', Z') J(R', Z') dR' dZ' \quad (2.4.3)$$

Il kernel $H(\cdot)$ è dato in appendice B. La superficie Ω_{∞} rappresenta il generico piano azimutale. Esso si scompone dunque nelle due regioni Ω_e ed Ω_i che sono la traccia, sul generico piano azimutale, delle due regioni τ_e e τ_i definite nel paragrafo 2.2. Al piano Ω_{∞} appartiene anche la curva Γ , dove Γ è la traccia del bordo di τ_i . Dalla (2.2.2) si ottiene quindi la seguente equazione:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_e} H|_{\Gamma}(R, Z, R', Z') J_e(R', Z') dR' dZ' = \\ = \psi|_{\Gamma}(R, Z) - \iint_{\Omega_i} H|_{\Gamma}(R, Z, R', Z') J_i(R', Z') dR' dZ' \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Le densità di corrente J_e e J_i sono rispettivamente definite in Ω_e e Ω_i . L'equazione (2.4.4), analogamente alla (2.2.2), ha la forma di una equazione integrale di Fredholm di prima specie. Essa possiede dunque tutte le caratteristiche della (2.2.2). In particolare lo spazio nullo dell'operatore lineare definito dal primo membro della (2.4.4) contiene elementi non nulli. Quindi, se esiste una soluzione della (2.4.4), ne esistono infinite.

L'utilizzo della funzione flusso scalare invece del campo di induzione magnetica porta a riconsiderare le condizioni al contorno del problema. Come è noto, se la densità di corrente J_i all'interno alla regione di interesse Ω_i è nota, allora il Teorema di Unicità garantisce che il campo magnetico in Ω_i è unicamente determinato dal suo componente tangente alla curva Γ . Tuttavia, se la regione tridimensionale di interesse τ_i non è a connessione lineare semplice (ad esempio è toroidale), la conoscenza del campo magnetico in Ω_i è sufficiente solo a determinare la distribuzione della

funzione flusso scalare ψ su Γ ma non il suo valore. In tal caso infatti, può essere aggiunta al valore del flusso su Γ una costante senza che venga alterato il campo di induzione entro Ω_i . Ciò è conseguenza della dipendenza di $\mathbf{B}$ dal gradiente di ψ .

Un flusso costante su Γ corrisponde ad un campo di induzione nullo entro Ω_i . Di conseguenza, le distribuzioni di densità di corrente che creano un flusso costante su Γ appartengono allo spazio nullo della (2.2.2). Questo significa che le soluzioni della (2.4.4) sono un sottospazio delle soluzioni della (2.2.2). Quando il valore del flusso su Γ non è tra i dati del problema l'utilizzo della (2.4.4) invece della (2.2.2) porta a una riduzione del numero di soluzioni del problema inverso. In tal caso è possibile aggiungere alle variabili del problema un ulteriore grado di libertà corrispondente ad un flusso costante.

Se la regione tridimensionale di interesse τ_i è a connessione lineare semplice (ad esempio è sferica), la conoscenza del campo magnetico in Ω_i è sufficiente per determinare il valore della funzione flusso scalare ψ su Γ . Si noti infatti che ψ deve, per definizione, essere nulla sull'asse Z e continua su tutto il piano Ω_∞ .

Si dimostra (appendice B) che l'energia magnetica associata alla configurazione assial-simmetrica è definita da:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\infty} J(R, Z) \psi(R, Z) dR dZ \quad (2.4.5)$$

2.5 Discretizzazione del Problema di Sintesi

Allo scopo di risolvere il problema di sintesi elettromagnetica (2.3.1) sia $Q[\cdot]$ che $L[\cdot]$ devono essere discretizzati. Per il problema assialsimmetrico si fa riferimento all'equazione (2.4.4) in sostituzione della (2.2.2). Il funzionale $Q[\cdot]$ si suppone essere l'energia magnetica associata alla sola densità di corrente J_e . La discretizzazione dell'equazione integrale (2.4.4) e dell'energia magnetica conseguono direttamente dalla scelta del tipo di bobine da impiegare. Si è scelto di schematizzare la

distribuzione di densità di corrente incognita J_e in due modi differenti: 1) mediante un sistema di N correnti circolari filiformi; 2) mediante un sistema di N bobine circolari massicce a sezione rettangolare.

- Per le N correnti filiformi si pone:

$$J_e(R, Z) = \sum_{i=1}^N I_i \cdot \delta(R - R_i) \cdot \delta(Z - Z_i) \quad (2.5.1)$$

dove $\delta(\cdot)$ è la funzione delta di Dirac. Le variabili R_i e Z_i sono, rispettivamente, raggio e quota della i -esima spira filiforme. La I_i rappresenta invece la corrente che percorre la i -esima spira filiforme. Dalla (2.4.3) si ottiene:

$$\psi(R, Z) = \sum_{i=1}^N I_i \cdot H(R, R_i, Z, Z_i) \quad (2.5.2)$$

La discretizzazione di ψ si effettua calcolando la funzione flusso scalare su M punti appartenenti alla curva Γ . Tali punti nel seguito sono indicati come $P_{\Gamma, m} \equiv (R_{\Gamma, m}, Z_{\Gamma, m})$ con $m=1, \dots, M$.

Si ottiene quindi:

$$\psi(R_{\Gamma, m}, Z_{\Gamma, m}) = \sum_{i=1}^N I_i \cdot H(R_{\Gamma, m}, R_i, Z_{\Gamma, m}, Z_i), \quad m = 1, \dots, M$$

Posto $H_{mn} = H(R_{\Gamma, m}, R_n, Z_{\Gamma, m}, Z_n)$ si ha, in forma matriciale:

$$[H] \cdot \mathbf{I} = \Psi \quad (2.5.3)$$

I tre vettori N -dimensionali che definiscono completamente la configurazione sono $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_N)$, $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_N)$ ed $\mathbf{I} = (I_1, \dots, I_N)$. Il vettore M -dimensionale $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_M)$ è costituito dai valori della funzione flusso scalare negli M punti che discretizzano la curva Γ . $[H]$ è una matrice $M \times N$ che dipende solo da $\mathbf{R}$ e da $\mathbf{Z}$. La (2.5.3) è un sistema di M equazioni in $3N$ incognite (posizioni e intensità delle correnti). Esso stabilisce un legame lineare fra Ψ e $\mathbf{I}$, non lineare fra Ψ e $\mathbf{R}, \mathbf{Z}$.

L'energia magnetica discretizzata è data da:

$$\begin{aligned}
 W_m &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N I_i \cdot \psi(R_i, Z_i) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N I_i I_j \cdot H(R_i, R_j, Z_i, Z_j) \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{I}^t \cdot [\mathbf{M}] \cdot \mathbf{I}
 \end{aligned} \tag{2.5.4}$$

I coefficienti della matrice $[\mathbf{M}]$ sono i coefficienti di auto e mutua induzione (appendice C).

- La trattazione delle N bobine massicce risulta, dal punto di vista matematico, molto più laboriosa rispetto al caso delle bobine filiformi, pertanto in questo paragrafo sono riportati solo i risultati principali e si rimanda per quel che riguarda il procedimento analitico all'appendice D.

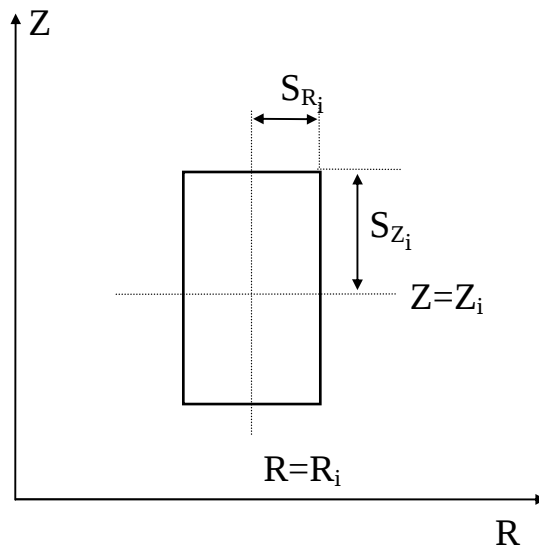


Fig. 2.5.1 - Rappresentazione delle caratteristiche geometriche della sezione rettangolare della i-esima bobina massiccia.

La densità di corrente si suppone uniforme all'interno di ogni bobina a sezione rettangolare (Fig. 2.5.1). Sia I_i l'intensità di corrente che percorre la i -esima bobina. Siano R_i e Z_i , rispettivamente, raggio e quota del centro della i -esima bobina. Siano inoltre S_{Ri} , S_{Zi} i semispessori radiale ad assiale, rispettivamente, della i -esima

bobina. Se si considera un sistema di N bobine a sezione rettangolare la densità di corrente è data da:

$$J_e(R, Z) = \sum_{i=1}^N I_i \cdot \Delta(R - R_i, S_{R_i}) \cdot \Delta(Z - Z_i, S_{Z_i}) \quad (2.5.5)$$

dove si è posto $\Delta(x, a) = \frac{1}{2a} U(a + x)U(a - x)$ ed $U(\cdot)$ è la funzione a gradino unitaria di Heaviside. L'andamento della funzione $\Delta(\cdot)$ è mostrato in Fig. 2.5.2. Le sue proprietà fondamentali sono:

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(x, a) dx = 1;$
2. $\lim_{a \rightarrow 0^+} \Delta(x, a) = \delta(x).$

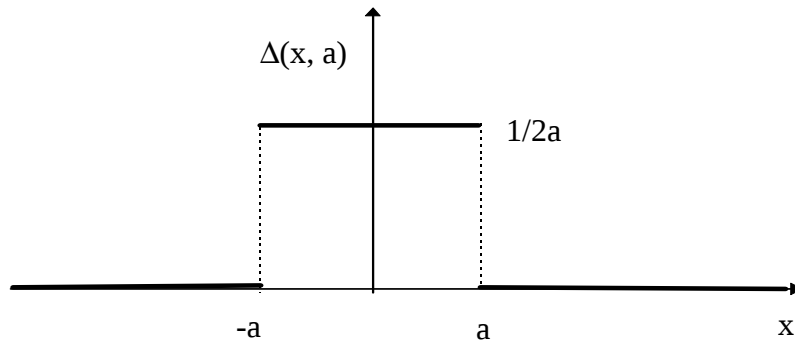


Fig. 2.5.2 - Andamento della funzione $\Delta(x, a)$

Dalla (2.4.3) si ottiene:

$$\psi(R, Z) = \sum_{i=1}^N I_i \cdot \Lambda(R, Z, R_i, Z_i, S_{R_i}, S_{Z_i}) \quad (2.5.6)$$

La funzione $\Lambda(\cdot)$ è data in appendice D. La discretizzazione di ψ si effettua, anche in questo caso, calcolando la funzione flusso scalare su M punti appartenenti alla curva Γ . Si ottiene quindi:

$$\psi(R_{\Gamma, m}, Z_{\Gamma, m}) = \sum_{i=1}^N I_i \cdot \Lambda(R_{\Gamma, m}, Z_{\Gamma, m}, R_i, Z_i, S_{R_i}, S_{Z_i}), \quad m = 1, \dots, M$$

Posto $A_{mn} = \Lambda(R_{\Gamma, m}, Z_{\Gamma, m}, R_n, Z_n, S_{R_n}, S_{Z_n})$ si ottiene, analogamente alla (2.4.4), il sistema:

$$[A] \cdot \mathbf{I} = \Psi \quad (2.5.7)$$

La configurazione è completamente definita dai cinque vettori N-dimensionali $\mathbf{R}=(R_1, \dots, R_N)$, $\mathbf{Z}=(Z_1, \dots, Z_N)$, $\mathbf{S}_{R_i}=(S_{R_1}, \dots, S_{R_N})$, $\mathbf{S}_{Z_i}=(S_{Z_1}, \dots, S_{Z_N})$ ed $\mathbf{I}=(I_1, \dots, I_N)$.

Il vettore M-dimensionale $\Psi=(\psi_1, \dots, \psi_M)$ è costituito dai valori assegnati alla funzione flusso scalare in M punti della curva Γ . $[A]$ è una matrice $M \times N$ che dipende solo da $\mathbf{R}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{S}_R$, $\mathbf{S}_Z$. La (2.5.7) è un sistema di M equazioni in 5N incognite (intensità delle correnti e posizioni delle bobine massicce) che stabilisce un legame lineare fra Ψ e $\mathbf{I}$, non lineare fra Ψ e $\mathbf{R}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{S}_R$, $\mathbf{S}_Z$.

Per quanto riguarda l'energia magnetica si ottiene:

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N I_i I_j M_{ij} = \frac{1}{2} \mathbf{I}^t \cdot [\mathbf{M}] \cdot \mathbf{I}$$

L'espressione dei coefficienti M_{ij} come funzione di $\mathbf{R}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{S}_{R_i}$, $\mathbf{S}_{Z_i}$ è data in appendice D.

Il problema di sintesi in forma continua (2.3.1) assume quindi forme diverse a seconda di come viene discretizzato. Scegliendo come funzione obiettivo l'energia generata dalle correnti esterne, il problema di sintesi per correnti filiformi si riconduce al problema della minimizzazione della (2.5.4) con le condizioni di vincolo espresse dal sistema (2.5.3). A ciò si aggiungono r vincoli di disuguaglianza, fisici e tecnologici, imposti agli N conduttori. Il problema da risolvere per le bobine filiformi può essere formulato come:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \mathbf{I}^t \cdot [\mathbf{M}(\mathbf{R}, \mathbf{Z})] \cdot \mathbf{I} \\ \text{soggetto a} \quad & \begin{cases} [\mathbf{H}(\mathbf{R}, \mathbf{Z})] \cdot \mathbf{I} - \Psi = 0 \\ g_j(\mathbf{R}, \mathbf{Z}) \geq 0, \quad j = 1, \dots, r \end{cases} \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

Nel caso di bobine massicce il problema di sintesi da risolvere è simile al problema (2.5.8). Tuttavia, in questo caso le incognite sono 5N (le incognite aggiuntive sono gli spessori radiali e assiali):

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \mathbf{I}^t \cdot [\mathbf{M}(\mathbf{R}, \mathbf{Z}, \mathbf{S}_R, \mathbf{S}_Z)] \cdot \mathbf{I} \\ \text{soggetto a } & \begin{cases} [\mathbf{A}(\mathbf{R}, \mathbf{Z}, \mathbf{S}_R, \mathbf{S}_Z)] \cdot \mathbf{I} - \Psi = 0 \\ g_j(\mathbf{R}, \mathbf{Z}, \mathbf{S}_R, \mathbf{S}_Z) \geq 0, \quad j = 1, \dots, r \end{cases} \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

3. IL PROBLEMA DI OTTIMIZZAZIONE

3.1 Introduzione

Si consideri il problema della minimizzazione non vincolata di una funzione obiettivo $f(\mathbf{x})$ continua e differenziabile in tutto lo spazio $\mathbb{R}^n$. Se la funzione è limitata inferiormente esiste almeno un minimo locale f_j^* nel corrispondente punto di minimo locale $\mathbf{x}_j^*$. Se esiste più di un minimo locale, il minimo globale f^* si definisce come il minore dei minimi locali:

$$f^* = \min_j \{ f_j^* \}$$

Lo studio del Problema di Ottimizzazione ha portato alla determinazione di una molteplicità di metodi di ottimizzazione (Newtoniani, quasi-Newtoniani, dei moltiplicatori, ecc.). Tutti questi metodi di ottimizzazione sono caratterizzati dalla determinazione di una successione di punti definita dalla relazione $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + p_k \mathbf{d}_k$, dove k è l'indice di iterazione. La direzione di ricerca $\mathbf{d}_k$ ed il passo p_k vengono ricalcolati ad ogni iterazione in modo che risulti $\mathbf{d}_k \cdot \nabla f(\mathbf{x}_k) < 0$. La direzione di ricerca risulta quindi sempre una direzione in cui f decresce. Poiché in ogni punto della successione si considerano solo le proprietà locali di f , tutti questi metodi sono detti di ottimizzazione locale. Il problema di ottimizzazione locale richiede dunque il valore della funzione f solo su una successione di punti e converge rapidamente ad un minimo se il gradiente ∇f è disponibile. Tuttavia, la convergenza della successione di punti $\mathbf{x}_k$ dipende fortemente dal punto iniziale. Fissato l'algoritmo di ottimizzazione locale e dato il punto di minimo $\mathbf{x}_j^*$ della funzione f , si definisce Bacino di Attrazione B_j del punto di minimo $\mathbf{x}_j^*$ l'insieme di tutti i punti che utilizzati come punti iniziali dell'algoritmo conducono a quel punto di minimo. Ogni punto

dello spazio R^n appartiene dunque, per definizione, ad un bacino di attrazione e l'intero spazio è divisibile in bacini di attrazione:

$$\bigcup_j B_j = R^n$$

Il problema della determinazione di tutti i minimi è dunque ricondotto al problema della determinazione di un punto per ogni bacino di attrazione, da cui poi risalire al minimo del bacino di attrazione relativo. Dato che è impossibile passare da un bacino di attrazione all'altro utilizzando un algoritmo di ottimizzazione locale, il problema della determinazione di tutti i bacini (o di un punto per ognuno) è matematicamente mal posto in quanto richiederebbe la soluzione del problema di ottimizzazione partendo da ogni punto dello spazio. Quindi, in generale, anche la ricerca del minimo globale f^* come minimo di tutti i minimi locali è matematicamente mal posta poiché un limite inferiore per f^* non può essere trovato dopo un numero finito di valutazioni di f [1].

Se si suppone che la norma del gradiente di f sia limitata e che l'area di ricerca sia limitata, il minimo globale f^* ed il corrispondente punto di minimo globale x^* possono essere approssimati con una tecnica di Space Covering, cioè calcolando la funzione in una griglia di punti [1, 8]. Questo metodo tende però a diventare eccessivamente oneroso dato che si deve calcolare la funzione obiettivo su un insieme di punti che deve essere sufficientemente denso da coprire il volume di ricerca. Tutti gli altri metodi di minimizzazione globale sono euristici, nel senso che forniscono come stima di f^* il minore dei minimi locali trovati, oppure dipendono da speciali condizioni sulla f . In questo ultimo caso la classe delle funzioni obiettivo f per cui si può definire un metodo che garantisca di convergere al minimo globale viene enormemente ristretta. Infatti, più che fornire una strategia per l'ottimizzazione, le varie condizioni (convessità, invessità, unimodalità, ecc.) determinano soltanto l'esistenza di un unico minimo, che può quindi essere determinato con un metodo di ottimizzazione locale.

L'approccio più semplice al problema della localizzazione del minimo globale è il metodo Multi-Start in cui una serie di punti scelti a caso nella regione di interesse vengono utilizzati come punti di partenza per un algoritmo di minimizzazione locale. Anche in questo caso vale quanto visto sopra, cioè non si ha nessuna possibilità di sapere, nel procedere del calcolo, se si è determinato ogni minimo oppure no.

Dal punto di vista teorico è stato dimostrato che è impossibile costruire un algoritmo che possa localizzare il minimo globale di una funzione generica, ad esempio non continua [1]. Tuttavia le funzioni che compaiono nella fisica e nell'ingegneria sono di norma almeno continue, dato che il loro comportamento in un dominio infinitesimale è solitamente di trascurabile interesse rispetto a quello su larga scala. Anche se questa situazione è dal punto di vista della teoria molto poco soddisfacente, c'è comunque la necessità pratica di procedure che determinino, se non il minimo globale, almeno i minori tra minimi locali. Quindi l'ottimizzazione globale non viene intesa come la procedura per la localizzazione della soluzione globale, dato che questo è in generale impossibile, bensì come la costruzione di procedure euristiche per la localizzazione di alcuni dei minori tra i minimi locali.

Gli algoritmi di ottimizzazione globale considerati nel seguito trattano il problema di ottimizzazione non vincolato. Questo perché è possibile ricondurre gli eventuali vincoli all'interno di una funzione obiettivo che ammette gli stessi minimi e punti di minimo del precedente problema. In generale, il problema di ottimizzazione non lineare vincolato si formalizza come:

$$\begin{array}{ll} \min & f(\mathbf{x}) \\ \text{soggetto a} & \begin{cases} h(\mathbf{x}) = 0 \\ g(\mathbf{x}) \geq 0 \end{cases} \end{array} \quad (3.1.1)$$

dove $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$ ed $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sono funzioni note.

Questo problema si trasforma in un problema di ottimizzazione con vincoli solo di uguaglianza introducendo un vettore di variabili addizionali $\mathbf{z}$:

$$\begin{array}{ll} \min & f(\mathbf{x}) \\ \text{soggetto a} & \begin{cases} h(\mathbf{x}) = 0 \\ g_j(\mathbf{x}) - z_j^2 = 0 \\ j = 1, \dots, r \end{cases} \end{array} \quad (3.1.2)$$

Si ha quindi che $\mathbf{x}^*$ è un punto di minimo del problema (3.1.1) se e solo se $(\mathbf{x}^*, \mathbf{z}^*)$ è un punto di minimo del problema (3.1.2), avendo posto $z_j^* = \sqrt{g_j(\mathbf{x}^*)}$ [9].

E' possibile a questo punto definire la funzione penalizzata F:

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} c_e \cdot \|h(\mathbf{x})\|^2 + \frac{1}{2} c_d \sum_{j=1}^r \|g_j(\mathbf{x}) - z_j^2\|^2 \quad (3.1.3)$$

dove c_e e c_d sono costanti positive e vengono dette parametri di penalità. La norma, che è indicata formalmente nello stesso modo per i vincoli di uguaglianza e per quelli di disuguaglianza, è solitamente scelta fra la norma di Euclide e la norma di Frobenius [6].

Una volta fissati i parametri c_e e c_d , il nuovo problema di ottimizzazione non vincolato risulta:

$$\begin{array}{ll} \min & F(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \\ \text{soggetto a} & (\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^{n+r} \end{array} \quad (3.1.4)$$

Il problema (3.1.4) ammette le stesse soluzioni del problema (3.1.1) se le costanti di penalizzazione sono sufficientemente elevate.

Per provare questa affermazione si supponga che f , g e h siano continue in tutto $\mathbb{R}^n$ ed f sia limitata inferiormente. Sia $(\mathbf{x}_k^*, \mathbf{z}_k^*)$ il punto di minimo globale del problema penalizzato (3.1.4) con $c_e = c_{e,k}$ e $c_d = c_{d,k}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$). Se le successioni $\{c_{e,k}\}$ e $\{c_{d,k}\}$ sono positive crescenti allora il punto di minimo globale del problema (3.1.2) è dato da $(\mathbf{x}^*, \mathbf{z}^*) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{x}_k^*, \mathbf{z}_k^*)$. Infatti risulta

$$F(\mathbf{x}_k^*, \mathbf{z}_k^*) \leq \min_{\substack{h(\mathbf{x})=0 \\ g(\mathbf{x})-\mathbf{z}^2=0}} F(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \quad (3.1.5)$$

poiché il minimo a secondo membro della (3.1.5) è effettuato su un sottoinsieme del dominio considerato per la ricerca del minimo $F(\mathbf{x}_k^*, \mathbf{z}_k^*)$. Detto f^* il minimo globale del problema (3.1.2), per la (3.1.3) si ha:

$$\min_{\substack{h(\mathbf{x})=0 \\ g(\mathbf{x})-\mathbf{z}^2=0}} F(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \min_{\substack{h(\mathbf{x})=0 \\ g(\mathbf{x})-\mathbf{z}^2=0}} f(\mathbf{x}) = f^* \quad (3.1.6)$$

Considerando la (3.1.5) e la (3.1.6) si ottiene:

$$f(\mathbf{x}_k^*) + \frac{1}{2} c_{e,k} \cdot \|h(\mathbf{x}_k^*)\|^2 + \frac{1}{2} c_{d,k} \sum_{j=1}^r \|g_j(\mathbf{x}_k^*) - \mathbf{z}_{j,k}^{*2}\|^2 \leq f^* \quad (3.1.7)$$

Per k tendente all'infinito risulta:

$$f(\mathbf{x}^*) + \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} (c_{e,k} \cdot \|h(\mathbf{x}_k^*)\|^2) + \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(c_{d,k} \sum_{j=1}^r \|g_j(\mathbf{x}_k^*) - \mathbf{z}_{j,k}^{*2}\|^2 \right) \leq f^* \quad (3.1.8)$$

D'altronde, poiché deve essere

$$f^* \leq f(\mathbf{x}^*) \quad (3.1.9)$$

risulta:

$$\frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} (c_{e,k} \cdot \|h(\mathbf{x}_k^*)\|^2) + \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(c_{d,k} \sum_{j=1}^r \|g_j(\mathbf{x}_k^*) - \mathbf{z}_{j,k}^{*2}\|^2 \right) \leq 0$$

Ma poiché entrambi i limiti sono quantità positive o nulle deve essere:

$$\frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} (c_{e,k} \cdot \|h(\mathbf{x}_k^*)\|^2) = \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(c_{d,k} \sum_{j=1}^r \|g_j(\mathbf{x}_k^*) - \mathbf{z}_{j,k}^{*2}\|^2 \right) = 0 \quad (3.1.10)$$

Dalle (3.1.8), (3.1.9) e (3.1.10) si ricava $f(\mathbf{x}^*) \leq f^* \leq f(\mathbf{x}^*)$ e perciò risulta $f^* = f(\mathbf{x}^*)$.

3.2 Il Metodo Search Trajectories (ST)

Questo metodo ha origine dall'analogia con il moto di un grave in un campo gravitazionale. Infatti, un grave, se è libero di muoversi, tende a minimizzare il potenziale gravitazionale cui è soggetto. Si consideri dunque l'equazione differenziale vettoriale:

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{d\tau^2} = -\nabla f(\mathbf{x}(\tau)) \quad (3.2.1)$$

che rappresenta l'equazione del moto di una particella di massa unitaria in un campo di forza conservativo n-dimensionale, dove l'energia potenziale della particella è rappresentata da $f(\mathbf{x})$. E' lecito dunque aspettarsi che se si fornisce alla "particella" una sufficiente "energia cinetica" iniziale, essa può passare da un bacino di attrazione all'altro e tende alla condizione di minima "energia potenziale" e cioè nel punto di minimo globale di f . Facendo riferimento al problema definito dalla (3.1.2) si identifichi f con la funzione obiettivo penalizzata. Come già dimostrato il problema non vincolato (3.1.4) ed il problema vincolato (3.1.2) hanno la medesima soluzione è perciò nel seguito di questa trattazione si fa riferimento al problema non vincolato.

Per rendere più generale l'equazione del moto (3.2.1) si impone una sensitività $\tilde{s}(f(\mathbf{x}))$ definita positiva. Si ha quindi il seguente sistema differenziale autonomo nella variabile indipendente τ :

$$\begin{cases} \frac{d^2 \mathbf{x}}{d\tau^2} = -\nabla f(\mathbf{x}) \tilde{s}(f(\mathbf{x})) \\ \mathbf{x}(\tau = 0) = \mathbf{x}_0 \\ \frac{d\mathbf{x}}{d\tau}(\tau = 0) = \frac{d\mathbf{x}}{d\tau}\bigg|_0 \end{cases} \quad (3.2.2)$$

Poiché il minimo globale f^* è a priori incognito, si impone che la traiettoria non possa convergere a minimi con valore superiore a un fissato valore C reale che viene detto Target Level. Ciò si ottiene imponendo che la velocità non si annulli mai per $f(\mathbf{x}) > C$. Con una opportuna trasformazione parametrica da τ a t si impone che il

modulo della velocità sia dato da una funzione v definita positiva dipendente dal valore di $f(\mathbf{x}) - C$:

$$\left\| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right\| = v(f(\mathbf{x}) - C) \quad (3.2.3)$$

Si impone inoltre che tale funzione sia continua e derivabile. La funzione v può essere scelta sulla base di considerazioni geometriche. In particolare la v non deve diventare mai troppo piccola per non intrappolare la particella in una traiettoria chiusa attorno ad un punto di minimo.

Supponendo che la trasformazione parametrica da τ a t sia monotona crescente, dalla (3.2.3) si ottiene:

$$\frac{d}{d\tau} = \left(\frac{dt}{d\tau} \right) \frac{d}{dt} = \frac{\|d\mathbf{x} / d\tau\|}{\|d\mathbf{x} / dt\|} \frac{d}{dt} = \frac{1}{v(f(\mathbf{x}) - C)} \sqrt{\left\| \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \right\|_0^2 - 2 \int_{f(\mathbf{x}_0)}^{f(\mathbf{x})} \tilde{s}(\tilde{f}) d\tilde{f}} \frac{d}{dt}$$

Il sistema (3.2.2) diviene quindi:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2}(t) = - \left([I] s v^2 - \left(\frac{v'}{v} + s \right) \left[\frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{d\mathbf{x}^t}{dt} \right] \right) \nabla f(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0 \\ \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t=0) = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \Big|_0 \end{cases} \quad (3.2.4)$$

Si noti che l'accelerazione non è più necessariamente diretta nel verso decrescente di f in quanto l'operatore matriciale $[(d\mathbf{x}/dt)(d\mathbf{x}/dt)^t]$ non è proporzionale alla matrice identità $[I]$.

Nella (3.2.4) si è definita, per semplicità, la sensitività $s(f)$ definita come:

$$s(f) = \frac{\tilde{s}(f)}{\left\{ \left\| \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \right\|_0^2 - 2 \int_{f_0}^f \tilde{s}(\tilde{f}) d\tilde{f} \right\}} \quad (3.2.5)$$

Il sistema (3.2.4) ammette un integrale intermedio della forma:

$$\frac{\frac{d\mathbf{x}}{dt} \exp\left(-\int_{f_0}^{f(\mathbf{x}(t))} s(\tilde{f}) d\tilde{f}\right)}{v(f(\mathbf{x}(t)) - C)} = \frac{\frac{d\mathbf{x}}{dt}\bigg|_0}{v(f_0 - C)} +$$

$$- \int_0^t \nabla f(\mathbf{x}(\theta)) s(f(\mathbf{x}(\theta))) v(f(\mathbf{x}(\theta)) - C) \exp\left(-\int_{f_0}^{f(\mathbf{x}(\theta))} s(\tilde{f}) d\tilde{f}\right) d\theta \quad (3.2.6)$$

Questa relazione mostra che la direzione corrente della velocità dipende dalla somma vettoriale della direzione iniziale e della media pesata del gradiente negativo. Al fine di ottenere una traiettoria poco sensibile al suo tratto iniziale il gradiente deve dunque essere penalizzato nei punti corrispondenti a quote più elevate della funzione obiettivo. Ciò può essere fatto tramite una opportuna definizione delle funzioni sensitività s e velocità v .

Al fine di scegliere opportunamente la funzione sensitività $s(f)$, si analizza la curvatura della traiettoria. La curvatura fornisce una misura della variazione del versore della velocità e quindi anche della capacità di risposta del sistema al variare di f . Essa risulta:

$$\kappa = \left\| \frac{d}{dt} \left(\frac{\frac{d\mathbf{x}}{dt}}{\left\| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right\|} \right) \right\| = s(f) \left[\left\| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right\|^2 \|\nabla f\|^2 - \left\| \frac{d\mathbf{x}}{dt}^t \nabla f \right\|^2 \right]^{1/2} \leq s v \|\nabla f\| \quad (3.2.7)$$

La capacità di risposta del sistema alle variazioni di f cresce al crescere della curvatura. Infatti, ad una curvatura identicamente nulla corrisponde una traiettoria rettilinea e quindi una completa insensibilità del sistema alle variazioni di f . Al diminuire della funzione obiettivo il sistema (3.2.4) deve diventare più sensibile alle variazioni di f per potere determinare i punti di minimo con precisione. Quindi la curvatura deve potere crescere al calare di f . La (3.2.7) mostra che la curvatura è limitata dal prodotto $s(f) v(f - C) \|\nabla f\|$. Poiché v è definita soltanto per $f(\mathbf{x}) > C$, la sensitività $s(f)$ deve crescere per $f(\mathbf{x})$ tendente a C . Si pone quindi:

$$s(f) = \frac{e}{f - C} \quad (3.2.8)$$

dove la costante positiva e è detta parametro di sensitività.

La traiettoria di ricerca così ottenuta ha due proprietà fondamentali:

- i) non può convergere a minimi con valore maggiore di C ;
- ii) se $f(\mathbf{x}) \gg C$ è poco sensibile ai minimi locali.

Per la funzione v , si utilizza una forma lineare:

$$v(f(\mathbf{x}) - C) = \left\| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right\| = f(\mathbf{x}) - C \quad (3.2.9)$$

In questo modo la velocità è molto elevata quando la "particella" è ben lontano dal Target Level C e si avvicina a zero nei suoi dintorni. Quindi, se la "particella" entra nel bacino di attrazione di un punto di minimo locale con $f(\mathbf{x}) \gg C$, la velocità nel minimo è molto elevata. Di conseguenza la "particella" esce dai bacini di attrazione dei punti di minimo locale con $f(\mathbf{x}) \gg C$.

Il sistema differenziale (3.2.4), con le definizioni (3.2.8) e (3.2.9), diventa:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = - \left([I] e^{-\frac{\left[\frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{d\mathbf{x}^t}{dt} \right]}{\left\| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right\|^2}} (1 + e) \right) \nabla f(\mathbf{x}) \cdot (f(\mathbf{x}) - C) \\ \mathbf{x}(t = 0) = \mathbf{x}_0 \\ \left. \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|_{(t=0)} = \left. \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|_0 \end{cases} \quad (3.2.10)$$

Si noti che, con la definizione di velocità (3.2.9), anche l'accelerazione ($d^2\mathbf{x}/dt^2$) si annulla se f tende a C . Con l'ipotesi aggiuntiva che l'Hessiano di f esista e sia continuo è possibile dimostrare che per ogni coppia di valori iniziali $(\mathbf{x}_0, (d\mathbf{x}/dt)_0)$ con $f(\mathbf{x}_0) \neq C$ e $|(d\mathbf{x}/dt)_0| = f(\mathbf{x}_0) - C$ esiste una sola soluzione $\mathbf{x}(t)$ del problema a valori iniziali (3.2.10). Dalla (3.2.6) si ottiene, per ogni punto della traiettoria, la relazione:

$$\frac{\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t)}{(f(\mathbf{x}(t)) - C)^{1+e}} = \frac{\left. \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|_0}{(f_0 - C)^{1+e}} - e \int_0^t \frac{\nabla f(\mathbf{x}(\theta))}{(f(\mathbf{x}(\theta)) - C)^e} d\theta \quad (3.2.11)$$

La (3.2.11) mostra che la direzione della velocità è tanto più sensibile ai valori del gradiente quanto più il parametro di sensitività è elevato. Inoltre, la media del gradiente è pesata su un termine che penalizza i punti corrispondenti a quote più elevate della funzione obbiettivo.

Qualora non sia possibile raggiungere il minimo globale, il sistema (3.2.10) determina un minimo non superiore a C . La risoluzione del problema può fallire se C è inferiore al minimo globale di f oppure se la “particella” viene intrappolata in un’orbita attorno ad un punto di minimo locale. Questo può accadere se il parametro di sensitività è troppo elevato [1, 10].

L’algoritmo del metodo ST, mostrato in Fig. 3.2.1, si basa sulla discretizzazione del sistema (3.2.10), con il modulo della velocità dato dalla (3.2.4). Avendo assegnato il punto iniziale $\mathbf{x}_0$ e la direzione di ricerca iniziale $\mathbf{d}_0$ si adotta la seguente iterazione:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + p_k (f(\mathbf{x}_k) - C) \mathbf{d}_k \quad (3.2.13)$$

$$\mathbf{d}_{k+1} = \begin{cases} \frac{\mathbf{d}_k - [e\mathbf{I} - (1+e)[\mathbf{d}_k \mathbf{d}_k^t]] \nabla f(\mathbf{x}_{k+1})}{\|\mathbf{d}_k - [e\mathbf{I} - (1+e)[\mathbf{d}_k \mathbf{d}_k^t]] \nabla f(\mathbf{x}_{k+1})\|} & , \text{ se } \mathbf{d}_k^t \nabla f(\mathbf{x}_{k+1}) > -\frac{1}{(1+e)} \\ \frac{-\nabla f(\mathbf{x}_{k+1})}{\|-\nabla f(\mathbf{x}_{k+1})\|} & , \text{ se } \mathbf{d}_k^t \nabla f(\mathbf{x}_{k+1}) < -\frac{1}{(1+e)} \end{cases} \quad (3.2.14)$$

Il passo p_k e la direzione di ricerca $\mathbf{d}_k$ vengono ricalcolati ad ogni iterazione. Il passo p_k è mantenuto costante fino a quando il valore di $(f(\mathbf{x}_0) - C)$ non diventa sufficientemente piccolo. Quindi si utilizza un passo oscillante per trovare i minimi locali presenti in quella zona. Poiché si è scelto di imporre al sistema di non convergere ad un minimo solo, il criterio di stop dell’algoritmo è ottenuto limitando ad N il numero di iterazioni.

La traiettoria non è vincolata alle sole direzioni per cui f decresce. La (3.2.14) trasforma nella direzione del gradiente negativo tutte le direzioni comprese in un cono attorno al gradiente negativo. Si è limitato il numero di punti di minimo locale

ricavabili per ogni traiettoria, selezionando tra tutti quelli trovati i minimi a valore minore.

