

3.3 METODO DI McCORMACK SEMI-IMPLICITO

Il metodo numerico ottenuto a partire dall'algoritmo di MacCormack semi-implicito e' una variante del metodo descritto al paragrafo precedente. Anche per questo metodo si e' deciso di fare uso di un approccio ai volumi finiti e della FSP per la discretizzazione dei termini convettivi del sistema di equazioni. A differenza del metodo implicito, si tiene conto dei termini dissipativi nella parte esplicita dell'algoritmo, mentre la parte implicita considera i soli termini convettivi. In definitiva, il metodo, si articola, ancora una volta, nei due passi:

passo predittore:

$$\Delta U_{i,j}^n = -\frac{\Delta t}{V_{i,j}} \left(\begin{array}{l} \frac{D_-}{\Delta \xi} \cdot \left(\mathbf{A}_{+i,j}^n \mathbf{U}_{i,j}^n |S_{i+1/2}| \right) + \frac{D_+}{\Delta \xi} \cdot \left(\mathbf{A}_{-i,j}^n \mathbf{U}_{i,j}^n |S_{i-1/2}| \right) + \\ \frac{D_-}{\Delta \eta} \cdot \left(\mathbf{B}_{+i,j}^n \mathbf{U}_{i,j}^n |S_{j+1/2}| \right) + \frac{D_+}{\Delta \eta} \cdot \left(\mathbf{B}_{-i,j}^n \mathbf{U}_{i,j}^n |S_{j-1/2}| \right) \end{array} \right) -$$

$$-\Delta t \left(\begin{array}{l} \mathbf{M}_{\xi \xi}^n \frac{D^2 \cdot (\mathbf{NU})_{i,j}}{\Delta \xi^2} - \mathbf{M}_{\xi \xi}^n \frac{D^2 \cdot (\mathbf{NU})_{i,j}}{\Delta \xi^2} + \\ \mathbf{M}_{\xi \eta}^n \frac{D^2 \cdot (\mathbf{NU})_{i,j}}{\Delta \eta^2} - \mathbf{M}_{\xi \eta}^n \frac{D^2 \cdot (\mathbf{NU})_{i,j}}{\Delta \eta^2} \end{array} \right) -$$

$$-\Delta t \left(\begin{array}{l} \mathbf{M}_{\eta \eta}^n \frac{D^2 \cdot (\mathbf{NU})_{i,j}}{\Delta \eta^2} - \mathbf{M}_{\eta \eta}^n \frac{D^2 \cdot (\mathbf{NU})_{i,j}}{\Delta \eta^2} + \\ \mathbf{M}_{\eta \xi}^n \frac{D^2 \cdot (\mathbf{NU})_{i,j}}{\Delta \xi^2} - \mathbf{M}_{\eta \xi}^n \frac{D^2 \cdot (\mathbf{NU})_{i,j}}{\Delta \xi^2} \end{array} \right)$$

$$\left\{ \mathbf{I} + \frac{\Delta t}{V_{i,j}} \left(\begin{array}{l} \frac{D_-}{\Delta \xi} \cdot \mathbf{A}_{+i,j}^n |S_{i+1/2}| + \frac{D_+}{\Delta \xi} \cdot \mathbf{A}_{-i,j}^n |S_{i-1/2}| + \\ \frac{D_-}{\Delta \eta} \cdot \mathbf{B}_{+i,j}^n |S_{j+1/2}| + \frac{D_+}{\Delta \eta} \cdot \mathbf{B}_{-i,j}^n |S_{j-1/2}| \end{array} \right) \right\} \delta U_{i,j}^{n+1} = \Delta U_{i,j}^n$$

$$\overline{U}_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n + \delta U_{i,j}^{n+1}$$

passo correttore:

