

INDICE

Cap. 1	INTRODUZIONE	
1.1	APPLICAZIONI DELLA MAGNETOFLUIDODINAMICA	pag. 1
1.2	MODELLI MATEMATICI PER L'ANALISI DI FLUSSI MAGNETOIDRODINAMICI	pag. 3
Cap. 2	MODELLO MATEMATICO BIDIMENSIONALE TEMPODIPENDENTE DI UN FLUSSO MHD	
2.1	EQUAZIONI DELLA MAGNETOFLUIDODINAMICA	pag. 5
2.2	L'APPROSSIMAZIONE BIDIMENSIONALE	pag. 7
2.3	REGIME DI MOTO TURBOLENTO IN PRESENZA DI INTERAZIONE MHD	pag. 7
2.4	LE EQUAZIONI DELLA FLUIDODINAMICA	pag. 10
2.5	LE EQUAZIONI DELL'ELETTRODINAMICA	pag. 13
Cap. 3	METODI DI SOLUZIONE NUMERICA	
3.1	CRITERI GENERALI	pag. 15
3.2	METODO DI McCORMACK IMPLICITO	pag. 18
3.2.1	PROCEDURA DI FLUX SPLITTING	pag. 20
3.2.2	THIN LAYER APPROXIMATION	pag. 22
3.2.3	PROCEDURA DI DISCRETIZZAZIONE AI VOLUMI FINITI	pag. 24
3.2.4	CONDIZIONI AL CONTORNO	pag. 33
3.3	METODO DI McCORMACK SEMI-IMPLICITO	pag. 37
3.4	METODO DI CASULLI	pag. 42
Cap. 4	MODELLO DELLA TURBOLENZA DI BALDWIN-LOMAX	pag. 46

Cap. 5	CRITERI DI VALIDAZIONE DEGLI ALGORITMI DI SOLUZIONE NUMERICA	
5.1	TEST DI VALIDAZIONE IN CASO DI REGIME DI FLUSSO LAMINARE	pag. 49
5.2	TEST DI VALIDAZIONE DEL MODELLO DELLA TURBOLENZA	pag. 52
Cap. 6	CALCOLO DI TRANSITORI	
6.1	PREMESSA	pag. 61
6.2	DISTRIBUZIONE DELLE GRANDEZZE ELETTRODINAMICHE	pag. 64
6.3	RISULTATI NUMERICI	pag. 66
6.4	APPLICAZIONI A GENERATORI A PLASMA NON UNIFORME	pag. 99
	CONCLUSIONI	pag. 104
	APPENDICE	
	APPLICAZIONE DEL METODO G.S.L.R. NELLA SOLUZIONE DEL PROBLEMA DELLA FLUIDODINAMICA TRAMITE ALGORITMO DI MACCORMACK	pag. 105
	APPLICAZIONE DELLA PROCEDURA DI RILASSAMENTO S.O.R. NELLA SOLUZIONE DEL PROBLEMA DELLA FLUIDODINAMICA TRAMITE ALGORITMO DI CASULLI	pag. 107
	BIBLIOGRAFIA	pag. 111

u	Componente della velocità' rispetto alla coordinata x .
u_b	Velocità' media del fluido operatore.
v	Componente della velocità' rispetto alla coordinata y .
T	Temperatura statica.
T_s	Temperatura di ristagno.
T_w	Temperatura di parete.
x	Coordinata del sistema di riferimento corrispondente alla direzione della velocità' di massa del fluido operatore.
y	Coordinata del sistema di riferimento corrispondente alla direzione ortogonale, rispettivamente, alla direzione della velocità' di massa del fluido ed alla direzione di applicazione del campo di induzione magnetica.
w	Componente della velocità' rispetto alla coordinata z .
z	Coordinata del sistema di riferimento corrispondente alla direzione di applicazione del vettore induzione magnetica.
Δp	Salto di pressione fra ingresso ed uscita del condotto.
β	Parametro di Hall.
δ	Ampiezza dello strato limite.
δ_2	Momentum thickness allo strato limite.
ϕ	Potenziale elettrico.
γ	Rapporto c_p/c_v .
κ	Conducibilità' termica laminare.
κ_t	Conducibilità' termica turbolenta.
λ	$-2/3\mu$ - secondo coefficiente di viscosità' laminare.
μ	Viscosità' dinamica laminare.
μ_t	Viscosità' dinamica turbolenta.
ν	Viscosità' cinematica laminare.
ρ	Densità'.
σ	Conducibilità' elettrica.

τ_w

Tensione alla parete.

ψ

Coefficiente legato a viscosita' e conducibilita' termica del fluido operatore; utilizzato nel calcolo dell'ampiezza del passo temporale nei metodi numerici sviluppati.

1 INTRODUZIONE

1.1 APPLICAZIONI DELLA MAGNETOFLUIDODINAMICA

I principi della magnetofluidodinamica intervengono in molteplici applicazioni tecniche di vasto utilizzo. Alcuni dei settori in cui si svolge attività di ricerca per estendere e migliorare l'impiego di tecniche MHD sono: la lavorazione di acciaio ed alluminio, le tecniche di saldatura, il progetto di interruttori elettrici a plasma, lo sviluppo di pompe elettromagnetiche da impiegare nel circuito primario di reattori veloci, la costruzione di nebulizzatori elettromagnetici per getti di metallo liquido ad alta temperatura, la conversione magnetofluidodinamica dell'energia e la propulsione.

L'utilizzo di applicazioni MHD nella lavorazione dei metalli ha consentito di migliorare la qualità della superficie di alluminio e ferro in corso di lavorazione, consentendo il passaggio diretto fra fase di fusione e fase di piegamento dei metalli e permettendo il risparmio di energia grazie all'eliminazione del processo di riscaldamento delle lastre e del processo di trattamento delle superfici.

E' stata sviluppata una tecnologia per la saldatura degli avvolgimenti al commutatore di macchine elettriche facendo uso di un flusso di lega fusa. Sono stati realizzati diversi dispositivi allo scopo di coprire una vasta gamma di motori elettrici. I vantaggi forniti da questa nuova tecnologia si dimostrano essere: alta qualità delle saldature effettuate, alta produttività, considerevole risparmio di energia e di lega per saldature rispetto alle tecniche di saldatura tradizionali, alta affidabilità, bassi costi operazionali e facile manutenzione.

Un interruttore a plasma e' un dispositivo in cui due conduttori di corrente ad alta intensità ed immersi in un gas dielettrico (SF₆ ad esempio) si separano l'uno dall'altro in caso venga individuato un guasto nel circuito. Un arco appare nel gas che separa i due elettrodi che si stanno aprendo, fino a che la corrente va a zero e l'arco scompare. L'interruttore funziona bene se l'arco non riappare nel caso in cui il voltaggio aumenti molto rapidamente fra i due elettrodi. A questo scopo, un flusso di gas freddo viene fatto fluire nella regione dell'arco.

Lo sviluppo della tecnologia nucleare ha portato alla messa a punto di reattori veloci, nei quali la potenza termica e' asportata facendo uso di sodio liquido. Diversi tipi di pompe elettromagnetiche sono state utilizzate nei loop ausiliari di questi reattori, dimostrandosi piuttosto

affidabili. Ad ogni modo, sino ad ora nel loop primario di un reattore veloce sono state impiegate solo pompe centrifughe meccaniche. Sono in atto attivita' di ricerca volte a mettere a punto pompe elettromagnetiche da impiegare nel circuito primario, e, quindi, ad altissima affidabilita'.

E' stato messo a punto un nebulizzatore elettromagnetico MHD per la produzione di polvere fine di metallo a partire da un getto di metallo liquido ad alta temperatura. Il metallo liquido pronto per essere nebulizzato viene fatto fluire entro un orifizio costituito dalle due superfici orizzontali degli elettrodi che si trovano l'uno di fronte all'altro, separati da una stretta regione di aria dell'elettromagnete. Gli elettrodi sono collegati ad una corrente alternata a frequenza industriale, la quale crea una forza elettromagnetica oscillante. Sono stati progettati diversi dispositivi con la medesima funzione.

I generatori magnetoidrodinamici trasformano l'energia termica e cinetica di un flusso di gas in energia elettrica, in maniera simile a turboalternatori, ma con una sostanziale differenza: in un turboalternatore l'energia di un gas e' impiegata per muovere, mediante le pale di una turbina, il rotore di un alternatore; nel generatore MHD il gas stesso e' un conduttore, il quale, espandendosi attraverso un ugello, realizza il proprio movimento. In entrambi i casi, il moto del conduttore attraverso un campo elettromagnetico da' origine ad una forza elettromotrice e, quindi, ad una corrente, in accordo con la legge di Faraday. L'impiego dei prodotti di combustione delle centrali a combustibile fossile come fluido operatore in un condotto MHD presenta i seguenti vantaggi: il ciclo termodinamico che se ne ottiene ha un rendimento piu' elevato di quello originario, in quanto l'intervallo di temperatura su cui opera e' maggiore che in centrali convenzionali; e' possibile operare a temperature molto piu' elevate che nelle turbine, poiche' nel condotto non vi sono parti rotanti altamente sollecitate; il recupero dell'additivo insemminante consente un drastico abbattimento delle sostanze inquinanti nei prodotti di combustione [1,2,3].

Per realizzare tutte le diverse applicazioni elencate sopra e' stata necessaria una intensa ricerca nel campo della simulazione numerica. Col presente lavoro sono stati messi a punto tre diversi algoritmi per l'analisi di un flusso magnetofluidodinamico; la caratteristica principale dei metodi numerici sviluppati e' la loro generalita', ovvero la loro capacita' di essere adattati alla soluzione del problema della magnetofluidodinamica nelle svariate condizioni generate dalle singole applicazioni tecniche in fase di realizzazione. Specificatamente, nel presente lavoro, i tre modelli numerici in questione sono stati usati per l'analisi di un flusso magnetoidrodinamico entro il condotto di un generatore MHD.

1.2 MODELLI MATEMATICI PER L'ANALISI DI FLUSSI MAGNETOIDRODINAMICI

I modelli matematici per l'analisi di un flusso magnetofluidodinamico possono essere:

- modelli di ottimizzazione;
- modelli di analisi;
- modelli per la sperimentazione numerica.