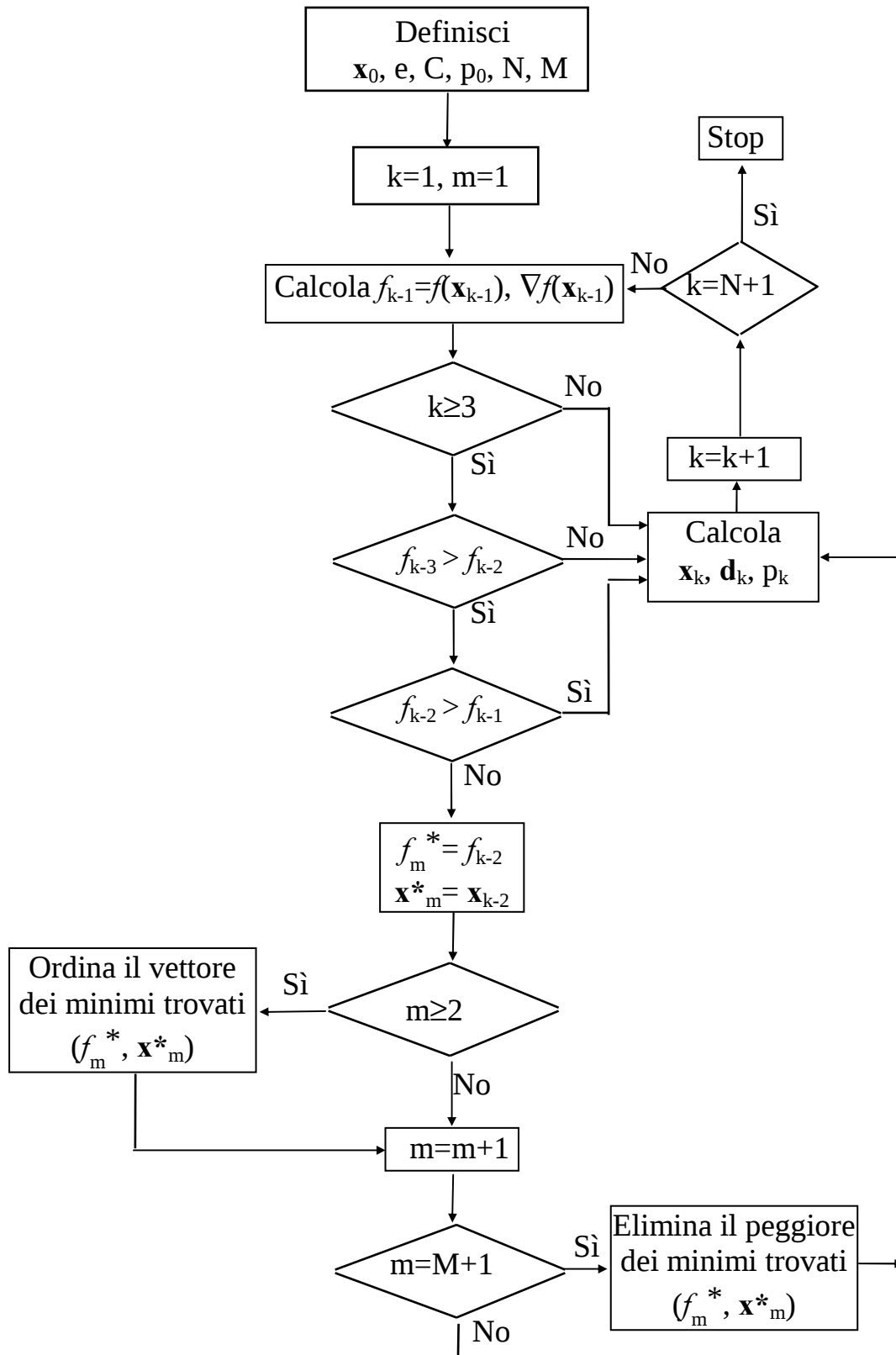


Fig. 3.2.1 - Schema del Metodo DST

Qualora C sia poco superiore al minimo globale f^* ed il parametro di sensitività sia sufficientemente basso ogni traiettoria conduce sempre al minimo globale cioè il bacino di attrazione del punto di minimo globale in tal caso si estende a tutto il dominio. La procedura di ottimizzazione ha quindi l'effetto di ampliare il bacino di attrazione del punto di minimo globale e, più in generale, di ampliare il bacino di attrazione di tutti i punti di minimo a minor valore di f [8]. Più punti iniziali vengono selezionati casualmente nel dominio di interesse ed ognuno di essi genera una traiettoria che conduce a più minimi. Interrotto il processo di selezione, secondo un criterio prefissato, si adotta come minimo globale il minore dei minimi trovati.

Per definire il livello di affidabilità da dare al minimo globale trovato si può utilizzare un approccio probabilistico [8]. Sia B_j il bacino di attrazione del minimo locale f_j^* e sia α_j la probabilità che un punto scelto a caso in R^n cada in B_j . Analogamente si indichi con B^* il bacino di attrazione di f^* e con α^* la probabilità che un punto scelto a caso in R^n cada in B^* . Sebbene non si conoscano né il numero dei punti di minimo, né l'ampiezza dei loro bacini di attrazione, né le corrispondenti probabilità, è possibile supporre che il bacino di attrazione del punto di minimo globale sia quello di dimensioni maggiori. Si ha quindi che $\alpha^* = \max_j \alpha_j$. In tal modo, se n è il numero di punti iniziali ed m è il numero di volte che è stato trovato lo stesso minimo (il minore dei minimi trovati lungo la traiettoria), allora la probabilità che questo coincida col minimo globale soddisfa la seguente relazione:

$$\Pr\{\min_j f_j^* = f^*\} \geq 1 - \frac{(n+1)!(2n-m)!}{(n-m)!(2n+1)!} \quad (3.2.15)$$

Questo risultato è usato per definire il livello di affidabilità che si attribuisce al minimo trovato come possibile minimo globale.

3.3 Il Metodo Evolution Strategies (ES)

Nei problemi di sintesi elettromagnetica in generale compaiono funzioni obiettivo non lineari con molte variabili. Inoltre si è in presenza di vincoli di uguaglianza e di disuguaglianza anch'essi non lineari. Facendo riferimento al problema definito dalla (3.1.4), sia f la funzione obiettivo penalizzata. Il numero dei punti di minimo è spesso elevato e molti di essi sono di scarso interesse in quanto corrispondono a grandi valori della funzione obiettivo. Nei problemi di sintesi elettromagnetica le condizioni necessarie per l'applicazione di un metodo di ottimizzazione deterministico, che richiede la determinazione di gradiente ed hessiano, possono non essere soddisfatte. Inoltre l'inaccuratezza nel calcolo del gradiente e dell'Hessiano della funzione obiettivo, a causa dei limiti numerici, può condurre a soluzioni prive di significato. Per questi motivi nell'ottimizzazione del problema magnetico è stato utilizzato anche un ottimizzatore statistico che non ha bisogno di derivate. E' stato scelto l'ottimizzatore statistico GES (Global Evolution Strategy) del tipo (1+1) [11].

L'idea fondamentale del metodo GES è quella di formulare una funzione densità di probabilità $\rho = \rho(\mathbf{x}, \mathbf{m}, \mathbf{s})$ normalizzata, cioè tale che:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho(\mathbf{x}, \mathbf{m}, \mathbf{s}) d\mathbf{x} = 1$$

dove i vettori $\mathbf{m}$ e $\mathbf{s}$ sono, rispettivamente, il punto di minimo stimato e la relativa varianza. Si è scelto di utilizzare come funzione densità di probabilità la funzione Gaussiana definita da:

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{m}, \mathbf{s}) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi s_i}} \exp\left[-\frac{(x_i - m_i)^2}{2s_i}\right]$$

dove x_i , m_i ed s_i sono le componenti dei vettori $\mathbf{x}$, $\mathbf{m}$, ed $\mathbf{s}$.

Sono inizialmente assegnati gli insiemi (a cardinalità μ) $M^{(0)}$ ed $S^{(0)}$ ognuno dei quali composto da μ vettori:

$$M^{(0)} = \{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \dots, \mathbf{m}_\mu\}$$

$$S^{(0)} = \{s_1, s_2, \dots, s_\mu\}$$

L'algoritmo GES, con μ genitori e λ figli, si basa sulla ripetizione delle tre fasi di generazione, mutazione e rilassamento.

- Nella fase di generazione dell'iterazione k si sceglie casualmente un vettore "genitore" $\mathbf{m}_j$ e, utilizzando la densità di probabilità $\rho = \rho(\mathbf{x}, \mathbf{m}_j, \mathbf{s}_j)$, si genera l'insieme dei λ "figli" $X^{(k)} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_\lambda\}$.
- Nella fase di mutazione viene formato il nuovo insieme dei "genitori" $M^{(k+1)}$ scegliendo i μ elementi dell'insieme $M^{(k)} \cup X^{(k)}$ a minor valore di f .
- Nella fase di rilassamento si calcola la probabilità che almeno uno tra i λ "figli" dell'iterazione $k+1$, ancora da determinare, abbia un valore di f minore del minimo valore di f tra i μ "genitori" dell'iterazione k . Tale probabilità è indicata con $\Pr\{f(\mathbf{x} \in X^{(k+1)}) < \min_{\mathbf{m} \in M^{(k)}} f(\mathbf{m})\}$. Si considerano riuscite le iterazioni in cui almeno uno dei figli ha un valore di f minore del minimo valore di f tra i genitori. Poiché all'iterazione k è noto quante delle precedenti $k-1$ iterazioni sono riuscite, la probabilità $\Pr\{f(\mathbf{x} \in X^{(k+1)}) < \min_{\mathbf{m} \in M^{(k)}} f(\mathbf{m})\}$ può essere stimata calcolando il rapporto tra il numero di iterazioni riuscite ed il numero di iterazioni totali. Al variare di tale probabilità le dimensioni della zona di ricerca vengono aumentate o diminuite. A questo scopo si agisce sulle varianze, moltiplicandole o dividendole per un fattore q minore di 1. In conclusione, fissato p , nella fase di rilassamento si ha che:

se $\Pr\{f(\mathbf{x} \in X^{(k+1)}) < \min_{\mathbf{m} \in M^{(k)}} f(\mathbf{m})\} > p$.

allora $S^{(k+1)} = \{(s_1 / q), (s_2 / q), \dots, (s_\mu / q)\}$

altrimenti $S^{(k+1)} = \{(s_1 \cdot q), (s_2 \cdot q), \dots, (s_\mu \cdot q)\}$

La scelta dei parametri p e q deriva dall'esperienza e va fatta in base al tipo di funzione da minimizzare [11, 12]. Il criterio di convergenza si basa su di un valore

minimo prefissato della varianza. La convergenza si ritiene raggiunta quando tutte le varianze risultano minori di tale valore.

Questo metodo impiega tempi di calcolo confrontabili con quelli di un metodo di ottimizzazione locale basato sul gradiente per il raggiungimento di un minimo locale. Per ottenere una buona stima del minimo globale è necessario ripetere più volte la procedura di ottimizzazione.

L'algoritmo risultante con $\mu=1$ e $\lambda=1$, utilizzato per l'ottimizzazione di alcuni problemi magnetici, è noto come (1+1) Evolution Strategy [11, 13]. In Fig. 3.3.1 si riporta un diagramma a blocchi che mostra lo schema di tale ottimizzatore. E' importante notare che, scegliendo opportunamente le varianze iniziali, l'algoritmo si comporta come un ottimizzatore locale o globale. Inoltre, la scelta delle varianze iniziali consente di rendere preciso a piacere ogni punto di minimo.

L'ottimizzatore statistico (1+1) Evolution Strategies mostra una debole dipendenza dal punto iniziale e non sempre converge al minimo globale [12].

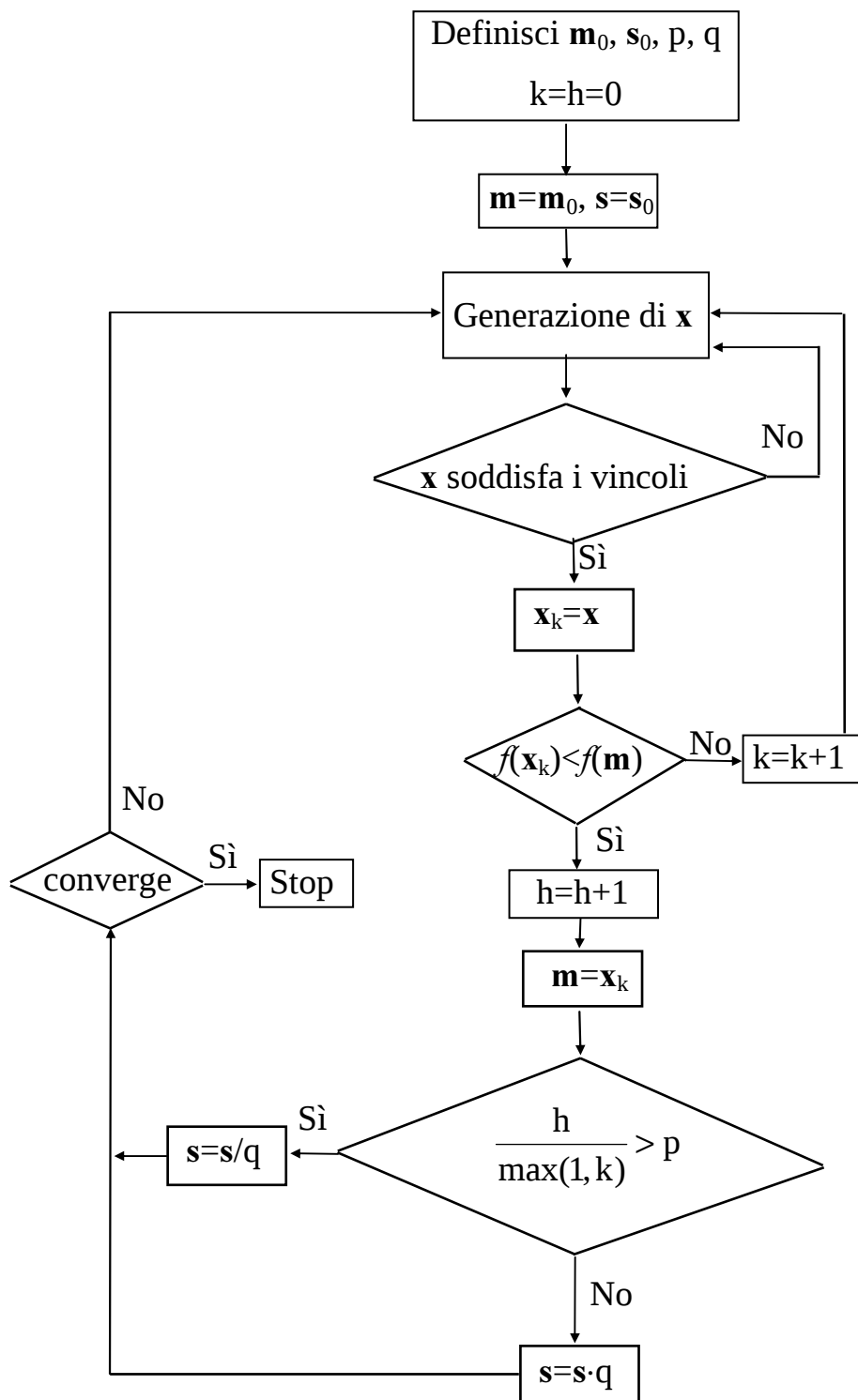


Fig. 3.3.1 - Schema del Metodo (1+1) ES.

Per definire il livello di affidabilità del minimo globale trovato si può utilizzare un approccio probabilistico. Sia α^* la probabilità, per un processo di ottimizzazione, che

l'algoritmo converga al minimo globale. La probabilità di ottenere il minimo globale in più processi di ottimizzazione, indicata come $\Pr\{\min(f) = f^*\}$, cresce al crescere del numero di ottimizzazioni effettuate. Detto n il numero di ottimizzazioni effettuate, la probabilità di avere ottenuto il minimo globale è data da:

$$\Pr\{\min(f) = f^*\} = 1 - (1 - \alpha^*)^n \quad (3.3.1)$$

Detto m il numero di volte che si è trovato lo stesso minimo (il minore dei minimi trovati). Qualora α^* sia stimato dal rapporto (m/n) la probabilità che il minore dei minimi trovati coincida col minimo globale è data da:

$$\Pr\{\min_j f_j^* = f^*\} \approx 1 - \left(1 - \frac{m}{n}\right)^n \quad (3.3.2)$$

Questo risultato è usato per definire il livello di affidabilità che si attribuisce al minimo trovato come possibile minimo globale.

3.4 Il metodo delle Filled Functions (FF)

Il metodo proposto è stato formulato in modo tale per cui la soluzione del problema sia indipendente dal punto iniziale [14]. Facendo riferimento al problema definito dalla (3.1.4), sia f la funzione obiettivo penalizzata. Si determina, con un qualunque metodo di ottimizzazione locale, un punto di minimo $\mathbf{x}_1^*$ della funzione $f(\mathbf{x})$. Dato il punto di minimo $\mathbf{x}_1^*$ di $f(\mathbf{x})$, un altro punto di minimo $\mathbf{x}_2^*$ di $f(\mathbf{x})$ si dice punto di minimo inferiore rispetto ad $\mathbf{x}_1^*$ se $f(\mathbf{x}_2^*) < f(\mathbf{x}_1^*)$. Un punto di minimo non inferiore è detto superiore.

La Filled Function $P(\mathbf{x}, r, \rho)$ si costruisce in modo tale da avere un massimo in $\mathbf{x}_1^*$ e da non possedere punti di minimo o punti di sella nei bacini di attrazione dei punti di minimo di f superiori rispetto ad $\mathbf{x}_1^*$ (vedi Fig. 3.4.1 che illustra un caso monodimensionale). Inoltre, la Filled Function $P(\mathbf{x}, r, \rho)$ è costruita in modo da possedere almeno un punto di minimo od un punto di sella in $\mathbf{x}^*$ all'interno del bacino di attrazione di un punto di minimo inferiore di $f(\mathbf{x})$.

Se si determina, con un qualunque metodo di ottimizzazione locale, un punto di minimo $\mathbf{x}^*$ della $P(\mathbf{x}, r, \rho)$ si cade all'interno del bacino di attrazione di un punto di minimo inferiore rispetto a $\mathbf{x}_1^*$. Si può quindi utilizzare $\mathbf{x}^*$ come punto iniziale per minimizzare localmente $f(\mathbf{x})$ e trovare un punto di minimo inferiore $\mathbf{x}_2^*$ per f .

Ripetendo il procedimento iterativamente si può determinare una successione di punti di minimo inferiori che conducono al punto di minimo globale della funzione obiettivo. Il processo di minimizzazione si ferma quando non vengono più trovati punti di minimo inferiori.

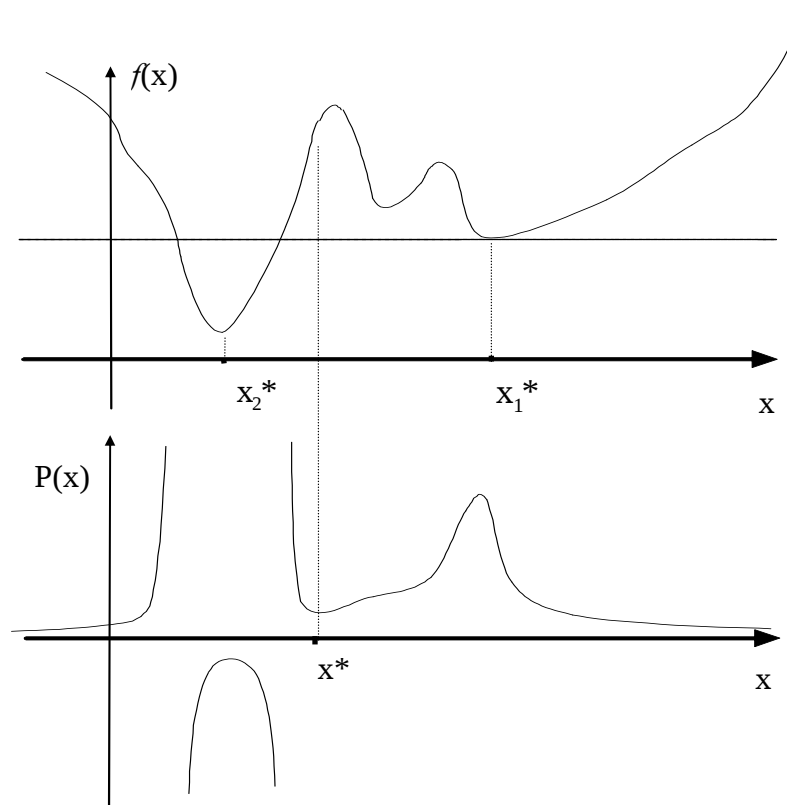


Fig. 3.4.1 - Funzione obiettivo e Filled Function monodimensionali.

Una possibile Filled Function è definita da [15]:

$$P(\mathbf{x}, r, \rho) = \left[\frac{1}{r + f(\mathbf{x})} \right] \exp \left(- \frac{\| \mathbf{x} - \mathbf{x}_1^* \|}{\rho^2} \right) \quad (3.4.1)$$

Il gradiente di P è dato dunque da:

$$\nabla P(\mathbf{x}, r, \rho) = -\frac{1}{\rho^2 \cdot [r + f(\mathbf{x})]} \cdot \left\{ \frac{\rho^2 \cdot \nabla f(\mathbf{x})}{r + f(\mathbf{x})} + \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_1^*}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1^*\|} \right\} \cdot \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1^*\|}{\rho^2}\right)$$

E' evidente che $P(\mathbf{x}, r, \rho)$ ha un massimo in $\mathbf{x}_1^*$ dal momento che

$$P(\mathbf{x}_1^*, r, \rho) = \frac{1}{r + f(\mathbf{x}_1^*)} > \left[\frac{1}{r + f(\mathbf{x})} \right] \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1^*\|}{\rho^2}\right) = P(\mathbf{x}, r, \rho)$$

$\forall \mathbf{x} \in B_1^*, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_1^*$, dove B_1^* è il bacino di attrazione di $\mathbf{x}_1^*$. E' possibile inoltre dimostrare [14] che $P(\mathbf{x}, r, \rho)$ è una Filled Function se soddisfa alla seguente condizione:

$$\rho^2 \leq \frac{1}{L} \quad (3.4.2)$$

dove $L = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \|\nabla f\|$ è una costante reale finita. Affinché $P(\mathbf{x}, r, \rho)$ abbia un punto stazionario nel bacino di attrazione di un punto di minimo inferiore di $f(\mathbf{x})$, si pone $r = -f(\mathbf{x}_1^*)$. In questo modo P risulta negativa nel bacino di attrazione di un punto di minimo inferiore di f rispetto a $\mathbf{x}_1^*$ e presenta asintoti verticali per $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_1^*)$. Si dimostra che la $P(\mathbf{x}, -f(\mathbf{x}_1^*), \rho)$ è una Filled Function qualora:

$$\rho^2 \leq \frac{h}{L} \quad (3.4.3)$$

ove $h = \min_{j=2, \dots, n} [f(\mathbf{x}_j^*) - f(\mathbf{x}_1^*)]$, con $\mathbf{x}_2^*, \dots, \mathbf{x}_n^*$ punti di minimo superiori di $f(\mathbf{x})$ rispetto a $\mathbf{x}_1^*$. Il parametro ρ^2 non è noto a priori e dipende dal tipo di funzione obiettivo da minimizzare. Il valore di ρ^2 è scelto arbitrariamente all'inizio del calcolo e viene progressivamente ridotto fino a quando si ottiene un punto di minimo inferiore della funzione obiettivo $f(\mathbf{x})$.

Poichè $P(\mathbf{x}, -f(\mathbf{x}_1^*), \rho)$ non è definita in $\mathbf{x}_1^*$ si può utilizzare un punto molto prossimo a $\mathbf{x}_1^*$ come punto iniziale per la sua minimizzazione.

Lo schema di ottimizzazione mostrato in Fig. 3.4.3, prevede la minimizzazione successiva della funzione obiettivo e della Filled Function al fine di trovare una successione di punti di minimo inferiori per f che conduca al punto di minimo globale. Nel metodo delle Filled Functions si fa ricorso necessariamente ad un ottimizzatore locale che minimizzi sia la funzione obiettivo che la Filled Function.

Per la minimizzazione delle funzioni di test si è utilizzato come ottimizzatore locale il metodo deterministico SQP (Sequential Quadratic Programming) che utilizza il gradiente di f e di P [16]. Per le applicazioni a problemi elettromagnetici si è utilizzato un metodo di Strategia Evolutiva (1+1) come ottimizzatore locale, avendo scelto opportunamente piccole le varianze iniziali.

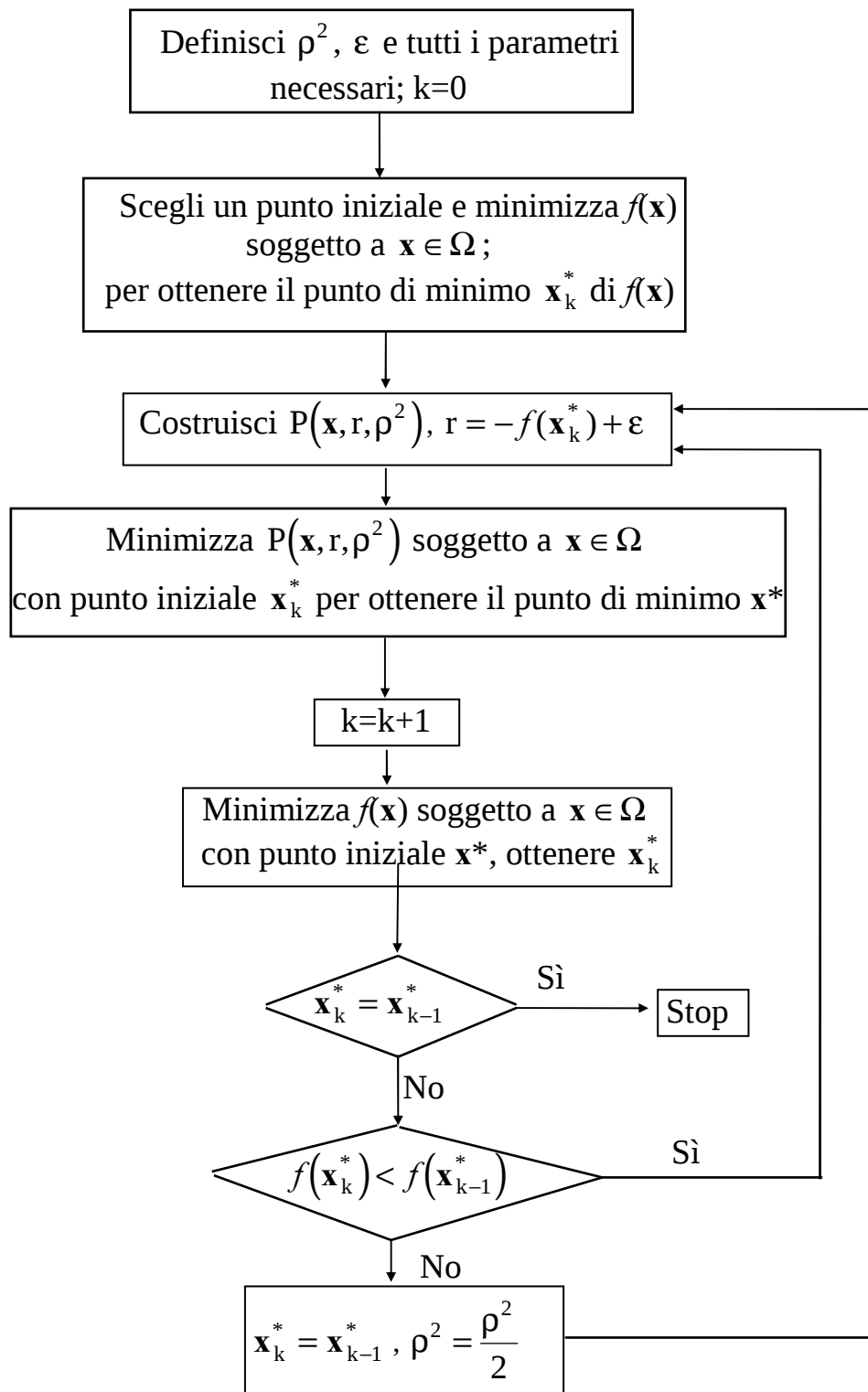


Fig. 3.4.3 - Schema del Metodo delle Filled Function

4. PROBLEMI TEST

4.1 Introduzione

Gli algoritmi di ottimizzazione globale descritti nel capitolo precedente sono stati applicati a diversi problemi test. Si tratta di problemi di minimo caratterizzati da funzioni continue e differenziabili di cui si conoscono tutti i minimi compreso il minimo globale. In particolare si sono scelte funzioni non lineari vincolate e non vincolate con diversi minimi locali, simili alle funzioni che si incontrano nei problemi di sintesi elettromagnetica. In questo capitolo vengono considerati solo due problemi test tipici: il primo presenta oltre 500 punti di minimo, il secondo è un problema malcondizionato. Per rendere visibili questi problemi le funzioni test sono bidimensionali. A questo scopo sono riportati il grafico tridimensionale delle funzioni ed il grafico bidimensionale delle curve di livello.

Per ogni metodo è riportata una tabella di risultati. Le tabelle dei risultati contengono i punti iniziali, i minimi trovati, il numero N_f di chiamate della funzione obiettivo, il numero N_g di chiamate del gradiente (dove necessario), il numero N_i di iterazioni del programma principale e il tempo di calcolo in secondi di CPU di un calcolatore VAX 4000-200.

Il confronto tra i vari algoritmi di ottimizzazione globale è stato effettuato, dove possibile, sulla base del numero di chiamate della funzione obiettivo. Nel caso del metodo ST, che utilizza il gradiente, il confronto è stato effettuato sulla base del tempo di calcolo necessario per raggiungere il minimo globale.

Ogni problema test è stato formulato come segue:

$$\begin{array}{ll} \min & f(\mathbf{x}) \\ \text{soggetto a} & \begin{cases} h(\mathbf{x}) = 0 \\ g(\mathbf{x}) \geq 0 \end{cases} \end{array} \quad (4.1.1)$$

dove $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$ ed $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sono funzioni note. Le particolarità di ogni problema test sono discusse singolarmente.

I minimi sono stati classificati in ordine crescente. Sono stati indicati con G il punto di minimo globale e con M_i gli altri punti di minimo. Si è posto $i > j$ se $f(M_i) > f(M_j)$. Sono stati considerati identici i minimi a pari valore di f e in tal caso ne è stata indicata la molteplicità.

4.2 Test 1 - Funzione di Griewank

La funzione di Griewank è data da:

$$f(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{200} + 1 - \cos(x) \cdot \cos\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)$$

Essa presenta più di 500 minimi locali [1]. La funzione è simmetrica rispetto agli assi ed è costituita da un paraboloide a cui è sovrainpressa una griglia rettangolare di massimi e minimi (Fig. 4.2.1, Fig. 4.2.2). Il punto di minimo globale si trova nell'origine dove la funzione si annulla. Nella Tab. 4.2.1 sono riportati i minimi a minor valore di f .

Tab. 4.2.1 - Elenco di alcuni minimi della funzione di Griewank

Minimo $\equiv (x,y)$	$f(x,y)$	Molteplicità
$G \equiv (0,0)$	0	1
$M_1 \equiv (-3.11,4.35)$	0.145	4
$M_2 \equiv (-6.22,0)$	0.195	2
$M_3 \equiv (0,8.71)$	0.387	2
$M_4 \equiv (-9.33,4.35)$	0.536	4
$M_5 \equiv (-6.22,-8.71)$	0.582	4
$M_6 \equiv (12.44,0)$	0.782	2
$M_7 \equiv (-3.12,-13.06)$	0.92	4
$M_8 \equiv (-12.44,-8.71)$	1.168	4
$M_9 \equiv (-9.33,13.06)$	1.31	4
$M_{10} \equiv (-15.55,4.35)$	1.318	4
$M_{11} \equiv (-6.22,17.42)$	1.743	4
$M_{12} \equiv (-18.66,0)$	1.759	2
$M_{13} \equiv (-18.66,8.71)$	2.145	4

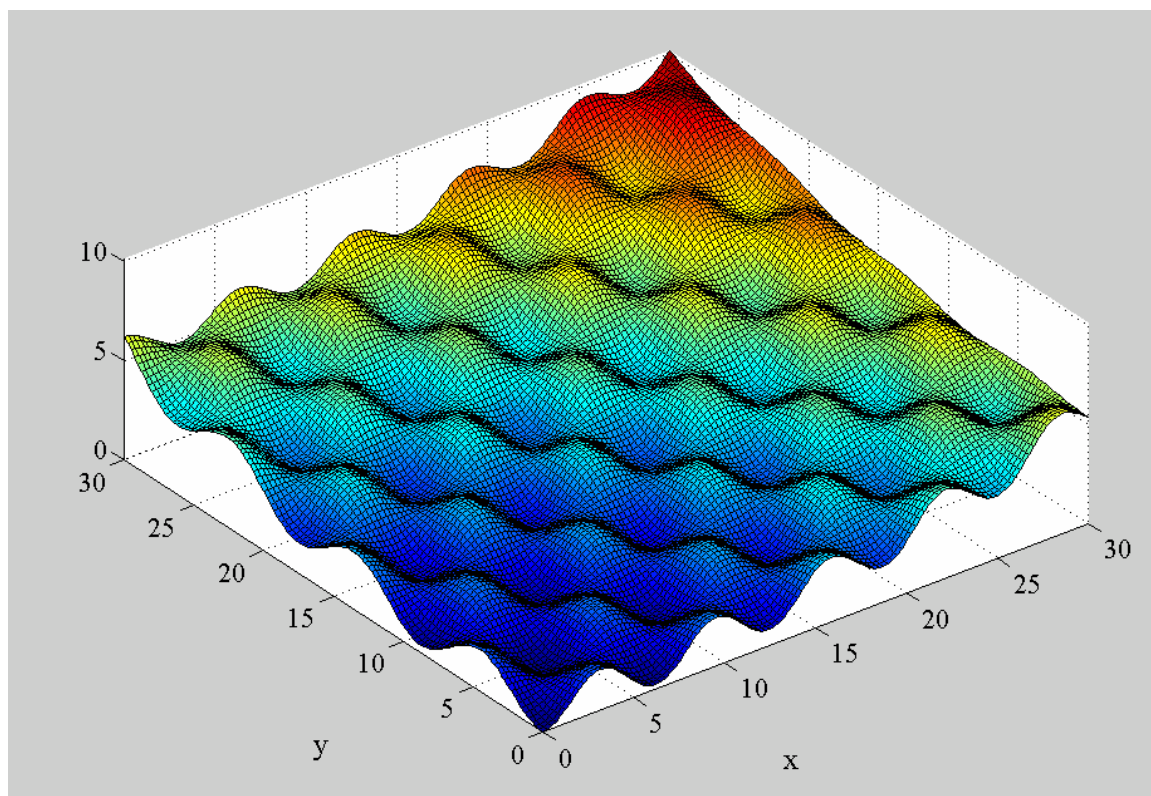


Fig. 4.2.1 - Grafico tridimensionale della funzione di Griewank.

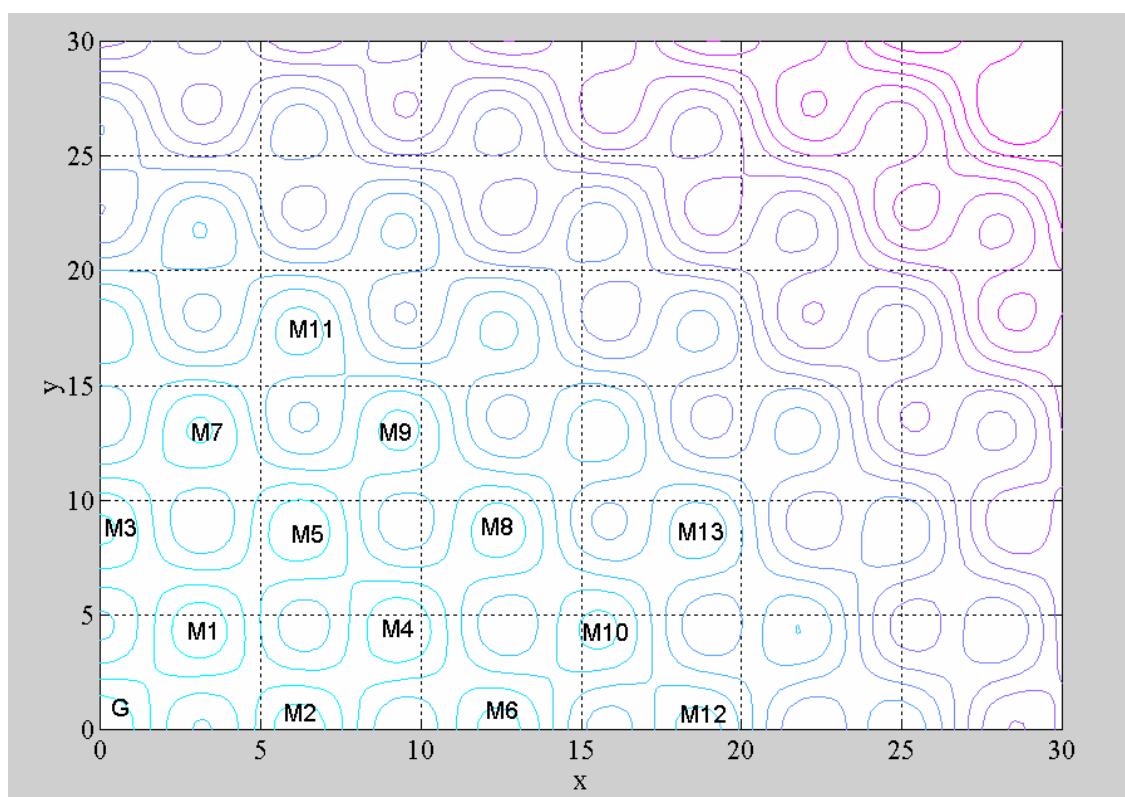


Fig. 4.2.2 - Curve di livello della funzione di Griewank con indicazione dei minimi.

Tab. 4.2.2 - Risultati ottenuti dalla minimizzazione della funzione di Griewank con il metodo ST al variare dei parametri C ed e .

Punto Iniziale	(1,1)		(2,5)		(0,-3)		(7,0)		(-7,-8)		(-10,15)		(30,-35)	
$C=-1$ $e=1$	G	1	G	162	G	1	G	108	M_1	163	G	117	G	102
$C=-1$ $e=0.99$	G	1	G	167	G	1	G	108	G	251	G	117	G	102
$C=0$ $e=1$	G	1	M_1	6	G	1	M_2	3	M_1	121	M_2	117	M_1	112
$C=0$ $e=.99$	G	1	M_1	6	G	1	M_2	3	M_1	121	M_2	117	M_1	112

In Tab. 4.2.2 sono riportati i risultati ottenuti con il metodo ST al variare dei parametri C ed e . Accanto ad ogni minimo è riportato il numero di iterazioni con cui è stato trovato. I minimi ottenuti non sono esatti. Tuttavia, essi sono sempre piuttosto vicini ai minimi reali (± 0.1 su ogni variabile). Si è scelto un passo iniziale $p_0=1.1$. Il numero massimo di iterazioni (criterio di stop) è 500. Il tempo di calcolo per ogni traiettoria è circa di 10 s.

Il minimo trovato con lo stesso punto iniziale, dipende dal valore del target level C . In alcune ottimizzazioni con $C=0$ non è stato determinato il minimo globale. Infatti, benché la “particella” arrivi nella zona del minimo globale G , la sua “velocità” risulta troppo bassa per non restare intrappolata in un minimo M_1 od M_2 . La dipendenza dal parametro di sensitività non è generalmente significativa. Tuttavia piccole variazioni del parametro di sensitività possono portare a minimi diversi. Le traiettorie di ricerca possono mostrare un comportamento caotico rispetto a questo parametro [10].

Ogni traiettoria mostra un comportamento simile a quello di Fig. 4.2.3 in cui è riportato il primo tratto della traiettoria ST con punto iniziale in (30,-35), $C=-1$ ed $e=1$. La traiettoria, pur essendo la “particella” attratta dai vari minimi di cui attraversa il bacino di attrazione, tende a dirigersi verso il minimo globale nell’origine.

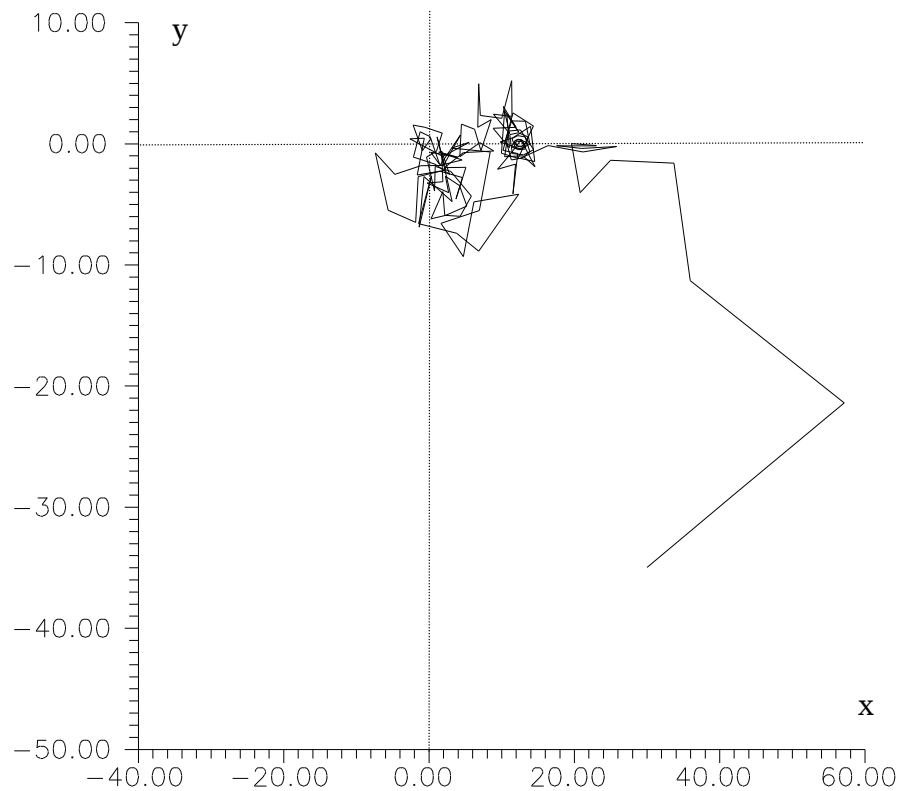


Fig. 4.2.3 - Tipico andamento di una traiettoria ST.