$$\Delta U_{i,j}^{\overline{n+1}} = -\frac{\Delta t}{V_{i,j}} \left(\begin{array}{l} \frac{D_-}{\Delta \xi} \cdot \left(\mathbf{A}_{+i,j}^{\overline{n+1}} \mathbf{U}_{i,j}^{\overline{n+1}} |S_{i+1/2}| \right) + \frac{D_+}{\Delta \xi} \cdot \left(\mathbf{A}_{-i,j}^{\overline{n+1}} \mathbf{U}_{i,j}^{\overline{n+1}} |S_{i-1/2}| \right) + \\ \frac{D_-}{\Delta \eta} \cdot \left(\mathbf{B}_{+i,j}^{\overline{n+1}} \mathbf{U}_{i,j}^{\overline{n+1}} |S_{j+1/2}| \right) + \frac{D_+}{\Delta \eta} \cdot \left(\mathbf{B}_{-i,j}^{\overline{n+1}} \mathbf{U}_{i,j}^{\overline{n+1}} |S_{j-1/2}| \right) \end{array} \right)$$

$$-\Delta t \left(\begin{array}{l} \mathbf{M}_{\xi\xi}^{\xi} \frac{D^2 \cdot (\mathbf{NU})_{i,j}}{\Delta \xi^2} - \mathbf{M}_{\xi\xi}^{\xi} \frac{D^2 \cdot (\mathbf{NU})_{i,j}}{\Delta \xi^2} + \\ \mathbf{M}_{\xi\xi}^{\eta} \frac{D^2 \cdot (\mathbf{NU})_{i,j}}{\Delta \eta^2} - \mathbf{M}_{\xi\xi}^{\eta} \frac{D^2 \cdot (\mathbf{NU})_{i,j}}{\Delta \eta^2} \end{array} \right)$$

$$-\Delta t \left(\begin{array}{l} \mathbf{M}_{\eta\eta}^{\eta} \frac{D^2 \cdot (\mathbf{NU})_{i,j}}{\Delta \eta^2} - \mathbf{M}_{\eta\eta}^{\eta} \frac{D^2 \cdot (\mathbf{NU})_{i,j}}{\Delta \eta^2} + \\ \mathbf{M}_{\eta\xi}^{\xi} \frac{D^2 \cdot (\mathbf{NU})_{i,j}}{\Delta \xi^2} - \mathbf{M}_{\eta\xi}^{\xi} \frac{D^2 \cdot (\mathbf{NU})_{i,j}}{\Delta \xi^2} \end{array} \right)$$

$$\left\{ \mathbf{I} + \frac{\Delta t}{V_{i,j}} \left(\begin{array}{l} \frac{D_-}{\Delta \xi} \cdot \mathbf{A}_{+i,j}^{\overline{n+1}} |S_{i+1/2}| + \frac{D_+}{\Delta \xi} \cdot \mathbf{A}_{-i,j}^{\overline{n+1}} |S_{i-1/2}| + \\ \frac{D_-}{\Delta \eta} \cdot \mathbf{B}_{+i,j}^{\overline{n+1}} |S_{j+1/2}| + \frac{D_+}{\Delta \eta} \cdot \mathbf{B}_{-i,j}^{\overline{n+1}} |S_{j-1/2}| \end{array} \right) \right\} \delta U_{i,j}^{\overline{n+1}} = \Delta U_{i,j}^{\overline{n+1}}$$

$$\mathbf{U}_{i,j}^{\overline{n+1}} = \left\{ \mathbf{U}_{i,j}^{\overline{n}} + \mathbf{U}_{i,j}^{\overline{n+1}} + \delta \mathbf{U}_{i,j}^{\overline{n+1}} \right\}$$

Le matrici ed i vettori che compaiono nelle relazioni sopra riportate sono gli stessi di cui e' stata data definizione al paragrafo precedente relativamente al metodo derivato dall'algoritmo di MacCormack implicito.

Il fatto di avere tenuto conto dei termini dissipativi nella sola parte esplicita del metodo semplifica molto l'imposizione delle condizioni al contorno. Anche in questo caso, nella parte esplicita dell'algoritmo, ipotizzando una griglia fittizia al di là della parete del canale, vengono imposte le seguenti condizioni riportate in Tabella 3.5.