La determinazione delle condizioni che realizzano requisiti predeterminati consiste in un problema che, generalmente, ammette infinite soluzioni. In particolare, il problema di scelta della soluzione che realizza i requisiti richiesti e' un problema di sintesi. Alla scelta della soluzione da adottare si puo' pervenire attraverso tecniche di ottimizzazione, fissato un criterio di merito.

Per l'elaborazione del progetto di un dispositivo facente uso di un flusso magnetofluidodinamico vengono impiegati sia modelli di ottimizzazione che modelli di analisi. Per modello di analisi si intende un modello in grado di simulare il comportamento di un flusso magnetoidrodinamico nelle diverse condizioni considerate. In fase di progetto preliminare, ovvero per la scelta dei parametri di massima del progetto medesimo, viene fatto uso, solitamente, di un modello quasi-monodimensionale di sintesi, che impiega una procedura numerica di ottimizzazione. Nelle fasi successive del progetto vengono impiegati anche modelli numerici di analisi, sia monodimensionali che bidimensionali. Tali modelli sono necessari per la messa in luce delle regioni piu' "critiche" del dispositivo in fase di progetto. Sempre in fase di progetto, e' spesso necessario ricorrere a modelli numerici tempodipendenti (monodimensionali o bidimensionali) per la verifica del comportamento del flusso magnetoidrodinamico durante un transitorio.

La simulazione numerica viene eseguita con modelli di analisi. Generalmente, vengono usati modelli bidimensionali o, addirittura, tridimensionali tempo dipendenti. In generale, la modellistica numerica deve soddisfare i seguenti requisiti:

- il modello matematico deve essere adeguato alla realta' del sistema trattato, con particolare riguardo alle caratteristiche che risulta essere di interesse studiare;
- la soluzione numerica deve presentare un opportuno grado di accuratezza;
- i calcoli numerici devono utilizzare tempi ragionevoli.

I requisiti di cui sopra sono chiaramente contraddittori, per cui occorre ottimizzare da una parte la necessita' di precisione di calcolo e dall'altra i tempi ed i costi richiesti, in dipendenza dal tipo di applicazioni. La fase di progetto richiede, per lo piu', modelli semplici e flessibili che portino rapidamente a risultati. Tali modelli vengono, solitamente, utilizzati all'interno di codici che applicano delle tecniche di ottimizzazione sotto particolari vincoli imposti. Anche per l'analisi l'onere computazionale deve essere contenuto il piu' possibile, pur non essendo questo un requisito essenziale come per la sintesi. Tale, ad esempio, il caso di modelli di analisi per l'interpretazione e la gestione di risultati sperimentali od utilizzati nel sistema di controllo di impianti di tipo industriale.

La soluzione numerica del problema magnetofluidodinamico comporta la ricerca di due modelli numerici: uno fluidodinamico ed uno elettrodinamico. I due modelli, accoppiati iterativamente, forniscono la soluzione al problema globale.

2 MODELLO MATEMATICO BIDIMENSIONALE TEMPODIPENDENTE DI UN FLUSSO MHD

2.1 EQUAZIONI DELLA MAGNETOFLUIDODINAMICA

Il modello matematico tridimensionale tempo dipendente del flusso di plasma in un campo magnetico è riassunto da un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali costituito dalle equazioni di Navier-Stokes per fluidi viscosi e comprimibili, dalle equazioni di Maxwell ed, infine, dalla legge di Ohm generalizzata [1].

Tale sistema di equazioni si ottiene considerando le equazioni generali dei fluidi carichi e conduttori nell'ipotesi di validità dell'approssimazione della Magnetofluidodinamica. La validità di tale approssimazione risulta essere subordinata al verificarsi delle seguenti condizioni:

- a.) neutralità di carica elettrica;
- b.) velocità media del fluido trascurabile rispetto alla velocità della luce;
- c.) tempo caratteristico di variazione delle grandezze macroscopiche molto maggiore rispetto al periodo di collisione degli elettroni con le particelle pesanti del plasma;
- d.) corrente di spostamento trascurabile rispetto alla corrente di conduzione;
- e.) corrente di convezione trascurabile rispetto alla corrente di conduzione;
- f.) forza elettrostatica agente sul fluido trascurabile rispetto alla forza d'interazione tra corrente elettrica e campo magnetico;

Nella presente trattazione si suppone il numero di Reynolds magnetico, R_m , molto minore di 1; da cui si desume che il campo magnetico indotto è trascurabile rispetto al campo magnetico applicato. Inoltre, il plasma utilizzato quale fluido operante in ciclo aperto, viene posto in condizioni di equilibrio termodinamico locale, con temperatura elettronica pari alla temperatura delle particelle pesanti.

In base alle ipotesi sopraelencate, le equazioni della magnetofluidodinamica vengono scritte come:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{U}) = 0 \quad (2.1.1)$$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{U})}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{U} \mathbf{U}) = -\nabla p - \nabla \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (2.1.2)$$

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho h \mathbf{U}) = \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot (\nabla p) - \bar{\tau} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{U}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + \mathbf{J} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B}) \quad (2.1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.1.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (2.1.5)$$

$$\mathbf{J} + \beta \mathbf{J} \times \mathbf{b} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B}) \quad (2.1.6)$$

L'equazione (2.1.1) è l'equazione di continuità (o equazione di conservazione della massa); l'equazione (2.1.2) esprime la legge di conservazione della quantità di moto; l'equazione (2.1.3) è la legge di conservazione dell'energia; l'equazione (2.1.4) è la legge dell'induzione elettromagnetica di Faraday in forma locale (con il vettore di induzione magnetica costante nel tempo in virtù dell'ipotesi g. precedente); l'equazione (2.1.5) esprime la legge di conservazione della carica; l'equazione (2.1.6) rappresenta, infine, la legge di Ohm generalizzata.

A tale sistema si aggiungono le relazioni di stato del gas, le quali consentono di esprimere la densità di massa e l'entalpia specifica del gas medesimo in funzione di pressione e temperatura. Tali relazioni risultano essere algebriche e del tipo:

$$\rho = \rho(p, T)$$

$$h = h(p, T)$$

La descrizione del flusso di plasma risulta completa quando siano assegnate le proprietà del trasporto, che descrivono la dipendenza del parametro di Hall, $\beta = \mu_e B$ (con μ_e viene indicata la mobilità elettronica), della conducibilità elettrica, σ , e della viscosità dinamica laminare (o molecolare), μ_l , dalla pressione e dalla temperatura. Tali espressioni, analoghe alle equazioni di stato, risultano essere del tipo:

$$\beta = \mu_e(p, T) B \quad (2.1.7)$$

$$\mu_l = \mu_l(p, T) \quad (2.1.8)$$

$$\sigma = \sigma(p, T) \quad (2.1.9)$$

2.2 L'APPROSSIMAZIONE BIDIMENSIONALE

Le equazioni della Magnetofluidodinamica (dalla 2.1.1 alla 2.1.6) sono equazioni tridimensionali tempo dipendenti. Per passare dalla descrizione tridimensionale tempo dipendente nello spazio tetradimensionale di coordinate (x,y,z,t) alla descrizione bidimensionale tempo dipendente occorre introdurre nel sistema di equazioni a cui si è fatto riferimento l'**approssimazione bidimensionale**, la quale può essere riassunta nei seguenti punti:

- 1) si considerano tutte le grandezze delle equazioni come indipendenti dalla coordinata z ;
- 2) in base al punto 1 precedente si considerano nulle tutte le derivate parziali calcolate rispetto alla coordinata z ;
- 3) si considerano nulle le componenti lungo l'asse z di tutte le grandezze vettoriali;
- 4) in base ai punti 2 e 3 precedenti, non si considerano le componenti lungo l'asse z delle equazioni vettoriali di bilancio.

Il risultato dell'approssimazione bidimensionale è la riduzione delle equazioni (dalla 2.1.1 alla 2.1.6) da tridimensionali tempo dipendenti a bidimensionali tempo dipendenti. L'errore introdotto procedendo in base a questa approssimazione è tanto maggiore quanto più le grandezze che intervengono nel sistema di equazioni di cui sopra sono dipendenti dalla coordinata z .

2.3 REGIME DI MOTO TURBOLENTO IN PRESENZA DI INTERAZIONE MHD

Le caratteristiche del moto turbolento, in presenza di interazione MHD, sono complicate dalla presenza, sia della forza frenante agente sul plasma in direzione opposta a quella del moto, sia da una forza ulteriore diretta perpendicolarmente alle pareti catodiche, forza che produce un incremento di disuniformità nella massa del fluido in moto attraverso una generica sezione del canale.

Sebbene gli studi attualmente in atto relativamente al regime di moto turbolento in presenza di interazione MHD, sia dal punto di vista teorico che sperimentale, non siano numerosi, si può comunque supporre che esso presenti, in definitiva, le stesse caratteristiche del moto turbolento puramente fluidodinamico.

Le caratteristiche salienti di tale regime di moto possono essere riassunte come segue:

2

- 1) variazione casuale, nello spazio e nel tempo, delle grandezze macroscopiche del moto, quali velocità, temperatura, pressione, etc.;
- 2) al centro del canale, tali variazioni (o meglio, fluttuazioni), sono completamente disordinate, ovvero isotrope, mentre in prossimità della parete le fluttuazioni lungo la direzione principale di moto sono predominanti rispetto a quelle in direzione trasversale;
- 3) il flusso di materia, quantità di moto ed energia dipende dal meccanismo di trasporto turbolento per l'intera sezione del canale ad eccezione della regione più prossima alla parete, in cui assume rilevanza anche il fenomeno di trasporto dovuto alla diffusione molecolare

Riferendosi a quanto riportato al punto 3), è opportuno precisare che, in regime turbolento, lo strato limite in prossimità della parete di un canale è costituito da due regioni diverse: una regione esterna, relativamente lontana dalla parete, ed una regione interna, a contatto con la parete stessa. A sua volta la regione interna può essere suddivisa in tre strati, a partire dal bordo del condotto:

- 1) substrato viscoso o laminare, estremamente sottile, dove prevale il meccanismo di trasporto molecolare ed il fenomeno di turbolenza può essere ritenuto praticamente assente;
- 2) strato di transizione, ove trasporto molecolare e trasporto turbolento assumono la medesima importanza;
- 3) strato completamente turbolento, dove predomina il fenomeno della turbolenza ed il meccanismo di trasporto ad essa associato.