In Fig. 4.2.3 si è riportato solo il primo tratto della traiettoria ST, in quanto nel seguito la traiettoria segue un andamento oscillante. In particolare, una volta raggiunto il bacino di attrazione del minimo globale, la “particella” continua ad allontanarsi ed a riavvicinarsi ad esso. Il risultato è un andamento quasi-periodico, come mostrato nella Fig. 4.2.4.

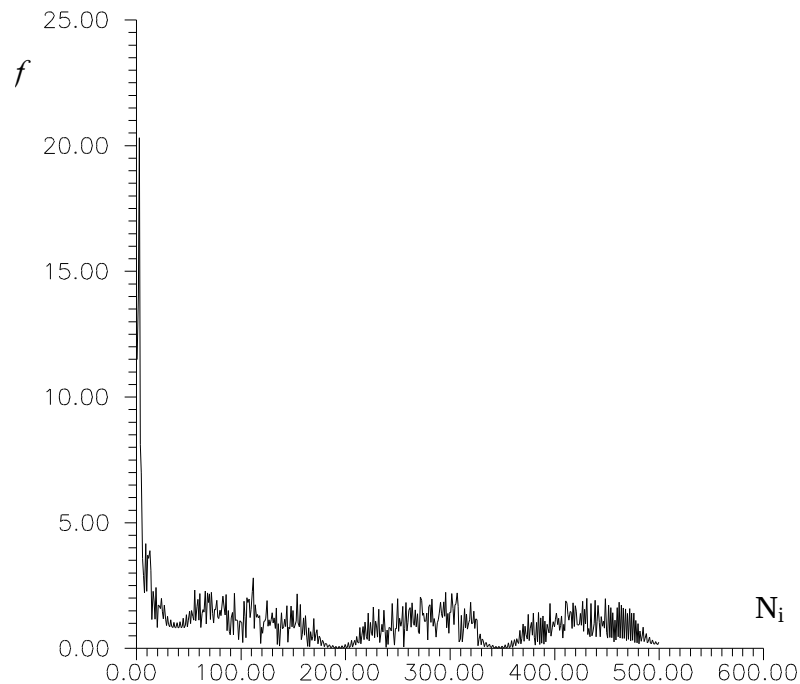


Fig. 4.2.4 - Andamento della funzione test calcolata nei punti di una traiettoria ST ordinati secondo l'indice di iterazione.

Sono stati effettuati più processi di minimizzazione con il metodo (1+1) ES, partendo dagli stessi punti iniziali e producendo ogni volta serie di numeri casuali. Ogni volta perciò si sono ottenuti risultati diversi. Per stimare i risultati ottenuti si sono considerati il caso medio, il caso migliore e il caso peggiore. I tre casi sono mostrati nelle tabelle 4.2.3, 4.2.4 e 4.2.5. E' stata utilizzata una varianza iniziale $s_0=10^2$ uguale per entrambe le variabili. In Fig. 4.2.8 è riportato, per ogni caso, l'andamento della minimizzazione con punto iniziale (30,-35). La probabilità di ottenere il caso migliore (e quindi il minimo globale) è circa 0.07. Questo significa che in media, partendo dallo stesso punto iniziale, per ottenere il minimo globale sono necessari almeno 12 processi di minimizzazione. Il numero complessivo di chiamate della funzione obiettivo diventa perciò 2000 con un tempo di calcolo di circa 24 s.

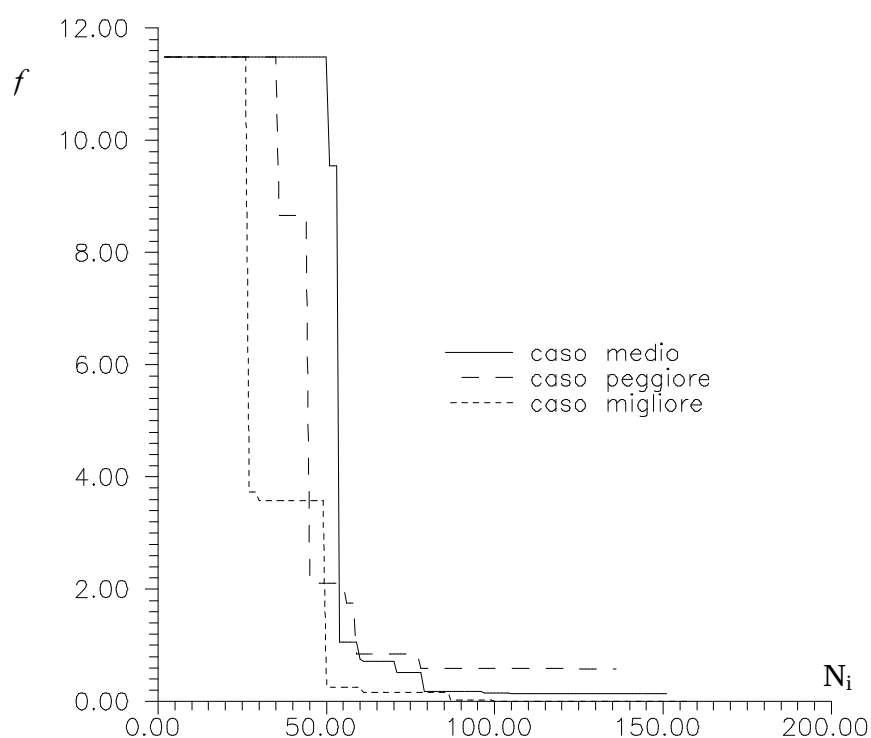


Fig. 4.2.5 - Andamento tipico del valore di f durante la minimizzazione con il metodo $(1+1)$ ES nei casi medio, migliore e peggiore.

Tab. 4.2.3 - Risultati ottenuti per la funzione di Griewank con il metodo ES nel CASO PEGGIORE

Punto Iniziale	(1,1)	(2,5)	(0,-3)	(7,0)	(-7,-8)	(-10,15)	(30,-35)
Minimo Ottenuto	M ₃	M ₃	M ₇	M ₂	M ₅	M ₄	M ₅
$N_f = N_i$	187	183	161	153	153	161	135
Tempo	2.51	2.41	2.14	2.04	2.02	2.27	1.74

Tab. 4.2.4 - Risultati ottenuti per la funzione di Griewank con il metodo ES nel CASO MEDIO

Punto Iniziale	(1,1)	(2,5)	(0,-3)	(7,0)	(-7,-8)	(-10,15)	(30,-35)
Minimo Ottenuto	M ₁	M ₁	M ₁	M ₁	M ₁	M ₁	M ₁
$N_f = N_i$	134	149	143	129	139	149	146
Tempo	1.80	1.94	1.90	1.80	1.81	2.14	2.03

Tab. 4.2.5 - Risultati ottenuti per la funzione di Griewank con il metodo ES nel CASO MIGLIORE

Punto Iniziale	(1,1)	(2,5)	(0,-3)	(7,0)	(-7,-8)	(-10,15)	(30,-35)
Minimo Ottenuto	G	G	G	G	G	G	G
$N_f = N_i$	137	145	139	169	153	145	157
Tempo	1.85	1.89	1.87	2.21	2.02	2.10	2.30

Per verificare l'indipendenza del metodo FF rispetto all'ottimizzatore locale, esso è stato accoppiato sia con il metodo SQP che con il metodo (1+1) ES. Il confronto è stato fatto partendo dagli stessi punti iniziali e operando con gli stessi parametri. Il parametro iniziale della filled function è $p^2=100$. Per l'ottimizzatore (1+1) ES, che non è riproducibile, la minimizzazione è stata fatta più volte partendo dallo stesso punto. Sono stati considerati il caso medio, il caso migliore e il caso peggiore. E' stata utilizzata una varianza iniziale $s_0=10^2$ uguale per entrambe le variabili. Nelle tabelle 4.2.6 - 4.2.9 le sequenze dei minimi ottenuti sono riportate dall'alto verso il basso. Confrontando la Tab. 4.2.6 con le tabelle 4.2.7 - 4.2.9 si nota come l'ottimizzatore (1+1) ES anche nel caso migliore impieghi tempi di calcolo molto più lunghi rispetto al metodo SQP. Inoltre, come possiamo osservare dalla Tab. 4.2.7 non sempre si ottiene il minimo globale. Il numero di iterazioni nei due casi è dello stesso ordine di grandezza. Questo indica che il metodo delle Filled Functions è piuttosto indipendente dal tipo di ottimizzatore locale utilizzato.

Tab. 4.2.6 - Risultati ottenuti per la funzione di Griewank con il metodo FF+SQP

Punto Iniziale	(1,1)	(2,5)	(0,-3)	(7,0)	(-7,-8)	(-10,15)	(30,-35)
Sequenza dei minimi ottenuti	M ₂ G	M ₇ M ₅ M ₄ M ₃ M ₂ M ₁ G	M ₂ G	M ₂ G	M ₈ M ₇ M ₅ M ₄ M ₃ M ₁ G	M ₁₁ M ₉ M ₈ M ₆ M ₄ M ₂ G	M ₁₃ M ₁₂ M ₁₁ M ₉ M ₈ M ₄ M ₂ G
N _f	1206	1718	1138	1363	3480	3407	2234
N _g	173	205	145	155	339	314	263
N _i	10	13	8	9	14	14	12
Tempo	19.3	25.4	17.2	19.8	44.2	45.1	32.6

Tab. 4.2.7 - Risultati per la funzione di Griewank con il metodo FF+ES nel CASO PEGGIORE

Punto iniziale	(1,1)	(2,5)	(7,0)	(-7,-8)	(-10,15)	(30,-35)
Sequenza dei minimi ottenuti	M ₂ M ₁ G	M ₃ M ₁ G	M ₁ G	M ₃ M ₂ M ₁	M ₆ M ₄ M ₂ M ₁	M ₁₁ M ₉ M ₈ M ₄ M ₂
N _f	15506	6317	15305	8769	4544	7119
N _i	16	13	13	15	12	16
Tempo	163.5	108.3	144.3	131.3	93.5	113.4

Tab. 4.2.8 - Risultati per la funzione di Griewank con il metodo FF+ES nel CASO MEDIO

Punto iniziale	(1,1)	(2,5)	(7,0)	(-7,-8)	(-10,15)	(30,-35)
Sequenza dei minimi ottenuti	M ₁ G	M ₁ G	M ₂ M ₁ G	M ₃ M ₂ M ₁	M ₆ M ₅ M ₃ M ₂ G	M ₄ M ₁ G
N _f	7700	4946	5859	7217	7396	7986
N _i	16	12	13	15	16	16
Tempo	150.4	93.7	100.2	125.1	133.6	128.3

Tab. 4.2.9 - Risultati per la funzione di Griewank con il metodo FF+ES nel CASO MIGLIORE

Punto iniziale	(1,1)	(2,5)	(7,0)	(-7,-8)	(-10,15)	(30,-35)
Sequenza dei minimi ottenuti	M ₂ M ₁ G	M ₂ M ₁ G	M ₃ M ₂ M ₁ G	M ₅ M ₄ M ₁ G	M ₆ M ₁ G	M ₄ M ₁ G
N _f	7241	4707	5551	4812	6860	7364
N _i	16	11	13	12	16	10
Tempo	141.2	90	96.8	85.5	132.7	93.7

Per confrontare i metodi (1+1) ES ed FF+ES sono state effettuate 100 ottimizzazioni con entrambi i metodi utilizzando sempre lo stesso punto iniziale e la stessa varianza iniziale. Il punto iniziale è stato fissato in (30,-35). Si è definita la probabilità α^* di determinare il minimo globale G come il rapporto tra il numero di ottimizzazioni che determinano G e tutte le ottimizzazioni. Il valore di α^* dipende della varianza iniziale s_0 . I risultati ottenuti sono confrontati in Fig. 4.2.6. Si noti che la probabilità di determinare il minimo globale è più che raddoppiata utilizzando l'accoppiamento con il metodo FF.

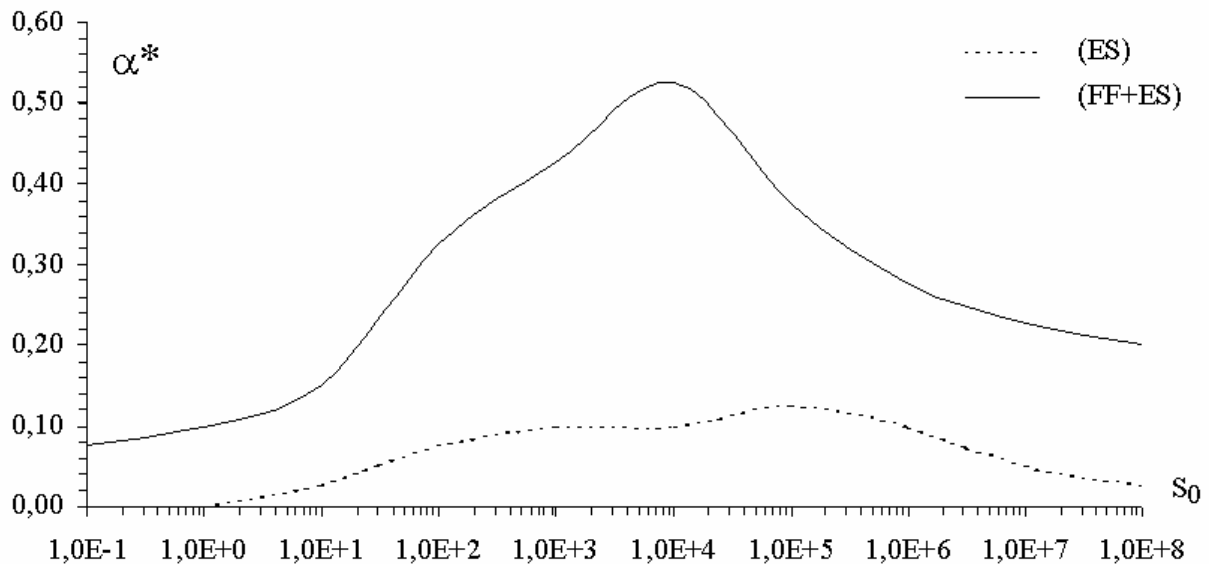


Fig. 4.2.6 - Probabilità di trovare il minimo globale (per un processo di ottimizzazione) in funzione della varianza iniziale per i metodi (1+1) ES ed FF+ES.

La probabilità che il miglior minimo determinato sia il minimo globale, indicata con $\Pr\{\min(f) = f^*\}$, cresce al crescere del numero di ottimizzazioni effettuate. Posto $\Pr\{\min(f) = f^*\} = 0.9$, il numero di ottimizzazioni da effettuare si ottiene riordinando la (3.3.1):

$$n = \frac{\log(1 - \Pr\{\min(f) = f^*\})}{\log(1 - \alpha^*)}$$

Noti α^* ed il numero medio di chiamate di f per ottimizzazione, si può calcolare il numero medio di chiamate di f necessario per ottenere il minimo globale, indicato con $N_{f, \text{tot}}$. I risultati ottenuti per i metodi (1+1) ES ed FF+ES sono confrontati in Fig. 4.2.7. $N_{f, \text{tot}}$ è circa uguale nei due casi. Questo è dovuto al fatto che il metodo FF prevede una minimizzazione della filled function dopo ogni ottimizzazione della funzione obiettivo. Quindi la maggiore probabilità di determinare il minimo globale del metodo FF+ES è bilanciato dal maggior numero di ottimizzazioni da effettuare.

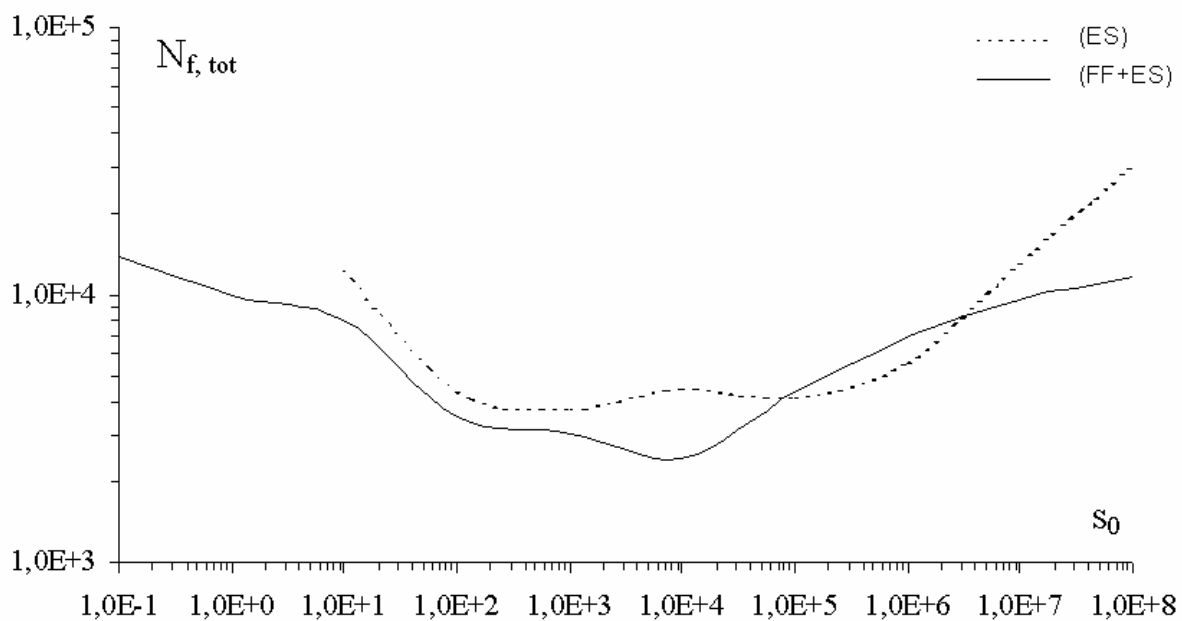


Fig. 4.2.7 - Numero medio di chiamate necessarie per trovare il minimo globale (con probabilità 0.9) in funzione della varianza iniziale per i metodi (1+1) ES ed FF+ES.

4.3 Test 2 - Funzione di Goldstein - Price

La funzione polinomiale di Goldstein - Price è data da [17]:

$$f(x, y) = \left[1 + (x + y + 1)^2 \cdot (19 - 14x + 3x^2 - 14y + 6xy + 3y^2) \right] \cdot \left[30 + (2x - 3y)^2 \cdot (18 - 32x + 12x^2 + 48y - 36xy + 27y^2) \right]$$

Essa è mal condizionata. La funzione presenta tre minimi locali (Fig. 4.3.1, Fig. 4.3.2) nell'intervallo $[-2, 2] \times [-2, 2]$ con valori pari a 30, 84, 840. Il minimo globale è in (0,-1) e vale 3. Esistono inoltre due zone in corrispondenza delle rette $x+y+1=0$ ed $2x-3y=0$ in cui la funzione assume valori molto minori che nei punti circostanti, come si può vedere in Fig. 4.3.2. Questo può portare ad individuare falsi minimi. Nella regione di interesse la funzione varia da 3 a 10^{10} , per questo il grafico di Fig. 4.3.1 è riportato in scala logaritmica. Nella Tab. 4.3.1 sono riportati i minimi di f .

Tab. 4.3.1 - Elenco dei minimi della funzione di Goldstein - Price

Minimo $\equiv (x,y)$	$f(x, y)$	Molteplicità
$G \equiv (0,-1)$	3	1
$M_1 \equiv (-0.6,-0.4)$	30	1
$M_2 \equiv (1.8,0.2)$	84	1
$M_3 \equiv (1.2,0.8)$	840	1

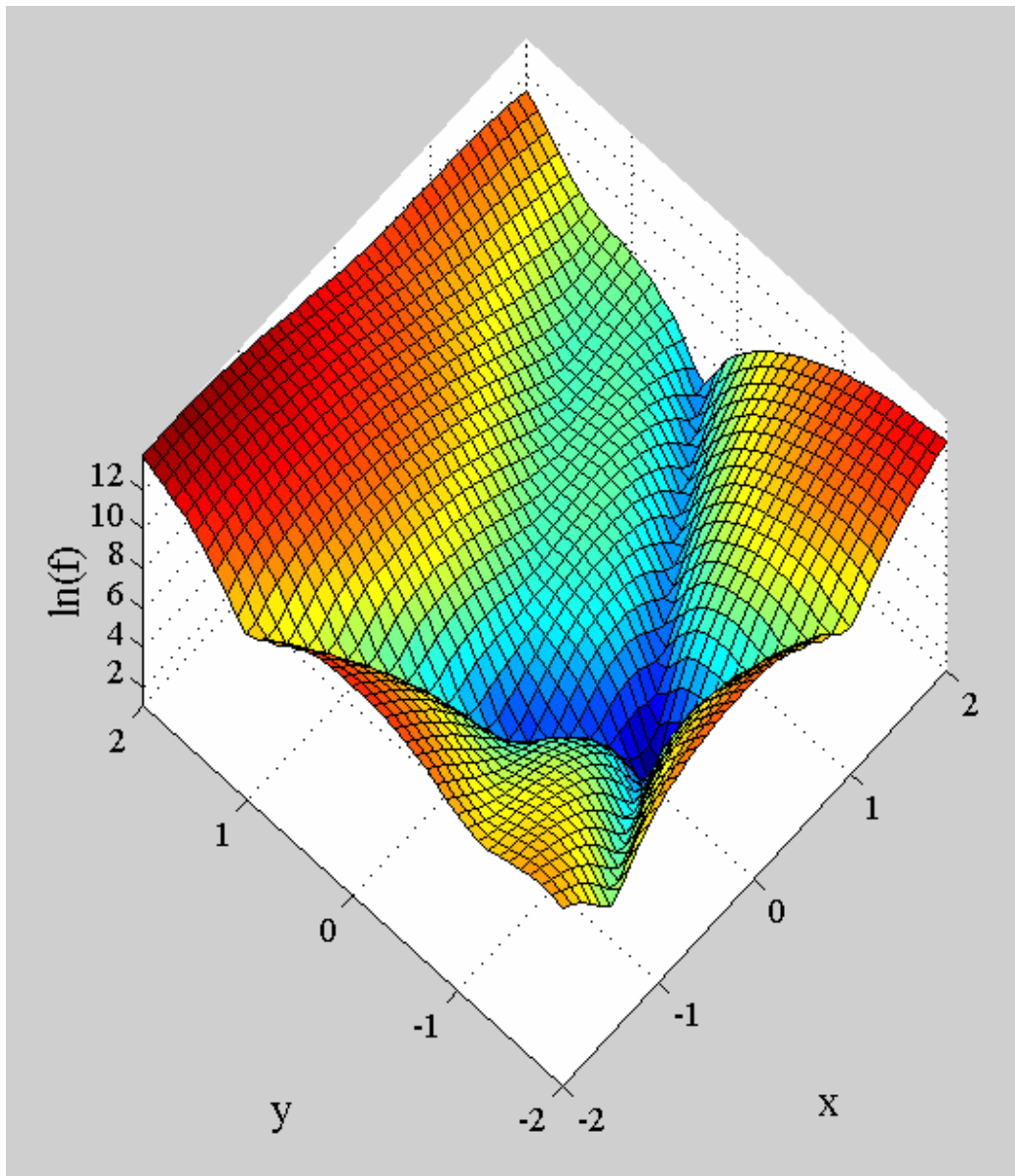


Fig. 4.3.1 - Grafico tridimensionale della funzione di Goldstein - Price.

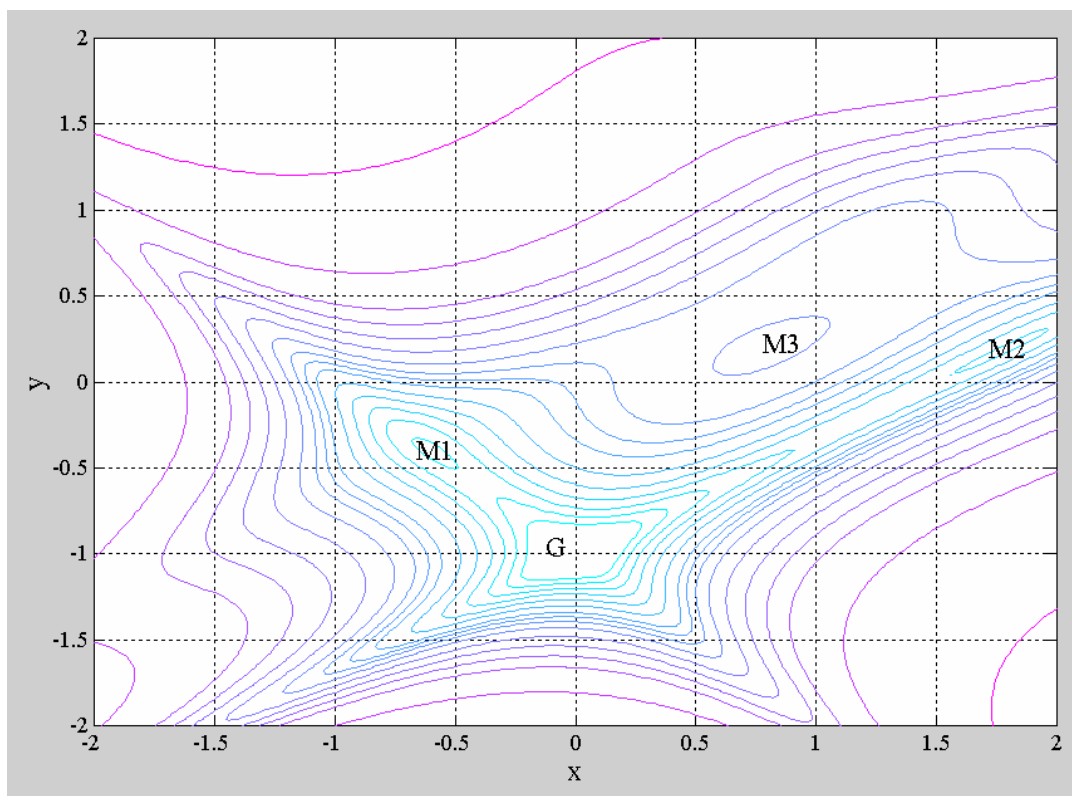


Fig. 4.3.2 - Curve di livello della funzione di Goldstein - Price con indicazione dei minimi.

Tab. 4.3.2 - Risultati ottenuti dalla minimizzazione della funzione di Goldstein - Price con il metodo ST al variare dei parametri C ed e.

Punto Iniziale	(0,0)		(3,5)		(0,6)		(-4,7)		(10,15)		(-40,-25)		(-80,40)	
Valore di f	$6.0 \cdot 10^2$		$2.6 \cdot 10^8$		$8.7 \cdot 10^8$		$1.6 \cdot 10^8$		$1.5 \cdot 10^{12}$		$2.4 \cdot 10^{12}$		$1.5 \cdot 10^{17}$	
C=0 e=1	G	56	G	28	G	30	G	77	G	73	G	80	*	*
C=0 e=0.99	G	56	G	28	G	37	G	77	G	73	G	80	*	*
C=10 e=1	G'	30	G'	28	G'	38	G'	190	G'	73	G'	80	*	*
C=10 e=.99	G'	30	G'	28	G'	38	G'	190	G'	73	G'	80	*	*

In Tab. 4.3.2 sono riportati i risultati ottenuti con il metodo ST al variare dei parametri C ed e. Accanto ad ogni minimo è riportato il numero di iterazioni con cui è stato trovato. I minimi ottenuti sono piuttosto vicini al minimo reale (± 0.1 su ogni variabile). Si noti che, nei casi in cui il target level è superiore al valore del minimo

globale, si determina un punto G' in cui la funzione assume un valore pari al target level. Il punto G' è posto all'interno del bacino di attrazione di G . Si è scelto un passo iniziale $p_0=3\cdot 10^{-3}$. Il numero massimo di iterazioni è 250. Il tempo di calcolo è, per ogni traiettoria, circa 6 s.

Il minimo trovato con lo stesso punto iniziale, dipende dal valore del target level C . Quasi ogni ottimizzazione determina il minimo globale o un punto vicino ad esso. Invece, nel caso con punto iniziale $(-80,40)$ si determina un punto vicino a $(-20,20)$ in cui f vale $6.3\cdot 10^9$. La funzione obiettivo cala dunque di otto ordini di grandezza. Una successiva minimizzazione con punto iniziale $(-20,20)$ permette di raggiungere il minimo globale. La dipendenza dal parametro di sensitività non è generalmente significativa.

In Fig. 4.3.3 è riportato il valore della funzione obiettivo nei punti della traiettoria ST con punto iniziale in $(-4,7)$, $C=0$ ed $e=1$. La “particella”, dopo avere determinato il minimo M_1 , si dirige sul minimo globale. Una volta raggiunto il minimo globale, la “particella” continua ad allontanarsi ed ad avvicinarsi ad esso. Il risultato è un andamento quasi-periodico, come mostrato in Fig. 4.3.3.

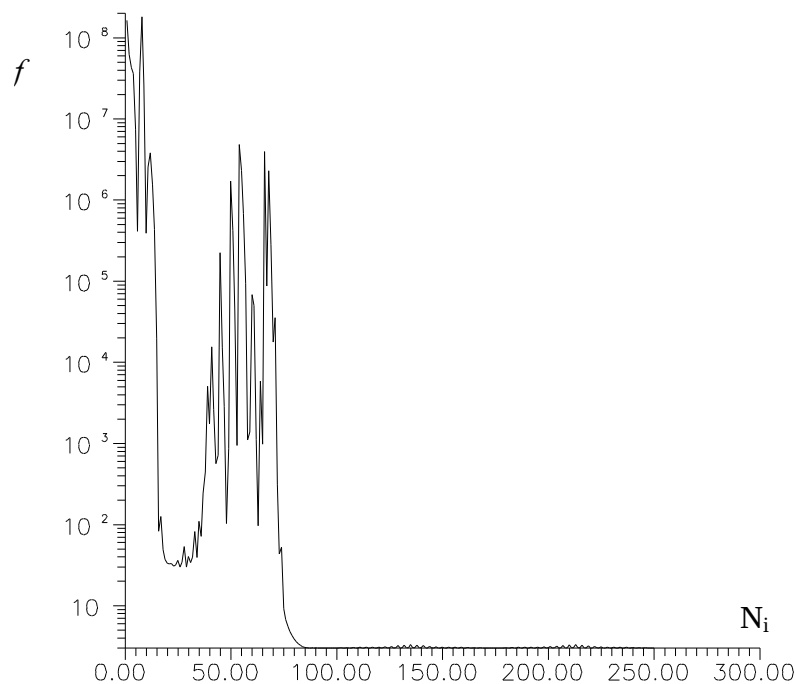


Fig. 4.3.3 - Andamento della funzione test calcolata nei punti di una traiettoria ST ordinati secondo l'indice di iterazione.

Con il metodo (1+1) ES sono state effettuate più minimizzazioni con gli stessi punti iniziali. Si sono considerati il caso medio, il caso migliore e il caso peggiore. I tre casi sono mostrati nelle tabelle 4.3.3, 4.3.4 e 4.3.5. Si è utilizzata una varianza iniziale $s_0=1$ uguale per entrambe le variabili. In Fig. 4.3.4 sono riportati i valori di f nei tre casi durante la minimizzazione con punto iniziale $(-4,7)$. La probabilità di ottenere il minimo globale è circa 0.35. Questo significa che in media, partendo dallo stesso punto iniziale, per ottenere il minimo globale sono necessari almeno 3 processi di minimizzazioni. Il numero di chiamate della funzione obiettivo diventa in tal caso circa 700 con un tempo di calcolo di circa 10 s.

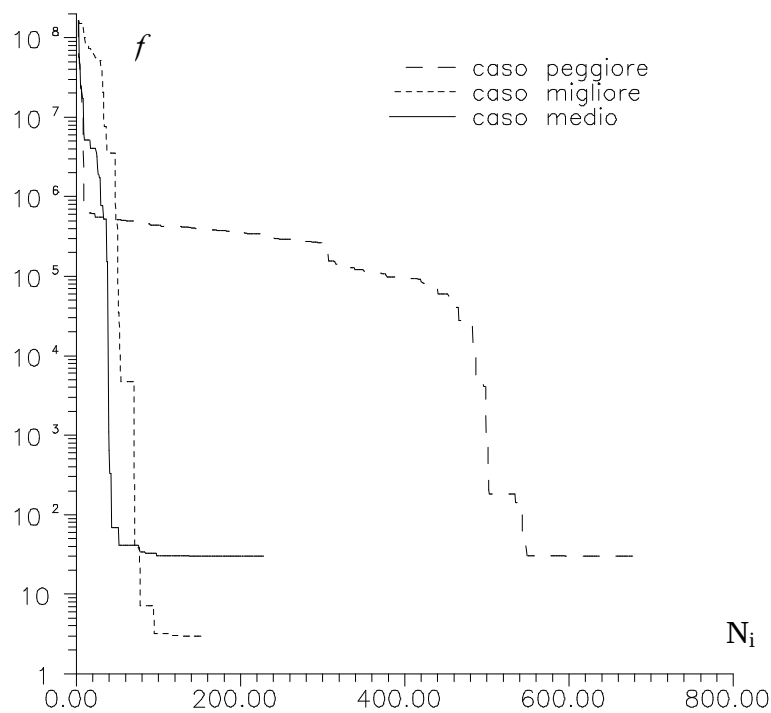


Fig. 4.3.4 - Andamento del valore di f durante la minimizzazione (1+1) ES nei casi medio, migliore e peggiore.

Tab. 4.3.3 - Risultati per la funzione di Goldstein - Price con il metodo ES nel CASO PEGGIORE.

Punto Iniziale	(0,0)	(3,5)	(0,6)	(-4,7)	(10,15)	(-40,-25)	(-80,40)
Minimo Ottenuto	M_2	M_2	M_1	M_1	(8.9,5.1)	(-37,-26)	(-76,52)
$N_f = N_i$	289	367	158	678	831	145	157
Tempo	4.61	5.17	2.50	11.51	14.02	2.21	2.36

Tab. 4.3.4 - Risultati per la funzione di Goldstein - Price con il metodo ES nel CASO MEDIO.

Punto Iniziale	(0,0)	(3,5)	(0,6)	(-4,7)	(10,15)	(-40,-25)	(-80,40)
Minimo Ottenuto	M ₁	M ₂	G	M ₁	(5.6,5.4)	(-37,-25)	(-74,50)
N _f = N _i	108	234	231	228	489	81	143
Tempo	1.49	3.27	3.25	3.74	7.95	1.12	2.47

Tab. 4.3.5 - Risultati per la funzione di Goldstein - Price con il metodo ES nel CASO MIGLIORE.

Punto Iniziale	(0,0)	(3,5)	(0,6)	(-4,7)	(10,15)	(-40,-25)	(-80,40)
Minimo Ottenuto	G	G	G	G	G	(-37,-25)	(-74,50)
N _f = N _i	127	149	117	151	220	67	143
Tempo	1.76	2.49	1.53	2.50	3.86	0.99	2.46

Al metodo FF è stato accoppiato il metodo SQP. Il parametro iniziale della filled function è $\rho^2=100$. Dai risultati nella Tab. 4.3.6 si deduce che il punto M₁ è un minimo preferenziale dato che in ogni caso l'algoritmo passa per tale minimo prima di raggiungere il minimo globale. Al contrario M₃ è un minimo difficilmente ottenibile e l'algoritmo passa per tale minimo solo se si parte da un punto iniziale molto vicino ad M₃. Ciò è dovuto al fatto che nelle vicinanze di M₃ c'è un massimo e che comunque a questo minimo corrisponde un valore elevato della funzione obiettivo.

Tab. 4.3.6 - Risultati per la funzione di Goldstein - Price con il metodo FF+SQP.

Punto Iniziale	(0,0)	(3,5)	(0,6)	(-4,7)	(10,15)	(-40,-25)	(-80,40)
Sequenza dei minimi ottenuti	M ₂ M ₂ M ₁ G	M ₃ M ₁ G	M ₂ M ₁ G	M ₁ G	M ₁ G	M ₁ G	M ₂ M ₂ M ₁ G
N _f	393	447	363	292	394	299	626
N _g	85	136	130	107	98	117	141
N _i	3	3	3	2	3	2	4
Tempo	7.3	8.9	8.1	7.0	7.6	6.9	10.8

5. APPLICAZIONI

5.1 Introduzione

I metodi di ottimizzazione globale proposti sono stati applicati a problemi di sintesi elettromagnetica riguardanti il progetto di campi magnetici assialsimmetrici. Questo problema è di fondamentale importanza nei casi studiati:

- il progetto del sistema di bobine poloidali in macchine toroidali per la fusione termonucleare controllata con configurazione del plasma a sezione circolare utilizzando avvolgimenti filiformi;
- il progetto del sistema di bobine poloidali in macchine toroidali con configurazione del plasma a sezione circolare utilizzando avvolgimenti massicci a sezione rettangolare;
- il progetto del sistema di bobine poloidali nelle macchine toroidali con configurazione del plasma a D e due punti di nullo;
- il progetto del sistema di bobine principali di una macchina per Risonanza Magnetica Nucleare (NMR).

In ogni caso trattato sono fornite le tabelle dei risultati che contengono le diverse configurazioni di minimo, il valore dell'energia magnetica corrispondente e l'errore massimo rispetto al valore imposto. Per ogni minimo sono riportate le mappe del campo di induzione magnetica e la posizione delle bobine nel semipiano (R, Z^+) . Infatti, data la simmetria rispetto al piano $Z=0$, le correnti nel semipiano con Z positivo sono uguali a quelle nel semipiano con Z negativo.

5.2 Applicazione al Sistema Poloidale di una macchina TOKAMAK per configurazioni circolari con conduttori filiformi

Per le configurazioni toroidali a sezione circolare la regione di interesse Ω_i è una regione circolare del piano azimutale con centro in $(R_0, 0)$ e raggio Z_0 . La curva Γ , bordo di Ω_i , risulta pertanto definita dall'equazione:

$$Z^2 + (R - R_0)^2 = Z_0^2$$

Si è posto $R_0=0.935$ m e $Z_0=0.31$ m [3]. La regione di interesse Ω_i e la curva Γ sono rappresentate in Fig. 5.2.1. In una macchina TOKAMAK la regione Ω_i è la zona di equilibrio del plasma. Poiché il plasma viene contenuto in una camera a vuoto toroidale, in Fig. 5.2.1 è rappresentata anche la traccia sul piano azimutale della prima parete della camera a vuoto. Questa è definita dalla circonferenza con centro in $(R_0, 0)$ e raggio $a=0.59$ m.