Variabile incognita	Condizione imposta	Commento
Componente u della velocità	$u_1 = -u_0$	u uguale a zero alla parete
Componente v della velocità	$v_1 = -v_0$	v uguale a zero alla parete
Densità	$\rho_1 = \rho_0$	Derivata prima di ρ nulla
Pressione	$p_1 = p_0$	Derivata prima di p nulla
Temperatura	t alla parete = T_w	Temperatura nota alla parete

Tab. 3.5 - Condizioni imposte alla parete di un condotto bagnato da un flusso magnetoidrodinamico. Le condizioni sono imposte sul sistema di variabili incognite non conservative del problema della fluidodinamica.

Il metodo numerico implementato prevede, però, l'imposizione delle condizioni di parete sulle variabili conservative del problema, le condizioni che si riferiscono ai soli termini non viscosi. Tenendo presente le condizioni di Tabella 3.5, per le variabili conservative si ottengono quelle riportate in Tabella 3.6.

Variabile incognita	Condizione imposta
Densità	$\rho_1 = \rho_0$
Quantità di moto lungo x	$(\rho u)_1 = -(\rho u)_0$
Quantità di moto lungo y	$(\rho v)_1 = -(\rho v)_0$
Energia totale	$2e_w \cdot e_1 = e_0$

Tab. 3.6 - Condizioni imposte alla parete di un condotto bagnato da un flusso magnetoidrodinamico. Le condizioni sono imposte sul sistema di variabili incognite conservative del problema della fluidodinamica. Con e_w si indica l'energia totale del plasma calcolata alla parete del condotto.

Differenziando le condizioni di tabella 3.6 rispetto al tempo si ottengono le condizioni di cui alla Tabella 3.7.

Variabile incognita	Condizione imposta
Densita'	$\delta(\rho u)_1 = -\delta(\rho u)_0$
Quantita' di moto lungo x	$\delta(\rho v)_1 = -\delta(\rho v)_0$
Quantita' di moto lungo y	$\delta e_1 = \delta e_0$
Energia totale	$\delta e_1 = \delta e_0$

Tab. 3.7 - Condizioni alla parete da imporre nella parte implicita dell'algoritmo. Il flusso magnetoidrodinamico bagna la parete di un condotto a sezione rettangolare

Ne segue che la matrice **E** diviene la seguente:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Il metodo numerico cosi' ottenuto consente, in definitiva, di imporre separatamente per i termini convettivi e per i termini dissipativi le condizioni alla parete del condotto che il flusso magnetoidrodinamico bagna. Questo finisce con l'essere un notevole vantaggio, in quanto la condizione imposta nella parte implicita dell'algoritmo sulla componente u della velocita' finisce con l'amplificare il fenomeno delle onde spurie dovute agli errori di troncamento prodotti dal processo di discretizzazione del sistema analitico.

Il metodo numerico ottenuto a partire dall'algoritmo di MacCormack semi-implicito puo' essere, quindi, usato per l'analisi di flussi magnetoidrodinamci a numeri di Reynolds maggiori rispetto a quelli consentiti dal metodo implicito. Un grosso inconveniente del metodo e' il notevole onere computazionale richiesto. Un metodo semi-implicito, infatti, e' soggetto alla condizione di stabilita' di Courant-Friedricks-Lewey [23].

In questo caso l'ampiezza del passo temporale deve soddisfare le seguenti due relazioni:

$$\Delta t \leq \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{2\psi/\rho\Delta x} \quad (3.3.1)$$

$$\Delta t \leq \frac{1}{2} \frac{\Delta y}{2\psi/\rho\Delta y} \quad (3.3.2)$$

La condizione di Courant-Friedricks-Lewey si riferisce alla sola parte del sistema di equazioni discretizzato che viene trattata in maniera esplicita, ovvero i termini di tipo dissipativo; termini in cui compaiono la viscosita' del fluido e la conducibilita' termica.