Poiché gli strati di cui ai punti 2) e 3) sono, rispettivamente, circa 5 e 50 volte più spessi dello strato di cui al punto 1), risulta evidente che il trasporto turbolento di massa, quantità di moto ed energia è nettamente prevalente rispetto al meccanismo di trasporto molecolare.

A causa del carattere fluttuante delle grandezze macroscopiche in regime turbolento, e per effetto della estrema rapidità ed irregolarità di tali fluttuazioni, il sistema di equazioni di Navier-Stokes nella forma bidimensionale non stazionaria con aggiunta dei termini d'interazione magnetofluidodinamica, risultano essere esatte solo se riferite ai valori istantanei delle grandezze in gioco. Una volta risolte, tali equazioni forniscono i valori di velocità, pressione, densità e temperatura istantanei; valori fluttuanti attorno ai cosiddetti 'valori medi', ottenibili grazie ad una operazione di media su di un opportuno intervallo di tempo. Sono questi 'valori medi' ad essere i più rilevanti ai fini dell'analisi del comportamento del flusso di plasma. Inoltre, le equazioni di Navier-

Stockes scritte in regime di moto turbolento, dette per l'appunto equazioni ai valori istantanei, richiedono, per la loro soluzione numerica, un assai oneroso sforzo computazionale [4,5,6,7].

Al fine di passare dalle equazioni ai valori istantanei alle equazioni ai valori medi, il metodo più utilizzato e' l'approccio di Reynolds, sintetizzabile nel seguente procedimento [8]:

1. considerare la generica grandezza $q=q(\vec{x},t)$, funzione dello spazio (rappresentato dal vettore delle coordinate) e del tempo, come somma di una componente media e di una componente fluttuante, dove l'operazione di media sul primo termine viene eseguita su di un intervallo di tempo t_0 molto grande rispetto al periodo della generica fluttuazione turbolenta, ma piccolo rispetto ai tempi caratteristici di variazione delle grandezze macroscopiche medie;
2. introdurre tali espressioni di q nelle equazioni di Navier-Stockes ai valori istantanei;
3. mediare nel tempo le equazioni cosi' ottenute. La media nel tempo, sia per le singole grandezze, sia per le equazioni risultanti viene eseguita sull'intervallo di tempo t_0 .

Applicando tale procedimento alle equazioni di Navier-Stockes ed alle equazioni dell'elettromagnetismo, si ottiene un sistema di equazioni differenziali in cui compaiono le grandezze medie ed i prodotti doppi e tripli di grandezze fluttuanti mediati nel tempo (i valori medi delle grandezze fluttuanti sono nulli per definizione). L'integrazione del sistema di equazioni cosi' ottenuto, che descrive il moto medio del fluido, è possibile in quanto:

1. il tempo caratteristico di variazione delle grandezze medie è molto maggiore del periodo delle fluttuazioni;
2. le lunghezze caratteristiche di variazione delle grandezze medie sono molto maggiori delle dimensioni dei vortici turbolenti.

Ad ogni modo, l'applicazione del metodo di Reynolds introduce nelle equazioni del trasporto una nuova variabile indipendente. Per eliminare l'indeterminazione, cosi' introdotta, nel sistema di equazioni in gioco risulta necessario fare uso di un modello della turbolenza, che consenta di esprimere la nuova variabile in funzione delle grandezze medie note. In questa sede si è scelto di utilizzare il modello della turbolenza di Baldwin-Lomax, la cui descrizione sarà oggetto del quarto capitolo del presente lavoro.

2.4 LE EQUAZIONI DELLA FLUIDODINAMICA

Ci si pone in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale destrogiro, avente l'asse x diretto secondo il verso della velocità di massa del plasma, l'asse y ortogonale alle pareti elettrodiche, e l'asse z parallelo al campo magnetico applicato, ovvero perpendicolare alle pareti isolanti. Il modello bidimensionale tempo dipendente qui trattato effettua un'analisi sul piano x - y passante per l'asse del condotto; piano di simmetria in direzione z , essendo equidistante dalle due pareti laterali.

Il sistema completo delle equazioni di Navier-Stokes per fluidi viscosi e comprimibili, in regime di moto laminare, che tiene conto dell'interazione del flusso col campo elettromagnetico imposto, può essere scritto in forma compatta con la singola equazione vettoriale:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} + \mathbf{H} = 0 \quad (2.4.1)$$

dove:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix} \quad (2.4.2)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ (e + p - \tau_{xx})u - \tau_{yx}v + Q_x \end{bmatrix} \quad (2.4.3)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv - \tau_{yx} \\ \rho v^2 + p - \tau_{yy} \\ (e + p - \tau_{yy})v - \tau_{xy}u + Q_y \end{bmatrix} \quad (2.4.4)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ -J_y B \\ J_x B \\ E_x J_x + E_y J_y \end{bmatrix} \quad (2.4.5)$$

Nelle matrici **F** e **G** i termini dovuti alla viscosità τ_{ij} ed alla conduzione termica Q_i sono espressi come:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right) \quad \text{se } i=j \left(\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (2.4.6)$$

e

$$Q_i = -k \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \quad (2.4.7)$$

L'applicazione del procedimento di media proposto da Reynolds, applicato alle equazioni di Navier-Stokes scritte per un flusso di plasma in regime di moto turbolento, conduce ad un sistema di equazioni "ai valori medi" formalmente identico a quello riportato sopra, valido in regime di moto laminare. In tal caso, però, la (2.4.6) diviene:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right) - \overline{\rho u_i'' u_j''} \quad (2.4.8)$$

in cui u_i'' e u_j'' sono le componenti fluttuanti della velocità. Nell'equazione di conservazione dell'energia il flusso termico assume la forma:

$$Q_i = -k \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} + c_p \rho \overline{T'' u_i''} \quad (2.4.9)$$

in cui T'' è la componente fluttuante della temperatura.

I termini di media delle componenti fluttuanti delle quantità in giuoco che compaiono nelle equazioni (2.4.8) e (2.4.9) debbono essere espressi in funzione delle quantità medie, allo scopo di rendere il sistema determinato. Tale compito viene assolto dal modello della turbolenza introdotto. Sebbene sia concettualmente possibile l'utilizzo in magnetofluidodinamica di modelli della turbolenza assai precisi, ma alquanto onerosi in termini di tempo di esecuzione numerica, quali la large eddy simulation o il k- ϵ model, si è preferito ricorrere al metodo algebrico di Baldwin-Lomax. Tale modello, come la maggior parte dei modelli algebrici impiegati per fluidi turbolenti comprimibili, si basa sulla introduzione di una viscosità turbolenta μ_t , per la quale i termini che compaiono nella

(2.4.8) e (2.4.9) possono essere correlati ai valori medi delle variabili del sistema secondo le relazioni [9]:

$$\overline{\rho u_i u_j} = \mu_t \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \rho k^{te} \quad (2.4.10)$$

e

$$-c_p \rho T \overline{u} = -k_t \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \quad (2.4.11)$$

dove k^{te} nell'equazione (2.4.10) è l'energia cinetica turbolenta ed il termine contenente k^{te} con la pressione nell'equazione di conservazione della quantità di moto. La conducibilità termica turbolenta k_t è legata alla viscosità turbolenta dalla relazione $k_t = c_p \mu_t / Pr_t$, dove Pr è il numero di Prandtl turbolento. Per l'aria esso assume un valore intorno a 0.9.

L'introduzione della viscosità turbolenta e della conducibilità termica turbolenta permette di usare, anche in regime di moto turbolento, le equazioni (2.4.1-7), in cui a μ e k vanno rispettivamente sostituite con $\mu + \mu_t$ e $k + k_t$. Le componenti del tensore degli sforzi di Reynolds sono, dunque, date dalle espressioni:

$$\tau_{xx} = -\frac{2}{3} (\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2 (\mu + \mu_t) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.4.12)$$

$$\tau_{yy} = -\frac{2}{3} (\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2 (\mu + \mu_t) \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.4.13)$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = -(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.4.14)$$

Le due componenti del flusso termico divengono:

$$Q_x = - \left(k + \frac{c_p \mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.4.15)$$

e

$$Q_y = - \left(k + \frac{c_p \mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.4.16)$$

k_t

2.5 LE EQUAZIONI DELL'ELETTRODINAMICA

Per quanto concerne l'analisi di un flusso di plasma, i tempi caratteristici di variazione delle grandezze elettrodinamiche possono essere, per lo più, molto più elevati dei tempi caratteristici di variazione delle grandezze fluidodinamiche. Ciò comporta che i termini elettrodinamici (densità di corrente e campo elettrico) che compaiono nelle equazioni di Navier-Stockes derivino dalla soluzione di un sistema di equazioni stazionario. Perciò, per l'analisi della fluidodinamica, si può considerare l'effetto dovuto alle variazioni delle grandezze dell'elettrodinamica trascurabili rispetto a quelle della fluidodinamica.

Per ottenere dalle equazioni elettrodinamiche tridimensionali tempo dipendenti, le corrispondenti equazioni bidimensionali stazionarie, occorre applicare il procedimento di Reynolds, così come previsto per le equazioni della fluidodinamica. In effetti, in presenza di campo magnetico, le fluttuazioni delle grandezze fluidodinamiche nel plasma conduttore di elettricità producono fluttuazioni del campo elettrico e della densità di corrente, le quali, a loro volta, si ripercuotono sia sul moto medio del fluido, sia sul livello della turbolenza. Una descrizione completa richiede l'uso della forma turbolenta della legge di Ohm generalizzata e delle equazioni di Maxwell, ottenibili tramite il procedimento di Reynolds. Tuttavia, si dimostra che le equazioni (2.1.4-6) con derivate temporali nulle forniscono previsioni assai prossime a quelle ottenibili in base al procedimento di Reynolds, e possono essere considerate le equazioni elettrodinamiche del moto medio [10].