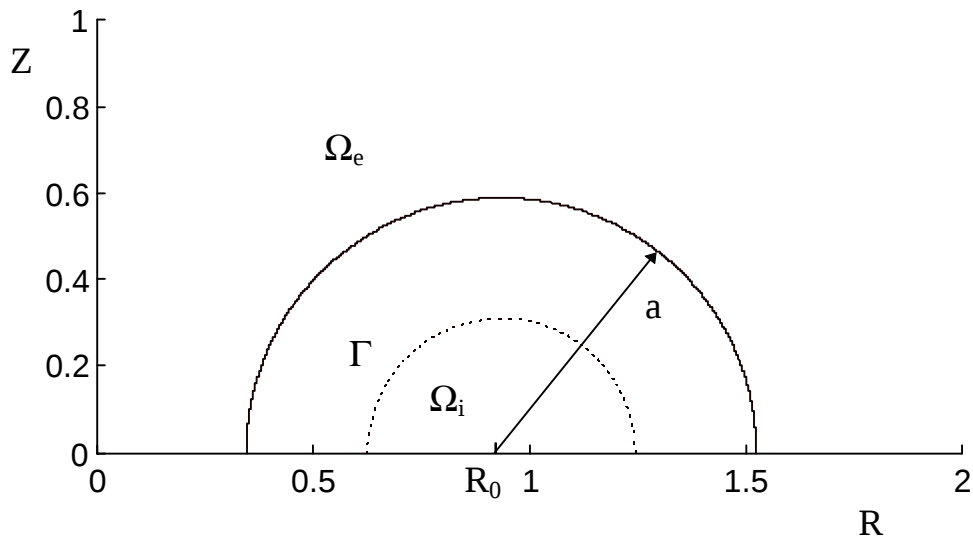


Fig. 5.2.1 - Sezione circolare della configurazione toroidale assialsimmetrica con rappresentazione della regione di interesse e della prima parete della camera a vuoto.

Il problema di sintesi consiste nella determinazione delle intensità di 2×10 correnti che percorrono 2×10 bobine filiformi, esterne alla prima parete. Sono incognite, inoltre, le posizioni delle bobine. Si richiede di produrre un campo magnetico nullo e un flusso $\psi = 1$ Wb in Ω_i . La corrente azimutale in Ω_i (corrente di plasma) si considera nulla. I valori del flusso (termine noto) sono assegnati su 2×20 punti uniformemente distribuiti sulla curva Γ .

Affinché i conduttori restino nella regione esterna alla prima parete della camera a vuoto è necessario soddisfare le seguenti disuguaglianze:

$$g_j(R_j, Z_j) = Z_j^2 + (R_j - R_0)^2 - a^2 \geq 0 \quad (5.2.1)$$

dove R_j e Z_j sono rispettivamente il raggio e la quota della generica bobina filiforme. Pertanto, il numero dei vincoli di disuguaglianza nel problema (2.5.8) è pari al numero delle bobine.

Dall'ottimizzazione del sistema poloidale con bobine filiformi sono stati ottenuti quattro minimi distinti. Tali minimi sono ordinati secondo la funzione penalizzata nella Tab. 5.2.1. I risultati ottenuti riproducono risultati già noti, ottenuti mediante altri metodi di minimizzazione [3, 4]. Il livello di affidabilità che si attribuisce al minimo G come possibile minimo globale, calcolato sia con la (3.2.15) sia con la (3.3.2), è superiore a 0.99.

Tab. 5.2.1 - Successione dei minimi ottenuta dall'ottimizzazione del sistema di bobine filiformi.

Minimo	W_m [MJ]	$\left \frac{\Delta \Psi}{\Psi} \right _{\Gamma}$	F
G	1.411	0.317 %	4.581
M_1	1.364	0.67 %	8.064
M_2	1.307	0.95 %	10.807
M_3	1.303	1.43 %	15.603

La funzione penalizzata, che rappresenta la funzione obiettivo nel problema di ottimizzazione non vincolato, è calcolata come combinazione lineare dell'energia

magnetica e della norma dei vincoli. In tale funzione si è posto $c_e = c_d = 10^3$ in modo da privilegiare il rispetto dei vincoli. Si è assunto come minimo globale il punto a cui corrisponde il valore più basso della funzione penalizzata che è anche il punto a cui corrisponde il residuo minimo. I tempi di calcolo della funzione penalizzata e del gradiente sono, rispettivamente, circa 0.2 s e 0.7 s di CPU su un calcolatore VAX 4000-200. Nel seguito tutti i tempi di calcolo si intendono in secondi di CPU su VAX 4000-200.

Dai risultati si può vedere che l'energia magnetica diminuisce al crescere dell'errore sul flusso richiesto. I minimi non sono molto diversi fra loro, questo indica la presenza di più minimi vicini e distinti. Dalla figure 5.2.10 e 5.2.11 relative al minimo M_3 si può osservare che due bobine danno un contributo trascurabile al campo (la 5 e la 10). Queste sono le bobine più lontane dalla zona del plasma: se si accettasse un errore più elevato sul flusso si potrebbe anche scegliere di non metterle.

Il metodo ST ha utilizzato una traiettoria a passo oscillante con 3000 iterazioni. Il tempo di calcolo necessario è circa 2600 s. Dato che la funzione penalizzata è sempre positiva, si è posto $C=0$. Si sono scelti un parametro di sensitività unitario ed un passo iniziale di 10^{-5} . La traiettoria determina, con una approssimazione dell'1%, sia il minimo globale sia il minimo M_1 .

Il metodo (1+1) ES utilizza in media 500 chiamate della funzione penalizzata. Il tempo di calcolo necessario è circa 100 s. Tuttavia, la probabilità di trovare il minimo globale è minore di 0.1. Questo ha portato ad un tempo di calcolo complessivo dell'ordine di 1500 s.

Al metodo FF è stato accoppiato l'ottimizzatore (1+1) ES. Il parametro iniziale della filled function è stato posto $\rho^2=100$. Il numero di chiamate della funzione è risultato circa 7000. Il tempo di calcolo necessario è dell'ordine di 1400 s.

Tab. 5.2.2 - Posizioni ed intensità delle correnti per il minimo G .

N	R [m]	Z [m]	I [kA]
1	1.600	0.575	40.3
2	1.249	0.674	59.6
3	0.849	0.693	88.4
4	0.644	0.543	116.9
5	0.538	0.452	136.5
6	0.428	0.347	154
7	0.378	0.240	166.7
8	0.350	0.161	175.9
9	0.339	0.092	184.2
10	0.331	0.059	190

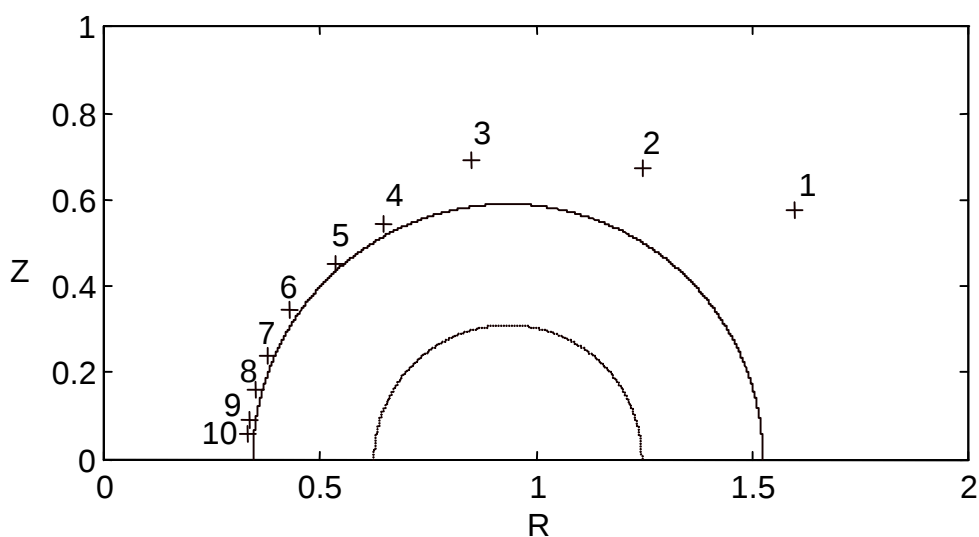


Fig. 5.2.2 - Posizioni delle correnti per il minimo G in relazione alla prima parete della camera a vuoto ed alla regione di interesse.

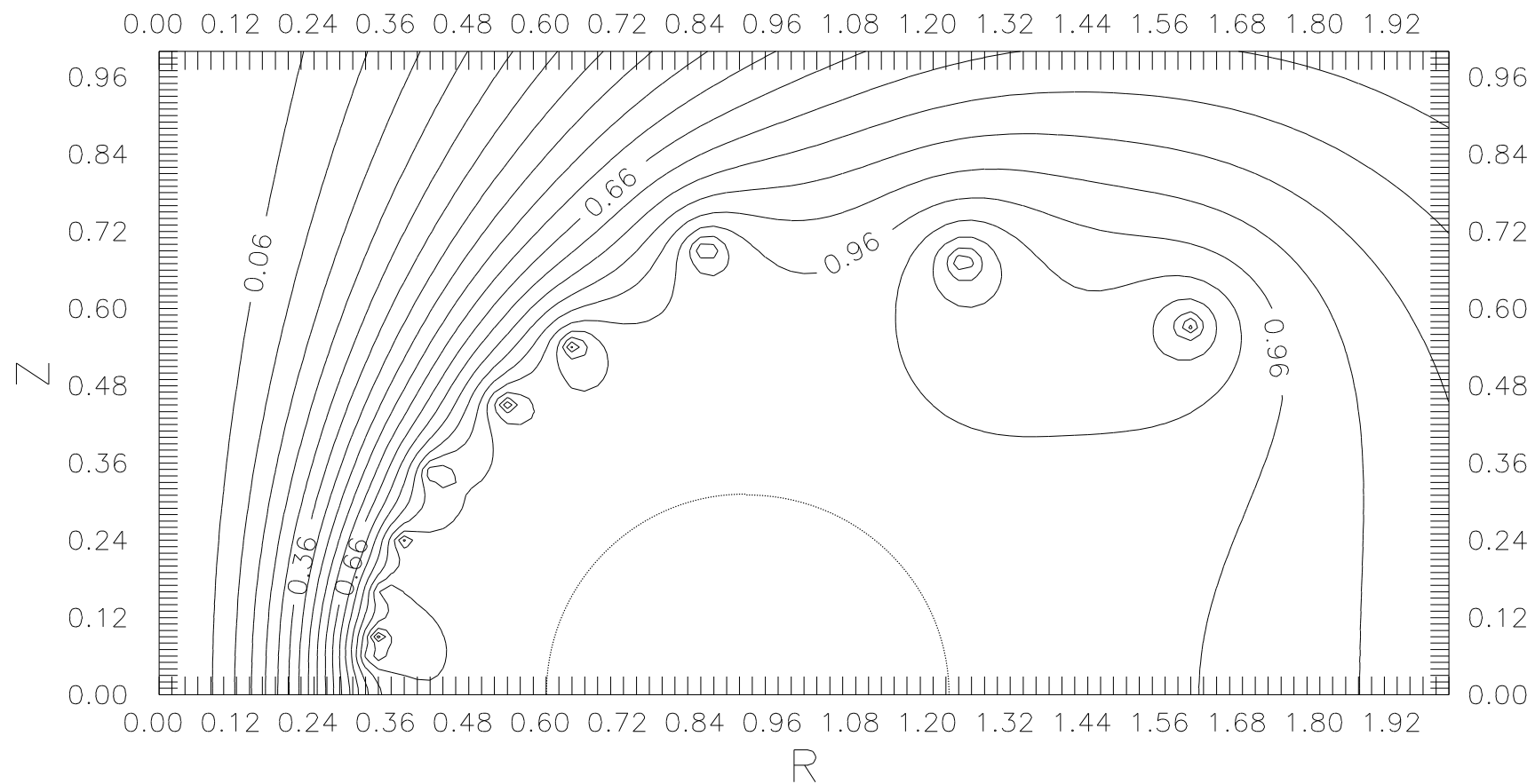


Fig. 5.2.3 - Mappa di campo relativa al minimo G

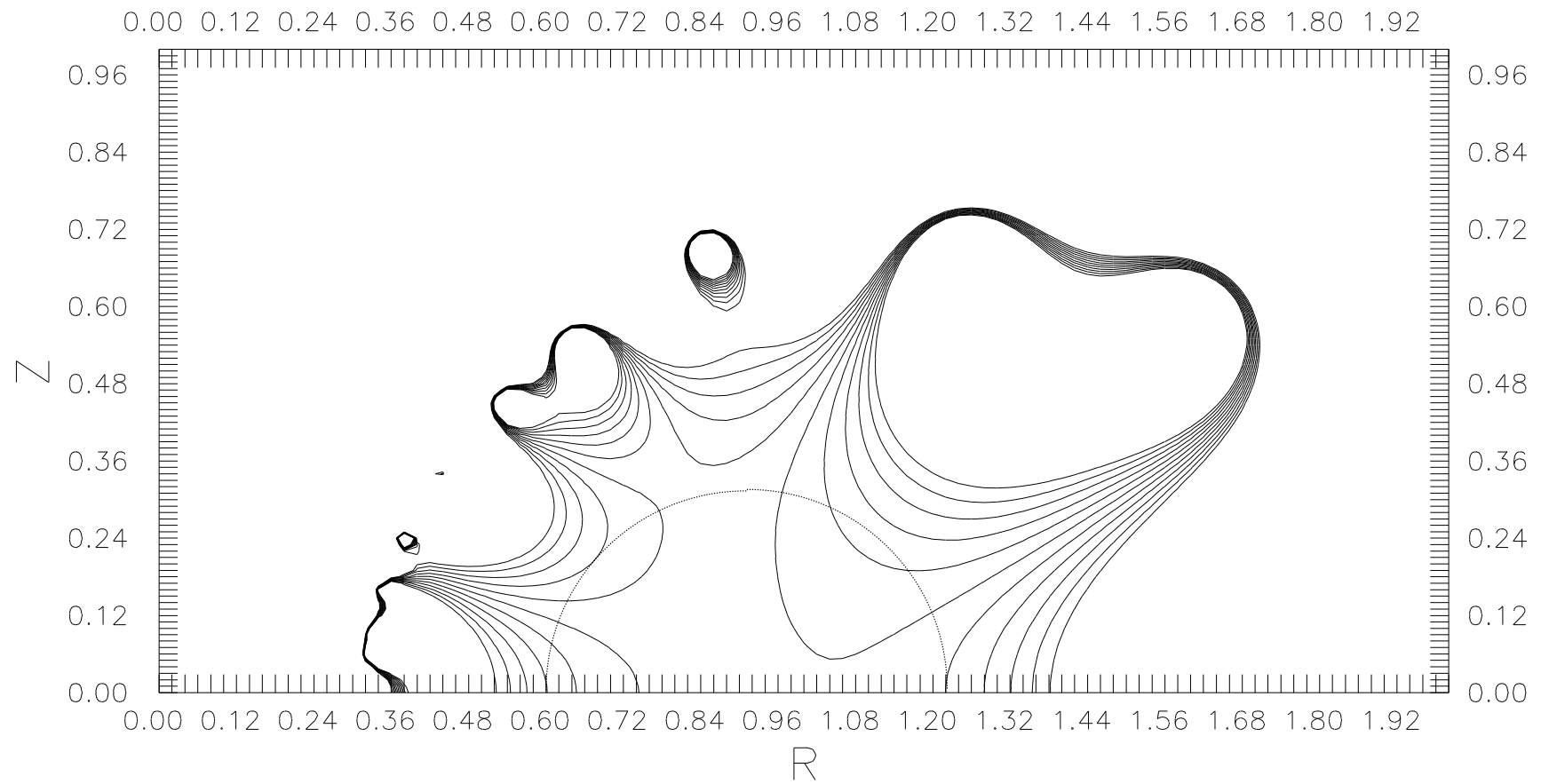


Fig. 5.2.4 - Mappa di campo relativa al minimo G nella zona del plasma.

Tab. 5.2.3 - Posizioni ed intensità delle correnti per il minimo M_I .

N	R [m]	Z [m]	I [kA]
1	1.413	0.391	57.9
2	0.989	0.600	62.5
3	0.700	0.561	87.9
4	0.558	0.474	115.8
5	0.476	0.391	138.7
6	0.415	0.320	154.6
7	0.379	0.243	160.6
8	0.356	0.175	169.5
9	0.331	0.117	172.6
10	0.322	0.035	174.8

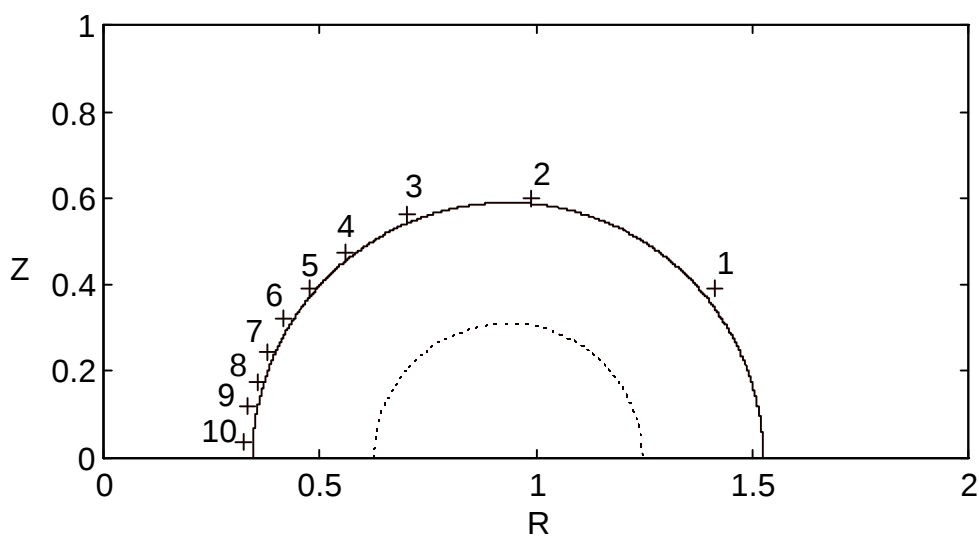


Fig. 5.2.5 - Posizioni delle correnti per il minimo M_I in relazione alla prima parete della camera a vuoto ed alla regione di interesse.

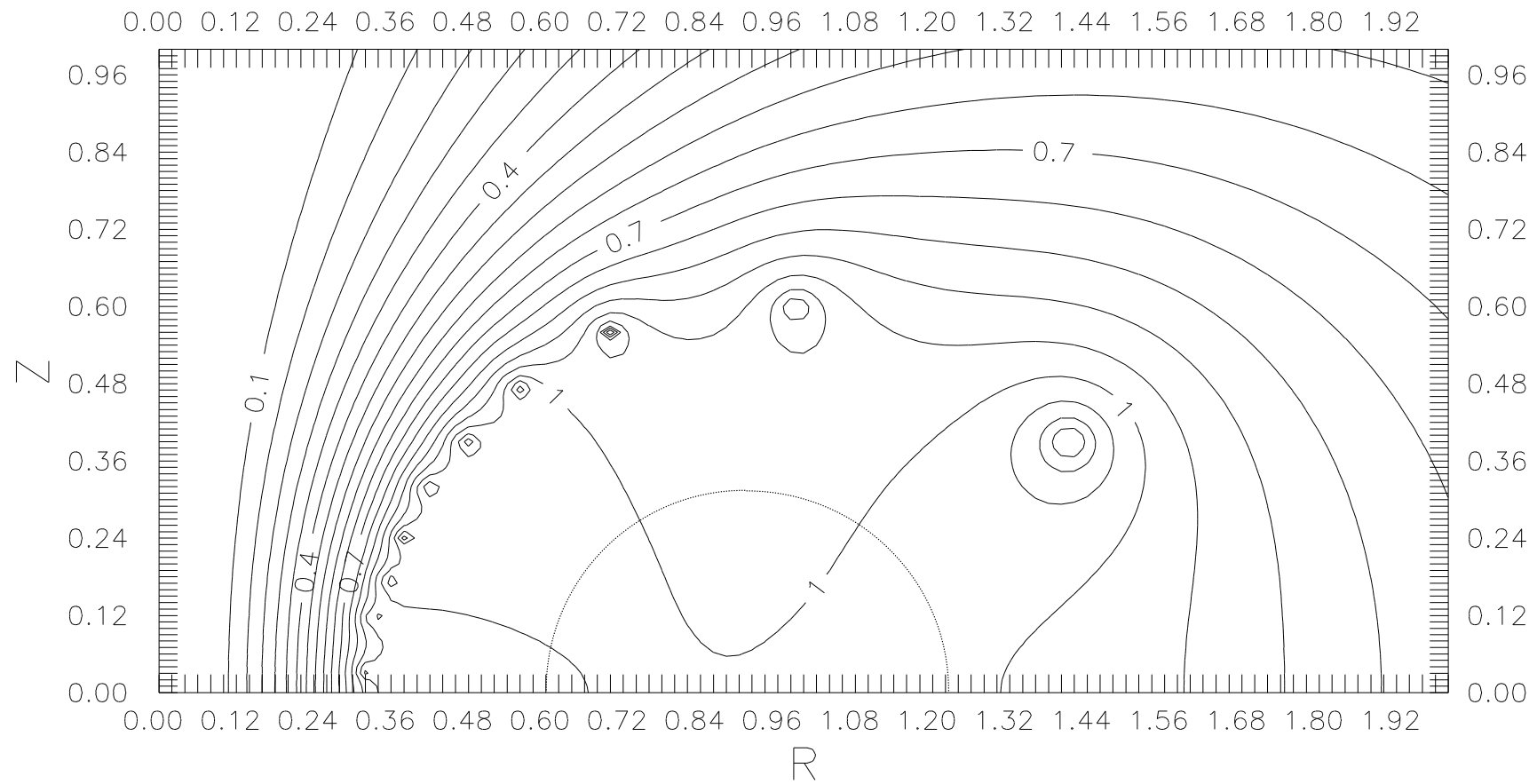


Fig. 5.2.6 - Mappa di campo relativa al minimo M_l .

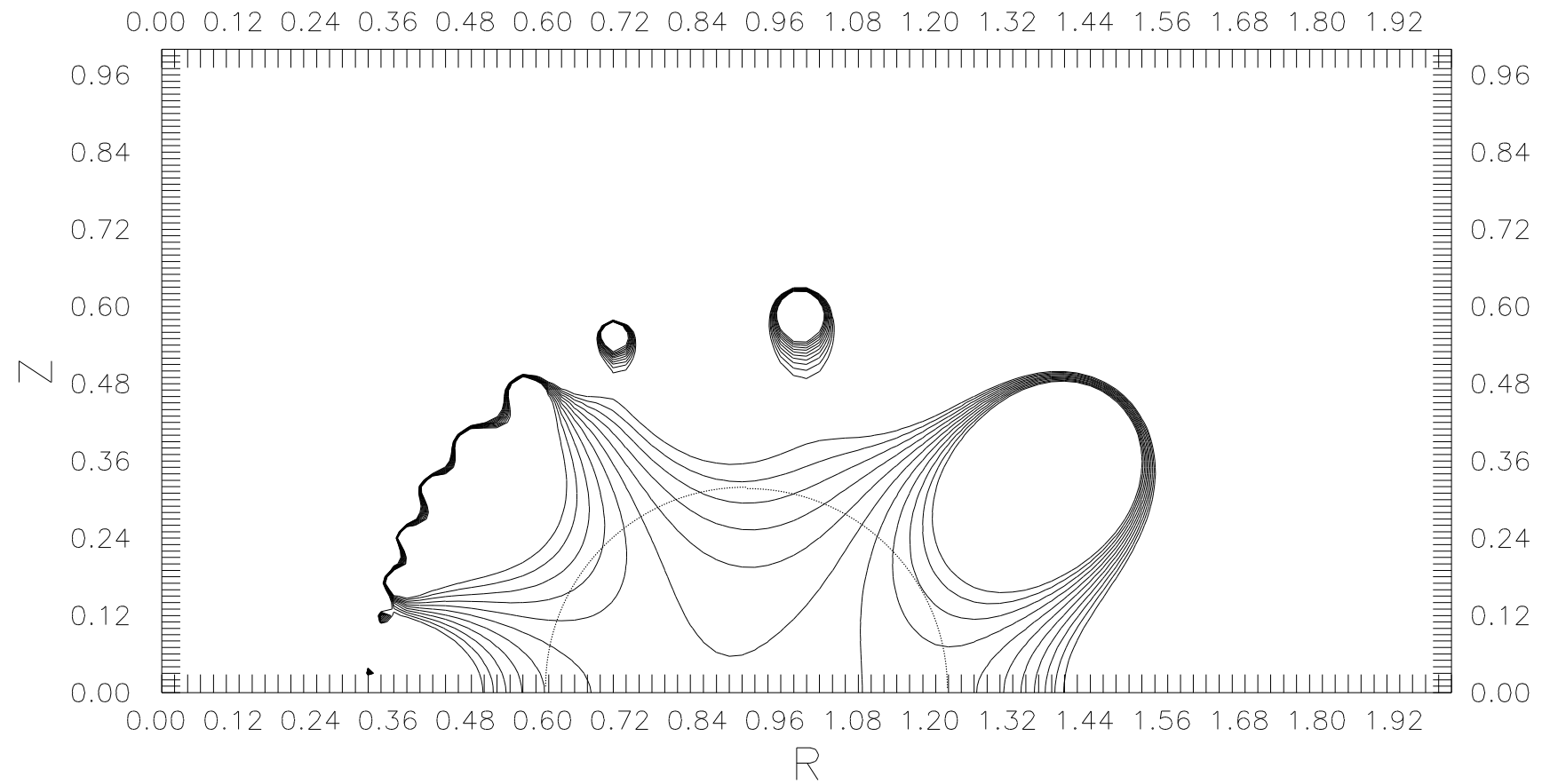


Fig. 5.2.7 - Mappa di campo relativa al minimo M_1 nella zona del plasma.

Tab. 5.2.4 - Posizioni ed intensità delle correnti per il minimo M_2 .

N	R [m]	Z [m]	I [kA]
1	1.479	0.260	32.3
2	1.145	0.564	64.6
3	0.783	0.592	110.3
4	0.559	0.471	118.7
5	0.470	0.404	122.2
6	0.424	0.315	140.3
7	0.380	0.237	153.3
8	0.353	0.189	154.4
9	0.346	0.113	166.8
10	0.345	0.035	182.6

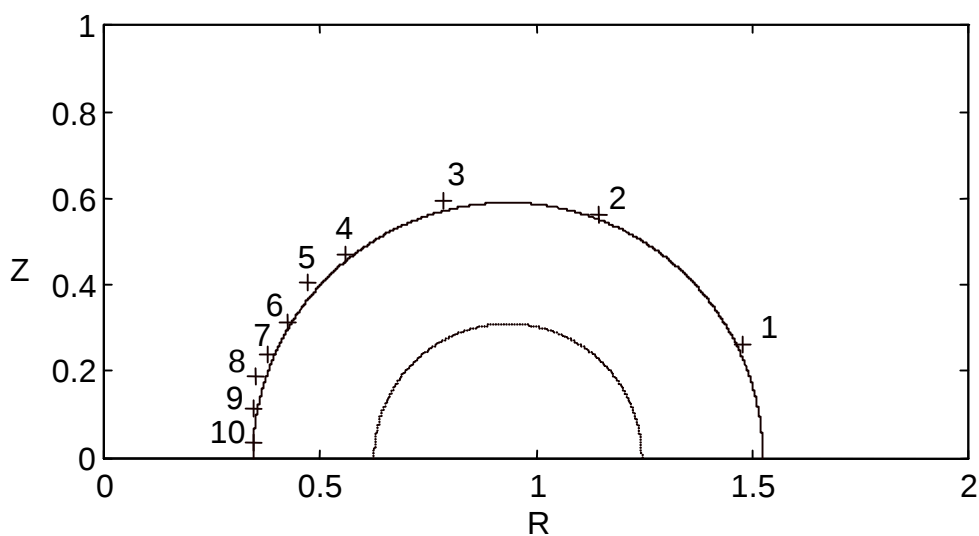


Fig. 5.2.8 - Posizioni delle correnti per il minimo M_2 in relazione alla prima parete della camera a vuoto ed alla regione di interesse.

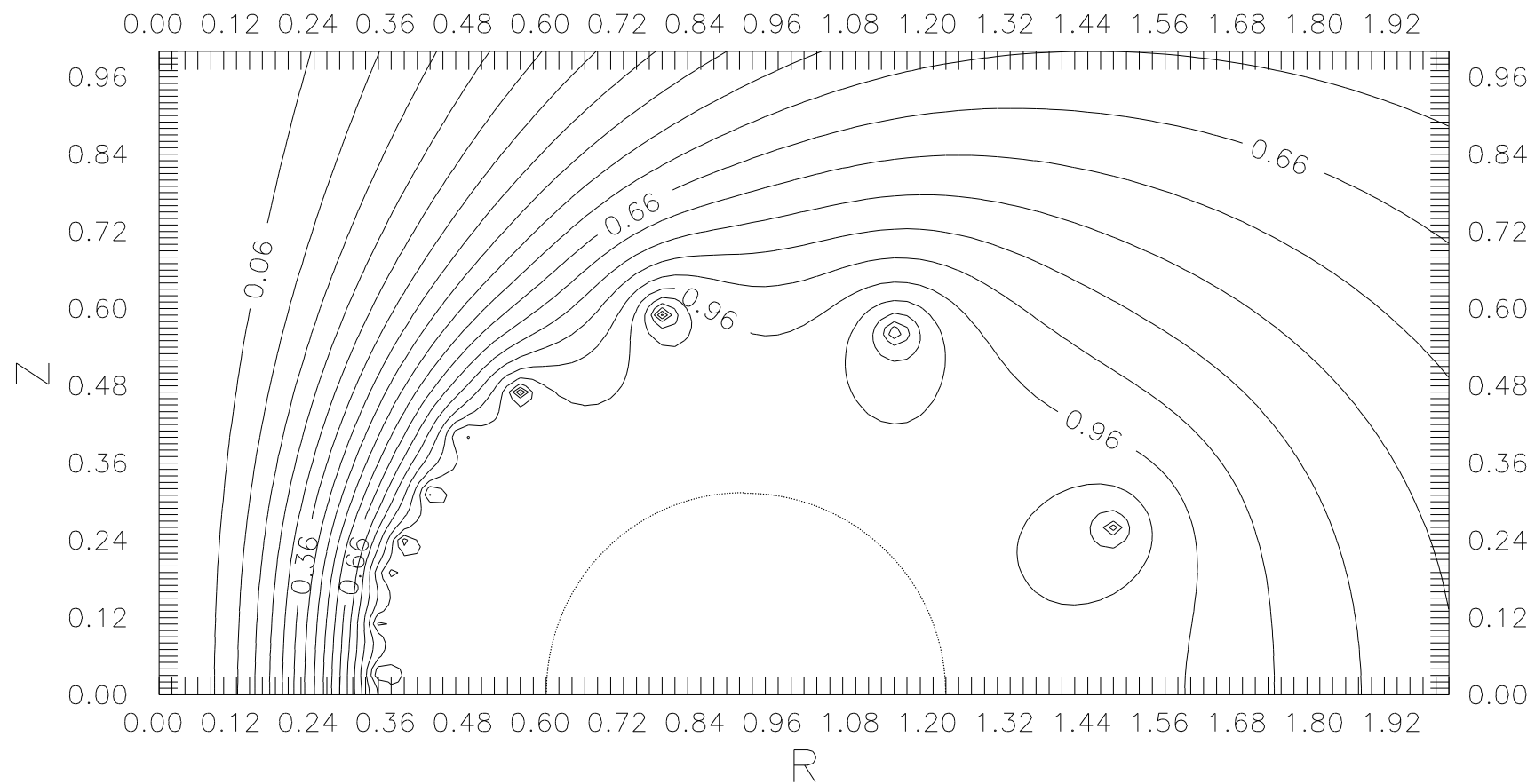


Fig. 5.2.9 - Mappa di campo relativa al minimo M_2 .

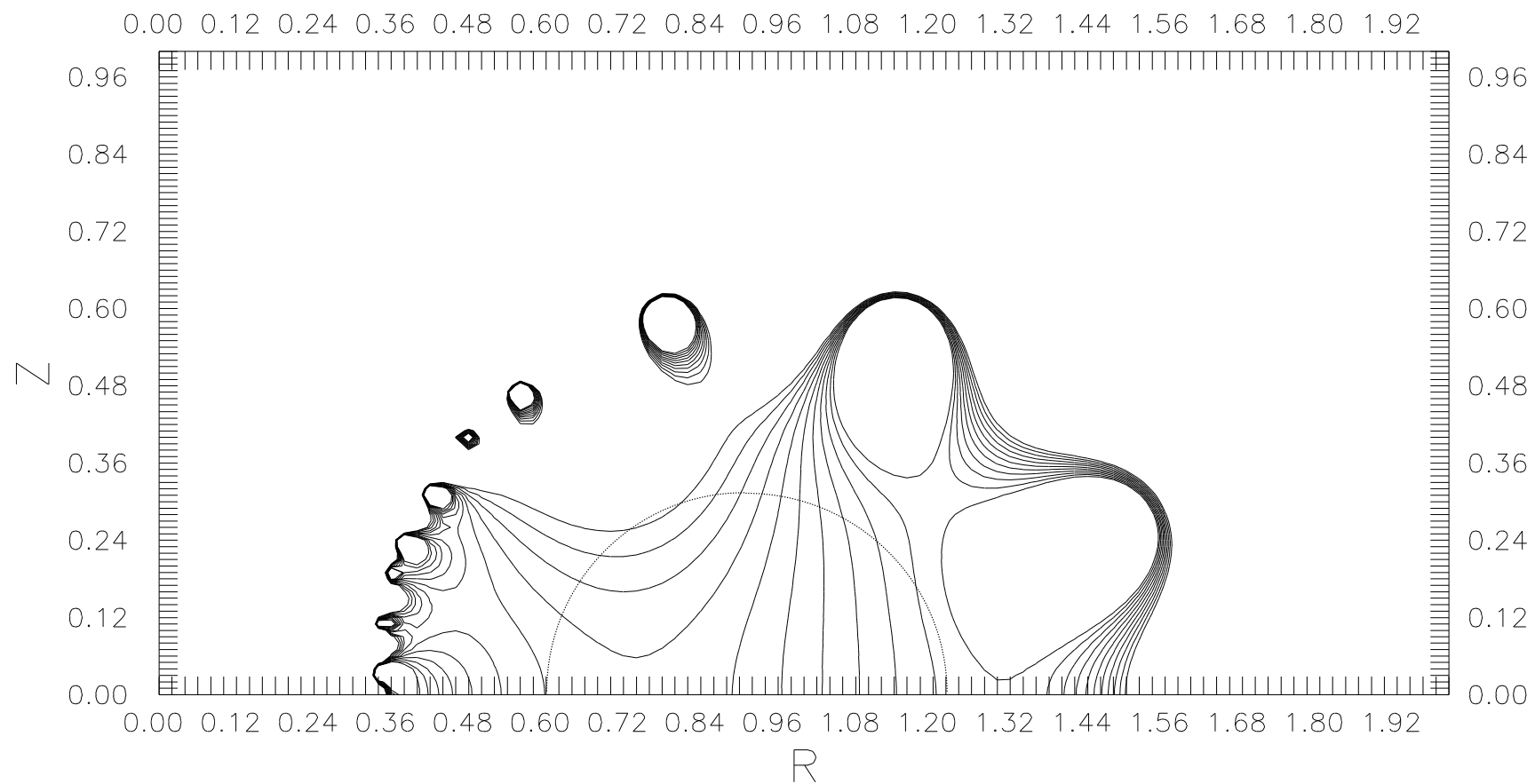


Fig. 5.2.10 - Mappa di campo relativa al minimo M_2 nella zona del plasma.

Tab. 5.2.5 - Posizioni ed intensità delle correnti per il minimo M_3

N	R [m]	Z [m]	I [kA]
1	1.443	0.378	40.8
2	1.071	0.577	73.9
3	0.725	0.557	141.1
4	0.531	0.432	149.2
5	0.413	0.899	17.6
6	0.408	0.322	179.2
7	0.384	0.213	143.6
8	0.356	0.123	141
9	0.349	0.066	298.4
10	0.289	0.518	75.3

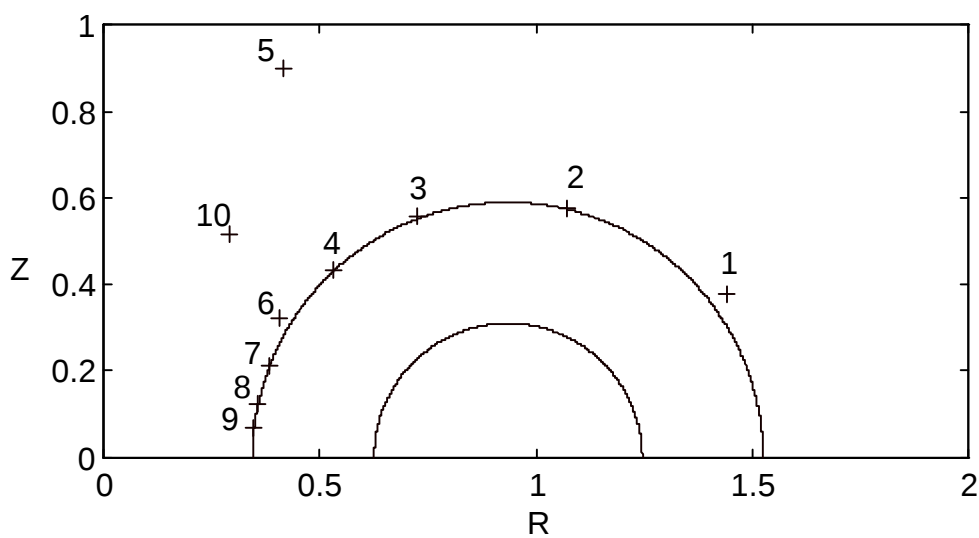


Fig. 5.2.11 - Posizioni delle correnti per il minimo M_3 in relazione alla prima parete della camera a vuoto ed alla regione di interesse.