3.4 METODO DI CASULLI

Il metodo di Casulli consiste in un algoritmo alle differenze finite in grado di trattare le equazioni di Navier-Stockes per fluidi comprimibili, e che solo di recente e' stato utilizzato per flussi di plasma in campi magnetici [24]. Si tratta di un metodo di tipo semi implicito, in quanto il gradiente di pressione, che compare nell'equazione di bilancio della quantita' di moto, e la divergenza della velocita', che compare nell'equazione dell'energia, vengono discretizzate in maniera implicita, mentre i termini convettivi e viscosi vengono discretizzati in modo esplicito. Questo permette di rendere meno restrittiva la condizione di stabilita' di Courant-Friedricks-Lewey, in quanto viene a cadere la dipendenza della condizione stessa dalla velocita' del suono. Nel caso in cui il flusso in esame risulti subsonico, il metodo e' particolarmente efficiente in termini di risparmio di tempo di calcolo computazionale. La condizione di stabilita' del metodo risulta essere:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|u| + \psi} \quad \text{e} \quad \Delta t \leq \frac{\Delta y}{|v| + \psi} \quad (3.4.1)$$

Per procedere all'applicazione del metodo di Casulli, il sistema delle equazioni della fluidodinamica, dalla (2.1.1) alla (2.1.4), viene riscritto, in maniera formalmente diversa, come segue:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = - \frac{(\rho u) da_z}{a_z dx} \quad (3.4.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\tau_{xx}}{a_z} \frac{da_z}{dx} + J_y B \right) \quad (3.4.3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\tau_{yx}}{a_z} \frac{da_z}{dx} - J_x B \right) \quad (3.4.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + u \frac{\partial E}{\partial x} + v \frac{\partial E}{\partial y} = & -\gamma E \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \\ & + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + E_x J_x + E_y J_y - J_y u B - J_x v B - \frac{Eu + pu + k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}{a_z} \frac{da_z}{dx} \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

L'equazione (3.4.5) esprime la legge di conservazione dell'energia interna del plasma; con a_z si indica la sezione del condotto rispetto alla coordinata z ; direzione del campo magnetico impresso B . La geometria del canale considerato, nel sistema di equazioni riportato sopra, e' quella di un canale a sezione divergente nella direzione z e rettangolare sul piano x - y .

La distretizzazione e' fatta a mezzo di una griglia ai nodi sfalsati, nella quale viene eseguito il calcolo di pressione, densita' e temperatura in nodi alternati a quelli nei quali vengono calcolati i valori di velocita'.

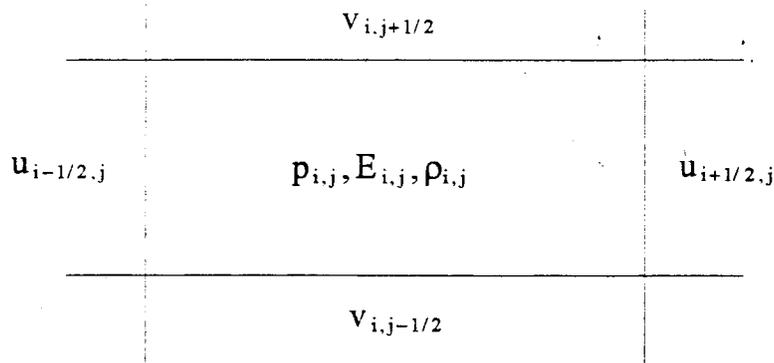


Fig. 3.4 - Esempio di griglia a nodi sfalsati

Cio' aiuta a rispettare il principio di conservazione della massa nella scrittura dei flussi fra nodo e nodo anche in presenza di forti discontinuita'. Le equazioni, dalla (3.4.2) alla (3.4.5), vengono discretizzate nella forma seguente:

$$\frac{u_{i+1/2,j}^{n+1} - u_{i-1/2,j}^{n+1}}{\Delta t} = -F_{i+1/2,j}^n - \frac{1}{\rho_{i+1/2,j}^n} \frac{p_{i+1,j}^{n+1} - p_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x} \quad (3.4.6)$$

$$\frac{v_{i,j+1/2}^{n+1} - v_{i,j-1/2}^{n+1}}{\Delta t} = -G_{i+1/2,j}^n - \frac{1}{\rho_{i,j+1/2}^n} \frac{p_{i,j+1}^{n+1} - p_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y} \quad (3.4.7)$$

$$\frac{E_{i,j}^{n+1} - E_{i,j}^n}{\Delta t} = -H_{i,j}^n - \gamma E_{i,j}^n \left(\frac{u_{i+1/2,j}^{n+1} - u_{i-1/2,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+1/2}^{n+1} - v_{i,j-1/2}^{n+1}}{\Delta y} \right) \quad (3.4.8)$$

