

CAPITOLO II

2.1 DESCRIZIONE DEL MODELLO FISICO DI NASTRO RETTILINEO

Il nastro multifilamentare rettilineo è il sistema fisico su cui si vogliono analizzare le dissipazioni elettriche, dovute all'effetto combinato di una corrente di trasporto e un campo magnetico esterno, entrambi variabili rispetto al tempo secondo una funzione nota.

Il sistema fisico di riferimento è una lunghezza infinitesima di un nastro multifilamentare rettilineo, sufficientemente lungo da trascurare gli effetti di bordo. Il materiale superconduttore (BSSCO) è nella forma di filamenti rettilinei, del diametro di alcuni μm , immersi in una matrice di lega Ag-Mg.

La fig. 2.1 rappresenta alcune sezioni di nastri multifilamentari, con diversi numeri di filamenti.

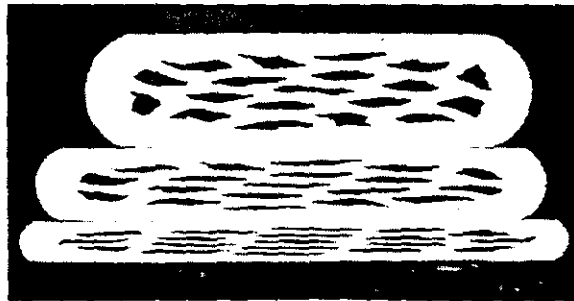


Fig.2.1 – Sezione di diversi nastri multifilamentari. Le aree più scure rappresentano le sezioni dei singoli filamenti, quelle più chiare la matrice metallica di argento o lega argento-magnesio

In fig. 2.2 è rappresentato lo schema della sezione del nastro con la terna di riferimento. La corrente di trasporto I_{tr} è parallela all'asse z mentre il campo esterno B_{ex} è parallelo al piano $x-y$, e la sua direzione è data dall'angolo α rispetto all'asse y , posto ortogonale alla superficie estesa del nastro. Il campo esterno si assume costante su tutti i punti della sezione.

L'incognita del sistema è la densità di corrente sulla sezione, che insieme alla relazione costitutiva $E = f(J)$, consente di calcolare le dissipazioni elettriche sulla sezione, corrispondente ad una lunghezza unitaria del nastro, usando la relazione (1.1).

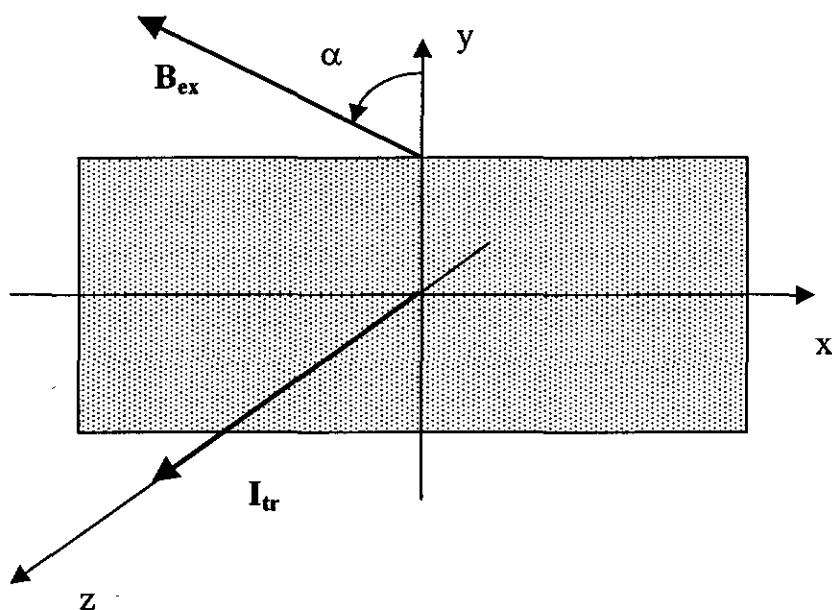


Fig. 2.2 – Schema della sezione di nastro come considerata dal modello descritto in questo capitolo, con la terna di riferimento

In questa configurazione, il campo magnetico esterno ha una componente che è sempre nulla, quella parallela all'asse z, mentre la densità di corrente J , che è data dalla somma della densità di corrente di trasporto e di quella indotta dal campo magnetico esterno, ha sempre due componenti nulle, quelle nel piano x-y. Anche il campo magnetico generato dalla corrente che circola nel nastro, B_j , è parallela al piano x-y, questo deriva dal fatto che si trascurano gli effetti di bordo. Pertanto i vettori J , B_{ex} , B_j , hanno la seguente struttura:

$$J = \{ 0 ; 0 ; J_z(x,y) \}$$

$$B_{ex} = \{ B_{ex,x}(x,y) ; B_{ex,y}(x,y) ; 0 \}$$

$$B_j = \{ B_{j,x}(x,y) ; B_{j,y}(x,y) ; 0 \}$$

Come si può notare nella fig. 2.1 la sezione del nastro non è omogenea, nel senso che ci sono delle regioni occupate dal superconduttore, e altre in cui è presente solo la matrice metallica, quindi per ognuna di queste regioni vale una specifica relazione costitutiva. È possibile descrivere questa struttura della sezione del nastro in almeno due modi.

Alcuni autori [12,13] definiscono una regione centrale nella sezione, e la considerano interamente occupata dal superconduttore, mentre la regione esterna la considerano occupata solo dalla matrice metallica. Le dimensioni della regione centrale occupata solo dal superconduttore, si rilevano direttamente dalle microfotografie della sezione.

L'altro approccio, adottato in questa analisi, consiste nel considerare per ogni punto della sezione, la stessa equazione costitutiva, determinata come media pesata delle proprietà elettriche della matrice metallica e del superconduttore, usando come pesi le corrispondenti superfici occupate nella sezione. Questo significa che la densità di corrente in ogni punto di tutta la sezione, si considera come la somma di due contributi: uno dovuto alla corrente che circola nella matrice metallica e l'altro dovuto a quella che circola nel superconduttore (effetto sharing), cioè :

$$J_{tr} = J_m (1 - ff) + ff \cdot J_{htc} \quad \text{in cui } ff \text{ è il fattore di riempimento definito nel seguente modo:}$$

$$ff = \frac{\text{area occupata dal superconduttore}}{\text{area totale della sezione}}$$

da cui segue la seguente espressione per la relazione costitutiva finale, adottata da questa analisi:

$$J = \sigma E_0 (1 - ff) \left(\frac{E}{E_0} \right) + J_{c,eng} \left(\frac{E}{E_0} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (2.1)$$

in cui σ è la conducibilità elettrica della matrice metallica, ff è il fattore di riempimento e $J_{c,eng}$ è la densità di corrente critica ingegneristica, definita come il rapporto tra la corrente critica con l'area complessiva della sezione.

Secondo questo modello, per valori bassi di corrente, rispetto a quella critica, si considerano dominanti le proprietà superconduttive del nastro, invece per correnti superiori a quella critica, la componente di corrente trasportata dalla matrice metallica diventa rilevante. Questa interpretazione è evidente nella fig. 2.3, dove si può osservare che in corrispondenza di un valore di densità di corrente superiore a quella critica, il campo elettrico corrispondente al solo superconduttore è molto più alto di quello che tiene conto dell'effetto sharing. Segue dalla prima equazione di (1.1), che questa differenza può condurre a valori di perdita molto diversi.

Con la configurazione appena descritta si tengono conto solo delle dissipazioni dovute alle correnti che circolano nella direzione parallela all'asse z, e non di quelle dovute a

correnti che circolano nelle direzioni ortogonali a tale asse. Sulla base di quanto descritto nel precedente capitolo, questo significa che si considerano solo le perdite isteretiche nel superconduttore e quelle ohmiche generate dalla parte di corrente di trasporto che circola nella matrice metallica, non si tiene conto quindi delle perdite per accoppiamento tra i filamenti.

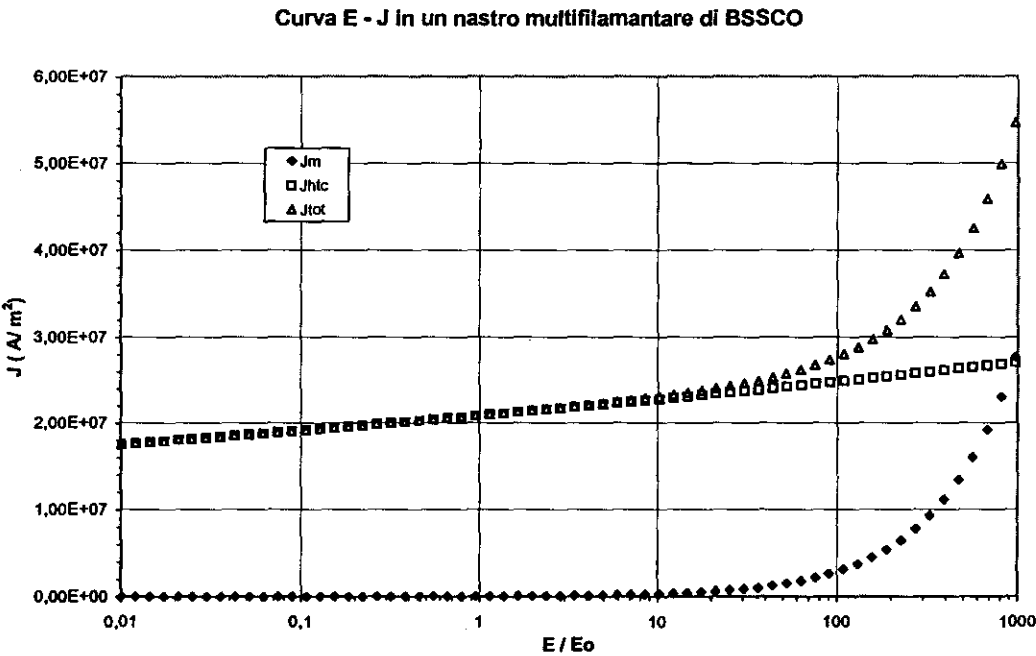


Fig. 2.3 – rappresentazione grafica della relazione costitutiva tra E e J in un nastro multifilamentare; nel grafico sono rappresentate le componenti della densità di corrente dovute solo al superconduttore (Jhts), alla matrice metallica (Jm) e la densità complessiva (Jtot).