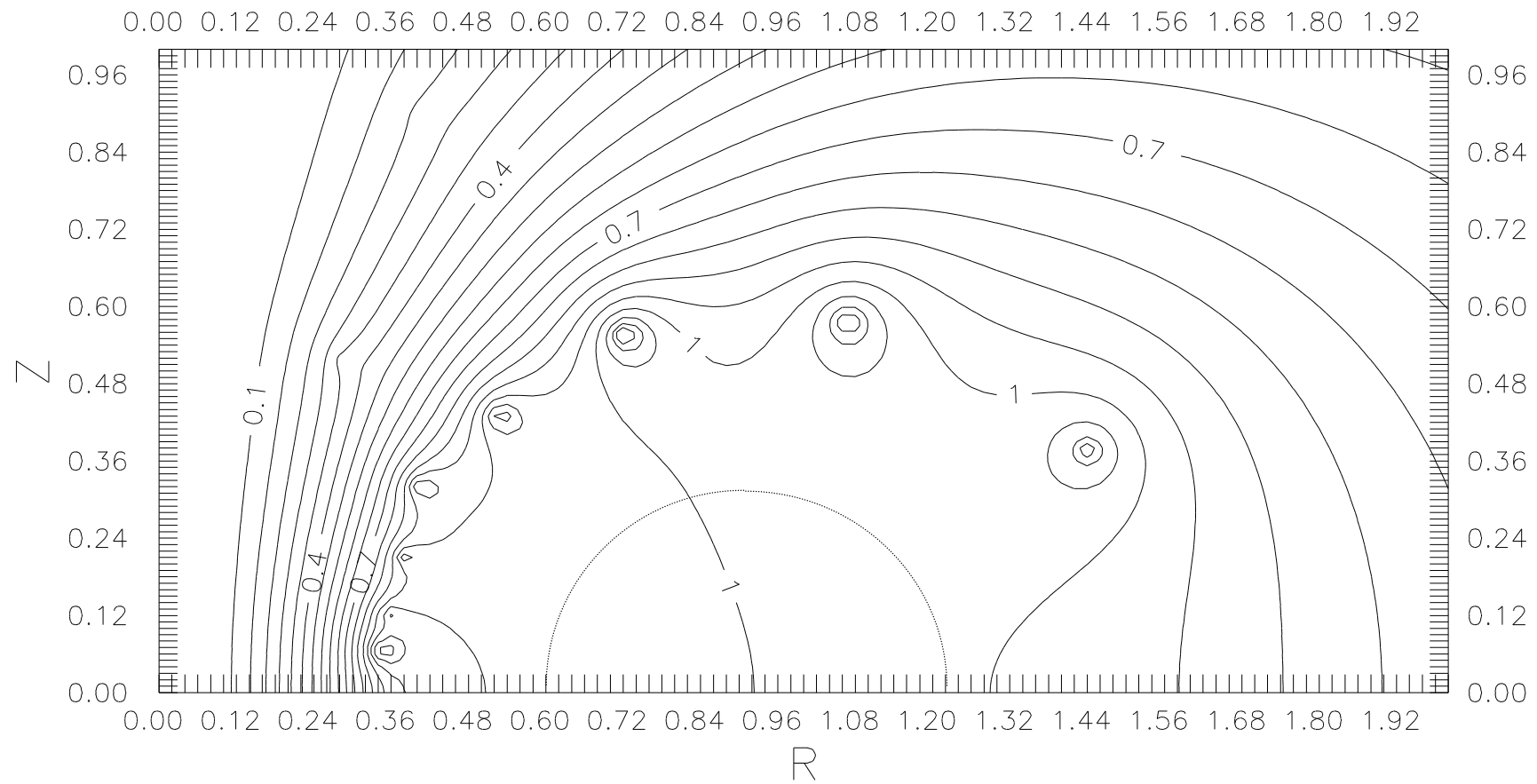


Fig. 5.2.12 - Mappa di campo relativa al minimo M_3 .

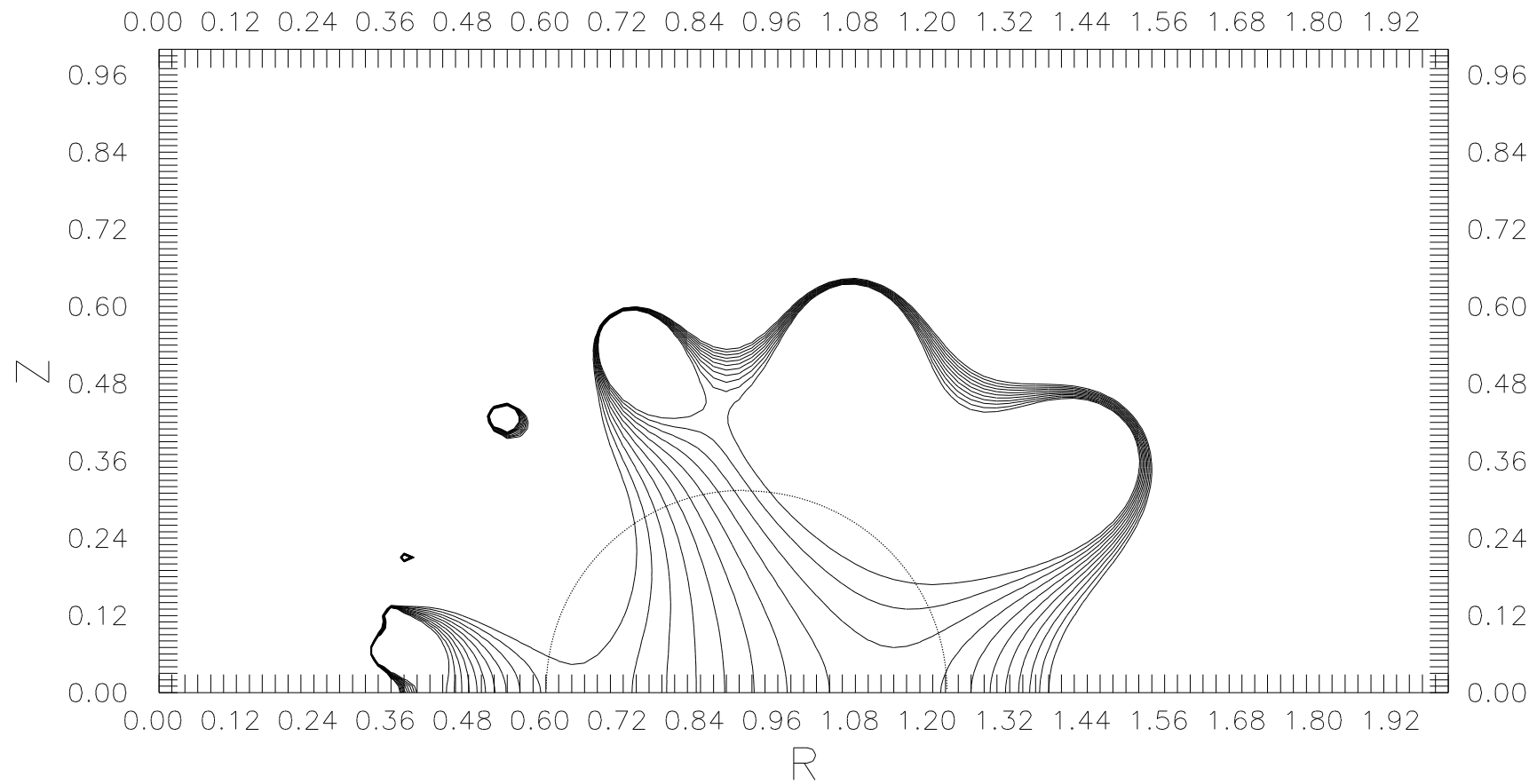


Fig. 5.2.13 - Mappa di campo relativa al minimo M_3 nella regione del plasma.

5.3 Applicazione al Sistema Poloidale di una macchina TOKAMAK per configurazioni circolari con conduttori massicci

La regione di interesse Ω_i , il suo bordo Γ e la traccia sul piano azimutale della prima parete della camera a vuoto sono identici al caso trattato nel paragrafo precedente. Il problema di sintesi consiste nella determinazione delle intensità di 2×10 correnti che percorrono 2×10 bobine massicce a sezione rettangolare, esterne alla prima parete. Inoltre, sono incognite le posizioni ed i semispessori delle bobine. Si richiede di produrre un campo magnetico nullo e un flusso $\psi = 1$ Wb in Ω_i . La corrente azimutale in Ω_i (corrente di plasma) si considera nulla. I valori del flusso (termine noto) sono assegnati su 2×20 punti uniformemente distribuiti sulla curva Γ .

Affinché i conduttori restino nella regione esterna alla prima parete della camera a vuoto è necessario soddisfare le disuguaglianze (5.2.1) dove R_j e Z_j sono rispettivamente il raggio e la quota dei vertici inferiori della generica bobina massiccia a sezione rettangolare. Il numero dei vincoli di disuguaglianza di questo tipo nel problema (2.5.9) è pari al doppio del numero delle bobine.

Dall'ottimizzazione del sistema poloidale con bobine massicce a sezione rettangolare sono stati ottenuti due minimi, ordinati secondo la funzione penalizzata nella Tab. 5.3.1. Le soluzioni conseguite non sono molto diverse da quelle ottenute dall'ottimizzazione del problema magnetico con bobine filiformi. I coefficienti di penalità sono pari a 10^3 . Il livello di affidabilità che si attribuisce al minimo G come possibile minimo globale, calcolato sia con la (3.2.15) sia con la (3.3.2), è superiore a 0.99.

Tab. 5.3.1 - Successione dei minimi ottenuta dalla minimizzazione dell'energia magnetica del sistema di bobine massicce.

Minimo	W_m [MJ]	$\left \frac{\Delta\Psi}{\Psi} \right _\Gamma$	F
G	1.475	0.683 %	8.3
M_1	1.419	0.924 %	10.6

I tempi di calcolo della funzione penalizzata e del gradiente sono, rispettivamente, circa 61 s e 336 s. Il tempo di calcolo risulta molto maggiore rispetto al caso delle bobine filiformi. Infatti, mentre tutte le grandezze del sistema di bobine filiformi sono calcolate analiticamente, nei flussi e nella energia magnetica del sistema di bobine massicce sono presenti integrali calcolati numericamente.

Il metodo ST ha utilizzato una traiettoria a passo oscillante con 300 iterazioni. Il tempo di calcolo necessario è circa 10^5 s. Dato che la funzione penalizzata è sempre positiva, si è posto $C=0$. Si sono scelti un parametro di sensitività unitario ed un passo iniziale di 10^{-5} . La traiettoria determina, con una approssimazione dell'1%, sia il minimo globale sia il minimo M_1 .

Il metodo (1+1) ES utilizza in media 600 chiamate della funzione penalizzata. Il tempo di calcolo necessario è circa $3 \cdot 10^4$ s. La probabilità di trovare il minimo globale è minore di 0.1. Questo ha portato ad un tempo di calcolo complessivo dell'ordine di $4 \cdot 10^5$ s.

Al metodo FF è stato accoppiato l'ottimizzatore (1+1) ES. Il parametro iniziale della filled function è stato posto $\rho^2=1000$. Il numero di chiamate della funzione è risultato circa 7000. Il tempo di calcolo necessario è dell'ordine di $3 \cdot 10^5$ s.

Tab. 5.3.1 - Posizioni, semispessori e correnti per il minimo G .

N	R [m]	Z [m]	I [kA]	S_R [cm]	S_Z [cm]
1	1.599	0.567	39.3	0.522	0.76
2	1.253	0.667	59.3	0.664	1.015
3	0.846	0.678	88	0.675	1.002
4	0.645	0.543	116.6	0.692	0.991
5	0.532	0.461	137.7	0.703	0.987
6	0.436	0.354	155	1.045	0.6
7	0.372	0.241	169.4	1.048	0.603
8	0.345	0.162	181.9	1.051	0.602
9	0.332	0.105	191.3	1.052	0.601
10	0.33	0.064	199.7	0.777	0.477

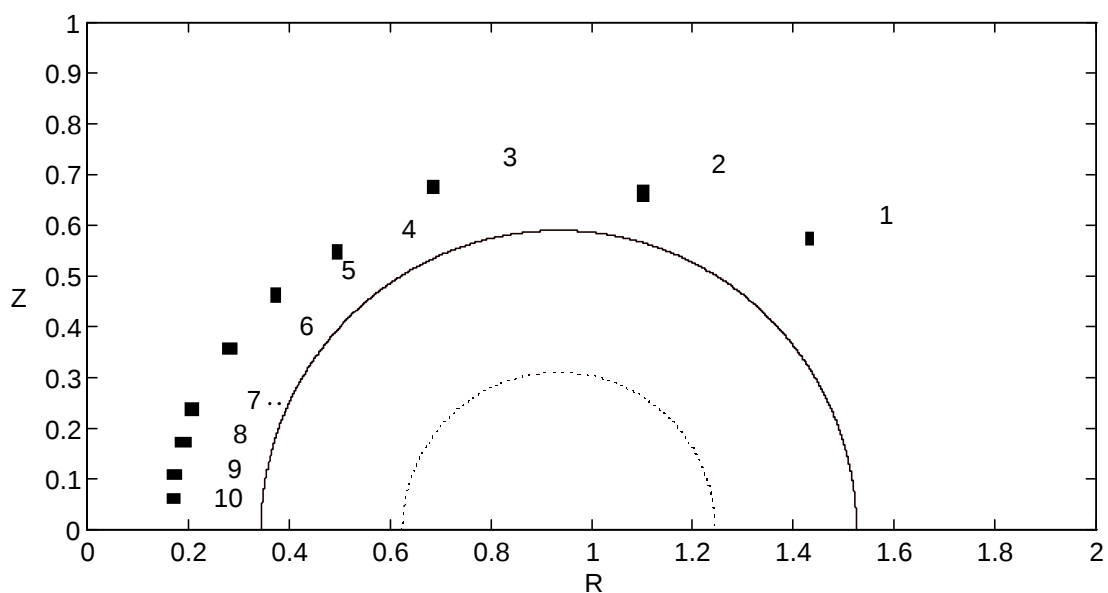


Fig. 5.3.1 - Posizioni delle correnti per il minimo G in relazione alla prima parete della camera a vuoto ed alla regione di interesse.

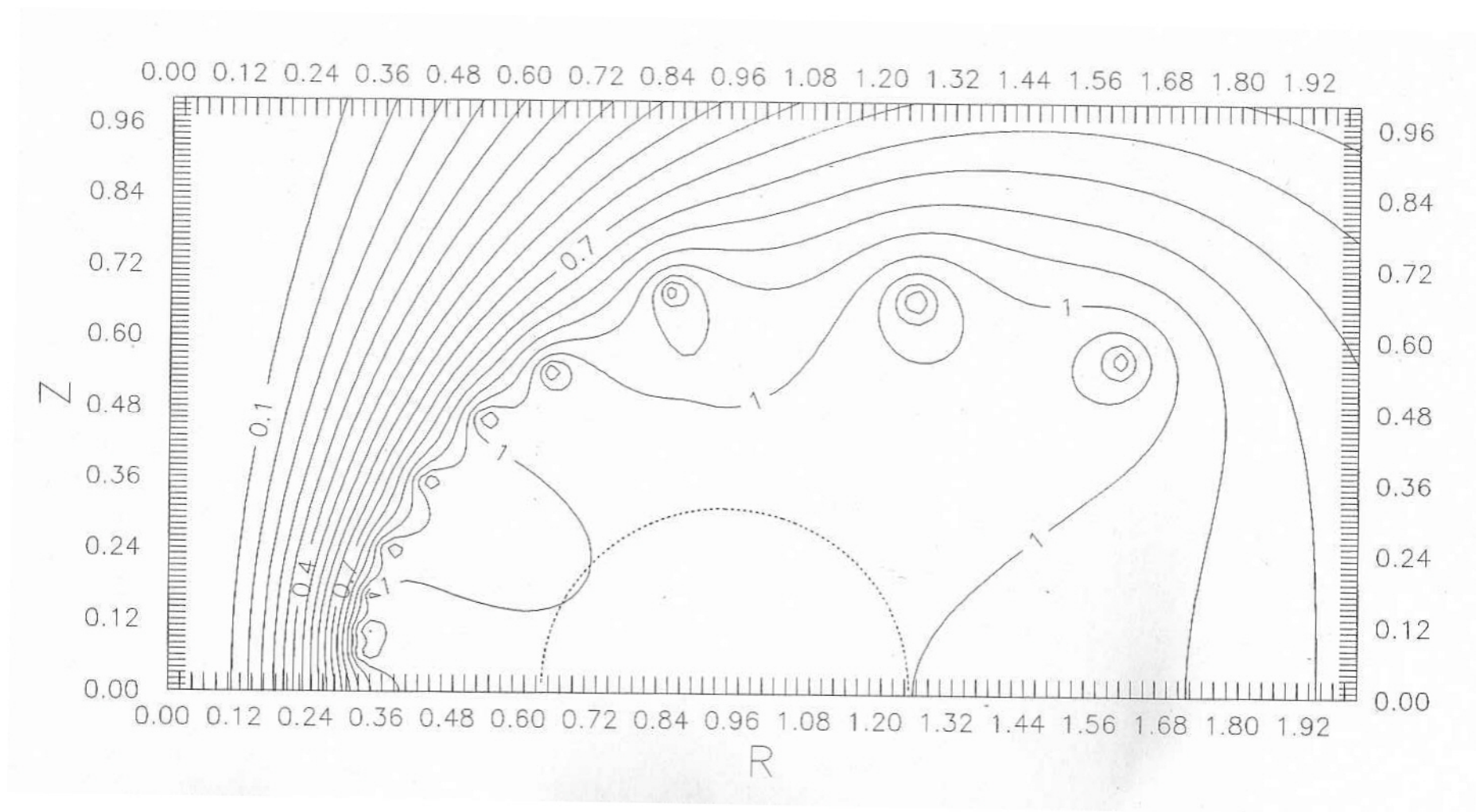


Fig. 5.3.2 - Mappa di campo relativa al minimo G .

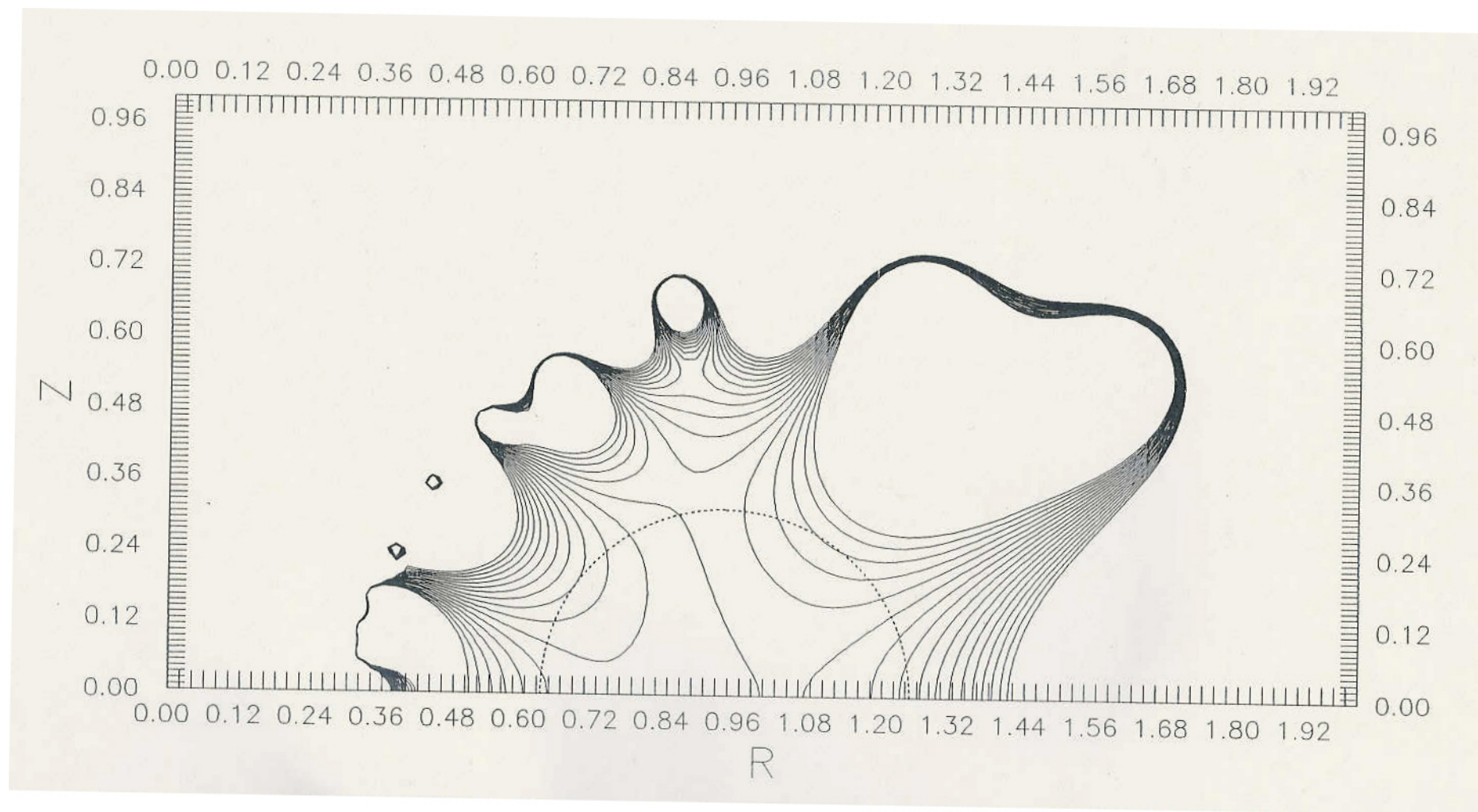


Fig. 5.3.3 - Mappa di campo relativa al minimo G nella zona del plasma.

Tab. 5.3.2 - Posizioni, semispessori e correnti per il minimo M_1 .

N	R [m]	Z [m]	I [kA]	S_R [cm]	S_Z [cm]
1	1.409	0.382	58.1	0.920	0.275
2	0.992	0.603	62.9	0.741	0.351
3	0.701	0.562	88.2	0.539	0.754
4	0.557	0.479	115.9	0.748	0.702
5	0.471	0.396	139.1	0.753	0.697
6	0.415	0.318	154	0.658	0.563
7	0.379	0.244	160.8	0.602	0.491
8	0.354	0.175	170.1	0.490	0.549
9	0.332	0.118	172.8	0.490	0.548
10	0.323	0.036	174.8	0.412	0.627

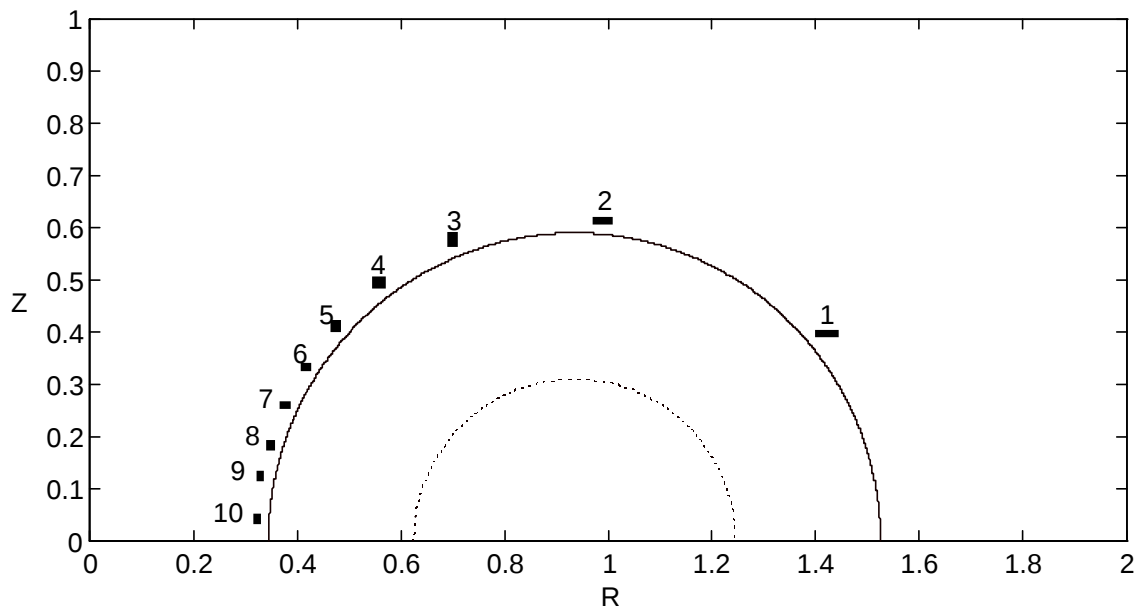


Fig. 5.3.4 - Posizioni delle correnti per il minimo M_1 in relazione alla prima parete della camera a vuoto ed alla regione di interesse.

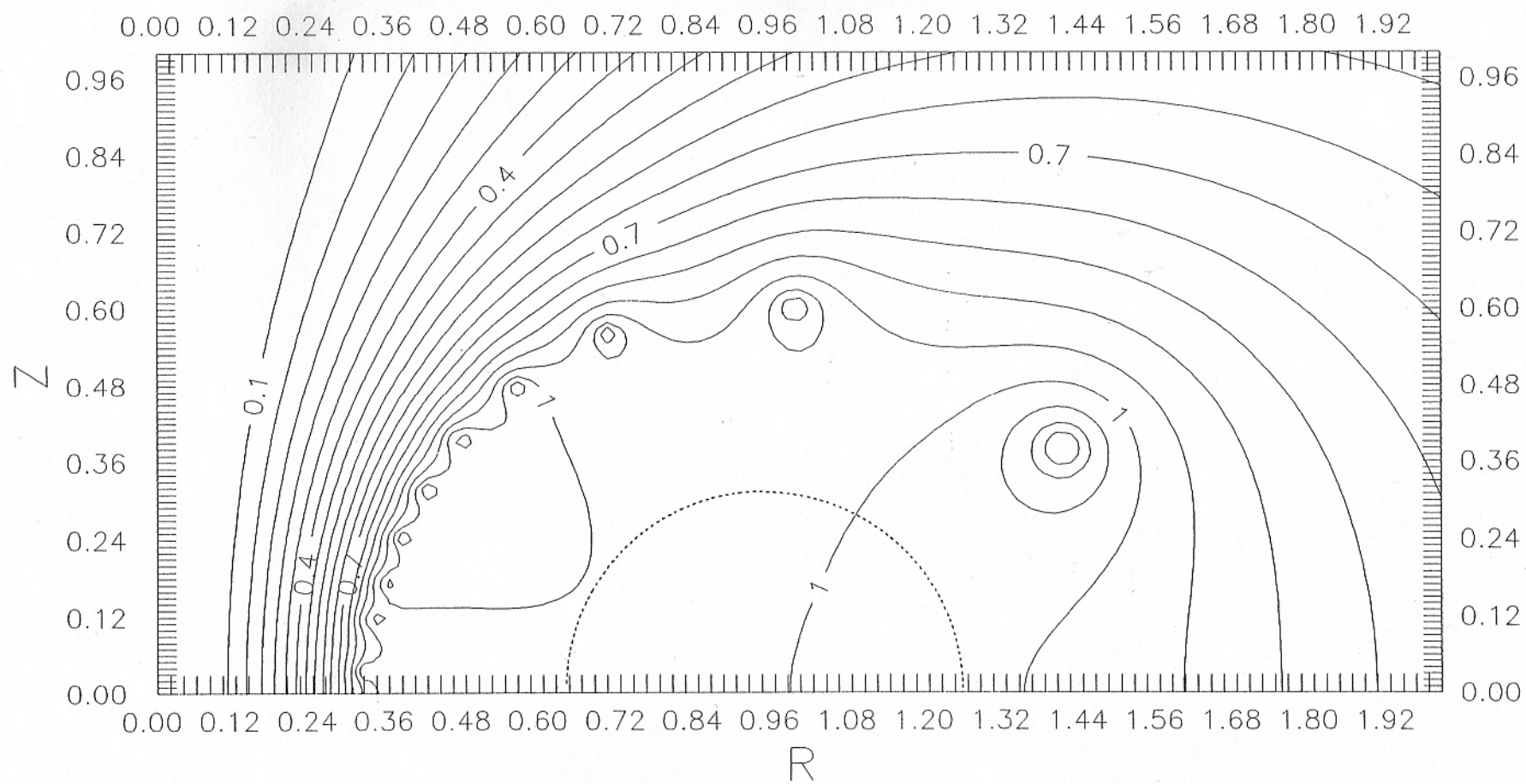


Fig. 5.3.5 - Mappa di campo relativa al minimo M_1 .

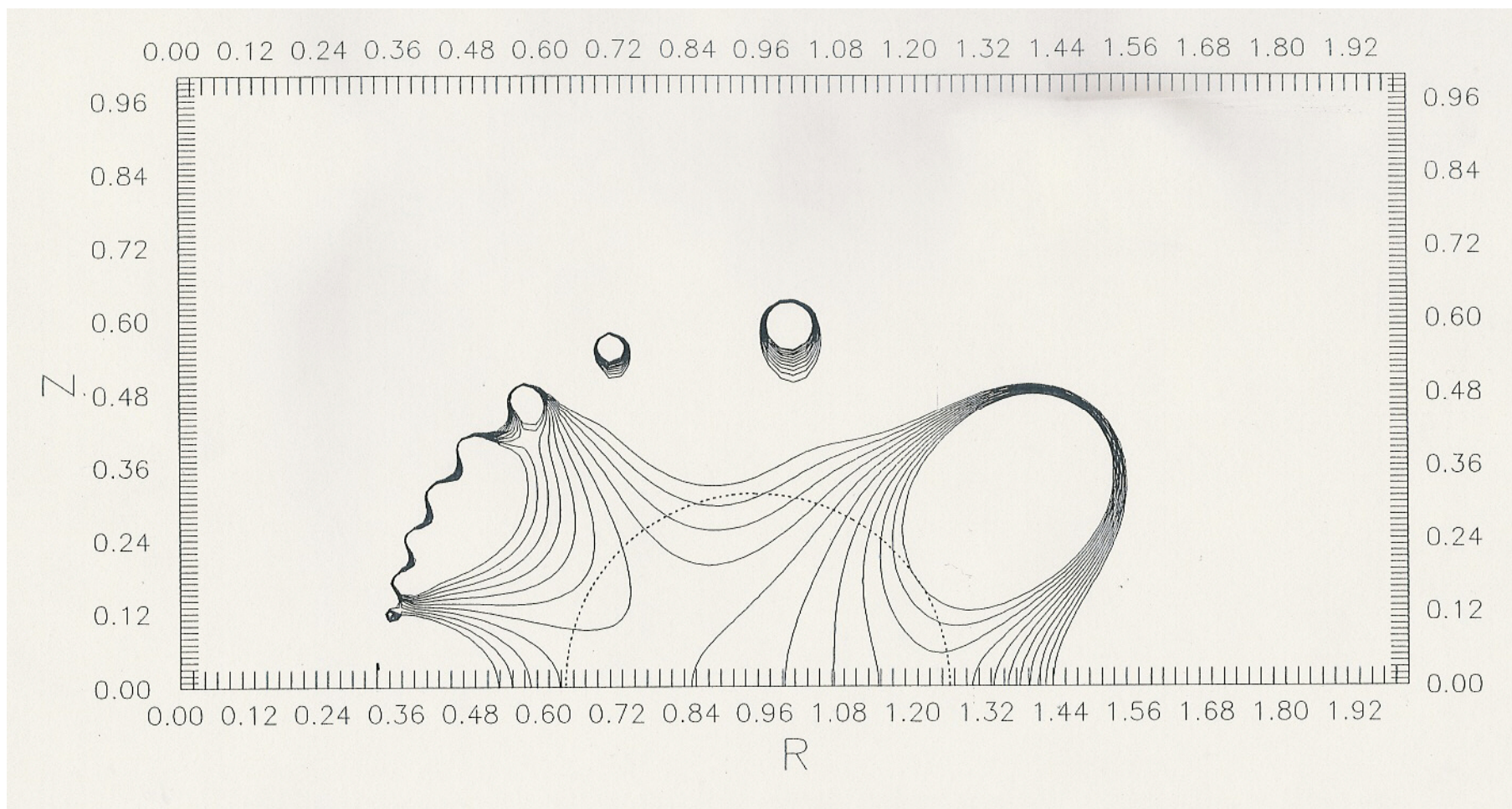


Fig. 5.3.6 - Mappa di campo relativa al minimo M_1 nella zona del plasma.

5.4 Applicazione al Sistema Poloidale di una macchina TOKAMAK per configurazioni con punti di nullo

Per la configurazione toroidale con plasma a D e due punti di nullo la regione di interesse Ω_i è una regione del piano azimutale con due spigoli (i punti di nullo) definita tramite il raggio maggiore $R_0=1.675$ m, il raggio minore $Z_0=0.623$ m, l'elongazione $\kappa=2.08$ e la triangolarità $\delta=0.67$. La curva Γ , bordo di Ω_i , risulta definita per punti [18]. La regione di interesse Ω_i e la curva Γ sono rappresentate in Fig. 5.4.1. La regione Ω_i è la zona di equilibrio del plasma. Poiché il plasma viene contenuto in una camera a vuoto toroidale, in Fig. 5.4.1 è rappresentata anche la traccia sul piano azimutale della prima parete della camera a vuoto.

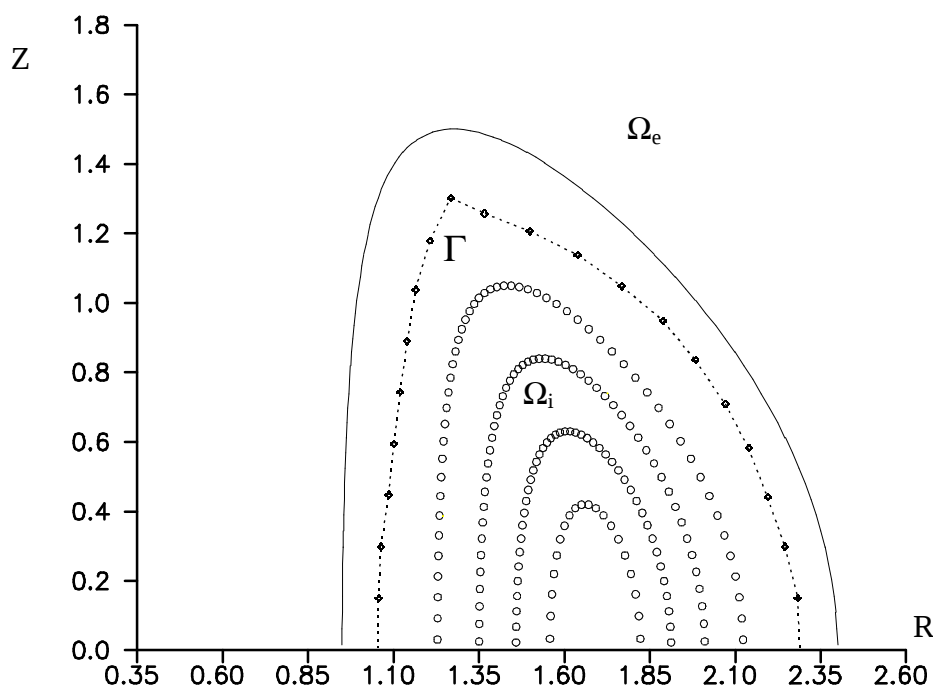


Fig. 5.4.1 - Sezione a D della configurazione toroidale assialsimmetrica con rappresentazione della regione di interesse, della prima parete della camera a vuoto e delle bobine filiformi che simulano il plasma.

La prima parete della camera a vuoto è parametrizzata da:

$$\begin{cases} Z = \kappa a \sin \mu \\ R = R_0 + a \cos(\mu + \delta \sin \mu) \end{cases}$$

Si è posto $R_0=1.675$ m, $a=0.725$ m, $\kappa=2.08$ e $\delta=0.67$ [18]. La corrente azimutale nel plasma si considera pari a 0.87 MA. La distribuzione della corrente nel plasma è stata simulata utilizzando 170 bobine filiformi distribuite in Ω_i . Tali bobine sono indicate in Fig. 5.4.1.

Il problema di sintesi consiste nella determinazione delle intensità di 2×12 correnti che percorrono 2×12 bobine, esterne alla prima parete. Sono incognite, inoltre, le posizioni ed i semispessori delle bobine. Si richiede un flusso costante $\psi=0.95$ Wb su Γ . I valori del flusso (termine noto) sono assegnati su 2×20 punti uniformemente distribuiti sulla curva Γ .

Affinché i conduttori restino nella regione esterna alla prima parete si introducono, nel problema di ottimizzazione (2.5.9), i seguenti vincoli di disuguaglianza:

$$g_j(R_j, Z_j) = (R_j - R_0)^2 + \frac{2}{\kappa} Z_j (R_j - R_0) \sin\left(\frac{\delta Z_j}{\kappa a}\right) + \left(\frac{Z_j}{\kappa}\right)^2 - \cos^2\left(\frac{\delta Z_j}{\kappa a}\right) \geq 0$$

dove R_j e Z_j sono rispettivamente il raggio e la quota dei vertici inferiori della generica bobina massiccia a sezione rettangolare. Il numero dei vincoli di disuguaglianza di questo tipo nel problema (2.5.9) è pari al doppio del numero delle bobine.

Dall'ottimizzazione sono stati ottenuti due minimi ordinati in Tab. 5.4.1 secondo la funzione penalizzata. La funzione penalizzata è calcolata come combinazione lineare dell'energia magnetica e della norma dei vincoli. In tale funzione si è posto $c_e=10^3$ e $c_d=10^4$. Il livello di affidabilità che si attribuisce al minimo G come possibile minimo globale, calcolato sia con la (3.2.15) sia con la (3.3.2), è superiore a 0.95. I tempi di calcolo della funzione penalizzata e del gradiente sono, rispettivamente, circa 508 s e 1473 s.

Tab. 5.4.1 - Successione dei minimi ottenuta dalla minimizzazione dell'energia magnetica del sistema di bobine massicce.

Minimo	W_m [MJ]	$\left \frac{\Delta\Psi}{\Psi} \right _{\Gamma}$	F
G	4.307	0.090 %	16.8
M_1	5.620	0.118 %	19.3

Il metodo ST ha utilizzato una traiettoria a passo oscillante con 600 iterazioni. Il tempo di calcolo necessario è circa 10^6 s. Dato che la funzione penalizzata è sempre positiva, si è posto $C=0$. Si sono scelti un parametro di sensitività unitario ed un passo iniziale di 10^{-5} . La traiettoria determina, con una approssimazione dell'1%, sia il minimo globale sia il minimo M_1 .

Il metodo (1+1) ES utilizza in media 600 chiamate della funzione penalizzata. Il tempo di calcolo necessario è circa $3 \cdot 10^5$ s. La probabilità di trovare il minimo globale è minore di 0.1. Questo ha portato ad un tempo di calcolo complessivo dell'ordine di $4 \cdot 10^6$ s.

Al metodo FF è stato accoppiato l'ottimizzatore (1+1) ES. Il parametro iniziale della filled function è stato posto $\rho^2=1000$. Il numero di chiamate della funzione è risultato circa 6000. Il tempo di calcolo necessario è dell'ordine di $3 \cdot 10^6$ s.

Tab. 5.4.2 - Posizioni, semispessori e correnti per il minimo G.