Dalle equazioni (2.1.4-6), supponendo il campo magnetico impresso stazionario ed in direzione z e la velocità di massa in direzione x (è sempre possibile ricondursi a tali ipotesi poiché la componente del campo di induzione parallela alla velocità non ha effetti sul moto delle cariche), si ottengono le equazioni elettrodinamiche nella seguente forma:

$$E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \quad (2.5.1)$$

$$E_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y} \quad (2.5.2)$$

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = 0 \quad (2.5.3)$$

$$J_x = \frac{\sigma}{1+\beta^2} \left((E_x + vB) - \beta(E_y - uB) \right) \quad (2.5.4)$$

$$J_y = \frac{\sigma}{1+\beta^2} \left((E_x + vB) - \beta(E_y - uB) \right) \quad (2.5.5)$$

dove E_x ed E_y rappresentano, rispettivamente, le componenti del campo elettrico in direzione x ed in direzione y del sistema di riferimento prescelto; analogamente con J_x e J_y si fa riferimento alle componenti nelle due direzioni citate della densità di corrente.

Dalle (2.5.1-5) si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sigma}{1+\beta^2} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \phi}{\partial y} + \beta u B + v B \right) \right) +$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\sigma}{1+\beta^2} \left(-\beta \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y} + \beta v B - u B \right) \right) = 0 \quad (2.5.6)$$

Nelle equazioni (2.5.4) e (2.5.5) sono considerate nulle le componenti lungo z del campo elettrico e della densità di corrente elettrica, non essendovi fenomeni di interazione MHD nella direzione del campo di induzione magnetica [1].

3 METODI DI SOLUZIONE NUMERICA

3.1 CRITERI GENERALI

Il sistema di equazioni che descrive il flusso di plasma, nel caso bidimensionale tempo dipendente, è un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali non lineari di tipo iperbolico. La non linearità del sistema deriva dal fatto che nelle equazioni compaiono prodotti di variabili incognite sotto il segno di derivazione. A causa della non linearità, non è possibile affrontare la loro soluzione con metodi di tipo analitico. E', quindi, necessaria una trattazione di tipo numerico delle equazioni del modello. Si procede in questo senso facendo uso di operatori alle differenze finite ed ai volumi finiti.

La differenza sostanziale fra trattazione numerica alle differenze finite (o ai volumi finiti) e trattazione analitica, sta nel fatto che, mentre quest'ultima fornisce una soluzione esatta in forma di funzione continua sul dominio, la prima, invece, consente di ottenere dei valori approssimati della soluzione in un insieme finito di punti del dominio stesso. Tale insieme di punti viene fissato a priori e costituisce quella che viene chiamata griglia, o anche maglia. Le equazioni, per poter essere trattate in via numerica, devono subire un processo di discretizzazione nel quale gli operatori differenziali continui devono essere sostituiti da operatori differenziali discreti.

L'accuratezza della soluzione numerica è legata, fondamentalmente, al tipo di operatore prescelto; tali operatori hanno espressioni che dipendono, in generale, dal passo spaziale. Infatti, essi devono fornire una soluzione che converga verso quella esatta al tendere a zero del passo spaziale. Un operatore si definisce operatore (o algoritmo) di accuratezza di ordine n quando la soluzione da esso fornita in un punto della griglia si discosta da quella analitica per infinitesimi di ordine $O(h^{n+1})$ dove con h si indica il passo della griglia. Al diminuire di h , e quindi all'aumentare del numero dei nodi, si può utilizzare un operatore con grado di accuratezza minore, e quindi meno complesso, semplificando così le equazioni discretizzate; a prezzo, però, di un maggiore onere di calcolo dovuto all'aumento del numero di punti della griglia. Viceversa, l'utilizzo di griglie con un limitato numero di punti comporta la necessità di fare uso di algoritmi con un maggiore grado di accuratezza intrinseco.

Una condizione che appare "necessaria" per la convergenza e' che l'errore di troncamento sia infinitesimo in relazione al passo h , ovvero che il metodo sia consistente [11]. L'errore globale e' il risultato dell'accumulo successivo degli errori locali; più precisamente, ad ogni passo temporale, viene introdotto un nuovo errore locale e questo si propaga successivamente. Per la convergenza,

quindi, occorre che l'accumulo degli errori locali non esploda quando il passo diviene piccolo; ovvero, occorre che il metodo risulti essere stabile. E' stato dimostrato che la stabilita' del metodo e' garantita quando il dominio di dipendenza numerica del metodo contiene il dominio di dipendenza analitico dell'equazione, o del sistema di equazioni, di cui si vuole ottenere la soluzione [12]. Considerando un metodo numerico con cui la soluzione, ad ogni passo temporale, dipende esclusivamente dal valore delle variabili al passo temporale precedente si e' dimostrato che la stabilita' del metodo e' garantita dal rispetto delle relazioni seguenti [13,14,15,16]:

$$\Delta t \leq \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{(u+c) + 2\psi / \rho \Delta x} \quad (3.1.1)$$

$$\Delta t \leq \frac{1}{2} \frac{\Delta y}{(v+c) + 2\psi / \rho \Delta y} \quad (3.1.2)$$

$$\Delta t \leq \frac{1}{2} \frac{\Delta z}{(w+c) + 2\psi / \rho \Delta z} \quad (3.1.3)$$

dove con u, v e w indico, rispettivamente, il valore delle componenti della velocità in direzione x, y e z del sistema di riferimento prescelto; $\Delta x, \Delta y$ e Δz sono il passo spaziale nelle tre diverse direzioni. Il parametro ψ che compare a denominatore delle tre relazioni risulta essere un termine legato alla viscosità μ del fluido operante nel generatore ed alla sua conducibilità termica k [17]. Più precisamente:

$$\psi = \max \left\{ \mu, \frac{\gamma}{cp} k \right\} \quad (3.1.4)$$

Il passo temporale Δt assume il valore del rapporto più piccolo che si ottiene dalle tre relazioni, dovendole soddisfare tutte contemporaneamente. Le relazioni (3.1.1), (3.1.2) e (3.1.3) vengono dette condizioni di stabilita' di Courant-Fiedricks-Lewey.

I metodi numerici che possono essere impiegati per la soluzione del sistema di equazioni della magnetofluidodinamica, sono di tre tipi:

- metodi espliciti, in cui la soluzione ad ogni passo temporale dipende dal valore che le variabili incognite assumono al passo temporale precedente, ed in tal caso l'algoritmo di risoluzione e' soggetto alle condizioni di stabilita' (3.1.1), (3.1.2), (3.1.3);

- metodi **impliciti**, in cui la soluzione ad ogni passo temporale dipende dal valore che le variabili incognite assumono al medesimo passo temporale e l'algoritmo di risoluzione non risulta essere soggetto a nessuna condizione che ne garantisca la stabilita'; un eventuale limite imposto all'ampiezza del passo temporale dipende esclusivamente dal voler garantire l'accuratezza della soluzione ottenuta;
- metodi **semi-impliciti**, in cui la soluzione ad ogni passo temporale dipende in parte dal valore che le variabili assumono al medesimo passo temporale ed in parte dal valore che esse assumono al passo temporale precedente; la condizione di stabilita' che ne deriva e' meno restrittiva delle (3.1.1), (3.1.2), (3.1.3).

Altra caratteristica fondamentale in base alla quale si distinguono i metodi numerici che possono essere impiegati per la risoluzione delle equazioni della fluidodinamica, in cui compaiono i termini generati dall'interazione magnetofluidodinamica, e' l'influenza prodotta, sulla soluzione ottenuta, dalla dissipazione artificiale caratterizzante l'algoritmo medesimo [18]. Per dissipazione artificiale si intende l'effetto "smoothing", sugli andamenti delle grandezze prese in esame, causato dalla presenza di termini del secondo ordine. La presenza di questo termine, caratterizzante per ciascun algoritmo, deve essere accuratamente analizzata, in quanto un eccessivo effetto sugli andamenti ottenuti come soluzione puo' finire con l'inficiare la bonta' degli stessi. Questo termine viene a volte indicato col nome di "viscosita' artificiale": esso agisce come la viscosita' turbolenta causando l'effetto "smoothing". Nel caso in cui si utilizzi un algoritmo ad alta dissipazione artificiale, risulta inutile l'implementazione di un modello della turbolenza, anche se il flusso viaggia a numeri di Reynolds molto sostenuti: la viscosita' fisica del fluido finisce col divenire di contributo trascurabile se rapportata al termine di viscosita' artificiale. Nel caso opposto, invece, in cui la dissipazione artificiale risulti essere quasi assente, possono verificarsi casi in cui l'algoritmo non raggiunge convergenza causa l'insorgere di "onde spurie" nella soluzione; onde che possono essere "controllate" tramite dissipazione artificiale.

3.2 METODO DI McCORMACK IMPLICITO

Allo scopo di procedere alla risoluzione del sistema delle equazioni della fluidodinamica, con i termini dovuti alla interazione MHD, per alti numeri di Reynolds, occorre fare uso di un algoritmo in grado di assicurare precisione nei risultati senza richiedere tempi di esecuzione computazionale proibitivi. Rendendo l'algoritmo implicito di MacCormack alle differenze finite [19] idoneo all'analisi di un flusso magnetofluidodinamico in regime di moto turbolento si ottiene un metodo numerico che si articola in un passo predittore ed in un passo correttore:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta U_{i,j}^n = -\Delta t \left(\frac{DF}{\Delta x} + \frac{DG}{\Delta y} + H \right) \\ \left\{ I + \Delta t \left(\frac{D \cdot A}{\Delta x} + \frac{D \cdot B}{\Delta y} - \frac{D \cdot M_y}{\Delta y} \frac{D \cdot N}{\Delta y} \right) \right\} \delta U_{i,j}^{\bar{n+1}} = \Delta U_{i,j}^n \\ U_{i,j}^{\bar{n+1}} = U_{i,j}^n + \delta U_{i,j}^{\bar{n+1}} \end{array} \right. \quad (3.2.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta U_{i,j}^{\bar{n+1}} = -\Delta t \left(\frac{DF}{\Delta x} + \frac{DG}{\Delta y} + H \right) \\ \left\{ I + \Delta t \left(\frac{D \cdot A}{\Delta x} + \frac{D \cdot B}{\Delta y} - \frac{D \cdot M_y}{\Delta y} \frac{D \cdot N}{\Delta y} \right) \right\} \delta U_{i,j}^{n+1} = \Delta U_{i,j}^{\bar{n+1}} \\ U_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} \left(U_{i,j}^n + U_{i,j}^{\bar{n+1}} + \delta U_{i,j}^{n+1} \right) \end{array} \right. \quad (3.2.2)$$

Dove U , F, G e H sono, rispettivamente, i vettori di cui alle (2.4.2-5). Gli apici che compaiono nelle (3.2.1-2) si riferiscono al passo temporale, mentre i pedici corrispondono ai nodi della griglia di calcolo.