Le equazioni di base di questa analisi sono le due equazioni di Maxwell:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{cases} \tag{2.2}$$

nel superconduttore si considera la seguente relazione tra **B** e **H** : **B** = $\mu_0 \mathbf{H}$.

Insieme a queste occorre considerare anche la seguente espressione, che esprime il vincolo legato al valore della corrente di trasporto, che è imposto dall'esterno:

$$\int_{\text{sezione}} J_z(x,y) \cdot dxdy = I_r \tag{2.3}$$

Le equazioni (2.1), (2.2) e (2.3) sono sufficienti per individuare, con opportune elaborazioni, il sistema di equazioni differenziali, in cui tra le incognite c'è la

distribuzione della densità di corrente sulla sezione. Per queste elaborazioni si possono usare i metodi (T - Ω) e (A - Φ), già introdotti nel precedente capitolo.

2.1.a Metodo (T - Ω)

Le grandezze fondamentali di questo metodo sono il potenziale vettore di corrente $\mathbf{T}$ e il potenziale scalare Ω , definiti dalle seguenti espressioni:

$$\mathbf{J} \equiv \nabla \times \mathbf{T} \quad (2.4)$$

$$-\nabla \Omega \equiv \mathbf{H}_j - \mathbf{T} \quad (2.5)$$

dove $\mathbf{J}$ è la densità di corrente e $\mathbf{H}_j$ è il campo magnetico generato dalla densità di corrente $\mathbf{J}$.

La relazione tra la densità di corrente $\mathbf{J}$ e il campo magnetico $\mathbf{H}$ nel superconduttore è lineare, questo permette di applicare il principio di sovrapposizione degli effetti all'equazione della circuitazione magnetica da cui si può ottenere la (2.5), come dimostrano le seguenti espressioni:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H}_{ex} + \nabla \times \mathbf{H}_j = \nabla \times (\mathbf{T} - \nabla \Omega) = \nabla \times \mathbf{T} \quad (2.5.a)$$

Il campo esterno $\mathbf{H}_{ex}$ è generato da correnti esterne alla sezione del nastro, che è il dominio del problema che si vuole analizzare, pertanto il rotore $\mathbf{H}_{ex}$ di sulla sezione del nastro è nullo. Questo significa che le correnti che generano $\mathbf{H}_{ex}$ non si concatenano con il bordo della sezione del nastro.

Se si considera un vettore $\mathbf{T}$ con la seguente struttura:

$$\mathbf{T} = \{T_x(x,y); T_y(x,y); 0\} \quad (2.6)$$

si può verificare direttamente sviluppando il calcolo, che vale la seguente relazione:

$$\nabla \times \{T_x, T_y, 0\} = \{0; 0; J_z\}$$

questo significa che il vettore $\mathbf{T}$ definito in (2.6) è adatto per descrivere la densità di corrente in questa geometria.

Il vettore $\mathbf{T}$ ha solo due componenti non nulle, sono quindi necessarie 3 equazioni scalari per calcolare il vettore $\mathbf{T}$ e la funzione scalare Ω , da queste si può risalire alla densità di corrente mediante la (2.4).

Se s'introducono la (2.4) e (2.5) nella seconda equazione di (2.2) si ottiene:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{H}_{ex} + \mathbf{H}_j) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{H}_{ex} + \mathbf{T} - \nabla \Omega) \quad (2.7)$$

a cui corrispondono le seguenti equazioni scalari:

$$\text{comp. asse } x : \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[H_{ex,x}(x,y) + T_x(x,y) - \frac{\partial \Omega}{\partial x}(x,y) \right] \quad (2.8.a)$$

$$\text{comp. asse } y : \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[H_{ex,y}(x,y) + T_y(x,y) - \frac{\partial \Omega}{\partial y}(x,y) \right] \quad (2.8.b)$$

$$\text{comp. asse } z : \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[-\frac{\partial \Omega}{\partial z}(x,y) \right] \quad (2.8.c)$$

Il secondo membro delle equazioni (2.8.a) e (2.8.b) non dipende dalla variabile z , quindi neanche il primo membro dipende da questa variabile. Questo significa che le derivate parziali rispetto a z delle componenti del campo elettrico E_x ed E_y , possono al più essere uguali a delle costanti. Tuttavia se si considera che lungo le direzioni parallele al piano x - y non ci sono delle correnti e che comunque nessuna grandezza dipende da z , queste costanti si possono assumere uguali a zero. Pertanto nel primo membro delle (2.8.a) e (2.8.b) compare solo la derivata parziale della componente E_z del campo elettrico.

In questa geometria il vettore H_j è ortogonale all'asse z come anche il vettore T , quindi la componente lungo l'asse z di questi vettori è nulla. Da questa considerazione e dalla (2.5) si ottiene la seguente uguaglianza:

$$-\frac{\partial \Omega}{\partial z} = H_{j,z} - T_z = 0$$

Questo significa che la relazione (2.8.c) è una identità, quindi non è un'equazione utile.

La terza equazione si ottiene dalla legge di Gauss per il campo magnetico:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

a cui corrisponde la seguente equazione scalare:

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left[H_{ex,x} + T_x - \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right] + \frac{\partial^2}{\partial t \partial y} \left[H_{ex,y} + T_y - \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right] = 0 \quad (2.9)$$

Il sistema di equazioni costituito dalle (2.8.a), (2.8.b) e (2.9), insieme alla relazione costitutiva (2.1), è un sistema chiuso, nel senso che contiene 3 equazioni linearmente indipendenti, nelle 3 incognite T_x , T_y e Ω . L'equazione costitutiva (2.1) in questa analisi si riferisce solo alle componenti lungo z del campo elettrico e della densità di corrente, questa permette di esprimere la E_z in funzione del rotore di T secondo la (2.4).

Le condizioni al contorno si ottengono dalla (2.3), che esprime il valore della corrente di trasporto, che è un dato noto del problema:

$$\int_{\text{sezione}} J_z(x,y) \cdot dx dy = I_r = \int_{\text{sezione}} (\nabla \times \mathbf{T}) \cdot \hat{n} dS = \oint_{\text{bordo}} T dL$$

Questa espressione fornisce il valore dell'integrale di T , ma non permette di fare delle valutazioni oggettive sulla funzione integranda, nel senso che non si può dire nulla sui valori di T nei punti del bordo.

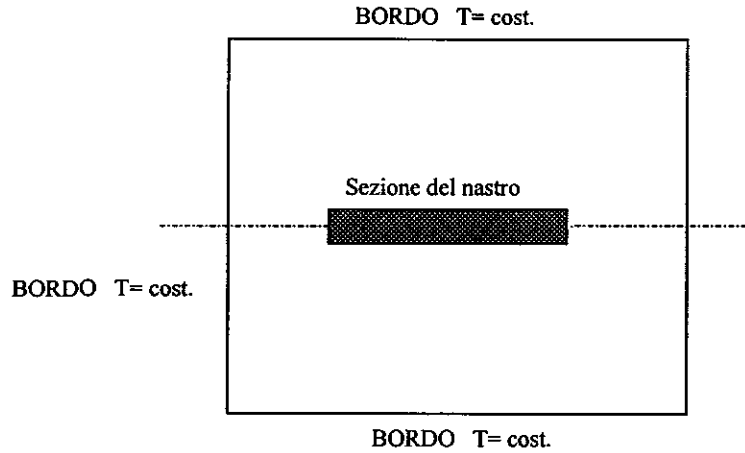


Fig. 2.4 Rappresentazione grafica delle condizioni al contorno del metodo (T-Ω)

Alcuni autori assumono il valore T costante su tutto il bordo, in modo tale da avere :

$$T_o = I_r / L_b$$

dove L_b rappresenta la lunghezza del bordo. Il bordo è posto lontano dalla sezione del nastro (fig 2.4) , e il dominio, esclusa ovviamente la regione occupata dalla sezione del nastro, è considerato costituito da un materiale simile al vuoto, con una conducibilità elettrica molto più bassa di quella che si ha nei punti della sezione del nastro. Il valore basso della conducibilità del materiale simile al vuoto, smorza la propagazione verso il bordo del dominio, di tutto ciò che si manifesta all'interno della sezione del nastro. Se questa conducibilità è abbastanza piccola, la corrente di fuga in questo materiale simile al vuoto è trascurabile, quindi si può ritenere costante su tutti i punti del bordo [...].

2.1.b Metodo (A - Φ)

Le grandezze fondamentali di questo metodo sono il potenziale vettore A e il il potenziale scalare Φ definite dalle seguenti espressioni:

$$\nabla \times A = B \quad (2.10)$$

$$E = -\nabla\Phi - \frac{\partial A}{\partial t} \quad (2.11)$$

dove B rappresenta il vettore induzione magnetica, ed E il campo elettrico.