N	R [m]	Z [m]	I [kA]	S _R [cm]	S _Z [cm]
1	2.421	0.037	-28.16	2.0	3.4
2	2.380	0.388	-66.78	2.0	2.6
3	2.451	0.847	-222.08	2.9	2.3
4	2.047	1.159	-71.15	2.3	2.0
5	1.766	1.388	-114.96	2.2	2.4
6	1.256	1.732	-138.39	4.5	2.4
7	0.890	1.640	903.39	2.6	12.0
8	0.803	1.144	-303.78	2.3	11.9
9	0.907	0.741	-66.22	2.0	5.4
10	0.847	0.515	-205.76	3.1	2.3
11	0.910	0.138	-72.67	2.0	4.4
12	0.484	0.563	396.38	3.0	53.6

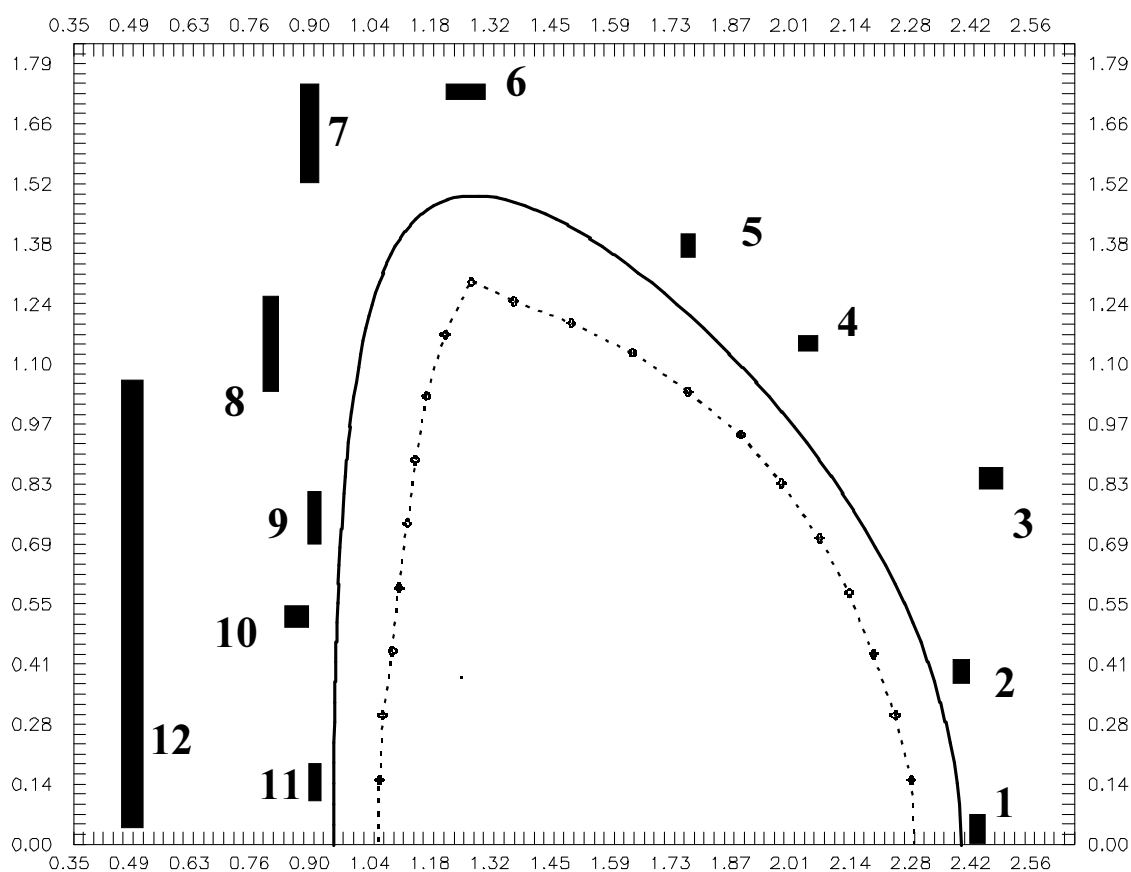


Fig. 5.4.2 - Posizioni delle correnti per il minimo G in relazione alla prima parete della camera a vuoto ed alla regione di interesse.

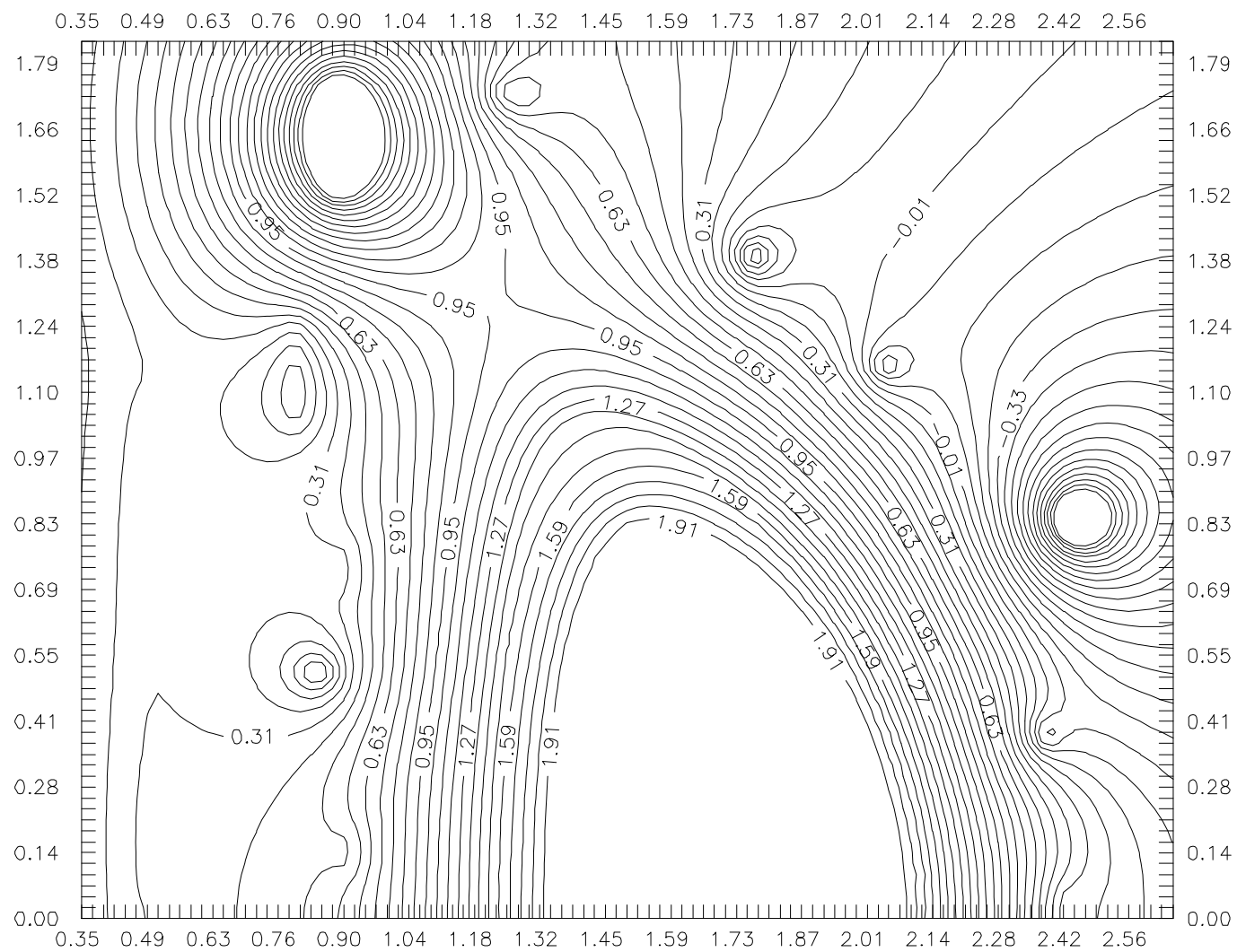


Fig. 5.4.3 - Mappa di campo relativa al minimo G.

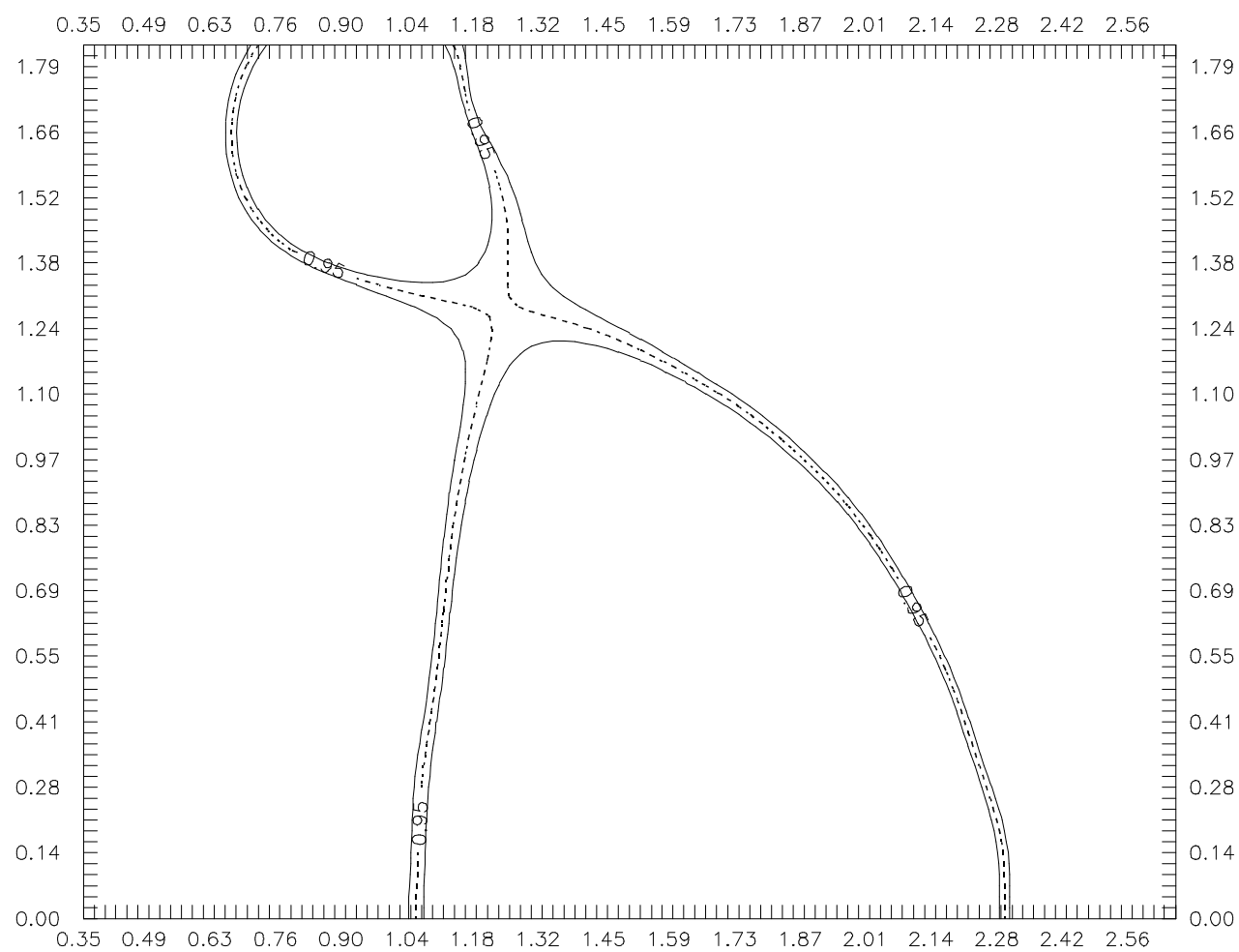


Fig. 5.4.4 - Linee di campo nella zona del punto di nullo relative al minimo G .

Tab. 5.4.3 - Posizioni, semispessori e correnti per il minimo M_I .

N	R [m]	Z [m]	I [kA]	S_R [cm]	S_Z [cm]
1	2.648	0.037	-44.926	4.4	3.4
2	2.402	0.386	-58.807	2.1	2.6
3	2.460	0.838	-205.590	2.1	2.0
4	2.168	1.158	-1.631	2.3	2.0
5	1.987	1.397	-203.119	2.0	2.3
6	1.256	1.730	-234.051	4.5	2.0
7	0.890	1.640	1088.704	2.5	12.0
8	0.802	1.145	-378.156	2.1	11.9
9	0.907	0.741	-62.329	2.0	4.3
10	0.847	0.515	-232.451	2.1	2.0
11	0.910	0.138	-84.865	2.0	4.4
12	0.484	0.563	584.953	3.0	53.6

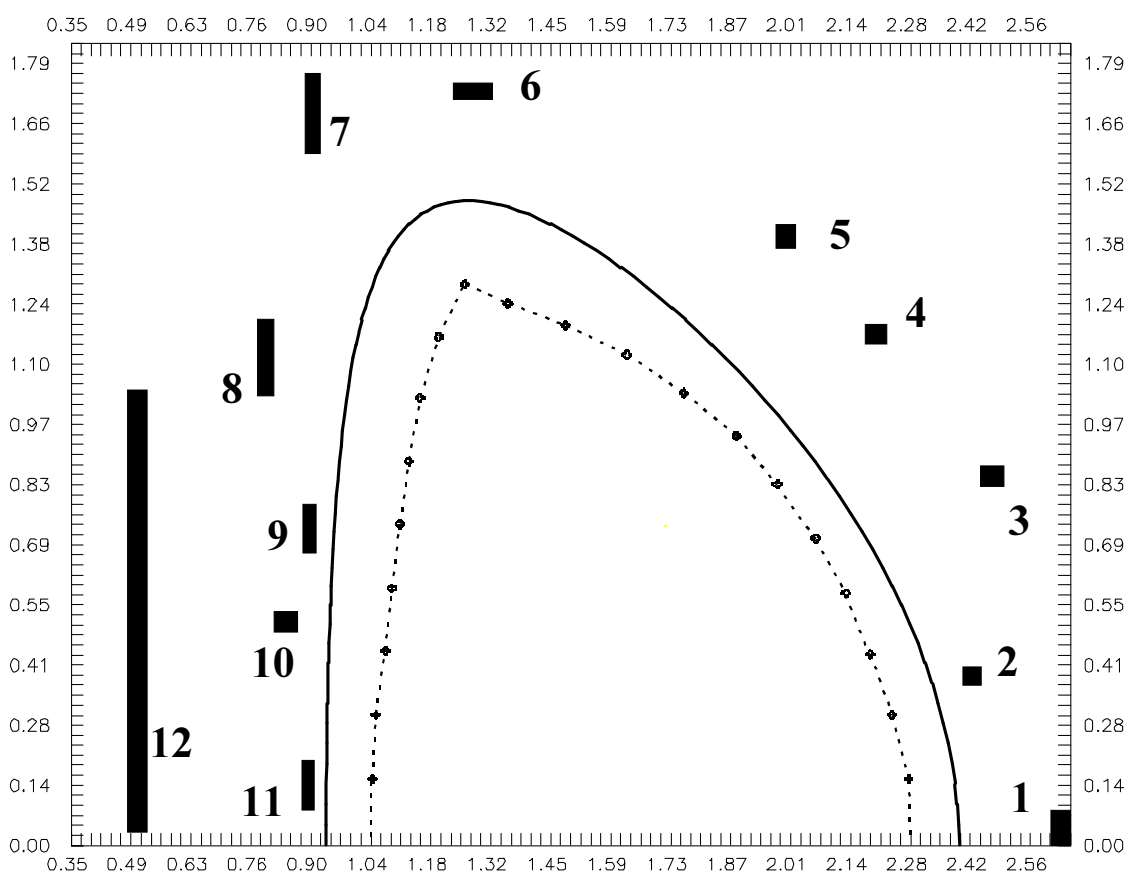


Fig. 5.4.5 - Posizioni delle correnti per il minimo M_I in relazione alla prima parete della camera a vuoto ed alla regione di interesse.



5.5 Applicazione al Sistema di Bobine Principale di un NMR

Per una macchina NMR la regione di interesse Ω_i è una regione semicircolare del piano azimutale con centro in (0,0) e raggio $a=0.25$ m [20, 21]. La curva Γ , bordo di Ω , risulta definita dall'equazione:

$$Z^2 + R^2 = a^2$$

La regione di interesse Ω_i e la curva Γ sono rappresentate in Fig. 5.5.1. Per potere accedere alla regione di interesse è necessario prevedere una zona di spazio in cui sono presenti correnti. Tale zona, detta zona di accesso, è un cilindro a sezione circolare coassiale con l'asse Z. La traccia del suo bordo su piano azimutale è definita dalla retta $R=R_0$, con $R_0=0.55$ m. La densità di corrente nella regione Ω_i si suppone nulla.

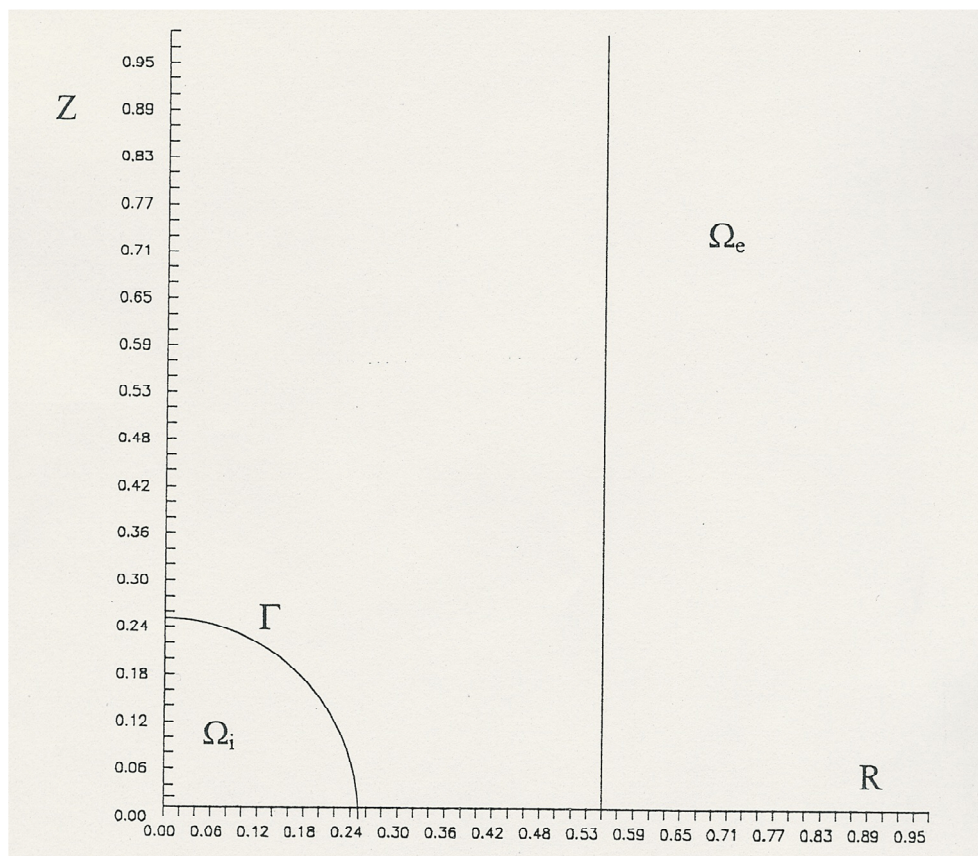


Fig. 5.5.1 – Sezione della configurazione assial-simmetrica di un NMR con rappresentazione della regione di interesse e della traccia della zona di accesso.

Il problema di sintesi consiste nella determinazione delle intensità di 2×5 correnti che percorrono 2×5 bobine, esterne alla zona di accesso. Sono incognite, inoltre, le posizioni ed i semispessori delle bobine. Si richiede di produrre un campo magnetico assiale uniforme $B_0 = 1.5 \text{ T}$ in Ω_i . I valori del campo (termine noto) sono assegnati su 2×40 punti uniformemente distribuiti sulla curva Γ .

Si è scelto di imporre che il sistema di correnti renda minimo il campo di induzione magnetica disperso. Il campo disperso è calcolato in 2×20 punti uniformemente distribuiti sulla traccia sul piano azimutale della superficie di un cilindro di raggio 3 m ed altezza 8 m concentrico e coassiale con la macchina. Tali punti sono indicati come $Q_m \equiv (R_m, Z_m)$. Il problema di sintesi è formulato come problema di ottimizzazione:

$$\begin{aligned} & \min_{(I, R, Z, S_R, S_Z)} \quad \max_m |\mathbf{B}(Q_m)| \\ & \text{soggetto a} \quad \begin{cases} [A(\mathbf{R}, \mathbf{Z}, \mathbf{S}_R, \mathbf{S}_Z)] \cdot \mathbf{c} - \Psi = 0 \\ g_j(\mathbf{R}, \mathbf{Z}, \mathbf{S}_R, \mathbf{S}_Z) \geq 0 \quad j = 1, \dots, r \end{cases} \end{aligned} \quad (5.5.1)$$

Affinché i conduttori restino all'esterno della zona di accesso, si introducono nel problema (5.5.1) i seguenti vincoli di disuguaglianza:

$$g_j(R_j, Z_j) = R_j - R_0 \geq 0$$

Dove R_j è il raggio dei vertici interni della generica bobina massiccia a sezione rettangolare. Il numero di tali vincoli nel problema (5.5.1) è pari al numero delle bobine.

Il problema (5.5.1) è stato risolto introducendo una funzione penalizzata, calcolata come combinazione lineare del campo disperso e della norma dei vincoli. Dalla minimizzazione della funzione penalizzata con $c_e = c_d = 10^4$ è stato ottenuto il minimo G . Un secondo minimo M è stato ottenuto ponendo $c_e = c_d = 10^7$ in modo da privilegiare il rispetto dei vincoli. Le caratteristiche di tali minimi sono messe a confronto nella Tab. 5.5.1.

Tab. 5.5.1 - Risultati ottenuti dalla minimizzazione della funzione penalizzata con diverse costanti di penalità.

Minimo	c_e, c_d	Campo disperso [T]	$ B - B_0 /B_0 _\Gamma$
G	10^4	10^{-4}	$5.7 \cdot 10^{-5}$
M	10^7	$4.65 \cdot 10^{-2}$	$1.2 \cdot 10^{-6}$

Poiché la funzione che descrive il campo disperso non è differenziabile, il metodo ST non è stato utilizzato. Il livello di affidabilità che si attribuisce al minimo G come possibile minimo globale, calcolato con la (3.3.2), è superiore a 0.95. Il tempo di calcolo della funzione penalizzata è circa 11 s.

La configurazione relativa al minimo G è riportata nella Tab. 5.5.2 ed illustrata in Fig. 5.5.2. Nella Fig. 5.5.3 sono riportate le linee di flusso nel semipiano (R, Z^+) . Nella Fig. 5.5.4 è riportata la mappa del campo disperso. La configurazione relativa al minimo M è riportata nella Tab. 5.5.3 ed illustrata in Fig. 5.5.5. Nella Fig. 5.5.3 sono riportate le linee di flusso nel semipiano (R, Z^+) . Nella Fig. 5.5.6 è riportata la mappa dell'errore sul campo di induzione magnetica nella regione di interesse Ω_i .

Il metodo (1+1) ES utilizza in media 900 chiamate della funzione penalizzata. Il tempo di calcolo necessario è circa 10^4 s. Tuttavia, la probabilità di trovare il minimo globale è minore di 0.1. Questo ha portato ad un tempo di calcolo complessivo dell'ordine di 10^5 s.

Al metodo FF è stato accoppiato l'ottimizzatore (1+1) ES. Il parametro iniziale della filled function è stato posto $p^2=100$. Il numero di chiamate della funzione è risultato circa 8000. Il tempo di calcolo necessario è dell'ordine di $9 \cdot 10^4$ s.

Tab. 5.5.2 - Posizioni, semispessori e correnti per il minimo G.

N	R [m]	Z [m]	I [kA]	S _R [cm]	S _Z [cm]
1	0.610	0.910	470.29	4.0	2.5
2	0.596	0.331	569.88	3.9	4.0
3	0.595	0.728	1344.15	3.9	8.0
4	0.885	0.180	-537.42	4.0	3.0
5	0.890	0.882	-555.23	4.5	4.0

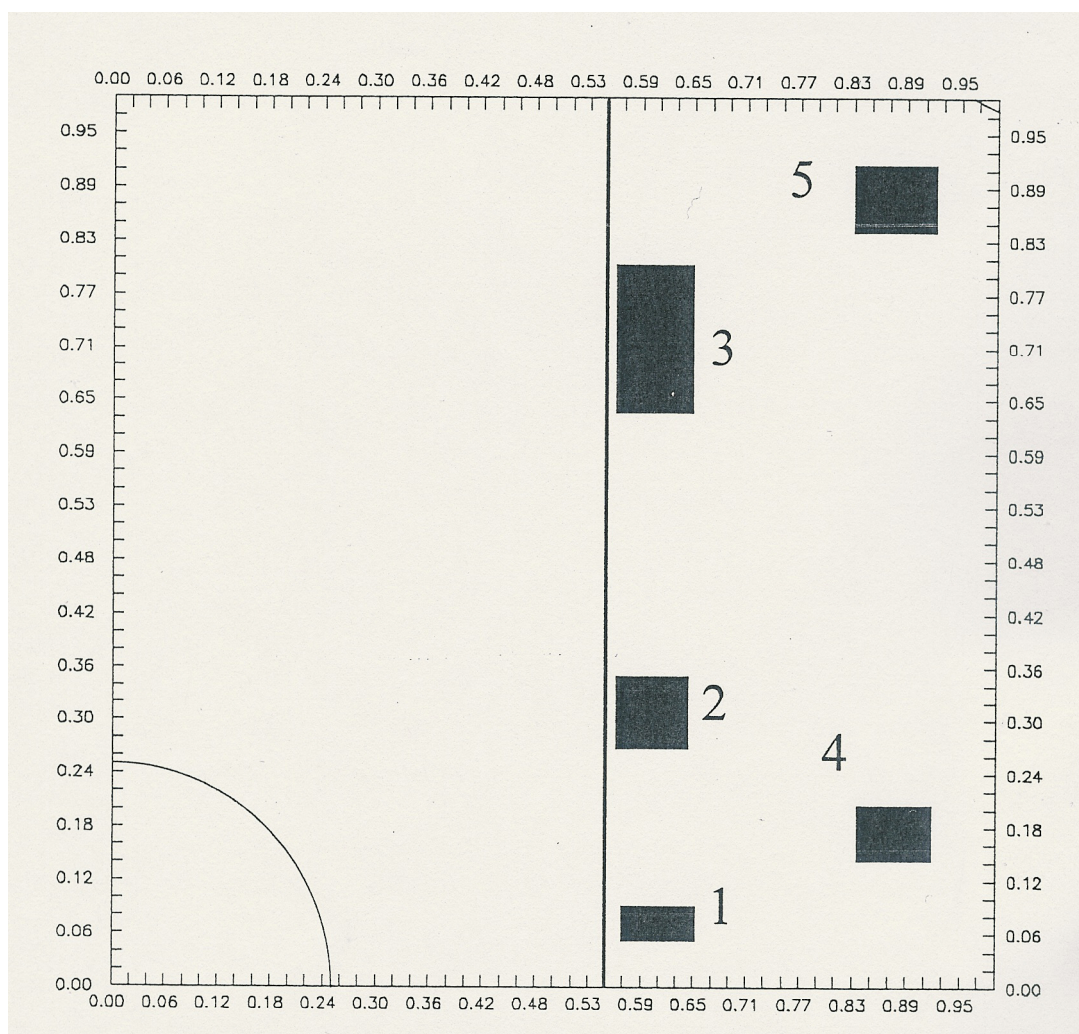


Fig. 5.5.2 - Posizioni delle correnti per il minimo G in relazione alla regione di interesse ed alla traccia della zona di accesso.

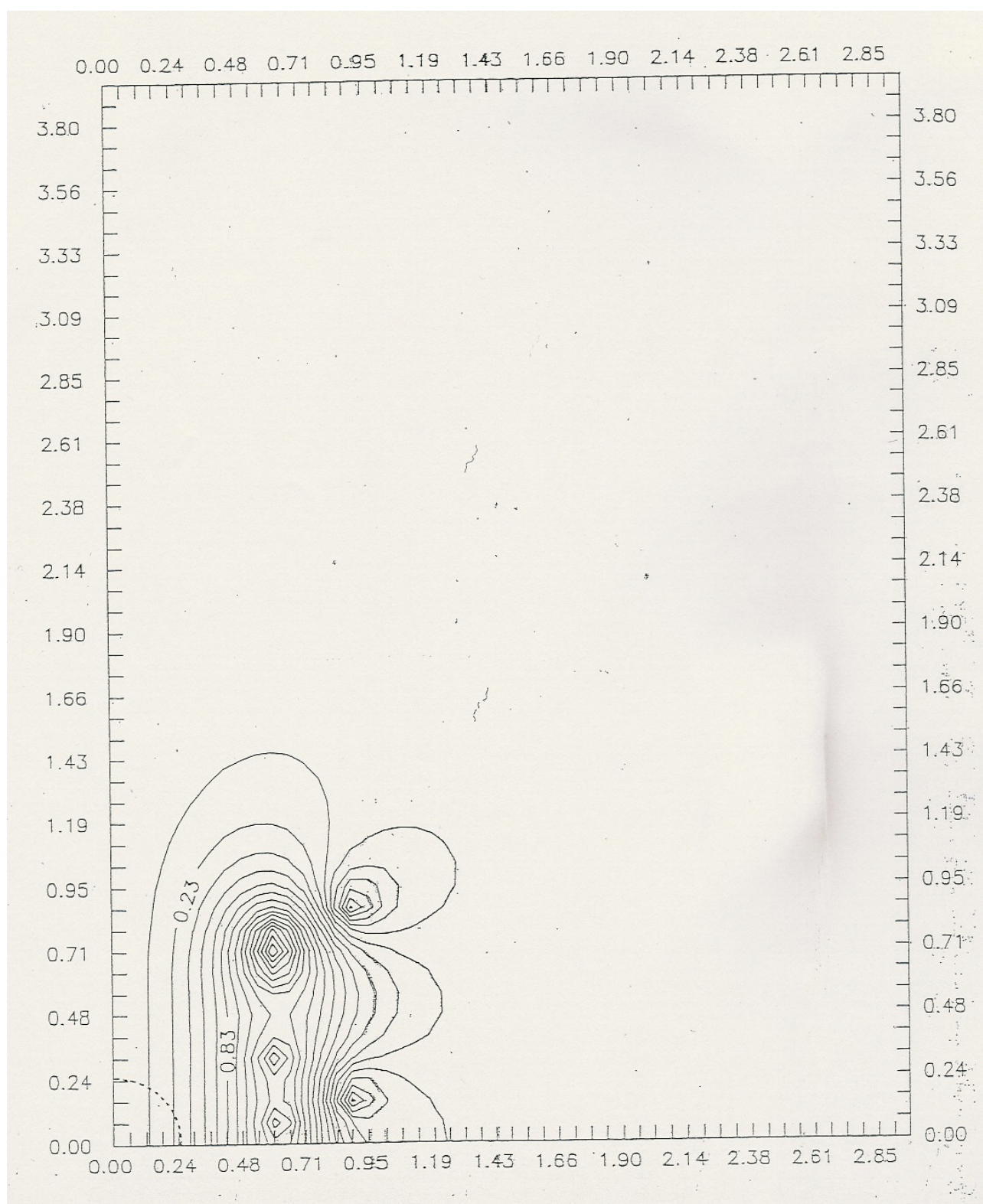
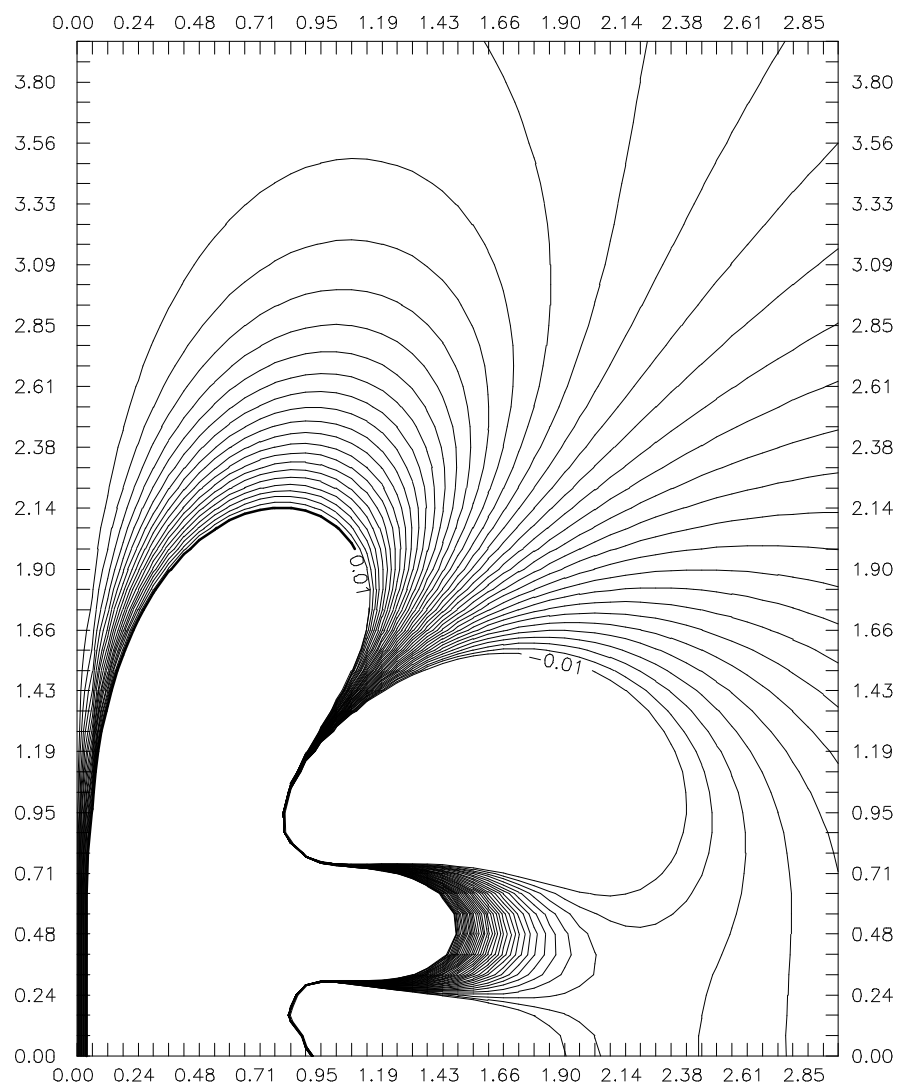


Fig. 5.5.3 - Mappa del campo di induzione magnetica disperso relativo al minimo G.



*Fig. 5.5.4 - Mappa del campo di induzione magnetica disperso relativo al minimo G.
Le linee di flusso sono comprese tra -10 e 10 mWb.*

Tab. 5.5.3 - Posizioni, semispessori e correnti per il minimo M .

N	R [m]	Z [m]	I [kA]	S_R [cm]	S_Z [cm]
1	0.600	0.950	-3.31	5.0	2.5
2	0.599	0.161	-0.930	5.1	4.0
3	0.601	0.730	-220.11	4.9	8.0
4	0.902	0.180	448.50	4.0	4.0
5	0.951	0.880	1985.01	4.0	4.1

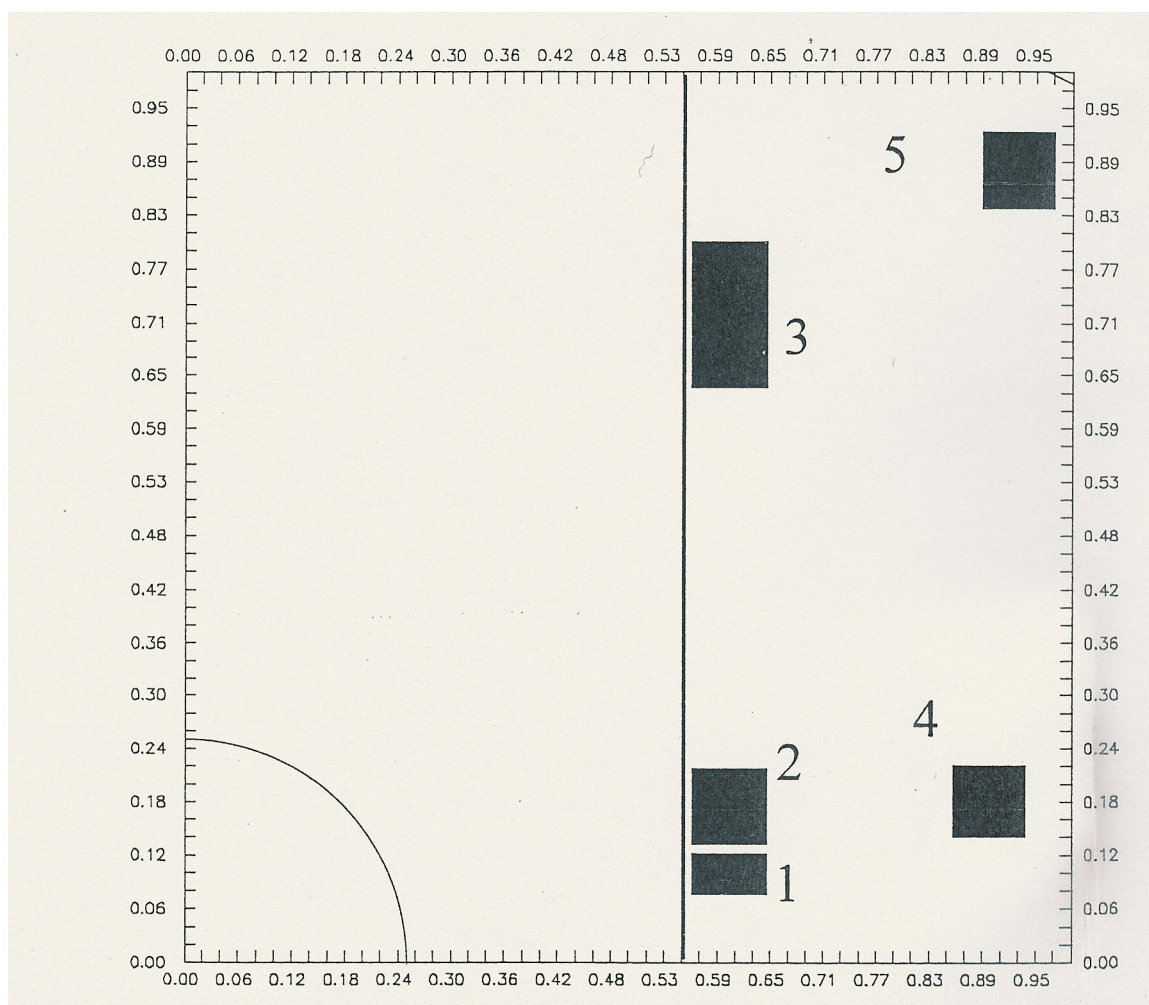


Fig. 5.5.5 - Posizioni delle correnti per il minimo M in relazione alla regione di interesse ed alla traccia della zona di accesso.

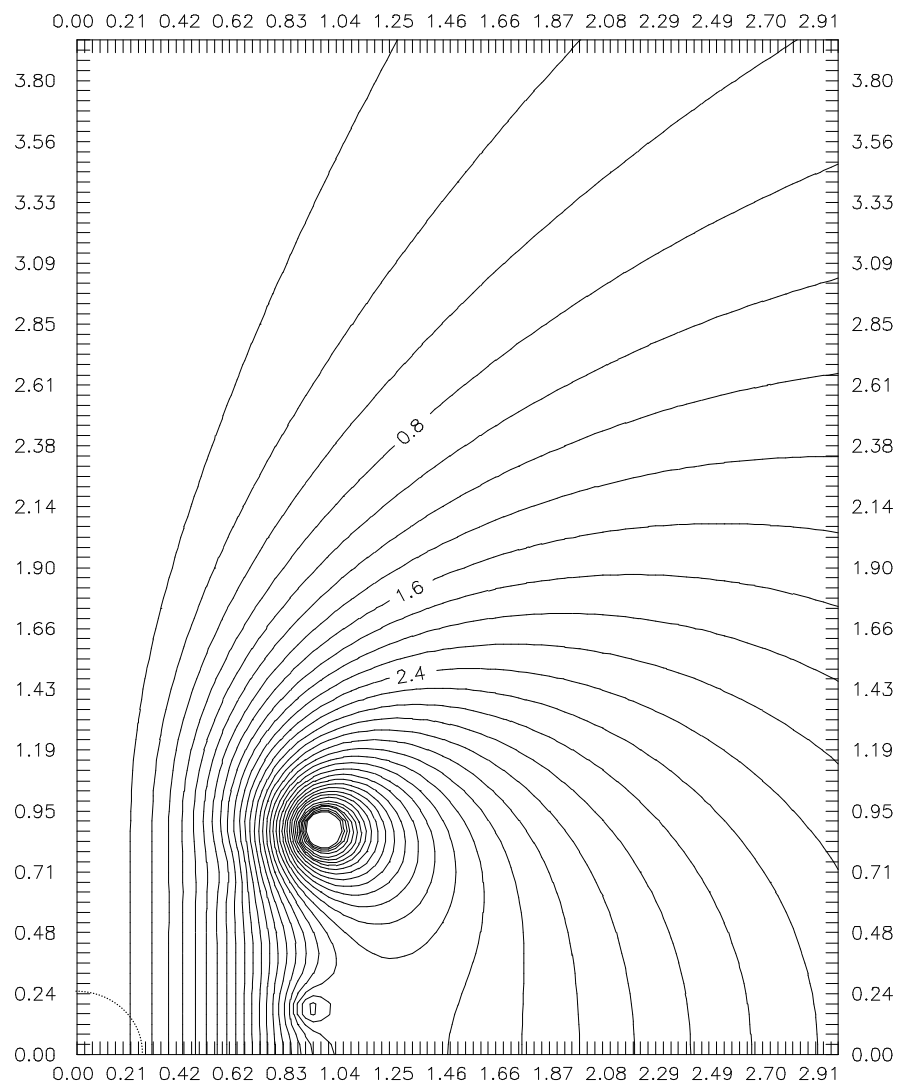


Fig. 5.5.6 - Mappa del campo di induzione magnetica relativa al minimo M.