Il metodo ottenuto possiede un'accuratezza del secondo ordine, nel senso definito al paragrafo precedente, sia nel tempo che nello spazio e, non essendo soggetto alla condizione di stabilità di Courant-Friedricks-Lewey, la scelta del passo temporale risulta essere svincolata dall'ampiezza minima del passo spaziale [19]. Limitazioni all'ampiezza del passo temporale possono derivare da effetti non lineari o dal grado di accuratezza della soluzione.

Il sistema (3.2.1) rappresenta il passo predittore dell'algoritmo che fornisce l'aggiornamento del vettore delle variabili dinamiche che verrà poi usato nel sistema (3.2.2), detto anche passo correttore. Prendendo in considerazione, ad esempio, il passo predittore, la prima equazione del sistema è una approssimazione locale esplicita dell'equazione vettoriale (2.4.1). La seconda equazione del sistema inserisce la variazione di soluzione calcolata localmente in una formulazione implicita la cui soluzione dipende globalmente da tutte le variazioni di soluzione calcolate localmente in ogni punto del dominio. La terza equazione del sistema aggiorna il valore della soluzione. Analoga descrizione può essere fatta del passo correttore.

Gli operatori differenziali delle (3.2.1) e (3.2.2) sono operatori alle differenze finite forward, backward o centrati, opportunamente scelti in modo da garantire consistenza e stabilità (ovvero convergenza) al metodo numerico utilizzato [20,21]. Le matrici \mathbf{F} e \mathbf{G} che compaiono nelle (3.2.1) e (3.2.2) si possono scrivere:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_V + \mathbf{F}_{NV}$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_V + \mathbf{G}_{NV}$$

Con \mathbf{F}_{NV} e \mathbf{G}_{NV} si indicano i termini convettivi che compaiono nel sistema di equazioni di Navier-Stokes; con \mathbf{F}_V e \mathbf{G}_V quelli dissipativi. L'equazione (2.4.1) può essere scritta come segue:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}_V}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}_V}{\partial y} + \mathbf{H} \quad (3.2.3)$$

in cui \mathbf{A} e \mathbf{B} sono gli Jacobiani di \mathbf{F}_{NV} e di \mathbf{G}_{NV} rispetto ad \mathbf{U} . L'equazione (3.2.3) viene discretizzata col metodo delle differenze finite; più precisamente, in seguito si farà uso della seguente notazione:

$$F_+ = \frac{F_{i+1} - F_i}{\Delta x} \quad \text{è un operatore alle differenze finite "forward";}$$

$$F_- = \frac{F_i - F_{i-1}}{\Delta x} \quad \text{è un operatore alle differenze finite "backward".}$$

Il pedice "i" si riferisce ad un passo spaziale. I termini convettivi dell'equazione sono discretizzati secondo una procedura alle differenze finite di tipo forward o backward, mentre i termini viscosi secondo differenze finite centrate.

3.2.1 PROCEDURA DI FLUX SPLITTING

Per il calcolo dello Jacobiano relativo ai termini convettivi dell'equazione (2.4.1) viene utilizzata la procedura di **flux splitting** (FSP) di **Steger e Warming** [19,22]. Questa procedura permette di tenere in considerazione la direzione di propagazione dell'informazione, all'atto del calcolo dei flussi, in modo tale da poter approssimare più realisticamente il fenomeno fisico descritto dalle equazioni della fluidodinamica. Applicando la FSP si scrivono le relazioni seguenti :

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{nv}}{\partial x} \approx \frac{D_- \mathbf{A}_+ U_{i,j}}{\Delta x} + \frac{D_+ \mathbf{A}_- U_{i,j}}{\Delta x} \quad (3.2.4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{G}_{nv}}{\partial x} \approx \frac{D_- \mathbf{B}_+ U_{i,j}}{\Delta y} + \frac{D_+ \mathbf{B}_- U_{i,j}}{\Delta y} \quad (3.2.5)$$

dove:

$$\mathbf{F}_{nv} = \mathbf{A} \mathbf{U}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{C}_A^{-1} \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u+c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u-c \end{pmatrix} \mathbf{C}_A \mathbf{S}$$

e

$$\mathbf{G}_{nv} = \mathbf{B} \mathbf{U}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{C}_B^{-1} \begin{pmatrix} v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v+c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v-c \end{pmatrix} \mathbf{C}_B \mathbf{S}$$

Le matrici \mathbf{S} , \mathbf{C}_A e \mathbf{C}_B che compaiono nelle espressioni sopra, risultano avere la seguente forma:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -u/\rho & 1/\rho & 0 & 0 \\ -v/\rho & 0 & 1/\rho & 0 \\ \alpha\beta & -u\beta & -v\beta & \beta \end{pmatrix} \quad \mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ u & \rho & 0 & 0 \\ v & 0 & \rho & 0 \\ \alpha & \rho u & \rho v & 1/\beta \end{pmatrix}$$

in cui $\alpha = (u^2 + v^2)/2$ e $\beta = \gamma - 1$

$$\mathbf{C}_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/c^2 \\ 0 & \rho c & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\rho c & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}_A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2c^2 & 0 & 1/2c^2 \\ 0 & 1/2\rho c & 0 & -1/2\rho c \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/c^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho c & 1 \\ 0 & 0 & -\rho c & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2c^2 & 0 & 1/2c^2 \\ 0 & 1/2\rho c & 0 & -1/2\rho c \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

In base alla procedura FSP si passa a scrivere:

$$\mathbf{A}_+ = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{C}_A^{-1} \begin{pmatrix} \frac{u+|u|}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u+c+|u+c|}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{u+|u|}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{u-c+|u-c|}{2} \end{pmatrix} \mathbf{C}_A \mathbf{S} \quad (3.2.6)$$

mentre $\mathbf{A} = \mathbf{A}^- \mathbf{A}^+$. Analogamente:

$$\mathbf{B}_+ = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{C}_B^{-1} \begin{pmatrix} \frac{v+|v|}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v+c+|v+c|}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{v+|v|}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{v-c+|v-c|}{2} \end{pmatrix} \mathbf{C}_B \mathbf{S} \quad (3.2.7)$$

da cui $\mathbf{B} = \mathbf{B}^- \mathbf{B}^+$

Come visto sopra, la FSP viene applicata ai termini convettivi e non a quelli dissipativi.

3.2.2 THIN LAYER APPROXIMATION

Considerando le relazioni in cui si articolano i due passi del metodo numerico implicito sviluppato, nella prima relazione della (3.2.1) e nella prima relazione della (3.2.2) (parte esplicita dell'algoritmo) tutti i termini delle equazioni di Navier-Stockes vengono tenuti in conto, mentre nella seconda relazione di entrambi i passi (parte implicita dell'algoritmo), allo scopo di ridurre l'onere computazionale, si è preferito fare uso della **thin layer approximation** (TLA) [19]. In base a tale approssimazione, gli effetti prodotti dalla viscosità sul profilo delle grandezze macroscopiche che descrivono il flusso di plasma entro il canale, risultano essere confinati entro una regione di strato limite, prossima alla parete, molto sottile. Da ciò ne deriva che i termini dissipativi in cui compaiono derivate rispetto ad y (direzione ortogonale a quella della velocità di massa del flusso) risultano essere predominanti rispetto ai termini con derivate rispetto ad x o derivate miste.

In base alla TLA, si assume:

$$\mathbf{F}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.8)$$

e

$$\mathbf{G}_v = - \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \frac{\partial u}{\partial y} \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y} \\ u\mu \frac{\partial u}{\partial y} + v(\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y} + k \frac{\partial e_i}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (3.2.9)$$

in cui $e_i = cvT$ e $k = \gamma\mu/Pr$ dove cv è il calore specifico del plasma, a volume costante. I termini dissipativi, tutti tenuti in conto nella parte esplicita dell'algoritmo, vengono così bilanciati nella parte implicita dal termine

$$-\Delta t \frac{\partial \mathbf{M}_y}{\partial y} \frac{\partial \delta V}{\partial y}$$

dove

$$\mathbf{M}_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda + 2\mu) & 0 \\ 0 & u\mu & v(\lambda + 2\mu) & k \end{bmatrix}$$

e

$$\delta\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \delta\rho \\ \delta u \\ \delta v \\ \delta e \end{bmatrix}$$

Allo scopo di ricondursi a variabili incognite in forma conservativa, si puo' scrivere:

$$\delta\mathbf{V} = \mathbf{N} \cdot \delta\mathbf{U}$$

in cui

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{u}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ -\frac{v}{\rho} & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ \frac{\alpha - e_i}{\rho} & -\frac{u}{\rho} & -\frac{v}{\rho} & \frac{1}{\rho} \end{bmatrix}$$

e

$$\delta\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \delta\rho \\ \delta\rho u \\ \delta\rho v \\ \delta e \end{bmatrix}$$

Ci si riconduce, in tal modo, ai due sistemi di relazioni (3.2.1) e (3.2.2).

3.2.3 PROCEDURA DI DISCRETIZZAZIONE AI VOLUMI FINITI

Per il problema in esame, allo scopo di rendere il codice numerico più flessibile ed adattabile a più problematiche si è ricorso ad un processo di discretizzazione a volumi finiti [18]. In base a tale approccio il dominio viene suddiviso in celle, così come riportato in Fig. 3.1.