L'induzione magnetica B è dovuta alla somma dell'induzione magnetica B_{ex} , generata da un campo magnetico esterno, e B_j generata dalla corrente presente sul nastro. Come

già detto in questi materiali la relazione tra la densità di corrente $\mathbf{J}$ e il campo magnetico $\mathbf{H}$ è lineare, pertanto si può scrivere:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\text{ex}} + \mathbf{B}_j \quad (2.12)$$

Se s'inserisce la (2.12) nella legge della circuitazione magnetica, e si considera la (2.10) si ottiene quanto segue:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}_{\text{ex}} + \nabla \times \mathbf{B}_j = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}_j) = \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{A}_j) - \nabla^2 \mathbf{A}_j \quad (2.13)$$

Come già descritto nella sezione dedicata al metodo (T - Ω), il rotore dell'induzione $\mathbf{B}_{\text{ex}}$ è nullo, perché dovuto ad un campo magnetico generato da correnti esterne alla sezione del nastro, mentre l'ultimo membro a destra si ottiene dalla seguente identità vettoriale:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{V}) - \nabla^2 \mathbf{V}$$

dove $\mathbf{V}$ è un generico vettore.

Se si considera un vettore $\mathbf{A}$, con la sola componente non nulla lungo l'asse z , che dipende solo dalle variabili x e y , cioè:

$$\mathbf{A} = \{0; 0; A_z(x, y)\}$$

si può verificare, eseguendo direttamente il calcolo che l'induzione magnetica che si ottiene, mediante la (2.10), è ortogonale all'asse z e dipende solamente dalle variabili x e y . Questo significa che con un tale vettore è possibile descrivere i campi magnetici nella configurazione che si vuole analizzare.

Con il vettore $\mathbf{A}$ definito in questo modo, vale la relazione $(\nabla \cdot \mathbf{A}) = 0$, che inserita nella (2.13) permette di ricavare la seguente espressione:

$$\nabla^2 \mathbf{A}_j = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (2.14)$$

Se si tiene conto che il vettore $\mathbf{A}_j$ ha solo la componente lungo l'asse z non nulla, e che questa non dipende dalla variabile z , la forma estesa della (2.14) diventa:

$$\frac{\partial^2 A_{j,z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_{j,z}}{\partial y^2} = -\mu_0 J_z(x, y)$$

la cui soluzione generale è [15]:

$$A_{j,z}(x, y) = - \int_{\text{sezione}} \frac{\mu_0 J_z(\xi, \eta)}{2\pi} \log \left| \frac{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}{r_0} \right| d\xi d\eta \quad (2.15)$$

dove r_0 è una posizione di riferimento arbitraria, il cui valore è fissato secondo criteri di convenienza. In questa analisi si considera r_0 corrispondente ad una unità di lunghezza lineare, quindi, tale termine non comparirà più nelle elaborazioni successive della (2.15).

L'equazione (2.11) corrisponde a 3 equazioni scalari, di cui solo quella corrispondente alla proiezione lungo l'asse z è utile a questa analisi, poiché le componenti del vettore $\mathbf{A}$, lungo gli assi x e y sono nulle. L'espressione di questa equazione è la seguente:

$$E_z = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t} \quad (2.16)$$

Come già detto la relazione tra il campo magnetico e la densità di corrente è lineare, quindi anche la relazione tra la densità di corrente e il potenziale vettore $\mathbf{A}$ è lineare, poiché il rotore è un operatore lineare. Questa considerazione permette di scomporre il vettore $\mathbf{A}$ nella somma di due componenti $A_z = A_{z,ex} + A_{z,j}$, dove $A_{z,ex}$ rappresenta il potenziale vettore dovuto ad un campo esterno, e A_j quello dovuto al campo generato dalle correnti che attraversano la sezione del nastro, nelle direzioni parallele all'asse z .

Se s'inserisce questa scomposizione nella (2.16) e si considera la (2.15) si ottengono le seguenti espressioni:

$$E_z = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t} = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial t} (A_{z,ex} + A_{z,j})$$

$$E_z = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{\partial A_{z,ex}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \int_{sezione} \frac{\mu_0 J_z(\xi, \eta)}{2\pi} \log \left| \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \right| d\xi d\eta \quad (2.17)$$

che insieme alla relazione (2.1) che esprime il campo elettrico in funzione della densità di corrente, e alla (2.3) costituiscono un sistema di 3 equazioni, da cui se ne può ottenere uno di 2 equazioni differenziali nelle incognite $J_z(x, y)$ e $\frac{\partial\Omega}{\partial z}$, che è il seguente:

$$\begin{cases} E_z = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{\partial A_{z,ex}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \int_{sezione} \frac{\mu_0 J_z(\xi, \eta)}{2\pi} \log \left| \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \right| d\xi d\eta \\ \int_{sezione} J_z(x, y) \cdot dx dy = I_r \end{cases}$$

Questo sistema ha due equazioni linearmente indipendenti nelle incognite $J_z(x, y)$ e $\frac{\partial\Omega}{\partial z}$.

Il termine $\frac{\partial\Phi}{\partial z}$ si considera costante su tutti i punti della sezione, questo significa che si considerano equipotenziali tutti i punti che appartengono alla stessa sezione. Questo si ottiene con delle condizioni al contorno costituite da superfici equipotenziali, in modo che la differenza di potenziale tra due punti qualsiasi, è la stessa di quella tra le superfici a cui i punti appartengono.

2.1.c Analisi comparativa

Nei paragrafi precedenti sono stati sviluppati i metodi (T - Ω) e (A - Φ) per individuare il sistema di equazioni differenziali da cui ricavare la distribuzione della densità di corrente sulla sezione del nastro, che insieme all'equazione costitutiva (2.1), permette di calcolare il valore istantaneo della potenza elettrica dissipata nella lunghezza unitaria di nastro. Questo dato integrato su un determinato intervallo di tempo conduce al valore della quantità di energia dissipata.

I sistemi ottenuti da questa analisi si basano su grandezze elettromagnetiche differenti, e quindi i sistemi ottenuti sono diversi, nel senso che i processi di ricerca della soluzione richiedono degli approcci diversi. La soluzione finale comunque deve essere la stessa, questo significa che non occorre risolvere entrambi i sistemi, è quindi sufficiente sviluppare un metodo di ricerca della soluzione solo per uno di questi.

La scelta di quale sistema risolvere si basa su criteri di convenienza, con lo scopo di semplificare il più possibile il processo di ricerca della soluzione, e di conseguenza di avere dei tempi di calcolo più ridotti.

Un parametro che influenza in modo rilevante il tempo di calcolo è il numero di incognite: il metodo A- ϕ conduce ad un sistema con 2 incognite (J_z , $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$), quello T- Ω ad un sistema con 3 incognite (T_x , T_y e Ω).

Inoltre con il metodo A- ϕ si descrivono meglio le condizioni al contorno, rispetto al metodo T- Ω , che richiede l'uso di un espediente particolare, quale il mezzo simile al vuoto che circonda la sezione di nastro.

Queste considerazioni sono sufficienti per orientare la scelta sul metodo A- ϕ , quindi soltanto il sistema di equazioni ottenuto con tale metodo sarà risolto nel prossimo capitolo.

2.2 DESCRIZIONE DEL MODELLO FISICO DI AVVOLGIMENTO SOLENOIDALE

Il sistema reale di riferimento è un avvolgimento solenooidale realizzato impilando, uno sopra l'altro, un certo numero di pancake. La fig. 2.5 rappresenta uno schema di ogni singolo pancake. Il nastro multifilamentare è avvolto su un supporto cilindrico,

secondo una traiettoria di forma a spirale piana, questo significa che le sezioni terminali del nastro, di ogni pancake, sono sullo stesso piano. Il nastro non è ricoperto di film isolanti, come nei conduttori convenzionali smaltati, pertanto occorre avvolgere il nastro multifilamentare insieme ad un nastro isolante, in modo che ogni spira sia isolata elettricamente dalle spire adiacenti.

Le parti terminali di ogni pancake sono saldate tra loro mediante delle piccole piastre, di dimensioni opportune, per avere la continuità elettrica tra pancake adiacenti. Le dimensioni di queste piastre di connessione devono essere tali da avere una bassa resistenza di contatto, in modo che le dissipazioni elettriche su di essi siano più basse di quelle che si hanno sull'avvolgimento complessivo. In altri termini occorre evitare che le dissipazioni sull'avvolgimento siano dovute principalmente a queste connessioni tra i pancake.

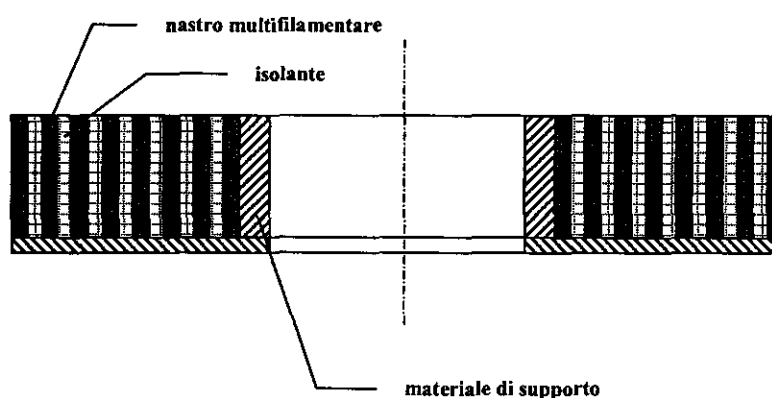


Fig. 2.5

Un'analisi esatta delle dissipazioni su un avvolgimento realizzato con nel modo appena descritto, richiederebbe una rappresentazione che tenga conto, da un lato della distribuzione della densità di corrente all'interno di ogni singolo nastro, dall'altro della presenza di materiali isolanti, che occupano una parte della sezione dell'avvolgimento, su cui ovviamente non circola corrente.