F, G e H contengono i termini di convezione, di diffusione e di sorgente delle equazioni della fluidodinamica. Per garantire la stabilita' dell'algoritmo, senza limitare l'ampiezza del passo temporale, e' stato scelto il metodo di discretizzazione forward e backward.

La relazione che lega pressione statica p ed energia interna E, nel caso in cui il fluido sia un gas perfetto, risulta:

$$p_{i,j}^{n+1} = (\gamma - 1) E_{i,j}^{n+1} \quad (3.4.9)$$

La variabile densità viene trattata esplicitamente, noti i valori delle altre variabili in giuoco all'istante temporale precedente:

$$\frac{\rho_{i,j}^{n+1} - \rho_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{\rho_{i+1/2,j}^n u_{i,j+1/2}^n - \rho_{i-1/2,j}^n u_{i-1/2,j}^n}{\Delta x} + \frac{\rho_{i,j+1/2}^n v_{i,j+1/2}^n - \rho_{i,j-1/2}^n v_{i,j-1/2}^n}{\Delta y} = 0 \quad (3.4.10)$$

in cui:

$$\begin{array}{llll} \rho_{i+1/2,j}^n = \rho_{i,j}^n & \text{per} & u_{i+1/2,j}^n > 0, \rho_{i+1/2,j}^n = \rho_{i+1,j}^n & \text{per} & u_{i+1/2,j}^n < 0, \\ \rho_{i-1/2,j}^n = \rho_{i-1,j}^n & \text{per} & u_{i-1/2,j}^n > 0, \rho_{i-1/2,j}^n = \rho_{i,j}^n & \text{per} & u_{i-1/2,j}^n < 0, \\ \rho_{i,j+1/2}^n = \rho_{i,j}^n & \text{per} & v_{i,j+1/2}^n > 0, \rho_{i,j+1/2}^n = \rho_{i,j+1}^n & \text{per} & v_{i,j+1/2}^n < 0, \\ \rho_{i,j-1/2}^n = \rho_{i,j-1}^n & \text{per} & v_{i,j-1/2}^n > 0, \rho_{i,j-1/2}^n = \rho_{i,j}^n & \text{per} & v_{i,j-1/2}^n < 0, \end{array}$$

La determinazione di u, v, p ed E si ottiene dalla soluzione del sistema lineare dato dalle equazioni discretizzate (3.4.6), (3.4.7), (3.4.8). Tale sistema, facendo uso della relazione che lega pressione ed energia interna (3.4.9), può essere ricondotto ad una sola equazione la cui unica incognita allo step temporale $n+1$ è la pressione. Dalle equazioni sopraccitate si ottiene:

$$\begin{aligned} p_{i,j}^{n+1} - \gamma(\gamma-1)E_{i,j}^n (\Delta t)^2 & \left[\frac{p_{i+1,j}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}}{\rho_{i+1/2,j}^n (\Delta x)^2} - \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i-1,j}^{n+1}}{\rho_{i-1/2,j}^n (\Delta x)^2} + \frac{p_{i,j+1}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}}{\rho_{i,j+1/2}^n (\Delta y)^2} - \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j-1}^{n+1}}{\rho_{i,j-1/2}^n (\Delta y)^2} \right] = \\ & (\gamma-1)(E_{i,j}^n - \Delta t H_{i,j}^n) - \gamma(\gamma-1)E_{i,j}^n \Delta t \left[\frac{u_{i+1/2,j}^n - u_{i-1/2,j}^n}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+1/2}^n - v_{i,j-1/2}^n}{\Delta y} \right] \\ & + \gamma(\gamma-1)E_{i,j}^n (\Delta t)^2 \left[\frac{F_{i+1/2,j}^n - F_{i-1/2,j}^n}{\Delta x} + \frac{G_{i,j+1/2}^n - G_{i,j-1/2}^n}{\Delta y} \right] \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