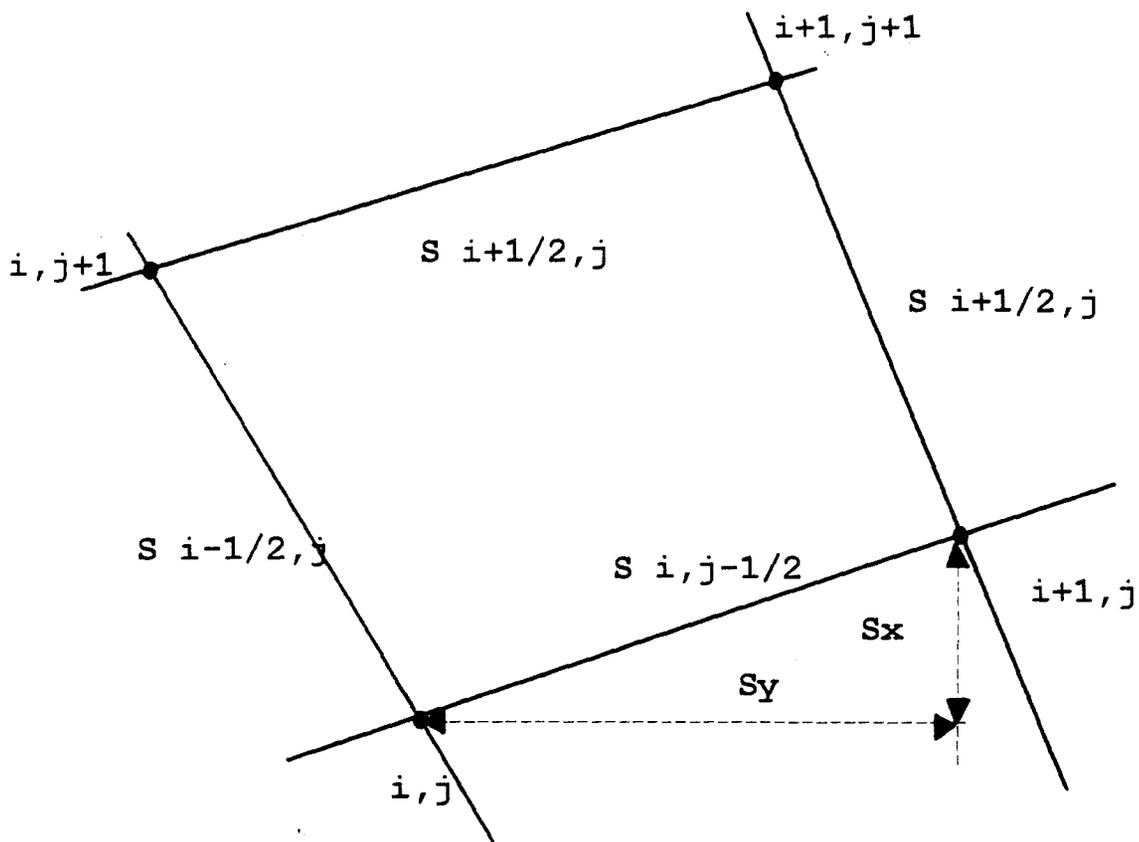


Fig. 3.1 - Esempio di cella in cui viene suddiviso il dominio di calcolo

Con "i" e "j" si individuano i nodi della griglia, corrispondenti ai vertici delle celle in cui il dominio di calcolo è suddiviso. La cella riportata in Fig. 3.1 si riferisce ad un dominio di generica geometria; il lato di ciascuna cella corrisponde ad una superficie di attraversamento del flusso di materia, quantità di moto ed energia da una cella ad un'altra. Si indica con S_x e S_y , rispettivamente, la componente rispetto ad x (direzione di velocità di massa del fluido) e la componente rispetto ad y (direzione ortogonale a quella del campo magnetico imposto ed ortogonale a quella della velocità di massa del fluido) della generica superficie S. Il valore di S_x e S_y , per ognuno dei quattro lati della generica cella, viene calcolato, note le coordinate dei vertici della cella stessa, in base alle relazioni riportate in Tabella 3.1.

Tab. 3.1 - Valore delle componenti S_x ed S_y delle quattro superfici S delimitanti una cella, calcolato in base alle coordinate dei vertici della cella medesima

	S_x	S_y
$i+1/2,j$	$(y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j})$	$-(x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j})$
$i-1/2,j$	$-(y_{i,j+1} - y_{i,j})$	$(x_{i,j+1} - x_{i,j})$
$i,j+1/2$	$-(y_{i+1,j+1} - y_{i,j+1})$	$(x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1})$
$i,j-1/2$	$(y_{i+1,j} - y_{i,j})$	$-(x_{i+1,j} - x_{i,j})$

Il volume della cella di controllo assume la seguente espressione:

$$V_{i,j} = -\frac{1}{2} \left\{ (x_{i,j} - x_{i+1,j})y_{i+1,j+1} + (x_{i+1,j} - x_{i+1,j+1})y_{i,j} + \right. \\ \left. (x_{i+1,j+1} - x_{i,j})y_{i+1,j} + (x_{i,j} - x_{i+1,j+1})y_{i,j+1} + \right. \\ \left. (x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1})y_{i,j} + (x_{i,j+1} - x_{i,j})y_{i+1,j+1} \right\}$$

A partire dall'equazione vettoriale (2.1.1) si pone:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{nv} + \mathbf{F}_v$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_{nv} + \mathbf{G}_v$$

$$\mathbf{P}_{nv} = \mathbf{F}_{nv} + \mathbf{G}_{nv}$$

$$\mathbf{P}_v = \mathbf{F}_v + \mathbf{G}_v$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{nv} + \mathbf{P}_v$$

In base all'approccio ai volumi finiti, la parte esplicita dell'algoritmo si traduce in un bilancio del flusso di materia, quantità di moto ed energia entro ciascuna cella. La Fig. 3.2 descrive la procedura di bilancio eseguita nella parte esplicita dell'algoritmo.

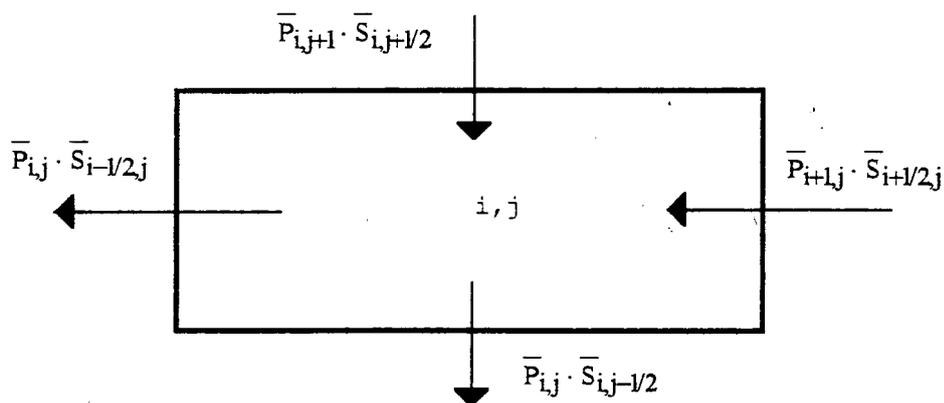


Fig. 3.2 - Bilancio di flussi di materia, quantità di moto ed energia relativi alla cella con centro di coordinate i, j

L'equazione (2.1.1) viene integrata sul volume della cella di controllo:

$$\int_V \frac{\partial U}{\partial t} dV + \int_V \text{div} \mathbf{P}_{mv} dV + \int_V \text{div} \mathbf{P}_v dV = 0 \quad (3.2.10)$$

da cui

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{P}_{mv} \cdot n dS + \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{P}_v \cdot n dS = 0 \quad (3.2.11)$$

Dalla discretizzazione della (3.2.11) si ottiene l'espressione della parte esplicita del metodo numerico:

$$\Delta U_{i,j}^n = -\frac{\Delta t}{V_{i,j}} \left[\left(\mathbf{P}_{i+1,j} \cdot \mathbf{S}_{i+1/2,j} \right) - \left(\mathbf{P}_{i,j} \cdot \mathbf{S}_{i-1/2,j} \right) + \left(\mathbf{P}_{i,j+1} \cdot \mathbf{S}_{i,j+1/2} \right) - \left(\mathbf{P}_{i,j} \cdot \mathbf{S}_{i,j-1/2} \right) \right]$$

in cui "n" è l'indice di passo temporale e le grandezze al secondo termine si suppongono calcolate al medesimo passo temporale.

Occorre, inoltre, tenere presente che:

$$\begin{cases} \mathbf{P}_{nv} = P_{nv} \bar{i}_x + P_{nv} \bar{i}_y \\ \mathbf{P}_v = P_v \bar{i}_x + P_v \bar{i}_y \end{cases} \quad (3.2.12)$$

e

$$\mathbf{S} = s_x \bar{i}_x + s_y \bar{i}_y \quad (3.2.13)$$

Ne deriva, perciò:

$$\begin{cases} \mathbf{P}_{nv} \cdot \mathbf{S} = F_{nv} s_x + G_{nv} s_y = (F_{nv} s'_x + G_{nv} s'_y) |\mathbf{S}| \\ \mathbf{P}_v \cdot \mathbf{S} = F_v s_x + G_v s_y = (F_v s'_x + G_v s'_y) |\mathbf{S}| \end{cases} \quad (3.2.14)$$

dove

$$s'_x = s_x / |\mathbf{S}|$$

$$s'_y = s_y / |\mathbf{S}|$$

e

$$|\mathbf{S}| = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}$$

L'approccio ai volumi finiti, in pratica, comporta il passaggio dal sistema di coordinate cartesiane ad un nuovo sistema di coordinate (ξ, η) . Ne segue che alle derivate parziali rispetto alle coordinate x ed y , che compaiono nella equazione (2.1.1), si sostituiscono derivate rispetto alle coordinate (ξ, η) , legate alle prime dalle relazioni:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{v_{i,j}} \left(s_{x,i+1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} + s_{x,j+1/2} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \quad (3.2.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{v_{i,j}} \left(s_{y,i+1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} + s_{y,j+1/2} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \quad (3.2.16)$$

In base alle (3.2.10-16) il metodo numerico alle differenze finite, ottenuto a partire dall'algoritmo implicito di MacCormack e descritto dalle (3.2.1) e (3.2.2), assume la forma delle relazioni riportate nelle due pagine successive.