Quindi allo stesso modo della sezione del nastro multifilamentare, bisognerebbe considerare per ogni volume infinitesimo dell'avvolgimento, la propria equazione costitutiva. Questo modo di procedere è teoricamente corretto, tuttavia richiederebbe dei tempi di analisi e di calcolo eccessivamente lunghi, pertanto sono necessarie delle approssimazioni.

La più rilevante consiste nel ritenere che la distribuzione del campo magnetico generato da una spira che abbia le stesse dimensioni dell'avvolgimento, su cui circola una corrente pari a quella di trasporto dell'avvolgimento, tenendo conto del numero delle spire, ma distribuita sulla sezione in modo uniforme, sia praticamente lo stesso di quello reale, cioè generato da una distribuzione che non è esattamente uniforme.

L'avvolgimento è realizzato con molte spire, inoltre il volume dei materiali isolanti non è alto rispetto a quello complessivo dell'avvolgimento, quindi le fluttuazioni della densità di corrente, rispetto ad un valore medio, uniforme su tutta la sezione dell'avvolgimento, sono piccole, e si manifestano in regioni di ridotte dimensioni. Pertanto si può ritenere con buona approssimazione, che queste fluttuazioni non generino delle deviazioni rilevanti, nella distribuzione del campo magnetico, rispetto a quello generato da una distribuzione uniforme della densità di corrente.

Le altre approssimazioni sono molto usate nell'analisi di problemi che coinvolgono grandezze elettromagnetiche: in particolare la permeabilità magnetica dei materiali isolanti, come anche quella del nastro si considera uguale a quella del vuoto.

L'idea di base di questa analisi consiste nel ritenere possibile l'estensione ad un avvolgimento, dei dati di dissipazione ottenuti su una sezione infinitesima di nastro, su questa idea si basa anche il lavoro descritto in questo capitolo.

Alcuni autori hanno presentato un lavoro, in cui sono stati usati i dati di misure di dissipazioni elettriche, su spezzoni corti di nastro rettilineo, sottoposti a campi magnetici esterni variabili rispetto al tempo, secondo una legge sinusoidale, e attraversati da una corrente di trasporto, anch'essa variabile rispetto al tempo con legge sinusoidale, per il calcolo delle dissipazioni di un avvolgimento, fabbricato con lo stesso nastro su cui erano state fatte le misure [14]. Sono state fatte misure di dissipazione elettrica anche sull'avvolgimento completo, ed è stato evidenziato un buon accordo tra i dati sperimentali e quelli calcolati.

In particolare si considera ogni sezione di nastro, con cui è fabbricato l'avvolgimento, come se appartenesse ad uno spezzone rettilineo, sottoposto ad un campo magnetico esterno e attraversato da una corrente di trasporto, la stessa che attraversa l'avvolgimento. Il campo esterno è quello generato dalla parte restante del nastro. Pertanto la dissipazione sulla lunghezza infinitesima di nastro dell'avvolgimento si considera la stessa di quella sulla sezione corrispondente al nastro rettilineo, e la dissipazione globale su tutto l'avvolgimento si calcola con un integrale su tutta la lunghezza del nastro avvolto.

Il lavoro descritto in queste pagine presenta numerosi aspetti innovativi rispetto a quello descritto in [14], nonostante l'idea di base sia la stessa.

L'aspetto nuovo più rilevante riguarda i dati delle dissipazioni sulla sezione di lunghezza infinitesima. Infatti in questo lavoro tali dati non sono misurati ma calcolati, nel modo descritto nel paragrafo 2.1. Questo significa che le dissipazioni sull'intero avvolgimento sono calcolate partendo direttamente dalle proprietà elettriche del nastro. In questo modo è possibile eseguire già in sede di progetto, una stima delle dissipazioni su un avvolgimento, fabbricato con nastri superconduttore, senza necessariamente eseguire delle misure di dissipazione su spezzoni corti, sottoposti a campi magnetici esterni. Questo modello consente anche di operare in senso inverso, cioè consente di definire delle proprietà elettriche di minima, che il nastro superconduttore deve possedere, affinché le dissipazioni sull'avvolgimento siano minori di un valore prefissato. Questo tipo d'informazioni ovviamente non si possono ottenere se il calcolo delle dissipazioni sull'avvolgimento si basano su misure di dissipazioni su nastri.

Un altro aspetto nuovo consiste nel potere considerare qualsiasi regime temporale per la corrente di trasporto, in particolare quelli più interessanti per le applicazioni industriali sono: il regime sinusoidale e a rampa. Questo è possibile proprio perché i dati di partenza sono le proprietà elettriche del nastro, che devono valere per ogni istante, e non dei dati ottenuti in condizioni di esercizio particolare, come nel caso di regime sinusoidale.

Le considerazioni sviluppate fino a questo punto hanno un carattere generale, nel senso che valgono per qualsiasi configurazione geometrica dell'avvolgimento. L'aspetto fondamentale che deve essere tenuto presente, è che la disposizione geometrica della corrente di trasporto e del campo magnetico esterno, nella sezione del nastro nell'avvolgimento e nella corrispondente sezione del nastro rettilineo, deve essere la stessa, questo a causa dell'anisotropia del materiale superconduttore.

Questo significa che a causa della geometria del sistema fisico di riferimento per il nastro rettilineo, come descritto nel paragrafo 2.1, nella sezione corrispondente del nastro nell'avvolgimento, la direzione della corrente di trasporto deve essere ortogonale al piano su cui giace la sezione, mentre il campo magnetico esterno deve essere parallelo a tale piano. Questa configurazione si ottiene per avvolgimenti assialsimmetrici, quindi anche toroidali, sebbene in questa analisi si considerano solo avvolgimenti solenoidali.

In questa configurazione, la sezione elementare di nastro avvolto, corrispondente a quella nel nastro rettilineo, ha una larghezza pari a δz , e uno spessore pari a δr , mentre la lunghezza infinitesima del nastro avvolto è $dL = r \cdot d\theta$, dove $d\theta$ è l'angolo infinitesimo. La larghezza δz e lo spessore δr , sono quelli reali del nastro avvolto, cioè non contengono i materiali isolanti.

A causa della simmetria assiale di questa configurazione, il campo magnetico, che è quello generato dalla corrente che circola nell'avvolgimento, può avere al più due componenti: una parallela all'asse r e l'altra parallela all'asse z , mentre la corrente di trasporto è ortogonale al piano r - z , su cui giace la sezione del nastro avvolto

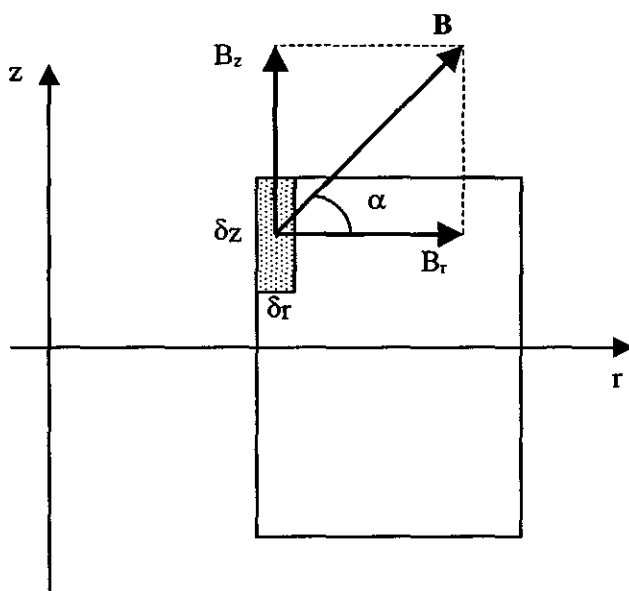


Fig. 2.6 – Schema della sezione dell'avvolgimento solenoidale con il sistema di riferimento cilindrico (asse z e asse r), la sezione di un generico nastro con il campo magnetico nella sezione del generico nastro.

Sempre a causa della simmetria assiale si può affermare che la dissipazione su una lunghezza infinitesima di nastro avvolto $dL = (r \cdot d\theta) \cdot \delta r \cdot \delta z$ è la stessa su tutte le lunghezze infinitesime che appartengono alla stessa spira di raggio r . Infatti per ogni sezione sulla stessa spira si hanno la stessa corrente di trasporto e lo stesso campo magnetico esterno, cioè quello generato dalle altre spire. Quindi la dissipazione su tutta la spira può essere calcolata semplicemente moltiplicando la dissipazione sulla sezione

$\delta z \cdot \delta r$, calcolata mediante il metodo descritto nel paragrafo 2.1, per la lunghezza della spira $L = 2 \cdot \pi \cdot r$, dove r è il raggio della spira.

Occorre a questo punto evidenziare un'approssimazione fatta in questa analisi. Per una descrizione esatta del campo magnetico esterno che agisce sulla sezione $\delta z \cdot \delta r$, bisognerebbe calcolare il campo generato dalla sezione dell'avvolgimento, esclusa la sezione $\delta z \cdot \delta r$. Nei calcoli descritti in questi capitoli, il campo magnetico si calcola considerando una densità di corrente uniforme su tutta la sezione dell'avvolgimento. Tuttavia a causa dell'elevato numero di spire (da alcune centinaia ad oltre un migliaio), si ritiene che il contributo della singola spira, che contiene la sezione $\delta z \cdot \delta r$, rispetto al campo generato da tutte le altre spire, sia minore di alcuni ordini di grandezza. In questo modo l'errore introdotto da questa approssimazione si può ritenere trascurabile.