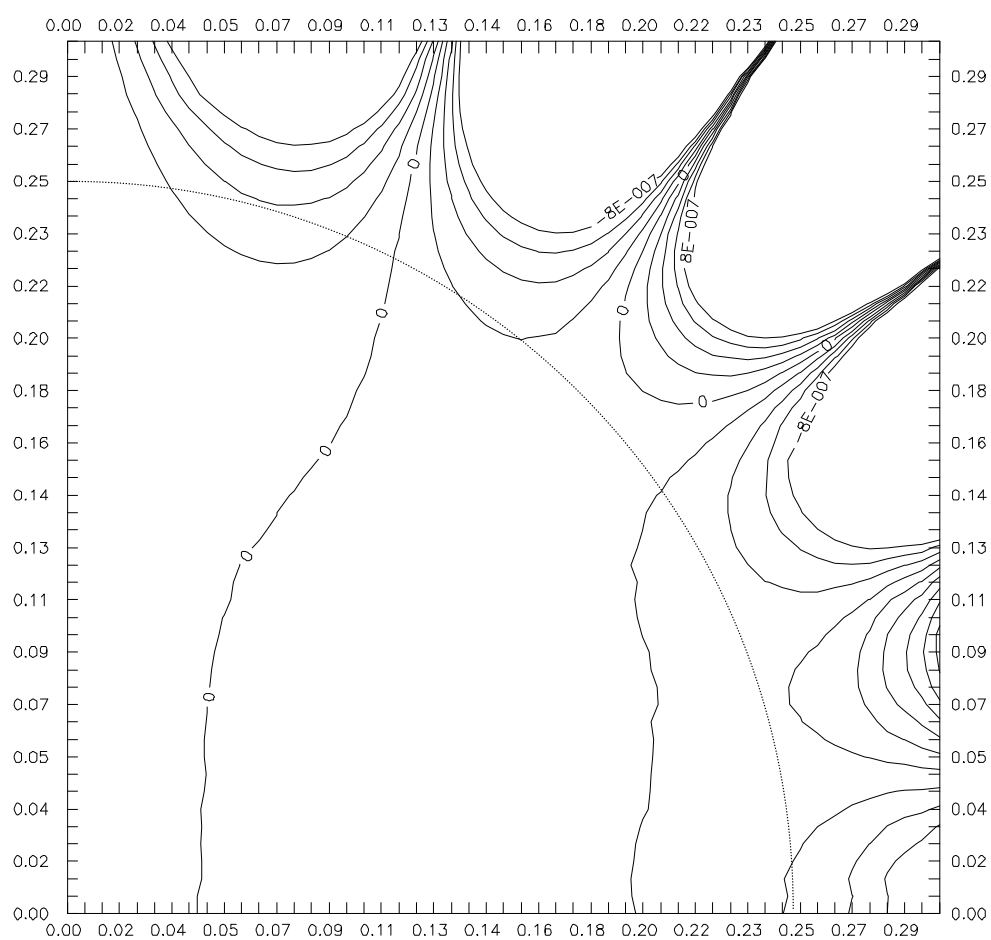


Fig. 5.5.7 - Andamento di $\frac{(B - B_0)}{B_0}$ nella regione di interesse relativamente al minimo M .

6. CONCLUSIONI

In questa tesi è stato analizzato il problema inverso elettromagnetico che consiste nella determinazione della distribuzione di densità di corrente che genera un dato campo magnetico. I dati di ingresso del problema sono i valori assunti dal campo in un assegnata regione dello spazio di dimensione finita. I dati in uscita sono rappresentati dalle posizioni e dalle intensità delle correnti, esterne alla regione, che producono il campo medesimo. Il problema inverso elettromagnetico, una volta discretizzato, può non avere soluzione. Qualora sia risolubile esso ha infinite soluzioni. Se non esiste soluzione del problema si assume come soluzione approssimata una configurazione a cui corrisponde un basso valore del residuo (errore massimo sul flusso richiesto).

Si è considerato il problema del progetto del campo magnetico assial-simmetrico sia nelle macchine toroidali per esperimenti sulla fusione termonucleare controllata a confinamento magnetico (TOKAMAK), sia nelle macchine per Risonanza Magnetica Nucleare (NMR).

La determinazione di una soluzione particolare del problema inverso costituisce un problema di sintesi elettromagnetica. Il problema di sintesi è stato formulato come problema di ottimizzazione non lineare vincolato. Per le configurazioni toroidali è stata scelta come funzione obiettivo una combinazione dell'energia magnetica del sistema di correnti e del residuo. Per le macchine NMR è stata scelta come funzione obiettivo una combinazione del campo disperso e del residuo.

Per la soluzione del problema magnetico sono stati utilizzati tre metodi di ottimizzazione globale:

- il metodo delle Search Trajectories (ST)
- il metodo delle Evolution Strategies (ES)
- il metodo delle Filled Functions (FF)

Il metodo ST necessita dell'espressione del gradiente. Il metodo ES necessita solo della funzione obiettivo. Il metodo FF richiede necessariamente l'accoppiamento con un metodo di ottimizzazione locale. Per la minimizzazione delle funzioni test si è utilizzato come ottimizzatore locale il metodo SQP. Per il problema magnetico è stato invece utilizzato come ottimizzatore locale il metodo (1+1) ES.

Tutti i metodi, come si è visto nelle applicazioni ai problemi test, convergono quasi sempre al minimo globale determinando anche vari minimi locali. In ogni caso alla fine del procedimento di calcolo si ottengono sempre minimi locali profondi, cioè si ottengono quelle soluzioni del problema inverso a cui corrispondono valori fra i più bassi della funzione obiettivo.

Dai risultati delle applicazioni e dal confronto con risultati ottenuti in precedenza si possono trarre le seguenti conclusioni:

- Il metodo ST determina sempre la zona dei minimi locali più profondi. Tuttavia, anche se localizza numerose soluzioni a basso valore della funzione obiettivo, non determina con precisione il minimo globale;
- Il metodo ES permette di ottenere rapidamente minimi precisi. Tuttavia, a causa della sua natura stocastica, richiede svariati tentativi per determinare il minimo globale;
- Il metodo FF determina, oltre al minimo globale, anche numerosi minimi locali. Esso permette di dimostrare la convergenza al minimo globale;
- I risultati ottenuti riproducono in parte risultati già noti, pertanto si può ritenere che i metodi per la determinazione del minimo globale considerati siano affidabili;

- I tre metodi necessitano di tempi di calcolo confrontabili con quelli dei metodi di ottimizzazione globale già noti (MonteCarlo, Simulated Annealing);
- E' possibile definire una strategia di ottimizzazione che utilizza solo i vantaggi dei tre metodi: si determina la zona dei minimi con il metodo ST, si localizza il minimo globale con precisione tramite il metodo ES e si dimostra che quello è il minimo globale con il metodo FF;
- Nelle configurazioni toroidali non è necessaria una discretizzazione particolarmente fine del flusso sul bordo della regione di interesse per ottenere la precisione richiesta dalla progettazione di massima del sistema di bobine poloidali;
- Nelle configurazioni toroidali ad un valore più basso dell'energia magnetica corrisponde spesso un valore più alto del residuo (errore massimo sul flusso richiesto);
- Nelle macchine NMR ad un valore più basso del campo disperso corrisponde un valore più alto del residuo (errore massimo sul campo richiesto);
- I minimi trovati nel caso di bobine massicce non si discostano molto da quelli ottenuti nel caso di bobine filiformi.

Quest'ultimo aspetto è molto utile se si considera che il tempo di calcolo dell'energia magnetica associata ad un sistema di bobine massicce è molto più lungo che nel caso di bobine filiformi. Pertanto può essere conveniente risolvere prima il problema considerando le bobine filiformi per poi utilizzare i minimi ottenuti come punti di partenza per la soluzione del problema magnetico con bobine massicce.

APPENDICI

A. Stabilità del Problema di Sintesi Discretizzato

Si è visto nel paragrafo 2.2 come la non stabilità del problema inverso elettromagnetico dipenda strettamente dallo spazio nullo dell'operatore $L[\cdot]$ e dalla sua linearità. Come si è già detto, anche la minimizzazione del residuo $\|L[\mathbf{J}_e] - \mathbf{b}\|$ non è un problema stabile. La discretizzazione non altera questa proprietà.

Al fine di determinare la stabilità dei problemi (2.5.8) e (2.5.9) si raggruppano le variabili geometriche in una sola variabile $\mathbf{X}$. I problemi (2.5.8) e (2.5.9) sono riformulati come segue:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{X}, \mathbf{I}} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{I}^t \cdot [\mathbf{M}(\mathbf{X})] \cdot \mathbf{I} \\ \text{soggetto a} \quad & \begin{cases} [\mathbf{A}(\mathbf{X})] \cdot \mathbf{I} = \Psi \\ g_j(\mathbf{X}) \geq 0, \quad j = 1, \dots, r \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Il problema di ottimizzazione vincolato (A.1) è trasformato con un metodo di penalizzazione in un problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min_{\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{I}} \left[\frac{1}{2} \mathbf{I}^t \cdot [\mathbf{M}(\mathbf{X})] \cdot \mathbf{I} + c_\psi \| [\mathbf{A}(\mathbf{X})] \cdot \mathbf{I} - \Psi \|^2 + c_g \sum_{j=1}^r \|g_j(\mathbf{X}) - z_j^2\|^2 \right] \quad (\text{A.2})$$

La non stabilità del problema inverso elettromagnetico dipende dalla linearità del campo di induzione magnetica e del flusso rispetto alle correnti. Al fine di determinare la stabilità del problema (A.2) è dunque determinante l'andamento della funzione penalizzata rispetto alle correnti per ogni configurazione geometrica $\mathbf{X}$. La stabilità rispetto a $\mathbf{X}$ non è, in generale, garantita. Tuttavia, la non linearità dei termini $[\mathbf{M}]$, $[\mathbf{A}]$ e dei vincoli di disuguaglianza e la loro diversa dipendenza da $\mathbf{X}$ è tale che il problema (A.2) risulta in pratica essere stabile rispetto ad $\mathbf{X}$. Ci si limita quindi a studiare la stabilità del problema:

$$\min_{\mathbf{I}} \left[\frac{1}{2} \mathbf{I}^t \cdot [\mathbf{M}] \cdot \mathbf{I} + c_{\Psi} \| [\mathbf{A}] \cdot \mathbf{I} - \Psi \|^2 \right] \quad (\text{A.3})$$

La dipendenza di $[\mathbf{M}]$ e di $[\mathbf{A}]$ dalla variabile $\mathbf{X}$ è sottintesa. Il termine dipendente dai vincoli di disuguaglianza è costante rispetto alle correnti e quindi è stato trascurato. Il problema (A.3) è stabile solo se l'energia magnetica è una funzione stabilizzante. Al fine di determinare la stabilità del problema (A.3) è utile un teorema dovuto a Tikhonov [21] che si enuncia come:

“Sia assegnata la funzione $e(\cdot)$, limitata inferiormente sul dominio compatto E (l'insieme dei punti interni non è vuoto ed unito al suo bordo coincide con l'insieme stesso). Sia assegnata inoltre la metrica $\rho_E(\cdot, \cdot)$. Si supponga che il problema della minimizzazione di $e(\cdot)$ nel dominio E non sia un problema stabile. In tal caso, se esistono:

- 1) una metrica $\tilde{\rho}(\cdot, \cdot)$ che sia un maggiorante di $\rho_E(\cdot, \cdot)$ e tale che gli insiemi $S_r(\mathbf{x}_0) \equiv \{ \mathbf{x} / \mathbf{x} \in E, \tilde{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \leq r \}$ siano compatti in E per ogni r reale e per ogni $\mathbf{x}_0 \in E$;
- 2) una funzione $\varphi(\cdot)$ monotona crescente non-negativa;

allora la funzione $\varepsilon(\mathbf{x}) = \varphi(\tilde{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0))$ è una funzione stabilizzante per il problema $\min_{\mathbf{x} \in E} e(\mathbf{x})$. Pertanto il problema $\min_{\mathbf{x} \in E} [e(\mathbf{x}) + \varepsilon(\mathbf{x})]$ è stabile”.

Si consideri il problema non stabile della minimizzazione del residuo rispetto alle correnti:

$$\min_{\mathbf{I}} \| [\mathbf{A}] \cdot \mathbf{I} - \Psi \|^2 \quad (\text{A.4})$$

E' necessario trovare una metrica $\tilde{\rho}(\cdot, \cdot)$ ed una funzione $\varphi(\cdot)$ tali da soddisfare le ipotesi del teorema enunciato. Si considerino a questo scopo le proprietà dell'energia magnetica. Come è noto, se si esclude il caso dell'accoppiamento magnetico perfetto, l'energia magnetica è strettamente positiva. Dunque, la matrice dei coefficienti di auto e mutua induzione $[\mathbf{M}]$ è definita positiva. In tal caso si verifica che, dati due vettori $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$, la grandezza $\langle \mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2 \rangle_{\mathbf{W}} = \eta^2 \mathbf{I}_1 \cdot [\mathbf{M}] \cdot \mathbf{I}_2$, con η costante positiva, è

bilineare e commutativa. Pertanto soddisfa le proprietà del prodotto scalare fra due vettori. La norma indotta da questo prodotto scalare, definita dalla quantità $\|\mathbf{I}\|_W = \eta(\mathbf{I} \cdot [\mathbf{M}] \cdot \mathbf{I})^{1/2}$, risulta quindi non-negativa e lineare e soddisfa le disuguaglianze triangolari. Si adottino dunque in $\mathbb{R}^N$ le metriche $\tilde{\rho}(\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2) = \|\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2\|_W$ e $\rho_E(\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2) = \|\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2\|_2$. Gli insiemi S_r sono quindi definiti dall'equazione $(\mathbf{I} - \mathbf{I}_0) \cdot [\mathbf{M}] \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{I}_0) \leq \left(\frac{r}{\eta}\right)^2$ che descrive un iperellissoide di centro $\mathbf{I}_0$. Poiché $[\mathbf{M}]$ è definita positiva gli insiemi S_r sono compatti. Inoltre, poiché $[\mathbf{M}]$ è una matrice reale simmetrica, il quoziente di Rayleigh è maggiore del minimo autovalore di $[\mathbf{M}]$ [22]. Tale autovalore minimo è strettamente positivo dato che $[\mathbf{M}]$ è definita positiva. Si ha quindi:

$$\frac{\mathbf{I} \cdot [\mathbf{M}] \cdot \mathbf{I}}{\mathbf{I} \cdot \mathbf{I}} \geq \min_{\mathbf{I} \neq 0} \left(\frac{\mathbf{I} \cdot [\mathbf{M}] \cdot \mathbf{I}}{\mathbf{I} \cdot \mathbf{I}} \right) = \lambda_{\min} > 0$$

Questo significa che:

$$\frac{\tilde{\rho}(\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2)}{\rho_E(\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2)} = \frac{\|\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2\|_W}{\|\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2\|_2} = \eta \sqrt{\frac{(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) \cdot [\mathbf{M}] \cdot (\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2)}{(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) \cdot (\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2)}} \geq \eta \lambda_{\min}^{1/2}$$

Quindi la metrica $\tilde{\rho}(\cdot, \cdot)$ è un maggiorante di $\rho_E(\cdot, \cdot)$ se e solo se $\eta \geq \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\min}}}$.

Considerando ora la funzione $\varphi(q) = \frac{1}{2c_\psi} \left(\frac{q}{\eta} \right)^2$, che è monotona crescente non-

negativa, il funzionale $Q(\mathbf{I}) = \varphi(\tilde{\rho}(\mathbf{I}, 0)) = \frac{1}{2c_\psi} \mathbf{I}^t \cdot [\mathbf{M}] \cdot \mathbf{I} = \frac{W_m}{c_\psi}$ risulta essere una

funzione stabilizzante. Pertanto risulta essere stabile il problema:

$$\min_{\mathbf{I}} \left[\frac{W_m}{c_\psi} + \|[A] \cdot \mathbf{I} - \Psi\|^2 \right]$$

Tale problema è legato al problema (A.3) da una relazione lineare. Pertanto il problema (A.3) è stabile.

B. Configurazioni Assialsimmetriche

Si consideri un sistema a geometria toroidale rispetto alla terna destra di coordinate cilindriche (R, ϕ, Z) con simmetria azimutale. Si impone quindi che:

$$\mathbf{J}(R, Z, \phi) = J(R, Z) \mathbf{u}_\phi$$

Si consideri l'equazione di Biot-Savart:

$$\mathbf{B}(R, Z, \phi) = \frac{\mu}{4\pi} \int_0^{+\infty} dR' \int_{-\infty}^{+\infty} dZ' \int_0^{2\pi} \left\{ \mathbf{J}(R', Z', \phi') \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \right\} R' d\phi'$$

con $\mathbf{r} = R \mathbf{u}_R + Z \mathbf{u}_Z$, $\mathbf{r}' = R' \mathbf{u}_{R'} + Z' \mathbf{u}_{Z'}$.

Tra la terna $(\mathbf{u}_R, \mathbf{u}_Z, \mathbf{u}_\phi)$ e la terna $(\mathbf{u}_{R'}, \mathbf{u}_{Z'}, \mathbf{u}_{\phi'})$ esistono le seguenti relazioni (Fig.B.1):

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{R'} = \cos(\phi' - \phi) \mathbf{u}_R + \sin(\phi' - \phi) \mathbf{u}_\phi \\ \mathbf{u}_{\phi'} = -\sin(\phi' - \phi) \mathbf{u}_R + \cos(\phi' - \phi) \mathbf{u}_\phi \\ \mathbf{u}_{Z'} = \mathbf{u}_Z \end{cases}$$

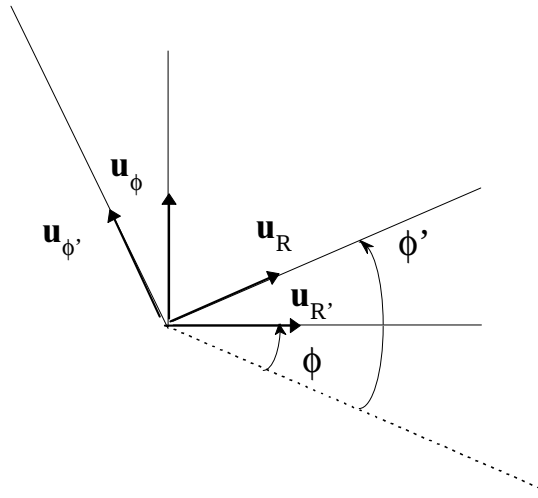


Fig. B.1 - Rappresentazione grafica delle relazioni fra le due terne di versori.

Quindi:

$$\begin{aligned}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= R \mathbf{u}_R - R' \mathbf{u}_{R'} + Z \mathbf{u}_Z - Z' \mathbf{u}_{Z'} \\ &= [R - R' \cos(\phi' - \phi)] \mathbf{u}_R - R' \sin(\phi' - \phi) \mathbf{u}_\phi + (Z - Z') \mathbf{u}_Z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| &= \sqrt{(R - R' \cos(\phi' - \phi))^2 + [R' \sin(\phi' - \phi)]^2 + (Z - Z')^2} \\ &= \sqrt{R^2 + R'^2 - 2RR' \cos(\phi' - \phi) + (Z - Z')^2}\end{aligned}$$

Dato che la terna (R, ϕ, Z) deve essere una terna destra si ha:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_R \times \mathbf{u}_\phi = \mathbf{u}_Z \\ \mathbf{u}_\phi \times \mathbf{u}_Z = \mathbf{u}_R \\ \mathbf{u}_Z \times \mathbf{u}_R = \mathbf{u}_\phi \end{cases}$$

Si riscrive quindi l'equazione di Biot-Savart nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(R, Z, \phi) &= \frac{\mu}{4\pi} \int_0^{+\infty} dR' \int_{-\infty}^{+\infty} dZ' \int_0^{2\pi} R' d\phi' \cdot J(R', Z') \mathbf{u}_{\phi'} \times \\ &\quad \times \frac{[R - R' \cos(\phi' - \phi)] \mathbf{u}_R - R' \sin(\phi' - \phi) \mathbf{u}_\phi + (Z - Z') \mathbf{u}_Z}{[R^2 + R'^2 - 2RR' \cos(\phi' - \phi) + (Z - Z')^2]^{3/2}}\end{aligned}$$

considerando che:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{\phi'} \times \mathbf{u}_R = -\cos(\phi' - \phi) \mathbf{u}_Z \\ \mathbf{u}_{\phi'} \times \mathbf{u}_\phi = -\sin(\phi' - \phi) \mathbf{u}_Z \\ \mathbf{u}_{\phi'} \times \mathbf{u}_Z = \sin(\phi' - \phi) \mathbf{u}_\phi + \cos(\phi' - \phi) \mathbf{u}_R \end{cases}$$

risulta:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{\phi'} \times (\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}') &= \mathbf{u}_{\phi'} \times [(R - R' \cos(\phi' - \phi)) \mathbf{u}_R - R' \sin(\phi' - \phi) \mathbf{u}_\phi + (Z - Z') \mathbf{u}_Z] = \\ &= [(R' - R \cos(\phi' - \phi))] \mathbf{u}_Z + (Z - Z') \sin(\phi' - \phi) \mathbf{u}_\phi + (Z - Z') \cos(\phi' - \phi) \mathbf{u}_R\end{aligned}$$

e quindi:

$$\mathbf{B}(\mathbf{R}, Z, \phi) = \frac{\mu}{4\pi} \int_0^{+\infty} dR' \int_{-\infty}^{+\infty} dZ' \int_0^{2\pi} R' d\phi' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{R}', Z') \cdot \frac{(Z - Z') \cdot \cos(\phi' - \phi) \mathbf{u}_R + (Z - Z') \cdot \sin(\phi' - \phi) \mathbf{u}_\phi + [R' - R \cos(\phi - \phi')] \mathbf{u}_Z}{[R^2 + R'^2 - 2RR' \cos(\phi - \phi') + (Z - Z')^2]^{3/2}}$$

Si pone $\alpha = (\phi' - \phi)$ e si effettua l'integrazione su $[0, 2\pi]$

$$\mathbf{B}(\mathbf{R}, Z, \phi) = \frac{\mu}{4\pi} \int_0^{+\infty} R' dR' \int_{-\infty}^{+\infty} dZ' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{R}', Z') \cdot \left\{ \left[\int_0^{2\pi} \frac{(Z - Z') \cos \alpha \cdot d\alpha}{\|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'\|^3} \right] \mathbf{u}_R + \left[\int_0^{2\pi} \frac{(Z - Z') \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha}{\|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'\|^3} \right] \mathbf{u}_\phi + \left[\int_0^{2\pi} \frac{(R' - R \cos \alpha) \cdot d\alpha}{\|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'\|^3} \right] \mathbf{u}_Z \right\}$$

dato che l'integrando è dispari, risulta $\int_0^{2\pi} \frac{(Z - Z') \cdot \sin \alpha d\alpha}{\|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'\|^3} = 0$

quindi si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{R}, Z, \phi) = & \frac{\mu}{4\pi} \int_0^{+\infty} R' dR' \int_{-\infty}^{+\infty} dZ' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{R}', Z') \cdot \\ & \left[\int_0^{2\pi} \frac{(Z - Z') \cdot \cos \alpha d\alpha}{[R^2 + R'^2 - 2RR' \cos \alpha + (Z - Z')^2]} \mathbf{u}_R + \right. \\ & \left. + \int_0^{2\pi} \frac{(R' - R \cos \alpha) d\alpha}{[R^2 + R'^2 - 2RR' \cos \alpha + (Z - Z')^2]} \mathbf{u}_Z \right] \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

E' evidente quindi che anche $\mathbf{B}$ è a simmetria azimutale ed ha componenti solo nel piano (R, Z) , cioè risulta:

$$\mathbf{B}(\mathbf{R}, Z, \phi) = B_R(\mathbf{R}, Z) \mathbf{u}_R + B_Z(\mathbf{R}, Z) \mathbf{u}_Z$$

Per quanto riguarda il potenziale vettore si ha:

$$\mathbf{A}(\bar{\mathbf{r}}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\tau_e} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d\mathbf{r}'$$

Quest'ultima equazione nelle ipotesi fatte si può scrivere come:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu}{4\pi} \int_0^{+\infty} dR' \int_{-\infty}^{+\infty} dZ' \int_0^{2\pi} \frac{J(R', Z') \cdot \mathbf{u}_\phi}{\sqrt{R^2 + R'^2 - 2RR' \cos(\phi' - \phi) + (Z - Z')^2}} R' d\phi' = \\
&= \frac{\mu}{4\pi} \int_0^{+\infty} dR' \int_{-\infty}^{+\infty} dZ' \int_0^{2\pi} \frac{J(R', Z') \cdot [-\sin(\phi' - \phi) \mathbf{u}_R + \cos(\phi' - \phi) \mathbf{u}_\phi]}{\sqrt{R^2 + R'^2 - 2RR' \cos(\phi' - \phi) + (Z - Z')^2}} R' d\phi'
\end{aligned}$$

Si effettua la sostituzione $\alpha = \phi' - \phi$ e si integra fra 0 e 2π .

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu}{4\pi} \int_0^{+\infty} dR' \int_{-\infty}^{+\infty} dZ' \int_0^{2\pi} \frac{J(R', Z') \cdot [-\sin \alpha \mathbf{u}_R + \cos \alpha \mathbf{u}_\phi]}{\sqrt{R^2 + R'^2 - 2RR' \cos \alpha + (Z - Z')^2}} d\alpha = \\
&= \frac{\mu}{4\pi} \int_0^{+\infty} R' dR' \int_{-\infty}^{+\infty} dZ' J(R', Z') \cdot \left\{ \left[-\int_0^{2\pi} \frac{\sin \alpha}{\|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'\|} d\alpha \right] \mathbf{u}_R + \left[\int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha}{\|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'\|} d\alpha \right] \mathbf{u}_\phi \right\}
\end{aligned}$$

Dato che la funzione che sta sotto il segno dell'integrale è dispari si ha che

$\int_0^{2\pi} \frac{\sin \alpha}{\|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'\|} d\alpha = 0$. Si considera quindi solo la componente azimutale:

$$A_\phi(R, Z) = \frac{\mu}{4\pi} \int_0^{+\infty} R' dR' \int_{-\infty}^{+\infty} dZ' J(R', Z') \int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha d\alpha}{\sqrt{R^2 + R'^2 - 2RR' \cos \alpha + (Z - Z')^2}}$$

Si definisce ora la funzione flusso scalare [7]:

$$\psi(R, Z) = 2\pi R A_\phi(R, Z)$$

Esso rappresenta il flusso di $\mathbf{B}$ attraverso il cerchio di raggio R e centro $(0, Z)$, pertanto $\psi(0, Z) = 0$. Inoltre, è possibile esprimere il campo magnetico in funzione del flusso magnetico:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} &= -\frac{\partial A_\phi}{\partial Z} \mathbf{u}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R A_\phi) \mathbf{u}_Z = \frac{1}{2\pi R} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial Z} \mathbf{u}_R + \frac{\partial \psi}{\partial R} \mathbf{u}_Z \right) \\
&= \frac{1}{2\pi R} \left(\frac{\partial \psi}{\partial Z} \mathbf{u}_Z \times \mathbf{u}_\phi + \frac{\partial \psi}{\partial R} \mathbf{u}_R \times \mathbf{u}_\phi \right) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial R} \mathbf{u}_R + \frac{\partial \psi}{\partial Z} \mathbf{u}_Z \right) \times \frac{\mathbf{u}_\phi}{2\pi R} \quad (\text{B.2}) \\
&= \nabla \psi \times \frac{\mathbf{u}_\phi}{2\pi R}
\end{aligned}$$

Dalla definizione di flusso scalare si ottiene quindi:

$$\psi(R, Z) = \frac{\mu}{2} \int_0^{+\infty} (RR') dR' \int_{-\infty}^{+\infty} dZ' J(R', Z') \int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha d\alpha}{\sqrt{R^2 + R'^2 - 2RR' \cos \alpha + (Z - Z')^2}}$$

Si pone:

$$\begin{aligned} H(R, R', Z, Z') &= \frac{\mu}{2} \int_0^{2\pi} \frac{RR' \cos \alpha \, d\alpha}{\sqrt{R^2 + R'^2 - 2RR' \cos \alpha + (Z - Z')^2}} = \\ &= \mu \int_0^\pi \frac{RR' \cos \alpha \, d\alpha}{\sqrt{R^2 + R'^2 - 2RR' \cos \alpha + (Z - Z')^2}} \end{aligned}$$

e quindi:

$$\psi(R, Z) = \int_0^{+\infty} dR' \int_{-\infty}^{+\infty} dZ' H(R, Z, R', Z') \cdot J(R', Z') \quad (B.3)$$

Con la sostituzione $\alpha = \pi - 2\theta$, e grazie alla relazione $\cos \alpha = 2 \sin^2 \theta - 1$, si ottiene:

$$H(R, Z, R', Z') = -2\mu RR' \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - 2 \sin^2 \theta)}{\sqrt{(R + R')^2 + (Z - Z')^2 - 4RR' \sin^2 \theta}} d\theta$$

Se si pone:

$$k^2 = \frac{4RR'}{(R + R')^2 + (Z - Z')^2}$$

allora:

$$\begin{aligned} H(R, Z, R', Z') &= -\mu k \sqrt{RR'} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - 2 \sin^2 \theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} d\theta = \\ &= -\mu k \sqrt{RR'} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(1 - \frac{2}{k^2}\right) + \frac{2}{k^2} (1 - k^2 \sin^2 \theta)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} d\theta = \\ &= -\mu \sqrt{RR'} \left[\left(k - \frac{2}{k}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} + \frac{2}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta \right] \end{aligned}$$

Si ha dunque:

$$H(R, R', Z, Z') = \frac{2\mu \sqrt{RR'}}{k} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K(k^2) - E(k^2) \right] \quad (B.4)$$

dove $K(\cdot)$ ed $E(\cdot)$ sono rispettivamente gli integrali ellittici completi di prima e seconda specie:

$$K(k^2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad E(k^2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

definiti per $k \in [0,1[$. Si può dunque scrivere:

$$H(R, R', Z, Z') = \frac{\mu}{2} \sqrt{RR'} \cdot \chi(k)$$

$$\chi(k) = \frac{4}{k^2} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2} \right) K(k^2) - E(k^2) \right]$$

La rappresentazione grafica della funzione $\chi(\cdot)$ è mostrata in Fig. B.2.

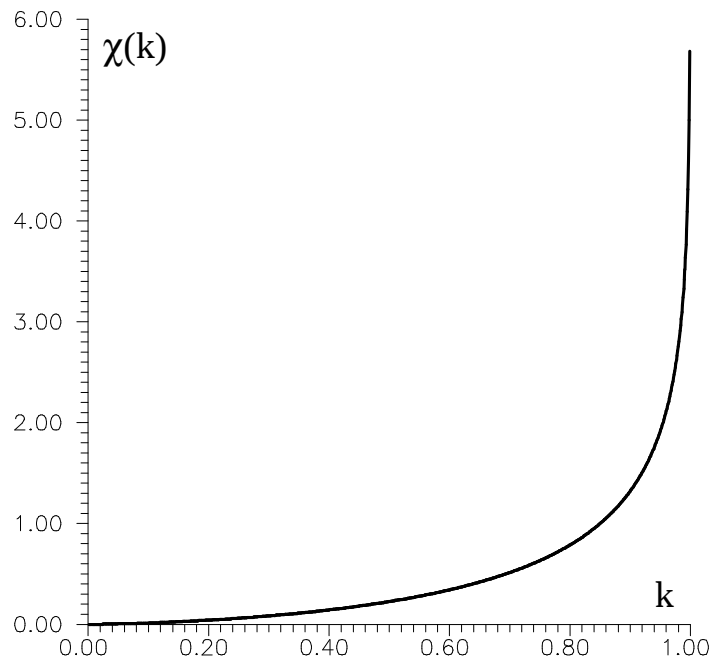


Fig. B.2 - Rappresentazione grafica della funzione $\chi(\cdot)$.

Si noti che $\chi(\cdot)$ diverge all'infinito per k^2 tendente ad uno. Si vede inoltre dalla definizione che $k^2=1$ implica esclusivamente $(R, Z)=(R', Z')$. Ciò significa che il flusso risulta divergente solo se calcolato sulla sezione della generica spira circolare filiforme.

L'energia magnetica associata alla configurazione assial-simmetrica è definita da:

$$\begin{aligned}
W_m &= \frac{1}{2} \int_{\tau_\infty} \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} dR \int_{-\infty}^{+\infty} dZ \int_0^{2\pi} J(R, Z) A_\phi(R, Z) R d\phi = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} dR \int_{-\infty}^{+\infty} J(R, Z) \cdot 2\pi R A_\phi(R, Z) dZ = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} dR \int_{-\infty}^{+\infty} dZ \{J(R, Z) \psi(R, Z)\}
\end{aligned} \tag{B.5}$$

Se si suppone che la densità di corrente sia, oltre che assialsimmetrica, a simmetria equatoriale, cioè $J(R, Z) = J(R, -Z)$, si può riscrivere la espressione del flusso (B.3) separando i contributi dei due semipiani di Z :

$$\psi(R, Z) = \int_0^{+\infty} dR' \cdot \left\{ \int_0^{+\infty} J(R', Z') H(R, R', Z, Z') dZ' + \int_{-\infty}^0 J(R', Z') H(R, R', Z, Z') dZ' \right\}$$

Si noti che la funzione $H(\cdot)$ è invariante per scambio di R con R' e di Z con Z' . Inoltre, si noti che la dipendenza da Z e Z' è contenuta solo in k^2 , nel termine $(Z-Z')^2$. Si effettua quindi un cambio di segno ottenendo:

$$\psi(R, Z) = \int_0^{+\infty} dR' \int_0^{+\infty} dZ' J(R', Z') \cdot [H(R, R', Z, Z') + H(R, R', Z, -Z')]$$

Allo stesso modo è possibile calcolare $\psi(R, -Z)$ che, grazie alla definizione di k^2 , risulta uguale a $\psi(R, Z)$. Si ottiene dunque un'equazione per il flusso formalmente identica alla (B.3):

$$\psi(R, Z) = \int_0^{+\infty} dR' \int_0^{+\infty} dZ' H_s(R, Z, R', Z') \cdot J(R', Z') \tag{B.6}$$

dove si è posto $H_s(R, R', Z, Z') = H(R, R', Z, Z') + H(R, R', Z, -Z')$.

Si consideri ora l'equazione (B.5). Si può riscrivere tale espressione separando i contributi dei due semipiani di Z . Poiché sia $J(R, Z)$ che $\psi(R, Z)$ sono simmetria equatoriale, l'energia magnetica diventa:

$$W_m = \int_0^{+\infty} dR \int_0^{+\infty} dZ \psi(R, Z) \cdot J(R, Z) \tag{B.7}$$

C. Conduttori Filiformi

Allo scopo di risolvere il problema di sintesi elettromagnetica (2.3.1) sia l'energia magnetica (B.5), associata alla densità di corrente incognita J_e , sia il flusso magnetico (B.3) devono essere discretizzati. Si supponga di schematizzare la distribuzione di densità di corrente J_e mediante un sistema di N conduttori circolari filiformi.

Considerando N correnti filiformi si ponga dunque:

$$J_e(R, Z) = \sum_{i=1}^N I_i \cdot \delta(R - R_i) \cdot \delta(Z - Z_i) \quad (C.1)$$

dove $\delta(\cdot)$ è la funzione delta di Dirac. Le variabili R_i e Z_i sono, rispettivamente, raggio e quota della i -esima spira filiforme. La I_i rappresenta la corrente che percorre la i -esima spira filiforme. Dalla (B.3) si ottiene:

$$\psi(R, Z) = \sum_{i=1}^N I_i \cdot H(R, R_i, Z, Z_i) \quad (C.2)$$

La discretizzazione di ψ si effettua calcolando la funzione flusso scalare su M punti appartenenti alla curva Γ . Tali punti nel seguito saranno indicati come $P_{\Gamma, m} \equiv (R_{\Gamma, m}, Z_{\Gamma, m})$ con $m=1, \dots, M$.

Si ottiene quindi:

$$\psi(R_{\Gamma, m}, Z_{\Gamma, m}) = \sum_{i=1}^N I_i \cdot H(R_{\Gamma, m}, R_i, Z_{\Gamma, m}, Z_i), \quad m = 1, \dots, M$$

Posto $H_{mn} = H(R_{\Gamma, m}, R_n, Z_{\Gamma, m}, Z_n)$ si ha, in forma matriciale:

$$[H] \cdot \mathbf{I} = \Psi \quad (C.3)$$

I tre vettori N -dimensionali che definiscono completamente la configurazione sono $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_N)$, $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_N)$ ed $\mathbf{I} = (I_1, \dots, I_N)$. Il vettore M -dimensionale $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_M)$ è costituito dai valori della funzione flusso scalare negli M punti che discretizzano la curva Γ . $[H]$ è una matrice $M \times N$ che dipende solo da $\mathbf{R}$ e da $\mathbf{Z}$. La (2.5.3) è un sistema di M equazioni in $3N$ incognite (posizioni e intensità delle correnti) che stabilisce un legame lineare fra Ψ e $\mathbf{I}$ e non lineare fra Ψ e $\mathbf{R}, \mathbf{Z}$.

L'energia magnetica definita dalla (B.5) e discretizzata con la (C.1) è:

$$\begin{aligned}
 W_m &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N I_i \cdot \psi(R_i, Z_i) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N I_i I_j \cdot H(R_i, R_j, Z_i, Z_j) \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{I}^t \cdot [\mathbf{M}] \cdot \mathbf{I}
 \end{aligned} \tag{C.4}$$

I coefficienti di mutua induzione M_{ij} (con $i \neq j$) si calcolano semplicemente:

$$M_{ij} = H(R_i, R_j, Z_i, Z_j)$$

Per il calcolo dei coefficienti di autoinduzione M_{ii} , poiché $H(R_i, R_i, Z_i, Z_i)$ risulta divergente, si è considerata una bobina filiforme circolare di raggio r_w pari a 1 mm. Supponendo $r_w \ll R_i$, risulta [23]:

$$M_{ii} = \mu R_i \left[\ln\left(\frac{8R_i}{r_w}\right) - \frac{7}{4} - \frac{r_w}{2R_i} + \frac{3r_w^2}{16R_i^2} \ln\left(\frac{8R_i}{r_w}\right) + O\left(\frac{r_w^2}{R_i^2}\right) \right]$$

Il problema di sintesi in forma continua (2.3.1) per correnti filiformi si riconduce al problema di minimizzare la (C.4) con le condizioni di vincolo espresse dal sistema (C.3).