passo predittore:

$$\Delta U_{i,j}^n = -\frac{\Delta t}{V_{i,j}} \left[\frac{D_-}{\Delta \xi} \cdot \left(\mathbf{A}_{+i,j}^n \mathbf{U}_{i,j}^n |S_{i+1/2}| \right) + \frac{D_+}{\Delta \xi} \cdot \left(\mathbf{A}_{-i,j}^n \mathbf{U}_{i,j}^n |S_{i-1/2}| \right) + \right. \\ \left. \frac{D_-}{\Delta \eta} \cdot \left(\mathbf{B}_{+i,j+1}^n \mathbf{U}_{i,j}^n |S_{j+1/2}| \right) + \frac{D_+}{\Delta \eta} \cdot \left(\mathbf{B}_{-i,j}^n \mathbf{U}_{i,j}^n |S_{j-1/2}| \right) \right]$$

$$-\Delta t \left[\mathbf{M}_{\xi \xi_{i+1/2,j}} \frac{D^2 \cdot (\mathbf{NU})_{i,j}}{\Delta \xi^2} - \mathbf{M}_{\xi \xi_{i-1/2,j}} \frac{D^2 \cdot (\mathbf{NU})_{i,j}}{\Delta \xi^2} + \right. \\ \left. \mathbf{M}_{\xi \eta_{i+1/2,j}} \frac{D^2 \cdot (\mathbf{NU})_{i,j}}{\Delta \eta^2} - \mathbf{M}_{\xi \eta_{i-1/2,j}} \frac{D^2 \cdot (\mathbf{NU})_{i,j}}{\Delta \eta^2} \right]$$

$$-\Delta t \left[\mathbf{M}_{\eta \eta_{i,j+1/2}} \frac{D^2 \cdot (\mathbf{NU})_{i,j}}{\Delta \eta^2} - \mathbf{M}_{\eta \eta_{i,j-1/2}} \frac{D^2 \cdot (\mathbf{NU})_{i,j}}{\Delta \eta^2} + \right. \\ \left. \mathbf{M}_{\eta \xi_{i,j+1/2}} \frac{D^2 \cdot (\mathbf{NU})_{i,j}}{\Delta \xi^2} - \mathbf{M}_{\eta \xi_{i,j-1/2}} \frac{D^2 \cdot (\mathbf{NU})_{i,j}}{\Delta \xi^2} \right]$$

$$\left\{ \mathbf{I} + \frac{\Delta t}{V_{i,j}} \left[\frac{D_-}{\Delta \xi} \cdot \mathbf{A}_{+i,j}^n |S_{i+1/2}| + \frac{D_+}{\Delta \xi} \cdot \mathbf{A}_{-i,j}^n |S_{i-1/2}| + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{D_-}{\Delta \eta} \cdot \mathbf{B}_{+i,j+1}^n |S_{j+1/2}| + \frac{D_+}{\Delta \eta} \cdot \mathbf{B}_{-i,j}^n |S_{j-1/2}| \right] - \Delta t \frac{D_- \cdot \mathbf{M}_{\eta \eta} \frac{D_+ \cdot \mathbf{N} \cdot}{\Delta \eta}}{\Delta \eta} \right\} \delta U_{i,j}^{n+1} = \Delta U_{i,j}^n$$

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n + \delta U_{i,j}^{n+1}$$

passo correttore:

$$\Delta \mathbf{U}_{i,j}^{\bar{n}+1} = -\frac{\Delta t}{V_{i,j}} \left\{ \begin{aligned} & \frac{D_-}{\Delta \xi} \cdot (\mathbf{A}_{+,j}^{\bar{n}+1} \mathbf{U}_{i,j}^{\bar{n}+1} |S_{i+1/2}|) + \frac{D_+}{\Delta \xi} \cdot (\mathbf{A}_{-,j}^{\bar{n}+1} \mathbf{U}_{i,j}^{\bar{n}+1} |S_{i-1/2}|) + \\ & \frac{D_-}{\Delta \eta} \cdot (\mathbf{B}_{+,i}^{\bar{n}+1} \mathbf{U}_{i,j}^{\bar{n}+1} |S_{j+1/2}|) + \frac{D_+}{\Delta \eta} \cdot (\mathbf{B}_{-,i}^{\bar{n}+1} \mathbf{U}_{i,j}^{\bar{n}+1} |S_{j-1/2}|) \end{aligned} \right\}$$

$$-\Delta t \left\{ \begin{aligned} & \mathbf{M} \xi \xi_{i+1/2,j} \frac{D^2 \cdot (\mathbf{NU})_{i,j}}{\Delta \xi^2} - \mathbf{M} \xi \xi_{i-1/2,j} \frac{D^2 \cdot (\mathbf{NU})_{i,j}}{\Delta \xi^2} + \\ & \mathbf{M} \xi \eta_{i+1/2,j} \frac{D^2 \cdot (\mathbf{NU})_{i,j}}{\Delta \eta^2} - \mathbf{M} \xi \eta_{i-1/2,j} \frac{D^2 \cdot (\mathbf{NU})_{i,j}}{\Delta \eta^2} \end{aligned} \right\}$$

$$-\Delta t \left\{ \begin{aligned} & \mathbf{M} \eta \eta_{i,j+1/2} \frac{D^2 \cdot (\mathbf{NU})_{i,j}}{\Delta \eta^2} - \mathbf{M} \eta \eta_{i,j-1/2} \frac{D^2 \cdot (\mathbf{NU})_{i,j}}{\Delta \eta^2} + \\ & \mathbf{M} \eta \xi_{i,j+1/2} \frac{D^2 \cdot (\mathbf{NU})_{i,j}}{\Delta \xi^2} - \mathbf{M} \eta \xi_{i,j-1/2} \frac{D^2 \cdot (\mathbf{NU})_{i,j}}{\Delta \xi^2} \end{aligned} \right\}$$

$$\left\{ \mathbf{I} + \frac{\Delta t}{V_{i,j}} \left\{ \begin{aligned} & \frac{D_-}{\Delta \xi} \cdot \mathbf{A}_{+,j}^{\bar{n}+1} |S_{i+1/2}| + \frac{D_+}{\Delta \xi} \cdot \mathbf{A}_{-,j}^{\bar{n}+1} |S_{i-1/2}| + \\ & \frac{D_-}{\Delta \eta} \cdot \mathbf{B}_{+,i}^{\bar{n}+1} |S_{j+1/2}| + \frac{D_+}{\Delta \eta} \cdot \mathbf{B}_{-,i}^{\bar{n}+1} |S_{j-1/2}| \end{aligned} \right\} - \Delta t \frac{D_- \cdot \mathbf{M} \eta \eta \frac{D_+ \cdot \mathbf{N}}{\Delta \eta}}{\Delta \eta} \right\} \delta \mathbf{U}_{i,j}^{\bar{n}+1} = \Delta \mathbf{U}_{i,j}^{\bar{n}+1}$$

$$\mathbf{U}_{i,j}^{\bar{n}+1} = \{ \mathbf{U}_{i,j}^{\bar{n}} + \mathbf{U}_{i,j}^{\bar{n}+1} + \delta \mathbf{U}_{i,j}^{\bar{n}+1} \}$$

In seguito all'approccio ai volumi finiti entrano in gioco le *matrici di rotazione* che tengono conto della geometria del canale, non necessariamente rettangolare. Tali matrici sono le seguenti:

$$\mathbf{R}_{i+1/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_x & s_y & 0 \\ 0 & -s_y & s_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{i+1/2}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_x & -s_y & 0 \\ 0 & s_y & s_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{j+1/2}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & s_x & 0 \\ 0 & -s_x & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{j+1/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & -s_x & 0 \\ 0 & s_x & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Di conseguenza le matrici Jacobiane \mathbf{A} e \mathbf{B} , alle quali viene applicata la già illustrata FSP (paragrafo 3.2.1), divengono:

$$\mathbf{A}_+ = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{R}_{i+1/2}^{-1} \mathbf{c}_A^{-1} \begin{pmatrix} \frac{u'+|u'|}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u'+c+|u'+c|}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{u'+|u'|}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{u'-c+|u'-c|}{2} \end{pmatrix} \mathbf{c}_A \mathbf{R}_{i+1/2} \mathbf{S} \quad (3.2.17)$$

e $\mathbf{A} = \mathbf{A} - \mathbf{A}_+$.

$$\mathbf{B}_+ = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{R}_{j+1/2}^{-1} \mathbf{c}_B^{-1} \begin{pmatrix} \frac{v'+|v'|}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v'+c+|v'+c|}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{v'+|v'|}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{v'-c+|v'-c|}{2} \end{pmatrix} \mathbf{c}_B \mathbf{R}_{j+1/2} \mathbf{S} \quad (3.2.18)$$

da cui $\mathbf{B} = \mathbf{B} - \mathbf{B}_+$.

Nelle relazioni (3.2.17-18) si definisce:

$$u' = s_{x_{i+1/2}} u + s_{y_{i+1/2}} v$$

$$v' = s_{x_{j+1/2}} u + s_{y_{j+1/2}} v$$

Le matrici $M\xi\xi$, $M\xi\eta$, $M\eta\xi$ e $M\eta\eta$ che compaiono nelle relazioni del passo predittore e del passo correttore consentono di includere nella soluzione numerica del problema gli effetti prodotti dai termini dissipativi delle equazioni. In base a semplici calcoli algebrici, si dimostra che tali matrici assumono la forma seguente:

$$M\xi\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [(\lambda + 2\mu)s_{x_{i+1/2}}^2 + \mu s_{y_{i+1/2}}^2] & (\lambda + \mu)s_{y_{i+1/2}}' s_{x_{i+1/2}}' & 0 \\ 0 & (\lambda + \mu)s_{y_{i+1/2}}' s_{x_{i+1/2}}' & [(\lambda + 2\mu)s_{y_{i+1/2}}^2 + \mu s_{x_{i+1/2}}^2] & 0 \\ 0 & \left\{ [(\lambda + 2\mu)s_{x_{i+1/2}}^2 + \mu s_{y_{i+1/2}}^2] u + \right. & \left. [(\lambda + 2\mu)s_{y_{i+1/2}}^2 + \mu s_{x_{i+1/2}}^2] v + \right. & k(s_{y_{i+1/2}}^2 + s_{x_{i+1/2}}^2) \\ & (\lambda + \mu)s_{y_{i+1/2}}' s_{x_{i+1/2}}' v & (\lambda + \mu)s_{y_{i+1/2}}' s_{x_{i+1/2}}' u & \end{pmatrix}$$