Quindi la dissipazione complessiva su tutto l'avvolgimento si calcola come la somma del contributo di tutte le spire. La somma di questi contributi può essere fatta in almeno due modi.

Nel primo modo si calcolano le dissipazioni su tutte le spire che compongono la sezione dell'avvolgimento, successivamente si esegue una somma algebrica di tutti i singoli contributi, come mostrato nella seguente espressione:

$$Q_{totale} = \sum_{k=1}^{N_{sp}} Q_k$$

dove N_{sp} rappresenta il numero di spire che compongono la sezione dell'avvolgimento, e Q_k la dissipazione sulla spira k -esima.

Nel secondo modo si definisce una funzione densità di potenza $Q(r,z)$, che rappresenta la dissipazione sulla spira di raggio r e sezione $dr \cdot dz$. Questa funzione si ottiene dal rapporto tra la dissipazione sulla spira di raggio r e sezione $\delta z \cdot \delta r$, e una sezione fittizia che contiene anche i materiali isolanti, calcolata tenendo conto del numero dei pancakes e delle spire per ogni pancakes, cioè:

$$S_{fittizia} = \frac{\text{sezione complessiva dell'avvolgimento}}{\text{numero totale di spire}}$$

In questo modo la dissipazione complessiva si calcola con un integrale su tutta la sezione dell'avvolgimento, come mostrato nella seguente espressione:

$$Q_{totale} = \int_{sez-avv} Q(r,z) dr dz \quad (2.18)$$

dove con sez-avv s'intende la sezione sul piano r - z dell'intero avvolgimento.

Entrambi i metodi sono equivalenti, la scelta di quale usare è puramente arbitraria. Al più può dipendere da motivi di convenienza legati al calcolo numerico della dissipazione complessiva.

Nel lavoro descritto in questi capitoli è stato usato il secondo metodo (calcolo mediante l'integrale).

CAPITOLO III

3.1 INTRODUZIONE

In questo capitolo sono descritti i metodi di risoluzione numerica usati per risolvere le equazioni ricavate nel capitolo 2.

In particolare per il caso del nastro rettilineo le variabili spaziali e temporale sono state considerate separatamente. L'intervallo temporale nel quale si vuole calcolare la dissipazione, è stato diviso in tanti intervalli, individuando così molti istanti di tempo. Per ogni istante è stata calcolata la distribuzione della densità di corrente, mediante il Metodo agli Elementi Finiti, e la dissipazione nell'intervallo di tempo, che ha tale istante come estremo inferiore, e considerando costante la distribuzione della densità di corrente in tale intervallo. Quest'approssimazione è tanto più valida quanto più alto è il numero di divisione dell'intervallo complessivo.

Per quanto riguarda le dissipazioni sull'avvolgimento, la funzione $Q(r,z)$ è stata calcolata solo per alcuni punti, allo scopo di ridurre i tempi di calcolo. In questo modo è stata ottenuta una funzione a due dimensioni, la cui curva corrispondente è costituita da tanti parti di piano, in cui i vertici sono i punti nei quali tale funzione è stata calcolata, e i bordi, dei segmenti che uniscono tali punti. L'integrazione sulla sezione dell'avvolgimento è stata eseguita con metodi numerici.

3.2 NASTRO RETTILINEO

Il sistema di equazioni da risolvere è il seguente:

$$\begin{cases} E_z(J_z) = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial A_{z,ex}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \int_{sezione} \frac{\mu_0 J_z(\xi, \eta)}{2\pi} \log \left| \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \right| d\xi d\eta \\ \int_{sezione} J_z(x, y) \cdot dx dy = I_{tr} \end{cases}$$

(3.1)

in cui:

$$J_z(E_z) = \sigma E_0 (1 - ff) \left(\frac{E}{E_0} \right) + J_{c,eng} \left(\frac{E}{E_0} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Le incognite sono: la distribuzione della densità di corrente $J(x,y,t)$, per ogni punto (x,y) della sezione del nastro e per ogni istante t compreso nell'intervallo ΔT , nel quale si vuole calcolare la dissipazione, e $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$. Tuttavia l'incognita utile per il calcolo della dissipazione complessiva è la distribuzione della densità di corrente.

Sull'intervallo ΔT non ci sono vincoli, e dipende dal regime temporale che si vuole analizzare, e dal tipo di informazioni che si vogliono ottenere da quest'analisi. Pertanto nel caso di regimi sinusoidali ΔT potrebbe essere corrispondente ad un certo numero di cicli (con riferimento ai cavi per la trasmissione di potenza), in quelli a rampa può essere corrispondente ad un generico intervallo, per esempio quello necessario per passare da un regime stazionario ad un altro, sempre stazionario (con riferimento ai transitori nei dispositivi SMES).

L'incognita J dipende da tre variabili: una temporale, e due spaziali, che sono le coordinate del generico punto della sezione. Le variabili spaziali e quella temporale sono state trattate separatamente.

L'intervallo ΔT è stato suddiviso in intervalli δt molto inferiori, di almeno 3 o 4 ordini di grandezza, in modo da avere tanti istanti di tempo contenuti nell'intervallo complessivo ΔT . Se N_t è il numero degli intervalli δt , ogni istante può essere indicato come $t_k = t_0 + k \cdot \delta t$ dove k è un intero e $k \in [0, N_t]$, e t_0 è l'istante iniziale dell'intervallo ΔT .

Per ogni t_k è stata calcolata la distribuzione della densità di corrente J , mediante il Metodo agli Elementi Finiti. Questo significa che la soluzione è un vettore in cui ogni elemento corrisponde al valore della densità di corrente su dei punti particolari della sezione, detti nodi, e il valore della densità di corrente sugli altri punti si ottiene come combinazione lineare, di tutti gli elementi di questo vettore, mediante delle funzioni opportune, dette funzioni di forma, che dipendono dal tipo di elemento elementare, con cui è stata suddivisa la sezione. Quindi la distribuzione della densità di corrente può essere scritta nella seguente forma:

$$\tilde{J}(x, y) = \sum_1^{N_{nodi}} J_n \cdot F_n(x, y)$$

dove F_n rappresenta la funzione di forma corrispondente al nodo n , e N_{nodi} rappresenta il numero totale dei nodi.

Se l'intervallo δt è sufficientemente piccolo, si può considerare costante il valore della densità di corrente nei punti della sezione, inoltre mediante l'equazione costitutiva è anche nota la distribuzione del campo elettrico, rappresentata dalla seguente espressione:

$$\tilde{E}(x, y) = \sum_1^{N_{nodi}} E_n(J_n) \cdot F_n(x, y)$$

Con queste relazioni si può calcolare la dissipazione nell'intervallo δt nel seguente modo:

$$Q_k = \left[\int_{sezione} \tilde{E}(x, y) \cdot \tilde{J}(x, y) \cdot dx dy \right] \delta t$$

dove Q_k rappresenta la dissipazione nel k-esimo intervallo temporale.

Se si ripete tale processo per tutti gli intervalli δt , si può calcolare la dissipazione complessiva, cioè su tutto l'intervallo ΔT , mediante la seguente espressione:

$$Q_{totale} = \sum_{k=1}^{N_t} Q_k$$

dove Q_{totale} rappresenta appunto la dissipazione complessiva nell'intervallo temporale specificato.

3.2.a Definizione dei parametri di griglia

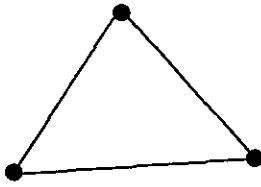
Come già detto la distribuzione della densità di corrente sulla sezione, nel k-esimo intervallo temporale, è stata calcolata mediante il Metodo agli Elementi Finiti, che consiste nel suddividere il dominio della funzione incognita in tanti elementi di forma opportuna (quelle più usate sono le forme triangolare e quadrata), che corrispondono a dei punti particolari, detti nodi, nei quali si calcola il valore esatto della funzione incognita.

Ad ogni elemento possono corrispondere più gruppi di nodi, per esempio nell'elemento triangolare si possono considerare, come nodi, solo i vertici, i vertici più il baricentro, i vertici più i punti mediani di ogni lato, e altri ancora (fig. 3.1).

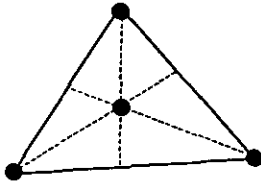
Ad ogni coppia di elemento e gruppo di nodi corrisponde un particolare gruppo di funzioni di forma, che consentono di esprimere il valore della funzione incognita in ogni punto dell'elemento, come combinazione lineare dei valori della funzione incognita nei nodi, come rappresentato dalla seguente espressione:

$$\tilde{U}^e(x, y) = \sum_{n=1}^{N_{nodi}} U_n^e \cdot F_n(x, y)$$

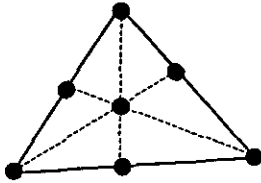
dove il pedice e rappresenta il numero dell'elemento, N_{nodi} il numero di nodi dell'elemento e , F_n la funzione forma corrispondente al nodo n , e U_n^e il valore della funzione incognita U nel nodo n dell'elemento e .