La (3.4.11), scritta per ogni cella in cui è suddiviso il dominio, costituisce un sistema lineare di equazioni nell'incognita $p_{i,j}^{n+1}$. Essendo $\beta < 1$, ρ ed E quantità positive, il sistema ottenuto risulta essere un sistema a diagonale dominante, la cui unica soluzione può essere determinata facendo uso dell'algoritmo iterativo di rilassamento S.O.R. [11,25].

Per quanto concerne l'imposizione delle condizioni al contorno del condotto, il metodo consente una agevole imposizione delle condizioni alle pareti elettrodiche: velocità u e v nulle,

derivata prima della pressione uguale a zero, temperatura nota; all'ingresso vengono imposte pressione e temperatura di ristagno, derivate prime di u e v uguali a zero; all'uscita viene considerata nota la sola pressione statica, mentre le derivate prime di u , v e della temperatura sono poste uguali a zero [26]. Per la facilità di imposizione delle condizioni al contorno e per la buona garanzia di accuratezza nei risultati, l'algoritmo di Casulli, così implementato, risulta dare buoni esiti anche nel caso di indagini relative a flussi magnetoidrodinamici non uniformi [27].

4 MODELLO DELLA TURBOLENZA DI BALDWIN-LOMAX

In molte applicazioni della magnetoidrodinamica il fluido operatore si trova in condizioni di regime di moto turbolento. Sebbene in linea di principio risulti possibile l'implementazione di modelli della turbolenza alquanto precisi, quali la "large eddy simulation" [28,29] od il "modello k-ε", onde evitare l'ulteriore complicarsi del sistema di equazioni ed il conseguente onere computazionale necessario per la sua soluzione, si è preferito fare uso di un modello della turbolenza algebrico, il modello Baldwin-Lomax.

L'introduzione di un modello algebrico è particolarmente giustificato nel caso in cui siano in gioco alti numeri di Reynolds [30,31]. Supponendo di voler analizzare il comportamento di un flusso magnetoidrodinamico che percorre un condotto a sezione rettangolare ad un numero di Reynolds superiore a 1000000, lontano dalla parete, nell'ambito della soluzione numerica del sistema di equazioni, la dissipazione artificiale può divenire dello stesso ordine di grandezza della dissipazione fisica. In questo caso, l'impiego di un modello della turbolenza molto preciso e complesso è, quindi, superfluo.

Il modello di Baldwin-Lomax utilizza una formulazione algebrica per la viscosità turbolenta [9]. Vicino alla parete del condotto viene impiegata la seguente espressione:

$$\mu_1 = \rho l^2 |\xi| \quad (4.1)$$

in cui

$$\xi = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.2)$$

è detta vorticità. Lontano dalla superficie di parete si utilizza, invece, la seguente relazione:

$$\mu_2 = 0.0168 \rho V_0 L_0 \quad (4.3)$$

in cui

$$V_0 = \min(F_{\max}, 0.25 q_{\text{dif}}^2 / F_{\max}) \quad (4.4)$$

$$l_0 = 1.6 y_{\max} I^k \quad (4.5)$$

$$F_{\max} = \max(l|\xi|/k) \quad (4.6)$$

Nelle relazioni (4.3-6) l è la lunghezza di mescolamento e K la costante di Von Kármán; Y_{\max} è il valore di coordinata y al quale la grandezza indicata con F_{\max} assume il valore massimo. Con y si indica, in questo caso, la distanza del punto della griglia considerato dalla superficie di parete. La quantità Q_{diff} rappresenta la differenza fra il valore massimo ed il valore minimo della velocità, in valore assoluto. Il fattore di intermittenza di Klebanoff è dato dalla seguente espressione:

$$I^k = \left[1 + 5.5 \left(\frac{0.3y}{y_{\max}} \right)^6 \right]^{-1} \quad (4.7)$$