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \frac{1}{2} \mathbf{I}^t \cdot [\mathbf{M}(\mathbf{R}, \mathbf{Z})] \cdot \mathbf{I} \\
 \text{soggetto a} \quad & \begin{cases} [\mathbf{H}(\mathbf{R}, \mathbf{Z})] \cdot \mathbf{I} - \Psi = 0 \\ g_j(\mathbf{R}, \mathbf{Z}) \geq 0, \quad j = 1, \dots, r \end{cases}
 \end{aligned} \tag{C.5}$$

Nel problema (C.5) vi sono r vincoli geometrici di disuguaglianza che sono imposti agli N conduttori per motivi tecnici e teorici.

Si intende ora calcolare il gradiente della funzione obiettivo e dei vincoli definiti nel problema (C.5). Si dovranno calcolare pertanto le derivate parziali rispetto alle variabili $\mathbf{R}=(R_1, \dots, R_N)$, $\mathbf{Z}=(Z_1, \dots, Z_N)$ ed $\mathbf{I}=(I_1, \dots, I_N)$ delle funzioni W_m , h_m e g_j . Si riscrive quindi in forma estesa il problema (C.5):

$$\begin{aligned} \min \quad & W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N I_i M_{ij} I_j \\ \text{soggetto a} \quad & \begin{cases} h_m(\mathbf{I}, \mathbf{R}, \mathbf{Z}) = \sum_{i=1}^N H(R_i, Z_i, R_{\Gamma, m}, Z_{\Gamma, m}) I_i - \psi_m = 0 \\ \quad \quad \quad , m = 1, \dots, M \\ g_j(\mathbf{R}, \mathbf{Z}) \geq 0 \quad , j = 1, \dots, r \end{cases} \end{aligned}$$

La derivata parziale di W_m rispetto alla generica corrente I_n è:

$$\frac{\partial W_m}{\partial I_n} = \sum_{i=1}^N I_i M_{in}$$

La derivata parziale di W_m rispetto al generico raggio R_n è:

$$\frac{\partial W_m}{\partial R_n} = \frac{I_n^2}{2} \frac{\partial M_{nn}}{\partial R_n} + I_n \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^N I_i \frac{\partial M_{in}}{\partial R_n}$$

La derivata parziale di W_m rispetto alla generica quota Z_n è:

$$\frac{\partial W_m}{\partial Z_n} = \frac{I_n^2}{2} \frac{\partial M_{nn}}{\partial Z_n} + I_n \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^N I_i \frac{\partial M_{in}}{\partial Z_n}$$

La derivata parziale di h_m rispetto alla generica corrente I_n è:

$$\frac{\partial h_m}{\partial I_n} = H(R_i, Z_i, R_{\Gamma, m}, Z_{\Gamma, m})$$

La derivata parziale di h_m rispetto al generico raggio R_n è:

$$\frac{\partial h_m}{\partial R_n} = I_n \frac{\partial H}{\partial R}(R_n, Z_n, R_{\Gamma, m}, Z_{\Gamma, m})$$

La derivata parziale di h_m rispetto alla generica quota Z_n è:

$$\frac{\partial h_m}{\partial Z_n} = I_n \frac{\partial H}{\partial Z}(R_n, Z_n, R_{\Gamma, m}, Z_{\Gamma, m})$$

Per quanto riguarda le derivate dei coefficienti di autoinduzione risulta:

$$\frac{\partial M_{nn}}{\partial R_n} = \mu \left[\ln \left(\frac{8R_n}{r_w} \right) - \frac{3}{4} - \frac{3r_w^2}{16R_n^2} \ln \left(\frac{8R_n}{r_w} \right) + O \left(\frac{r_w^2}{R_n^2} \right) \right]$$

$$\frac{\partial M_{nn}}{\partial Z_n} = 0$$

Per quanto riguarda le derivate dei coefficienti di mutua induzione risulta:

$$\frac{\partial M_{in}}{\partial R_n} = \frac{\partial H}{\partial R}(R_i, R_n, Z_i, Z_n)$$

$$\frac{\partial M_{in}}{\partial Z_n} = \frac{\partial H}{\partial Z}(R_i, R_n, Z_i, Z_n)$$

E' necessario quindi determinare $\frac{\partial H}{\partial R}$ e $\frac{\partial H}{\partial Z}$. A questo scopo è bene premettere le derivate degli integrali ellittici completi di prima e seconda specie:

$$\frac{dE}{dk}(k^2) = \frac{E(k^2) - K(k^2)}{k} \qquad \frac{dK}{dk}(k^2) = \frac{E(k^2)}{k(1-k^2)} - \frac{K(k^2)}{k}$$

Risulta quindi, in base alla definizione della funzione $\chi(\cdot)$ precedentemente data:

$$\frac{d\chi}{dk}(k) = \frac{4}{k^2} \left[\frac{\left(1 - \frac{k^2}{2}\right)}{(1-k^2)} E(k^2) - K(k^2) \right]$$

La rappresentazione grafica della funzione $\frac{d\chi}{dk}(\cdot)$ è mostrata in Fig. C.1. Si noti che

$\frac{d\chi}{dk}(\cdot)$ diverge all'infinito per k^2 tendente ad uno. Si vede inoltre dalla definizione che $k^2=1$ implica esclusivamente $(R, Z)=(R', Z')$.

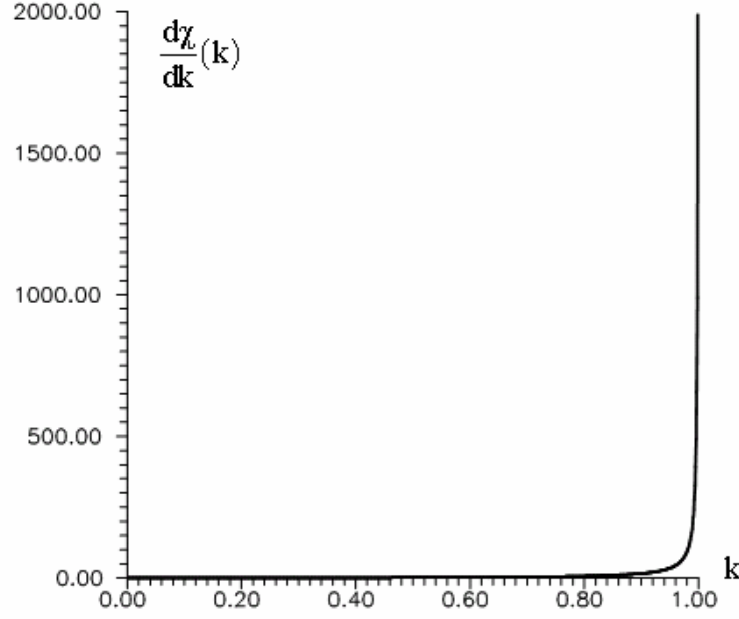


Fig. C.1 - Rappresentazione grafica della funzione $d\chi/dk$.

Si premettono inoltre le derivate della funzione k rispetto a R e Z :

$$\frac{\partial k}{\partial Z} = -\frac{2(Z - Z')\sqrt{RR'}}{[(R + R')^2 + (Z - Z')^2]^{3/2}} \quad \frac{\partial k}{\partial R} = \sqrt{\frac{R'}{R}} \frac{R'^2 - R^2 + (Z - Z')^2}{[(R + R')^2 + (Z - Z')^2]^{3/2}}$$

Con queste premesse risulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial R}(R, R', Z, Z') &= \frac{H(R, R', Z, Z')}{2R} + \frac{\mu\sqrt{RR'}}{2} \cdot \frac{d\chi}{dk}(k(R, R', Z, Z')) \cdot \frac{\partial k}{\partial R}(R, R', Z, Z') \\ \frac{\partial H}{\partial Z}(R, R', Z, Z') &= \frac{\mu\sqrt{RR'}}{2} \cdot \frac{d\chi}{dk}(k(R, R', Z, Z')) \cdot \frac{\partial k}{\partial Z}(R, R', Z, Z') \end{aligned}$$

Si noti che l'energia magnetica, i vincoli di uguaglianza, il gradiente dell'energia magnetica ed il gradiente dei vincoli di uguaglianza sono tutti analitici.

D. Conduttori Massicci

Allo scopo di risolvere il problema di sintesi elettromagnetica (2.3.1) sia l'energia magnetica (B.5), associata alla densità di corrente incognita J_e , sia il flusso magnetico (B.3) devono essere discretizzati. Si supponga di schematizzare la distribuzione di densità di corrente J_e mediante un sistema di N conduttori circolari massicci a sezione rettangolare [24, 25].

La densità di corrente sia uniforme all'interno di ogni bobina a sezione rettangolare (Fig. D.1). Sia I_i l'intensità di corrente che percorre la i -esima bobina. Siano R_i e Z_i , rispettivamente, raggio e quota del centro della i -esima bobina. Siano inoltre S_{R_i} , S_{Z_i} i semispessori radiale ad assiale, rispettivamente, della i -esima bobina.

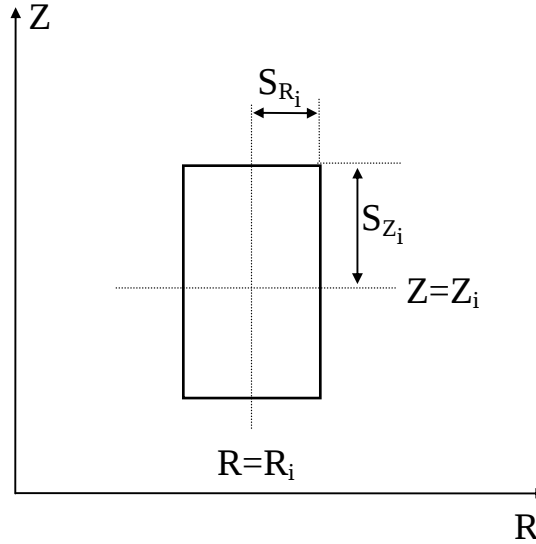


Fig. D.1 - Rappresentazione delle caratteristiche geometriche della sezione rettangolare della i -esima bobina massiccia.

Se si considera un sistema di N bobine a sezione rettangolare la densità di corrente sarà data da:

$$J_e(R, Z) = \sum_{i=1}^N I_i \cdot \Delta(R - R_i, S_{R_i}) \cdot \Delta(Z - Z_i, S_{Z_i}) \quad (D.1)$$

Si è posto $\Delta(x, a) = \frac{1}{2a} U(a + x)U(a - x)$, dove $U(\cdot)$ è la funzione a gradino unitaria di Heaviside. L'andamento della funzione $\Delta(\cdot)$ è mostrato in Fig. D.2. Le sue proprietà fondamentali sono:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(x, a) dx = 1;$$

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \Delta(x, a) = \delta(x)$$

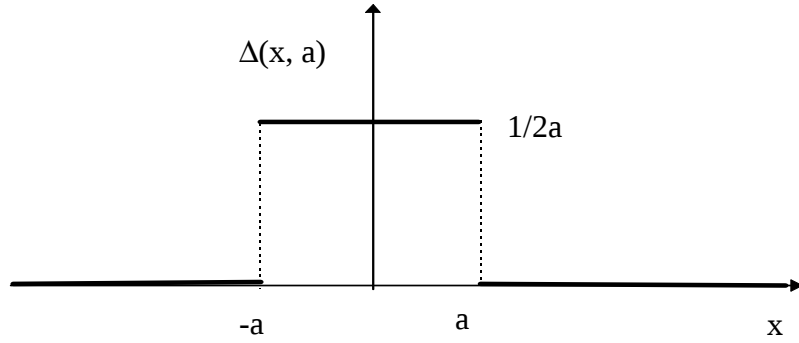


Fig. D.2 - Andamento della funzione $\Delta(x, a)$

Dalla (B.3) si ottiene:

$$\psi(R, Z) = \sum_{i=1}^N I_i \cdot \Lambda(R, Z, R_i, Z_i, S_{R_i}, S_{Z_i}) \quad (D.2)$$

La funzione $\Lambda(\cdot)$ è data da:

$$\begin{aligned} \Lambda(R, Z, R_i, Z_i, S_{R_i}, S_{Z_i}) &= \\ &= \frac{\mu}{8S_{R_i} S_{Z_i}} \int_{R_i - S_{R_i}}^{R_i + S_{R_i}} R R' dR' \int_{Z_i - S_{Z_i}}^{Z_i + S_{Z_i}} dZ' \int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha d\alpha}{\sqrt{R^2 + R'^2 - 2RR' \cos \alpha + (Z - Z')^2}} \end{aligned}$$

Effettuando le integrazioni su R' e Z' si ottiene:

$$\begin{aligned} \Lambda(R, Z, R_i, Z_i, S_{R_i}, S_{Z_i}) &= -\mu \frac{2\pi}{3} R^3 \Delta(R - R_i, S_{R_i}) \Delta(Z - Z_i, S_{Z_i}) + \\ &+ \frac{\mu}{4S_{R_i} S_{Z_i}} \left[\left[\hat{\Lambda}(R, Z, R', Z') \right]_{R'=R_i - S_{R_i}}^{R'=R_i + S_{R_i}} \right]_{Z'=Z_i - S_{Z_i}}^{Z'=Z_i + S_{Z_i}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}(R, Z, R', Z') &= R^2 \gamma \mathfrak{I}(R, R', \gamma) + \\ &+ \frac{k\gamma}{12(R'R)^{1/2}} \left\{ R' \left[(4\gamma^2 + 3R'^2 - 5R^2) K(k^2) - \frac{4R'R}{k^2} E(k^2) \right] + \right. \\ &- (2R^2 - \gamma^2) \sqrt{\gamma^2 + R^2} \left[\frac{R' + \sqrt{\gamma^2 + R^2}}{R - \sqrt{\gamma^2 + R^2}} \Pi(n_1^2, k^2) - \frac{R' - \sqrt{\gamma^2 + R^2}}{R + \sqrt{\gamma^2 + R^2}} \Pi(n_2^2, k^2) \right] + \\ &\left. + \frac{R'(R' - R)}{R' + R} (3R^2 - R'^2) \Pi(n_3^2, k^2) \right\} \end{aligned}$$

$$\text{dove } \gamma=(Z-Z'), \quad n_1^2 = \frac{2R}{R - \sqrt{\gamma^2 + R^2}}, \quad n_2^2 = \frac{2R}{R + \sqrt{\gamma^2 + R^2}}, \quad n_3^2 = \frac{4R'R}{(R + R')^2} \text{ e}$$

$$k^2 = \frac{4R'R}{(R + R')^2 + \gamma^2}.$$

La funzione

$$\mathfrak{I}(R, R', \gamma) = \int_0^{\pi/2} \text{Arcsinh} \left(\frac{R' + R \cos 2\theta}{\sqrt{\gamma^2 + R^2 \sin^2 2\theta}} \right) d\theta$$

deve essere calcolata numericamente poiché non è esprimibile analiticamente, in forma chiusa, in termini di funzioni elementari. Essa viene calcolata numericamente mediante integrazione col metodo di Gauss-Kronrod [26].

Le funzioni speciali $K(k^2)$, $E(k^2)$ e $\Pi(\alpha^2, k^2)$ sono gli integrali ellittici completi di prima, seconda e terza specie. Per quanto riguarda gli integrali ellittici completi di prima e seconda specie si rimanda all'appendice B. L'integrale ellittico completo di terza specie è definito da:

$$\Pi(\alpha^2, k^2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1 - \alpha^2 \sin^2 \theta) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$$

La funzione speciale $\Pi(\cdot, \cdot)$ si calcola tramite gli integrali ellittici completi ed incompleti di prima e seconda specie. La formulazione analitica varia in dipendenza dai valori di α^2 e k^2 . Per quanto riguarda i dettagli tecnici del calcolo di $\Pi(\cdot, \cdot)$ si rimanda alla bibliografia [27]. La rappresentazione grafica della funzione $\Pi(\cdot, \cdot)$ è mostrata in Fig. D.3. Si noti che $\Pi(\cdot, \cdot)$ diverge all'infinito sia per k^2 tendente ad uno sia per α^2 tendente ad uno.

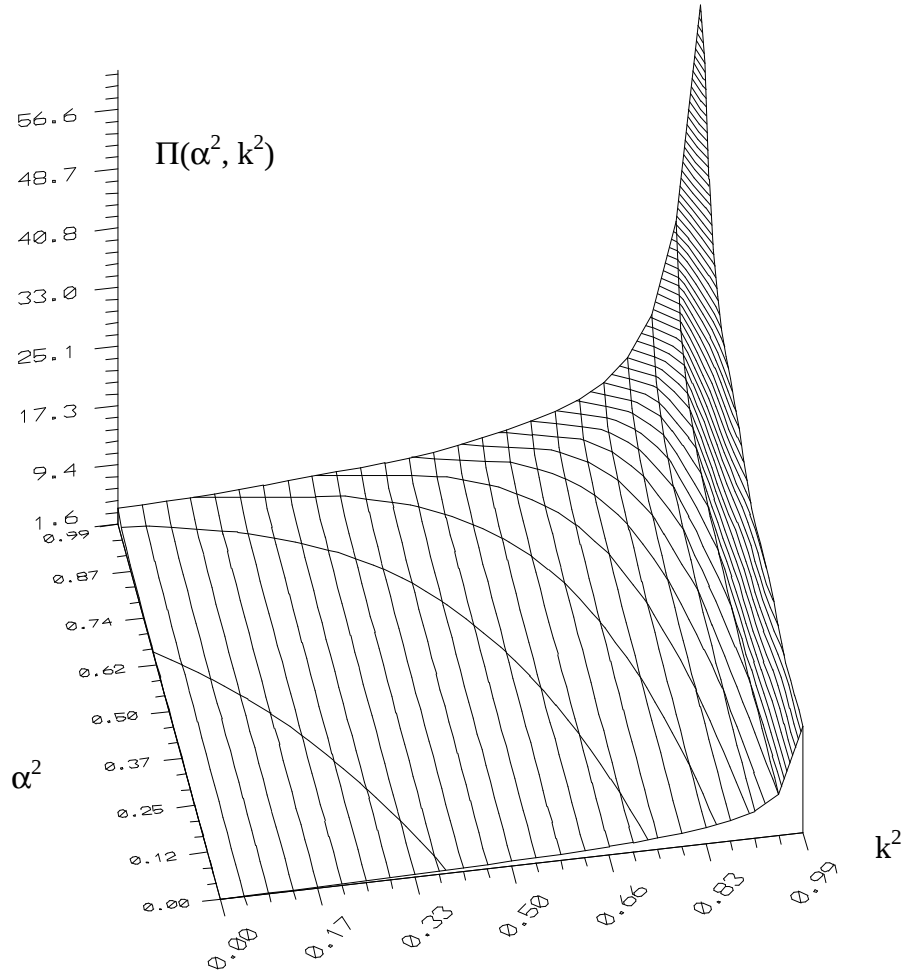


Fig. D.3 - Rappresentazione grafica della funzione $\Pi(\alpha^2, k^2)$.

La discretizzazione di ψ si effettua, anche in questo caso, calcolando la funzione flusso scalare su M punti appartenenti alla curva Γ . Si ottiene quindi:

$$\psi(R_{\Gamma,m}, Z_{\Gamma,m}) = \sum_{i=1}^N I_i \cdot \Lambda(R_{\Gamma,m}, Z_{\Gamma,m}, R_i, Z_i, S_{R_i}, S_{Z_i}), \quad m = 1, \dots, M$$

Posto $A_{mn} = \Lambda(R_{\Gamma,m}, Z_{\Gamma,m}, R_n, Z_n, S_{R_n}, S_{Z_n})$ si ha, in forma matriciale:

$$[A] \cdot \mathbf{I} = \Psi \quad (D.3)$$

La configurazione risulta essere completamente determinata dai cinque vettori $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_N)$, $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_N)$, $\mathbf{S}_{R_i} = (S_{R_1}, \dots, S_{R_N})$, $\mathbf{S}_{Z_i} = (S_{Z_1}, \dots, S_{Z_N})$ ed $\mathbf{I} = (I_1, \dots, I_N)$.

Il vettore $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_M)$ è costituito dai valori assegnati alla funzione flusso scalare

negli M punti che discretizzano la curva Γ . $[A]$ è una matrice $M \times N$ che dipende solo da $\mathbf{R}, \mathbf{Z}, \mathbf{S}_{R_i}, \mathbf{S}_{Z_i}$. La (D.3) è un sistema di M equazioni in $5N$ incognite che stabilisce un legame lineare fra Ψ e $\mathbf{I}$ e non lineare fra Ψ e $\mathbf{R}, \mathbf{Z}, \mathbf{S}_{R_i}, \mathbf{S}_{Z_i}$.

Per quanto riguarda l'energia magnetica, la discretizzazione della (B.5) tramite la (D.1) fornisce:

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{I_i}{4 S_{R_i} S_{Z_i}} \int_{R_i - S_{R_i}}^{R_i + S_{R_i}} dR \int_{Z_i - S_{Z_i}}^{Z_i + S_{Z_i}} dZ \psi(R, Z)$$

Risulta quindi analogamente al caso delle bobine filiformi:

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N I_i I_j M_{ij} = \frac{1}{2} \mathbf{I}^t \cdot [\mathbf{M}] \cdot \mathbf{I} \quad (\text{D.4})$$

L'espressione dei coefficienti M_{ij} come funzione di $\mathbf{R}, \mathbf{Z}, \mathbf{S}_{R_i}, \mathbf{S}_{Z_i}$ è data da:

$$M_{ij}(\mathbf{R}, \mathbf{Z}, \mathbf{S}_R, \mathbf{S}_Z) = \frac{1}{4 S_{R_i} S_{Z_i}} \int_{R_i - S_{R_i}}^{R_i + S_{R_i}} dR \int_{Z_i - S_{Z_i}}^{Z_i + S_{Z_i}} dZ \Lambda(\mathbf{R}, \mathbf{Z}, \mathbf{R}_j, \mathbf{Z}_j, \mathbf{S}_{R_j}, \mathbf{S}_{Z_j})$$

I coefficienti M_{ij} si calcolano numericamente mediante integrazione col metodo di Gauss-Kronrod [26].

Il problema di sintesi in forma continua (2.3.1) per bobine massicce si riconduce al problema di minimizzare la (D.4) con le condizioni di vincolo espresse dal sistema (D.3):

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \mathbf{I}^t \cdot [\mathbf{M}(\mathbf{R}, \mathbf{Z}, \mathbf{S}_R, \mathbf{S}_Z)] \cdot \mathbf{I} \\ \text{soggetto a} \quad & \begin{cases} [\mathbf{A}(\mathbf{R}, \mathbf{Z}, \mathbf{S}_R, \mathbf{S}_Z)] \cdot \mathbf{I} - \Psi = 0 \\ g_j(\mathbf{R}, \mathbf{Z}, \mathbf{S}_R, \mathbf{S}_Z) \geq 0, \quad j = 1, \dots, r \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Nel problema (D.5) vi sono r vincoli geometrici di disuguaglianza che sono imposti agli N conduttori per motivi tecnici e teorici.

Si intende ora calcolare il gradiente della funzione obiettivo e dei vincoli definiti in (D.5). Si dovranno calcolare pertanto le derivate parziali delle funzioni W_m , h_m e g_j

rispetto alle variabili $\mathbf{R}=(R_1, \dots, R_N)$, $\mathbf{Z}=(Z_1, \dots, Z_N)$, $\mathbf{S}_{R_i}=(S_{R_1}, \dots, S_{R_N})$, $\mathbf{S}_{Z_i}=(S_{Z_1}, \dots, S_{Z_N})$ ed $\mathbf{I}=(I_1, \dots, I_N)$. Si riscrive quindi in forma estesa il problema (D.5):

$$\begin{aligned} \min \quad & W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N I_i M_{ij} I_j \\ \text{soggetto a } & \begin{cases} h_m = \sum_{i=1}^N \Lambda(R_{\Gamma,m}, Z_{\Gamma,m}, R_i, Z_i, S_{R_i}, S_{Z_i}) I_i - \psi_m = 0 \\ \quad \quad \quad , m = 1, \dots, M \\ g_j \geq 0 \quad , j = 1, \dots, r \end{cases} \end{aligned}$$

La derivata parziale di h_m rispetto alla generica corrente I_n è:

$$\frac{\partial h_m}{\partial I_n} = \Lambda(R_{\Gamma,m}, Z_{\Gamma,m}, R_n, Z_n, S_{R_n}, S_{Z_n})$$

La derivata parziale di h_m rispetto al generico raggio R_n è:

$$\frac{\partial h_m}{\partial R_n} = I_n \left[\lambda_R^{[n]}(R_{\Gamma,m}, Z_{\Gamma,m}, R_n + S_{R_n}) - \lambda_R^{[n]}(R_{\Gamma,m}, Z_{\Gamma,m}, R_n - S_{R_n}) \right]$$

La derivata parziale di h_m rispetto alla generica quota Z_n è:

$$\frac{\partial h_m}{\partial Z_n} = I_n \left[\lambda_Z^{[n]}(R_{\Gamma,m}, Z_{\Gamma,m}, Z_n + S_{Z_n}) - \lambda_Z^{[n]}(R_{\Gamma,m}, Z_{\Gamma,m}, Z_n - S_{Z_n}) \right]$$

La derivata parziale di h_m rispetto al generico semispessore radiale S_{R_n} è:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_m}{\partial S_{R_n}} = I_n \left[\lambda_R^{[n]}(R_{\Gamma,m}, Z_{\Gamma,m}, R_n + S_{R_n}) + \lambda_R^{[n]}(R_{\Gamma,m}, Z_{\Gamma,m}, R_n - S_{R_n}) + \right. \\ \left. - \frac{\Lambda(R_{\Gamma,m}, Z_{\Gamma,m}, R_n, Z_n, S_{R_n}, S_{Z_n})}{S_{R_n}} \right] \end{aligned}$$

La derivata parziale di h_m rispetto al generico semispessore assiale S_{Z_n} è:

$$\frac{\partial h_m}{\partial S_{Z_n}} = I_n \left[\lambda_Z^{[n]}(R_{\Gamma,m}, Z_{\Gamma,m}, Z_n + S_{Z_n}) + \lambda_Z^{[n]}(R_{\Gamma,m}, Z_{\Gamma,m}, Z_n - S_{Z_n}) + \right. \\ \left. - \frac{\Lambda(R_{\Gamma,m}, Z_{\Gamma,m}, R_n, Z_n, S_{R_n}, S_{Z_n})}{S_{Z_n}} \right]$$

Le funzioni $\lambda_R^{[n]}$ e $\lambda_Z^{[n]}$ sono definite da:

$$\lambda_R^{[n]}(R, Z, R') = \frac{\mu}{4 S_{R_n} S_{Z_n}} \left[\frac{2\gamma k}{\sqrt{RR'}} \left\{ \frac{\gamma^2 + 2R^2 + 2R'^2}{4RR'} K(k^2) - \frac{E(k^2)}{k^2} + \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(R - R')^2}{4R'R} \Pi(n_3^2, k^2) \right\} \right]_{Z'=Z_n-S_{Z_n}}^{Z'=Z_n+S_{Z_n}}$$

$$\lambda_Z^{[n]}(R, Z, Z') = \frac{\mu}{4 S_{R_n} S_{Z_n}} \left[R^2 \Im(R, Z, R', Z') + \right. \\ + \frac{2R(2 - k^2)\sqrt{RR'}}{3k^5} \left((2 - k^2)E(k^2) - 2(1 - k^2)K(k^2) \right) + \\ + \frac{kR'(\gamma^2 + R^2)}{2\sqrt{RR'}} K(k^2) + \frac{\gamma^2 + R^2}{4k} \sqrt{\frac{R}{R'}} \left(\left(1 - \frac{k^2}{2} \right) K(k^2) - E(k^2) \right) + \\ + \frac{k\gamma^2 \sqrt{\gamma^2 + R^2}}{4\sqrt{RR'}} \left\{ \frac{R' + \sqrt{\gamma^2 + R^2}}{R - \sqrt{\gamma^2 + R^2}} \Pi(n_1^2, k^2) + \right. \\ \left. - \frac{R' - \sqrt{\gamma^2 + R^2}}{R + \sqrt{\gamma^2 + R^2}} \Pi(n_2^2, k^2) \right\} \right]_{R'=R_n-S_{R_n}}^{R'=R_n+S_{R_n}}$$

La derivata parziale di W_m rispetto alla generica corrente I_n è:

$$\frac{\partial W_m}{\partial I_n} = \sum_{i=1}^N I_i M_{in}$$

La derivata parziale di W_m rispetto al generico raggio R_n è:

$$\frac{\partial W_m}{\partial R_n} = I_n \sum_{i=1}^N I_i \left[\omega_R^{[i,n]}(R_n + S_{R_n}) - \omega_R^{[i,n]}(R_n - S_{R_n}) \right]$$

La derivata parziale di W_m rispetto alla generica quota Z_n è:

$$\frac{\partial W_m}{\partial Z_n} = I_n \sum_{i=1}^N I_i \left[\omega_Z^{[i,n]}(Z_n + S_{Z_n}) - \omega_Z^{[i,n]}(Z_n - S_{Z_n}) \right]$$

La derivata parziale di W_m rispetto al generico semispessore radiale S_{R_n} è:

$$\frac{\partial W_m}{\partial S_{R_n}} = I_n \sum_{i=1}^N I_i \left[\omega_R^{[i,n]}(R_n + S_{R_n}) + \omega_R^{[i,n]}(R_n - S_{R_n}) \right] - \frac{I_n}{S_{R_n}} \sum_{i=1}^N I_i M_{in}$$

La derivata parziale di W_m rispetto al generico semispessore assiale S_{R_n} è:

$$\frac{\partial W_m}{\partial S_{Z_n}} = I_n \sum_{i=1}^N I_i \left[\omega_Z^{[i,n]}(Z_n + S_{Z_n}) + \omega_Z^{[i,n]}(Z_n - S_{Z_n}) \right] - \frac{I_n}{S_{Z_n}} \sum_{i=1}^N I_i M_{in}$$

Le funzioni $\omega_R^{[i,n]}$ e $\omega_Z^{[i,n]}$ sono definite da:

$$\begin{aligned} \omega_R^{[i,n]}(R') &= \frac{1}{8 S_{R_i} S_{Z_i}} \int_{R_i - S_{R_i}}^{R_i + S_{R_i}} dR \int_{Z_i - S_{Z_i}}^{Z_i + S_{Z_i}} dZ \lambda_R^{[n]}(R, Z, R') + \\ &\quad + \frac{1}{8 S_{R_n} S_{Z_n}} \int_{Z_n - S_{Z_n}}^{Z_n + S_{Z_n}} dZ \Lambda(R', Z, R_i, Z_i, S_{R_i}, S_{Z_i}) \\ \omega_Z^{[i,n]}(Z') &= \frac{1}{8 S_{R_i} S_{Z_i}} \int_{R_i - S_{R_i}}^{R_i + S_{R_i}} dR \int_{Z_i - S_{Z_i}}^{Z_i + S_{Z_i}} dZ \lambda_R^{[n]}(R, Z, Z') + \\ &\quad + \frac{1}{8 S_{R_n} S_{Z_n}} \int_{R_n - S_{R_n}}^{R_n + S_{R_n}} dR \Lambda(R, Z', R_i, Z_i, S_{R_i}, S_{Z_i}) \end{aligned}$$

In conclusione, le funzioni Λ , $\lambda_R^{[n]}$ e $\lambda_Z^{[n]}$ sono completamente analitiche ad eccezione della funzione $\mathfrak{S}$ che richiede una integrazione numerica. Tuttavia l'integrazione richiesta per ottenere $\mathfrak{S}$ è monodimensionale, su un intervallo finito e converge rapidamente. Le funzioni M_{ij} , $\omega_R^{[i,n]}$ e $\omega_Z^{[i,n]}$ richiedono invece la risoluzione numerica di un integrale doppio.

Nel problema (D.5) vi sono r vincoli geometrici di disuguaglianza che sono imposti agli N conduttori per motivi tecnici e teorici. Nel caso di bobine massicce si deve imporre, in particolare, la non compenetrazione reciproca. La condizione di non

compenetrazione si esprime considerando che un vertice V di una bobina è esterno ad una qualsiasi sezione rettangolare se e solo se la somma delle aree dei triangoli che si ottengono congiungendo V con i quattro vertici del rettangolo risulta maggiore dell'area del rettangolo medesimo (Fig. D.4).

La condizione si può quindi scrivere come:

$$A_{VCD} + A_{VAB} + A_{VAD} + A_{VBC} > A_{ABCD}$$

Questo procedimento andrebbe ripetuto per ognuno dei quattro vertici della sezione di ogni bobina. Tuttavia considerando che il prodotto di termini positivi o nulli è positivo o nullo, la condizione di non compenetrazione tra due bobine si riassume in una sola disequazione. I vincoli di questo tipo sono $N(N-1)/2$.

Le aree dei triangoli VAB, VBC, VCD, VDA si determinano con la formula di Erone che definisce l'area A di un triangolo se sono noti i lati a, b, c ed il semiperimetro p:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

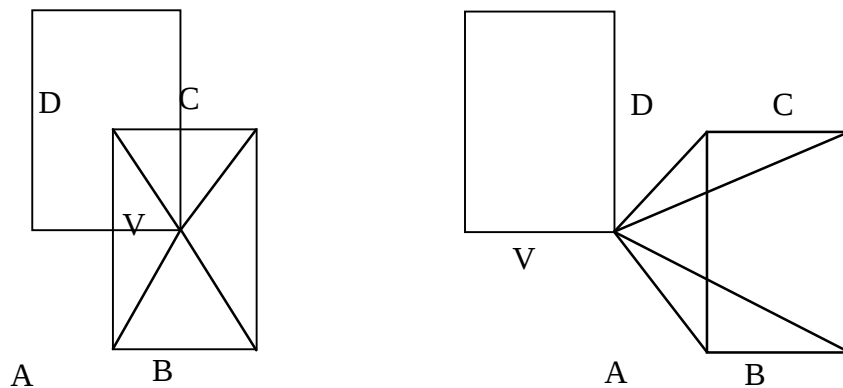


Fig. D.4 - Esempificazione grafica della condizione di non compenetrazione tra due bobine massicce a sezione rettangolare.

BIBLIOGRAFIA

- [1] A.O. Griewank, *Generalized Descent for Global Optimization*, Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 34, pp. 11-39, 1981.
- [2] M.N.O Sadiku, *Numerical Techniques in Electromagnetics*, Crc Press, pp. 23-25, 1992.
- [3] C.A. Borghi, U. Reggiani, G. Zama, *A Method for the Solution of an Axisymmetric Magnetic Field Synthesis Problem*, IEEE Trans. Mag., vol. 27, n°5, pp. 4093-4096, 1991.
- [4] C.A. Borghi, U. Reggiani, G. Zama, *An Approach to the Design of the Poloidal Field System for a Toroidal Device*, Proc. 16th Symposium on Fusion Technology, London 1990, Elsevier, vol. 2, pp. 1574-1578, 1991.
- [5] M.Guarnieri, A.Stella, F.Trevisan, *A Methodological Analysis of Different Formulations for Solving Inverse Electromagnetic Problems*, IEEE Trans. Mag., vol. 26, n°2, pp. 622-625, 1991.
- [6] A.N. Tikhonov, V.Y. Arsenin, *Solutions of Ill-Posed Problems*, Winston & Sons, Washington D.C., pp. 20-40, 1977.
- [7] T.J Dolan, *Fusion Research*, Pergamon Press, New York, 1982
- [8] L.P. Fatti, J.A. Snyman, *A Multi-Start Global Optimization Algorithm with Dynamic Search Trajectories*, Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 54, pp. 121-141, 1987.
- [9] D.P. Bertsekas *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Method*, Academic Press, New York, pp. 158-164, 1982.
- [10] J.W. Rogers, R.A. Donnelly, *A Search Technique for Global Optimization in a Chaotic Environment*, J. Optimization Theory and Applications, vol. 61, n°1, pp. 110-121, 1989.

- [11] A. Gottvald, K. Preis, C. Magele, O. Biro, A. Savini, *Global Optimization Methods for Computational Electromagnetics*, IEEE Trans. Mag., vol. 28, n°2, pp. 1537-1540, 1992.
- [12] P. Di Barba, A. Savini, *Global Optimization Metodologies and application in Electromechanics*, Int. J. Applied Electromagnetism in Materials, vol. 4, pp. 93-98, 1993.
- [13] H. Schwefel, *Numerical Optimization of Computer Models*, Wiley & Sons, New York, pp. 104-115, 1981.
- [14] R.P. Ge, *The Theory of the Filled Function Method for Finding a Global Minimizer of a Nonlinear Costrained Minimization Problem*, Paper Presented at the SIAM Conference on Numerical Optimization, Boulder, Colorado, 1984.
- [15] R.P. Ge, and Y.F. Qin, *A Class of Filled Function for Finding Global Minimizers of a Function of Several Variables*, Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 54, pp. 241-251, 1987.
- [16] K. Schittkowski, *NLPQL: A Fortran Routine for Solving Constrained Non Linear Programming Problem*, Annals of Operation Research (1985/86), vol. 5, pp. 485-500, 1986.
- [17] L. Piela, J. Kostrowicki, *Diffusion Equation Method of Global Optimization: Performance for Standard Test Functions*, Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 69, pp. 269-283, 1991.
- [18] L.L. Lao, J.R. Ferron, R.J. Groebner, W. Howl, H. St.John, E.J. Strait, T.S. Taylor, *Equilibrium Analysis of Current Profiles in Tokamaks*, Nuclear Fusion, vol. 30, n°6, pp. 1035-1049, 1990.
- [19] A.K. Kalafala, *A Design Approach for Actively Shielded Magnetic Resonance Imaging Magnets*, IEEE Trans. Mag., vol. 26, n°3, pp. 1181-1188, 1991.
- [20] A.K. Kalafala, *Optimized Configurations for Actively Shielded Magnetic Resonance Imaging Magnets*, IEEE Trans. Mag., vol. 27, n°2, pp. 1696-1699, 1991.

- [21] A.N. Tikhonov, V.Y. Arsenin, *Solutions of Ill-Posed Problems*, Winston & Sons, Washington D.C., pp. 194-195, 1977.
- [22] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, New York, pp. 1114-1115, 1980.
- [23] D.B. Montgomery, *Solenoid Magnet Design*, Wiley & Sons, New York, pp. 177-178, 1969.
- [24] L.K. Urankar, *Vector Potential and Magnetic Field of Current-Carrying Finite Arc Segment in Analytical Form, part III: Exact Computation for Rectangular Cross Section*, IEEE Trans. Mag., vol. 18, n°6, pp. 1860-1867, 1982.
- [25] A.I. Rusinov, *High Precision Computation of Magnetic Field of Solenoids by Garret's Method*, IEEE Trans. Mag., vol. 30, n°4, pp. 2685-2688, 1994.
- [26] P.F. Davis, P. Rabinowitz, *Methods of Numerical Integration*, Academic Press, Orlando, 1984.
- [27] P.F. Byrd, M.D. Friedman, *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists*, Springer-Verlag, Berlino, 1954.