Elemento triangolare con 3 nodi



Elemento triangolare con 4 nodi



Elemento triangolare con 7 nodi

Fig. 3.1 – Esempi di elemento triangolare con diversi gruppi di nodi

La scelta dell'elemento con cui suddividere il dominio della funzione incognita dipende quindi dal tipo di funzione di forma con cui si vuole approssimare la soluzione reale all'interno dell'elemento stesso. Questa scelta è fortemente legata al tipo di operazioni (integrali, derivate, ecc...) che compaiono nell'equazione differenziale da risolvere, questo significa che deve esserci compatibilità tra la struttura delle funzioni di forma e le operazioni da eseguire su di esse. Per esempio, se nell'equazione differenziale da risolvere, compaiono delle derivate del secondo ordine, occorre che la funzione di forma sia almeno di secondo grado, o di grado più alto, se ritenuto opportuno.

In quest'analisi il sistema di equazioni da risolvere è quello rappresentato in (3.1), quindi una funzione di forma di primo grado è sufficiente. Questo significa che si può usare un elemento triangolare con i nodi disposti sul vertice, come rappresentato nella figura 3.2, le cui funzioni di forma corrispondenti sono:

$$N_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta$$

$$N_2(\xi, \eta) = \eta$$

$$N_3(\xi, \eta) = \xi$$

con $\xi \in [0,1]$ e $\eta \in [0,1]$.

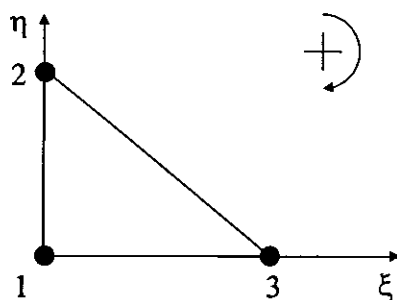


Fig. 3.2 – Elemento triangolare con nodi nei vertici, usato in quest'analisi; in figura è rappresentato anche l'orientamento orario della numerazione dei nodi nell'elemento e il sistema di coordinate locali, con gli assi ξ e η .

Quindi la distribuzione della densità di corrente all'interno dell'elemento si esprime nel seguente modo:

$$\tilde{J}(x, y) = \sum_{n=1}^3 J_n \cdot N_n(x, y)$$

mentre l'altra incognita $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ non ha bisogno di funzioni di forma: il suo valore è costante su tutti i punti della sezione.

Successivamente occorre suddividere il dominio in tanti elementi triangolari. Non ci sono delle regole generali da seguire durante questa suddivisione, tuttavia esistono degli accorgimenti opportuni che dipendono da caso a caso.

In particolare in quest'analisi il dominio è stato suddiviso con elementi tutti uguali, come mostrato nella figura 3.3. L'unico accorgimento usato consiste nell'aver creato una griglia con le stesse simmetrie della sezione, cioè simmetria assiale rispetto ad entrambi gli assi x e y .

Quest'accorgimento è stato preso non per ragioni fisiche, poiché il risultato non può dipendere da come si suddivide la sezione, ma per evitare problemi di tipo numerico durante la fase di calcolo. Infatti problemi di questo tipo sono stati riscontrati con una suddivisione differente, per questa ragione è stato adottato, dopo opportuna riflessione, l'accorgimento sopra descritto.

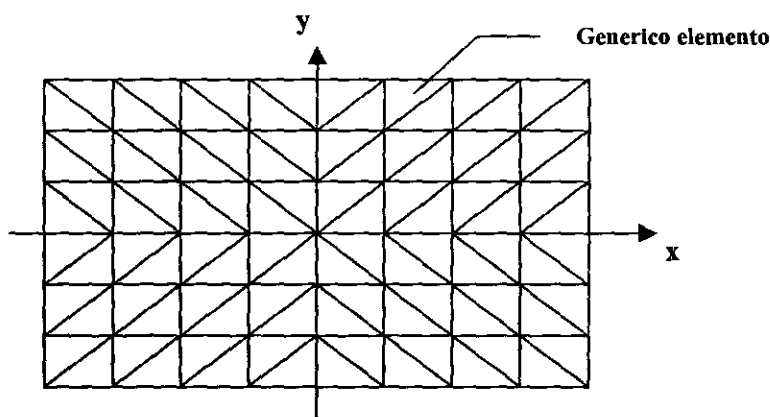


Fig. 3.3 – Suddivisione della sezione in elementi triangolari, secondo una griglia che ha le stesse simmetrie della sezione: assi x e y.

Con una tale suddivisione sono possibili 4 orientazioni diverse per gli elementi, come mostrato nel seguente schema e come si può notare nella figura 3.3:

- a) asse ξ parallelo ed equiverso all'asse x ed asse η parallelo ed equiverso all'asse y,
- b) asse ξ parallelo ed equiverso all'asse x ed asse η parallelo ed opposto all'asse y,
- c) asse ξ parallelo ed opposto all'asse x ed asse η parallelo ed equiverso all'asse y,
- d) asse ξ parallelo ed opposto all'asse x ed asse η parallelo ed opposto all'asse y.

L'orientazione degli elementi è un parametro fondamentale per le equazioni che descrivono le trasformazioni dalle coordinate locali (ξ, η) a quelle globali (x,y) e viceversa. Queste relazioni sono mostrate nel seguente schema:

trasformazione dalle coordinate locali
a quelle globali:

$$\begin{cases} x = x_{1,e} + sign_x \cdot \Delta x \cdot \xi \\ y = y_{1,e} + sign_y \cdot \Delta y \cdot \eta \end{cases}$$

trasformazione dalle coordinate globali
a quelle locali:

$$\begin{cases} \xi = \frac{x - x_{1,e}}{sign_x \cdot \Delta x} \\ \eta = \frac{y - y_{1,e}}{sign_y \cdot \Delta y} \end{cases}$$

dove $x_{1,e}$, $y_{1,e}$ sono le coordinate del nodo 1 del generico elemento e, rispetto al riferimento globale. Δx e Δy sono le lunghezze dei lati dell'elemento, rispettivamente parallelo all'asse x e all'asse y, mentre i parametri $sign_x$ e $sign_y$ dipendono dall'orientazione dell'elemento e, secondo la seguente corrispondenza:

- a) orientazione a: $sign_x = sign_y = 1$

- b) orientazione b: $sign_x = 1$ e $sign_y = -1$
- c) orientazione c: $sign_x = -1$ e $sign_y = 1$
- d) orientazione d: $sign_x = sign_y = -1$

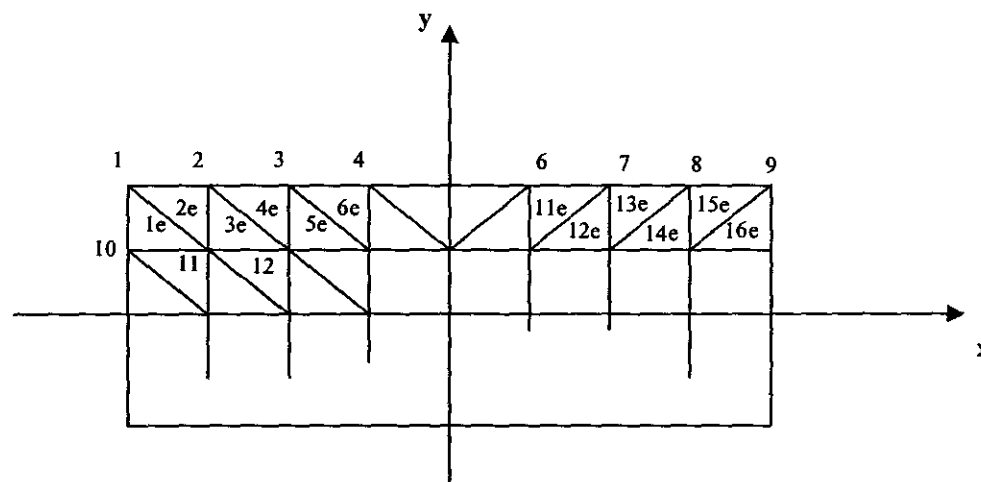


Fig. 3.4 – Numerazione dei nodi e degli elementi (numeri con il pedice e). In questo schema è parzialmente rappresentata una maglia con 64 elementi e 45 nodi.

Anche per la numerazione dei nodi e degli elementi non ci sono delle regole generali da seguire. In quest'analisi la numerazione dei nodi è stata fatta per righe, lo stesso criterio è stato usato per gli elementi, come rappresentato, in fig. 3.4. In questa figura ci sono solo 64 elementi e 45 nodi, un numero insufficiente per avere una precisione accettabile nel risultato, tuttavia questa figura ha semplicemente lo scopo di evidenziare il criterio di numerazione dei nodi e degli elementi.

A questo punto sono noti tutti i parametri della griglia che servono per discretizzare l'equazione differenziale da risolvere; questo è l'argomento sviluppato nella sezione successiva.

3.2.b Discretizzazione del sistema di equazioni

Con l'espressione discretizzazione dell'equazione s'intende quel processo che, partendo dal sistema di equazioni differenziali da risolvere, mediante opportune elaborazioni, conduce ad un sistema di equazioni lineare ed algebrico, cioè senza operatori come derivate e integrali, in cui le incognite sono i valori delle soluzioni del sistema di equazioni differenziale, sui nodi.

In quest'analisi il sistema da discretizzare è quello rappresentato in (3.1), e le incognite del sistema algebrico ottenuto mediante la discretizzazione, sono i valori della densità di corrente e della derivata spaziale rispetto a z , del potenziale scalare Φ (Φ'), nei nodi. Φ' come è stato detto, è costante su tutta la sezione, questo significa che per avere un sistema completo, cioè tante equazioni quante sono le incognite, occorre avere un sistema di $n+1$ equazioni, dove n è il numero dei nodi: n equazioni per i valori della densità di corrente nei nodi, e una per il valore di Φ' .