Inoltre, la lunghezza di mescolamento è data dalla relazione:

$$l = ky(1 - \exp(y^+ / 26)) \quad (4.8)$$

in cui

$$y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu} \quad (4.9)$$

Con ν si indica la viscosità cinematica del fluido. Si hanno, inoltre, le espressioni seguenti:

$$u_\tau = \left(\frac{\tau_w}{\rho} \right)^{1/2} \quad (4.10)$$

e

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_w \quad (3.11)$$

che indicano, rispettivamente, la cosiddetta "velocità turbolenta" e la tensione alla parete.

L'andamento della viscosità turbolenta su tutta la sezione del canale è ottenuta dall'unione della (4.1) e della (4.3) tramite un opportuno parametro α :

$$\mu_t = \alpha \mu_1 + (\alpha - 1) \mu_2 \quad (4.12)$$

Il parametro α è uguale ad 1 per $y^+ < 25$, uguale a 0 per $y^+ > 35$ e variabile, in funzione dei valori di y^+ compresi fra 25 e 35, in base all'andamento della tangente iperbolica.

Una volta determinato l'andamento della viscosità turbolenta μ_t , la conducibilità termica turbolenta può essere determinata in base alla relazione:

$$k_t = c_v \mu_t / Pr_t \quad (4.13)$$

in cui con Pr_t si indica il numero di Prandtl turbolento, circa uguale a 0.9, nel caso in cui il fluido operatore sia aria.

Un'adeguata valutazione locale del flusso turbolento allo strato limite presso una superficie solida è data dal comportamento delle due grandezze y^+ e

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau} \quad (4.14)$$

Per un flusso comprimibile, una accurata risoluzione dei profili di velocità e di temperatura entro lo strato limite è possibile solo nel caso in cui il valore di y^+ , e quindi di u^+ , calcolato nel punto di griglia più prossimo alla superficie di parete, sia inferiore a 3 [4]. Tale condizione è stata utilizzata per eseguire i test di buona risoluzione sul modello della turbolenza medesimo.

5 CRITERI DI VALIDAZIONE DEGLI ALGORITMI DI SOLUZIONE NUMERICA

Per il processo di validazione degli algoritmi ottenuti dai precedenti metodi per la risoluzione delle equazioni della magnetofluidodinamica si e' proceduto attraverso tre fasi successive:

- verifica dell'accuratezza dei risultati in caso di descrizione di un flusso in regime laminare, in assenza di interazione magnetofluidodinamica (ponendo \mathbf{B} nullo);
- verifica dell'affidabilita' del modello della turbolenza implementato, sempre in assenza di interazione magnetofluidodinamica;
- verifica della bonta' dei risultati ottenuti in caso di analisi di un flusso non stazionario di plasma in un campo magnetico.

In quest'ultimo caso, si sono confrontati i risultati ottenuti numericamente con risultati sperimentali disponibili. In caso di assenza di dati sperimentali, si e' scelta la via della validazione indiretta, ovvero del confronto dei risultati ottenuti con risultati, anch'essi ottenuti numericamente, tramite codici di accertata affidabilita'.

5.1 TEST DI VALIDAZIONE IN CASO DI REGIME DI FLUSSO LAMINARE

In generale, il problema di trovare soluzioni analitiche esatte per le equazioni di Navier-Stokes, con cui poter eseguire un confronto con gli andamenti delle variabili ottenuti numericamente, presenta notevoli difficolta' matematiche. Cio' e' dovuto, principalmente, alla natura non lineare del sistema di equazioni. E' possibile trovare una soluzione esatta in alcuni casi particolari, nei quali i termini convettivi quadratici divengono trascurabili. Inoltre, quando la viscosita' del fluido in gioco e' piuttosto bassa, la soluzione esatta dell'equazioni di Navier-Stokes risulta tale per cui l'influenza della viscosita' e' avvertita solo entro una strettissima regione in prossimita' della parete.