$$M\eta\eta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [(\lambda + 2\mu)s_{x_{j+1/2}}^2 + \mu s_{y_{j+1/2}}^2] & (\lambda + \mu)s_{y_{j+1/2}}' s_{x_{j+1/2}}' & 0 \\ 0 & (\lambda + \mu)s_{y_{j+1/2}}' s_{x_{j+1/2}}' & [(\lambda + 2\mu)s_{y_{j+1/2}}^2 + \mu s_{x_{j+1/2}}^2] & 0 \\ 0 & \left\{ [(\lambda + 2\mu)s_{x_{j+1/2}}^2 + \mu s_{y_{j+1/2}}^2] u + \right. & \left. [(\lambda + 2\mu)s_{y_{j+1/2}}^2 + \mu s_{x_{j+1/2}}^2] v + \right. & k(s_{y_{j+1/2}}^2 + s_{x_{j+1/2}}^2) \\ & (\lambda + \mu)s_{y_{j+1/2}}' s_{x_{j+1/2}}' v & (\lambda + \mu)s_{y_{j+1/2}}' s_{x_{j+1/2}}' u & \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}\xi\eta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda + 2\mu)s'_{x_{j-1/2}} s'_{x_{i-1/2}} + \mu s'_{y_{j-1/2}} s'_{y_{i-1/2}} & \lambda s'_{y_{i-1/2}} s'_{x_{j+1/2}} + \mu s'_{y_{j-1/2}} s'_{x_{i-1/2}} & 0 \\ 0 & \lambda s'_{y_{i-1/2}} s'_{x_{j-1/2}} + \mu s'_{y_{j+1/2}} s'_{x_{i+1/2}} & (\lambda + 2\mu)s'_{y_{j+1/2}} s'_{y_{i-1/2}} + \mu s'_{x_{i+1/2}} s'_{x_{i+1/2}} & 0 \\ 0 & \left\{ \begin{array}{l} \left((\lambda + 2\mu)s'_{x_{j+1/2}} s'_{x_{i-1/2}} + \right) \\ \left(\mu s'_{y_{j+1/2}} s'_{y_{i-1/2}} \right) \end{array} \right\} \mathbf{u} + \\ \left\{ \begin{array}{l} \left(\lambda s'_{y_{i+1/2}} s'_{x_{j+1/2}} + \right) \\ \left(\mu s'_{y_{j+1/2}} s'_{x_{i+1/2}} \right) \end{array} \right\} \mathbf{v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{k} \begin{pmatrix} s'_{x_{j+1/2}} s'_{x_{i+1/2}} + \\ s'_{y_{j+1/2}} s'_{y_{i+1/2}} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}\eta\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda + 2\mu)s'_{x_{j+1/2}} s'_{x_{i+1/2}} + \mu s'_{y_{j+1/2}} s'_{y_{i+1/2}} & \lambda s'_{y_{i+1/2}} s'_{x_{j+1/2}} + \mu s'_{y_{j+1/2}} s'_{x_{i+1/2}} & 0 \\ 0 & \lambda s'_{y_{i+1/2}} s'_{x_{j-1/2}} + \mu s'_{y_{j+1/2}} s'_{x_{i+1/2}} & (\lambda + 2\mu)s'_{y_{j+1/2}} s'_{y_{i+1/2}} + \mu s'_{x_{j+1/2}} s'_{x_{i+1/2}} & 0 \\ 0 & \left\{ \begin{array}{l} \left((\lambda + 2\mu)s'_{x_{j+1/2}} s'_{x_{i+1/2}} + \right) \\ \left(\mu s'_{y_{j+1/2}} s'_{y_{i+1/2}} \right) \end{array} \right\} \mathbf{u} + \\ \left\{ \begin{array}{l} \left(\lambda s'_{y_{i+1/2}} s'_{x_{j+1/2}} + \right) \\ \left(\mu s'_{y_{j+1/2}} s'_{x_{i+1/2}} \right) \end{array} \right\} \mathbf{v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{k} \begin{pmatrix} s'_{x_{j+1/2}} s'_{x_{i+1/2}} + \\ s'_{y_{j+1/2}} s'_{y_{i+1/2}} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Volendo creare un parallelo fra la procedura di discretizzazione appena descritta, ai volumi finiti, ed una procedura di discretizzazione alle differenze finite, si puo' notare come, utilizzando entrambi i criteri, i termini non viscosi, mediante la FSP, vengano fundamentalmente trattati con una discretizzazione "forward" o "backward", mentre i termini viscosi vengono discretizzati in maniera centrale.

La seconda relazione del passo predittore, cosi' come quella del passo correttore, costituisce la parte implicita del metodo. Per la determinazione di $\delta U_{i,j}^{n+1}$ e' necessario procedere all'inversione dei termini a destra dell'uguaglianza e che rappresentano un operatore matriciale a blocchi pentadiagonale. Per l'inversione dell'operatore si e' fatto uso del metodo iterativo GSLR (Gauss-Siedel-Linear-Relaxation method) [11,19]. Essendo l'operatore matriciale a diagonale dominante, ad ogni passo temporale poche iterazioni sono sufficienti ad eseguire l'inversione della matrice ed a determinare il valore di $\delta U_{i,j}^{n+1}$.

Le condizioni imposte alla parete, in base allo schema sopra illustrato, sono descritte dalla Tabella 3.2.

Variabile incognita	Condizione imposta	Commento
Componente u della velocita'	$u_1 = -u_0$	u uguale a zero alla parete
Componente v della velocita'	$v_1 = -v_0$	v uguale a zero alla parete
Densita'	$\rho_1 = \rho_0$	Derivata prima di ρ nulla
Pressione	$p_1 = p_0$	Derivata prima di p nulla
Temperatura	t alla parete = T_w	Temperatura nota alla parete

Tab. 3.2 - Condizioni imposte alla parete di un condotto bagnato da un flusso magnetoidrodinamico. Le condizioni sono imposte sul sistema di variabili incognite non conservative del problema della fluidodinamica.

Il metodo numerico implementato prevede, pero', l'imposizione delle condizioni di parete sulle variabili conservative del problema, ovvero densita', quantita' di moto ed energia. Tenendo presente le condizioni di tabella 3.2, per le variabili conservative si ottengono quelle riportate in Tabella 3.3.

Variabile incognita	Condizione imposta
Densita'	$\rho_1 = \rho_0$
Quantita' di moto lungo x	$(\rho u)_1 = -(\rho u)_0$
Quantita' di moto lungo y	$(\rho v)_1 = -(\rho v)_0$
Energia totale	$2e_w e_1 = e_0$

Tab. 3.3 - Condizioni imposte alla parete di un condotto bagnato da un flusso magnetoidrodinamico. Le condizioni sono imposte sul sistema di variabili incognite conservative del problema della fluidodinamica. Con e_w si indica l'energia totale del plasma calcolata alla parete del condotto.

Le condizioni di Tabella 3.3 vengono implementate nella parte esplicita dell'algorithm. Nella parte implicita occorre differenziarle rispetto al tempo, ottenendo le condizioni di Tabella 3.4.

Variabile incognita	Condizione imposta
Densita'	$\delta(\rho u)_1 = -\delta(\rho u)_0$
Quantita' di moto lungo x	$\delta(\rho v)_1 = -\delta(\rho v)_0$
Quantita' di moto lungo y	$\delta e_1 = \delta e_0$
Energia totale	$\delta e_1 = \delta e_0$

Tab. 3.4 - Condizioni alla parete da imporre nella parte implicita dell'algorithm. Il flusso magnetoidrodinamico bagna la parete di un condotto a sezione rettangolare

Ne segue che la matrice **E** presenta la seguente forma:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Un altro aspetto importante relativo all'implementazione del metodo numerico e' quello relativo all'imposizione delle condizioni all'ingresso ed all'uscita del dominio bidimensionale di indagine. Supponendo che il flusso magnetoidrodinamico scorra entro un condotto a sezione rettangolare, si fa ricorso alle equazioni caratteristiche del moto dei fluidi [18], che nel caso in esame assumono le seguenti espressioni:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} = -u \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (3.2.20)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho c \frac{\partial u}{\partial t} = -(u + c) \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \rho c \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (3.2.21)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.2.22)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \rho c \frac{\partial u}{\partial t} = -(u - c) \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \rho c \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (3.2.23)$$

Consideriamo dapprima le condizioni da imporre alla sezione di ingresso del canale. Si devono imporre condizioni in funzione del regime di moto del flusso.

Se il numero di Mach e' inferiore ad uno, ovvero se il regime di flusso del fluido operatore e' subsonico, occorre specificare il valore di tre variabili ed ottenere il valore della quarta facendo uso di una delle equazioni caratteristiche.

Ad esempio, definiamo il valore della pressione di ristagno, p_s , della temperatura di ristagno, T_s e della componente v della velocita' che puo' essere posta uguale a zero. Pressione statica, p , e temperatura statica, T , si ottengono dalle relazioni:

$$p = p_s \left[1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{u^2}{a_*^2} \right]^{\gamma/\gamma-1} \quad (3.2.24)$$

$$T = T_s \left[1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{u^2}{a_*^2} \right] \quad (3.2.25)$$

in cui

$$a_* = 2\gamma \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} c_v T$$

Il valore della componente u della velocita' viene determinato in base alla (3.2.23).

Nel caso in cui il numero di Mach risulti essere maggiore di uno, ovvero il flusso magnetoidrodinamico si trovi in regime di moto supersonico, il valore di tutte e quattro le variabili, p, T, u e v , deve essere specificato.

Passando a considerare le condizioni da imporre alla sezione di uscita del condotto ancora una volta occorre distinguere due casi in base al valore assunto dal numero di Mach.

Se il regime di moto del flusso all'uscita del canale e' subsonico, la sola pressione statica, P_{exit} , deve essere specificata; il valore delle altre tre variabili si determina in base alle (3.2.20), (3.2.21) e (3.2.22), corrispondenti alle equazioni che descrivono lo spostamento "in avanti", lungo la direzione x , dell'informazione.

Se il regime di moto del flusso di plasma all'uscita del canale e' supersonico il valore di nessuna variabile deve essere definito a priori; le condizioni vengono imposte facendo uso di tutte e quattro le equazioni caratteristiche (3.2.20), (3.2.21), (3.2.22), (3.2.23).