L'espressione matriciale corrispondente a questo sistema algebrico ha la seguente forma:

$$[A] \cdot \begin{bmatrix} j_z \\ \Phi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

dove $[A]$ è una matrice quadrata $n+1$, a coefficienti costanti, che dipendono solo dalle caratteristiche geometriche della griglia, e il vettore che compare nel membro di sinistra ha $n+1$ componenti: n sono i valori della derivata temporale della densità di corrente sui singoli nodi, j_z , mentre l'altra componente rappresenta il valore di Φ' . Al secondo membro compare un vettore di $n+1$ componenti, ed ogni componente, in generale, dipende dalla densità di corrente sui nodi, dal valore del campo esterno $A_{z,ex}$, dal valore istantaneo della corrente di trasporto I_{tr} , e dalle coordinate x ed y .

L'equazione (3.2) può essere risolta con l'uso di opportune routines matematiche disponibili nel Dipartimento di Ingegneria Elettrica dell'Università di Pisa, che calcolano direttamente la soluzione del sistema di equazioni differenziali di primo ordine, impostato nella forma rappresentata in (3.2), cioè i valori della densità di corrente nei nodi, e di Φ' .

Occorre a questo punto descrivere le singole fasi del processo di discretizzazione del sistema di equazioni (3.1).

Come già detto, l'espressione approssimata della densità di corrente all'interno dell'elemento ha la seguente forma:

$$\tilde{j}(x,y) = \sum_j j_j \cdot N_j(x,y) \quad (3.3)$$

se si sostituisce questa espressione nel sistema (3.1), considerando tutti gli elementi che ricoprono la sezione, si ottengono le seguenti due relazioni, valide per ogni punto (x,y) del dominio.

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial A_{ex}}{\partial t} - \Phi'_z - \left\{ \sum_{e=1}^{N_{elem}} \left[\sum_{k=1}^3 N_k^e(x, y) \cdot E_{z,k}^e(J_{z,k}^e) \right] \right\} = \\
- \sum_{e=1}^{N_{elem}} \left[\int_{elemento} \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{k=1}^3 N_k^e(x', y') \cdot J_{z,k}^e \cdot \log \left| \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \right| dx' dy' \right]
\end{aligned}
\quad (3.4)$$

$$\int_{sezione} \sum_{e=1}^{N_{elem}} \left[\sum_{k=1}^3 N_k^e(x, y) \cdot J_{z,k}^e \right] = I_{tr}(t_k)
\quad (3.5)$$

dove N_{elem} rappresenta il numero di elementi che ricoprono il dominio (la sezione del nastro), il pedice k rappresenta il numero del nodo dell'elemento rappresentato dall'apice e , e la superficie d'integrazione è quella dell'elemento numero e .

Il termine $E_{z,k}^e(J_{z,k}^e)$ rappresenta il valore del campo elettrico nel nodo k dell'elemento e , che si ottiene direttamente dall'equazione costitutiva (2.1), mentre $I_{tr}(t_k)$ rappresenta il valore istantaneo della corrente di trasporto nell'istante t_k . La relazione costitutiva $E - J$ è biunivoca, come si può osservare nella fig. 2.3, questo significa che è invertibile, cioè è possibile esprimere il campo elettrico in funzione della densità di corrente e viceversa. Tuttavia come si può osservare dalla relazione (2.1), mentre l'espressione che esprime la densità di corrente in funzione del campo elettrico è relativamente semplice, quella che esprime il campo elettrico in funzione della densità di corrente è estremamente complicata. Pertanto nella descrizione del processo di discretizzazione, è stata usata la forma implicita per esprimere la funzione $E = f(J)$, e il calcolo del campo elettrico in corrispondenza di un dato valore della densità di corrente, è stato eseguito con metodi numerici.

La (3.4) e la (3.5) possono essere scritte in forma matriciale.

In particolare la (3.4), per ogni (x, y) , assume la seguente forma:

$$-\dot{A}_{z,ex} - \Phi'_z - \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{E} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \mathbf{A}_R^T \cdot \dot{\mathbf{J}}_z \quad (3.6)$$

$\mathbf{B}$ è un vettore di n componenti e ogni componente è una funzione delle variabili (x, y) , $\mathbf{E}$ è un vettore di n componenti, dove ogni componente è il valore del campo elettrico nei nodi. Il prodotto tra il trasposto di $\mathbf{B}$ ed $\mathbf{E}$ rappresenta il valore del campo elettrico nel generico punto (x, y) , espresso come combinazione lineare dei valori del campo elettrico nei nodi. $\dot{\mathbf{J}}_z$ è un vettore, con n componenti, dove ogni componente rappresenta il valore della derivata della densità di corrente, nel nodo corrispondente, mentre $\mathbf{A}_R$ è

un vettore, anch'esso di n componenti, dove ogni componente $A_{R,i}$, con i intero che varia da 1 ad n , si ottiene dalla seguente espressione:

$$A_{R,i} = \sum_{el=1}^{N_{el}} \int_{area} N_{i(k,el)}^{el}(x', y') \cdot \log \left| \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \right| dx' dy' \quad (3.7)$$

dove N_{el} rappresenta il numero di elementi che contengono il nodo i , l'area d'integrazione è la superficie dell'elemento el , e $N_{i(k,el)}^{el}$ rappresenta la funzione di forma corrispondente al nodo i , secondo la numerazione globale di tutta la griglia, e al nodo k secondo la numerazione locale dell'elemento le (vedi fig. 3.2). In altri termini, l'integrale contenuto in (3.7) può assumere una delle seguenti forme:

1. se il nodo i nell'elemento el corrisponde al nodo 1 si ha:

$$\int_{area} N_1(x', y') \cdot \log \left| \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \right| dx' dy'$$

2. se il nodo i nell'elemento el corrisponde al nodo 2 si ha:

$$\int_{area} N_2(x', y') \cdot \log \left| \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \right| dx' dy'$$

3. se il nodo i nell'elemento el corrisponde al nodo 3 si ha:

$$\int_{area} N_3(x', y') \cdot \log \left| \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \right| dx' dy'$$

La funzioni di forma N_1 , N_2 e N_3 , in queste espressioni sono rappresentate in coordinate globali, per avere queste in coordinate locali si usano le equazioni di trasformazione delle coordinate, descritte nella precedente sezione.

La funzione integranda, negli integrali di (3.7), è sempre positiva, ciò è dovuto al segno di valore assoluto, ma soprattutto al significato fisico dell'argomento del logaritmo. Infatti questo rappresenta una distanza: quella tra il punto sorgente del campo magnetico, dovuto alla corrente che circola nella sezione, e quello dove si vuole calcolare il campo, generato proprio da quella sorgente. Una distanza è sempre positiva, al più può essere nulla. In questo il logaritmo diverge, tuttavia la funzione integranda non diverge, in particolare si annulla per effetto della moltiplicazione con la funzione di forma che è un polinomio di primo grado. In altri termini quando l'argomento della derivata si annulla la funzione integranda assume la seguente forma:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \log x) = 0$$

da cui segue che la funzione integranda è sempre maggiore o uguale a zero, quindi integrabile.

La (3.5) in forma matriciale ha la seguente forma:

$$\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{J}_z = I_{tr} \quad (3.8)$$

dove $\mathbf{J}_z$ è un vettore di n componenti, e ogni componente rappresenta il valore della densità di corrente nei nodi e $\mathbf{S}$ è un vettore anch'esso di n componenti, e il valore di ogni componente S_i si ottiene dalla seguente espressione:

$$S_i = \sum_{el=1}^{N_{el}} \int_{area} N_{i(k,el)}^{el}(x,y) dx dy \quad (3.9)$$

dove i simboli hanno lo stesso significato della (3.7).

Per ottenere le $n+1$ equazioni richieste, cioè i coefficienti della matrice $[\mathbf{A}]$ in (3.2), è stato usato il Metodo del Point Collocation. Questo metodo consiste nell'imporre che la funzione approssimata, cioè quella rappresentata in (3.3), abbia lo stesso valore di quella reale in determinati punti particolari. In quest'analisi è stato imposto che la differenza tra la funzione reale e quella approssimata sia nulla su tutti i nodi. Questo equivale a scrivere n equazioni come la (3.6), dove, per ogni equazione, le variabili (x,y) assumono i valori delle coordinate del nodo corrispondente al numero di equazione, in altri termini nella generica h -esima equazione, x ed y assumono le coordinate del nodo h , in cui h è un intero compreso tra 1 ed n .

La (3.8) rappresenta un vincolo, da questa non si ricavano altre equazioni, tuttavia scritta in questo modo non è utile, perché serve un'altra relazione che contenga il vettore $\mathbf{J}_z$. Questa si ottiene derivando la (3.8) rispetto al tempo.

In questo modo si ottengono n equazioni dalla (3.4) e una equazione dalla (3.5): in tutto quindi $n+1$ equazioni. Il sistema completo, dopo alcuni passaggi algebrici diventa il seguente:

$$\begin{bmatrix} \frac{\mu_0}{2\pi} \mathbf{A} \\ \mathbf{S}^T \end{bmatrix} \mathbf{J}_z = \begin{bmatrix} \mathbf{E} + \mathbf{D}_A + \mathbf{D}_\Phi \\ \frac{dI_{tr}}{dt} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

La matrice a sinistra dell'equazione ha $n+1$ righe e n colonne, le prime n righe si ottengono da n vettori $\mathbf{A}_R$, uno per ogni nodo, mentre il vettore $\mathbf{S}$ è quello della (3.8). A destra dell'equazione compare un vettore di $n+1$ righe. Le prime n righe sono costituite dalla somma algebrica dei coefficienti omologhi dei vettori $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}_A$ e $\mathbf{D}_\Phi$: le componenti del vettore $\mathbf{E}$ sono i valori del campo elettrico nei nodi, mentre quelli dei vettori $\mathbf{D}_A$ e $\mathbf{D}_\Phi$ sono tutti uguali e rappresentano, rispettivamente gli scalari $\dot{A}_{z,ex}$ e $\dot{\Phi}$, l'ultima riga invece è il valore istantaneo della derivata temporale della corrente di trasporto.

In altri termini le prime n righe della (3.10) rappresentano n equazioni (3.6), dove in ogni equazione le variabili (x,y) assumono i valori delle coordinate dei nodi, mentre

l'ultima riga rappresenta la derivata temporale dell'equazione (3.8). Le incognite di questo sistema sono il vettore $\mathbf{J}_z$, anche se non compare esplicitamente in (3.10), e lo scalare Φ' .

Il sistema (3.10) in questa forma non può essere risolto direttamente, inoltre lo scalare Φ' non è necessario per il calcolo della dissipazione complessiva. Pertanto occorre eseguire delle elaborazioni sulla (3.10) in modo da ottenere un sistema che può essere risolto direttamente dalle routines matematiche di libreria, e quest'elaborazione si basa sul calcolo separato dello scalare Φ' . In questo modo si ottiene anche una riduzione del numero di equazioni: da $n+1$ a n , riducendo così il tempo di calcolo.

Per calcolare il valore di Φ' è sufficiente considerare la prima equazione di (3.10), che si ottiene moltiplicando la prima riga della matrice a sinistra dell'equazione, per il vettore colonna $\mathbf{J}_z$. In questo modo si ottiene la seguente espressione:

$$\frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{i=1}^n A_{1,i} \cdot J_{z,i} = \Phi' + E_1 + \dot{A}_{z,ex}$$

da cui:

$$\Phi' = -E_1 - \dot{A}_{z,ex} + \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{i=1}^n A_{1,i} \cdot J_{z,i} \quad (3.11)$$

Se si considera una generica riga r dell'equazione (3.10), con r intero compreso tra 2 e n , si ottiene la seguente espressione:

$$\frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{i=1}^n A_{r,i} \cdot J_{z,i} = \Phi' + E_r + \dot{A}_{z,ex} \quad (3.12)$$

se s'inserisce la (3.11) nella (3.12) si ottiene:

$$\frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{i=1}^n A_{r,i} \cdot J_{z,i} = +E_r + \dot{A}_{z,ex} - E_1 - \dot{A}_{z,ex} + \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{i=1}^n A_{1,i} \cdot J_{z,i}$$

da cui segue:

$$\frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{i=1}^n (A_{r,i} - A_{1,i}) \cdot J_{z,i} = (E_r - E_1) \quad (3.13)$$

Se si considera la (3.13) per ogni r compreso tra 2 ed n , si ottengono $n-1$ equazioni, l'espressione matriciale corrispondente è la seguente:

$$\frac{\mu_0}{2\pi} [\mathbf{M}] \cdot \mathbf{J}_z = \Delta \mathbf{E} \quad (3.14)$$

dove $\mathbf{M}$ è una matrice con $n-1$ righe e n colonne, e il generico coefficiente di riga r e colonna c , $M_{r,c}$ ha la seguente espressione:

$$M_{r,c} = A_{r+1,c} - A_{1,c}$$

mentre ΔE è un vettore di $n-1$ componenti, e la generica componente r , ΔE_r , ha la seguente espressione:

$$\Delta E_r = E_{r+1} - E_1$$

La (3.14) consente di scrivere la nuova espressione matriciale da risolvere, ridotta di una riga, nella forma adatta per una risoluzione diretta:

$$\begin{bmatrix} \frac{\mu_0}{2\pi} \mathbf{M} \\ \mathbf{S}^T \end{bmatrix} \mathbf{j}_z = \begin{bmatrix} \Delta E \\ \frac{dI_r}{dt} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Questo sistema di equazioni è stato risolto numericamente con il Metodo di Adams, mediante una routine di libreria, che calcola direttamente la soluzione di sistemi differenziali del primo ordine della stessa forma della (3.15). Da questa routine si ottengono quindi direttamente tutti i valori della densità di corrente nei nodi.

3.3 AVVOLGIMENTO SOLENOIDALE

Il calcolo delle dissipazione sull'avvolgimento si basa sulla funzione $Q(r,z)$, definita nel capitolo precedente. Il dominio di questa funzione è la sezione dell'avvolgimento nel piano $r-z$, come mostrato in fig. 2.6, e il calcolo della dissipazione totale è stato fatto utilizzando l'equazione (2.18), qui sotto riportata:

$$Q_{totale} = \int_{sez-avv} Q(r,z) dr dz \quad (2.18)$$

Quest'integrale è stato risolto con metodi numerici, e a tale scopo la sezione dell'avvolgimento è stata divisa in tanti elementi rettangolari, come mostrato nella fig. 3.4, dove si può notare anche la numerazione usata per identificare i singoli elementi. Ad ogni elemento corrisponde una spira dell'avvolgimento, tuttavia la superficie dell'elemento comprende, oltre a quella corrispondente alla sezione del conduttore, cioè del nastro di BSCCO, anche l'isolante tra le spire e i materiali di supporto, anch'essi isolanti.

Nella prima fase di calcolo, è stata calcolata la distribuzione del campo magnetico sulla sezione dell'avvolgimento nel piano $r-z$, assumendo una densità di corrente uniforme su tutta la sezione dell'avvolgimento, in particolare, tale campo è stato calcolato sul baricentro di tutti gli elementi.

Successivamente è stata calcolata la dissipazione sui singoli elementi rettangolari, considerati come sezioni di nastro rettilineo, soggetti ad un campo magnetico esterno

uguale a quello nel baricentro dell'elemento corrispondente. La superficie della sezione del nastro corrispondente è quella reale e non quella dell'elemento, poiché nei materiali isolanti non circola corrente, quindi non c'è neanche dissipazione elettrica. Nel caso di regimi sinusoidali la dissipazione è stata calcolata sull'intero periodo, per più periodi, e il valore usato ai fini del calcolo della funzione $Q(r,z)$, è quello ottenuto nell'ultimo periodo, allo scopo di superare eventuali transitori. Inoltre lo spostamento di fase tra la corrente di trasporto e il campo magnetico è stato assunto nullo.

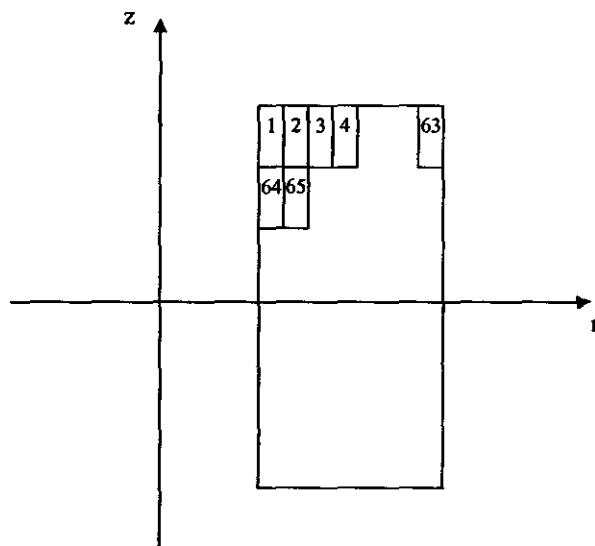


Fig. 3.4 – Sezione dell'avvolgimento nel piano r-z. Ogni elemento corrisponde ad una spira, e la numerazione è stata fatta per righe. Il numero delle spire per righe, come quello delle righe dipende dalle dimensioni geometriche dell'avvolgimento.

Il valore della dissipazione ottenuto sulla sezione del nastro corrispondente ad un determinato elemento, è stato diviso per la superficie dell'elemento stesso, ottenendo in questo modo una densità di dissipazione media, q_e , cioè che tiene conto anche dei materiali isolanti, localizzata sul baricentro della sezione. Questa densità di dissipazione è stata assunta costante su tutta la spira di sezione infinitesima localizzata sulle stesse coordinate del baricentro. In altri termini questa dissipazione si assume costante su tutta la spira di sezione infinitesima di raggio r_e e posta a quota z_e , dove r_e e z_e sono le coordinate del baricentro dell'elemento su cui si sta calcolando la dissipazione. Segue da quest'ipotesi che la funzione $Q(r,z)$, nel punto di coordinate (r_e, z_e) si ottiene dalla seguente relazione:

$$Q(r_e, z_e) = q_e (2 \cdot \pi \cdot r_e) \quad (3.16)$$

Nella condizione ideale bisognerebbe ripetere questo processo per tutti gli elementi della sezione, in modo da avere molti punti per la funzione $Q(r,z)$. Tuttavia a causa dei

lunghi tempi di calcolo questa funzione è stata calcolata solo per alcuni punti, il cui numero dipende dal compromesso tra una sufficiente accuratezza nei confronti dei dati sperimentali disponibili, ed un tempo di calcolo non eccessivamente lungo.

Nella fase finale è stata eseguita una integrazione numerica sulla sezione dell'avvolgimento, dei punti di $Q(r,z)$ calcolati nel modo appena descritto.