Il caso considerato per eseguire la verifica di affidabilita' dei metodi di soluzione numerica descritti al capitolo precedente e' quello di un flusso in regime di moto di Poiseuille. Facendo riferimento al sistema coordinato mostrato in Fig. 5.1, il regime di moto di Poiseuille si realizza nel caso in cui: la sola componente ripetto ad x della velocita' e' diversa da zero; pressione e velocita' sono funzioni della sola coordinata x e si mantengono costanti rispetto ad y ; tutte le altre grandezze risultano essere costanti rispetto a qualunque direzione coordinata.

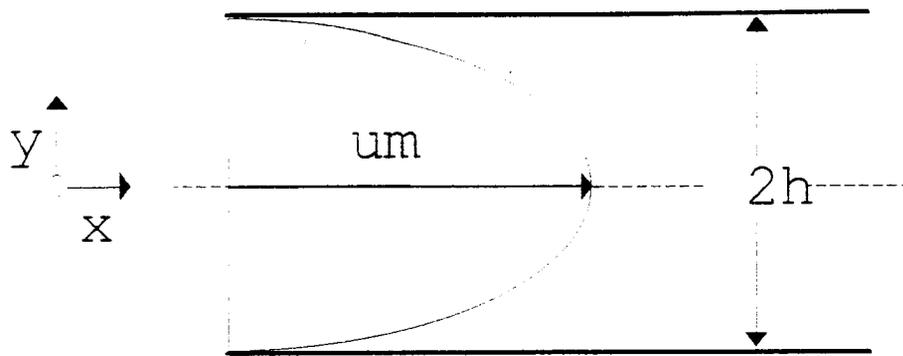


Fig. 5.1 - *Profilo parabolico della velocita' rispetto alla coordinata y di un flusso laminare in regime di moto di Poiseuille*

Un flusso in regime di moto parallelo di Poiseuille puo' essere descritto dalle seguenti relazioni:

$$u=u(x,y,t); \quad v=0; \quad w=0;$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

da cui si ottiene:

$$\frac{dp}{dx} = -\mu \frac{d^2 u}{dy^2} \tag{5.1.1}$$

Dalla integrazione della (5.1.1) rispetto ad y si giunge alla:

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\Delta p}{\Delta x} h^2 \left(1 - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right) \tag{5.1.2}$$

la quale, fissato il salto di pressione Δp fra ingresso ed uscita del condotto, consente di definire il profilo di velocita' del fluido che corrisponde alla soluzione del regime stazionario.

Un primo test consiste nell'imporre come condizione iniziale, a $t=0^-$, per un determinato salto di pressione fra ingresso ed uscita, il profilo di velocita' fornito dalla (5.1.2) come profilo di velocita' in tutte le sezioni del canale. Il risultato finale del codice numerico, a convergenza, deve conservare lo stesso profilo. Il test e' stato eseguito considerando i valori caratteristici del fluido operatore e le caratteristiche geometriche del canale riportati in Tabella 5.1.

Temperatura di ristagno (°K)	1800
γ =rapporto cp/cv	1.4
cp	717.4
R=costante dei gas	287.06
Lunghezza del canale (m)	0.8
Altezza del canale (m)	0.05
Numero dei punti di griglia lungo x	40
Numero dei punti di griglia lungo y	40
Viscosita' dinamica del gas (Ns/m ²)	1.6e-5
Conducibilita' termica (W/mK)	0.55
Parametro di convergenza impiegato	1.e-5
Salto di pressione Δp (Pa)	10

Tab. 5.1 - Valori caratteristici del fluido operatore e caratteristiche geometriche del canale utilizzato per il primo test in regime laminare dei metodi numerici.

Un secondo test consiste, una volta definito il valore di Δp , nell'imporre un profilo piatto di velocita' quale condizione iniziale, a $t=0^-$: a convergenza, oltre la regione di imbocco del canale, in cui il profilo di velocita' si mantiene sostanzialmente piatto, deve ottenersi un profilo di velocita' di "regime di moto completamente sviluppato", ovvero parabolico.

La regione di imbocco del canale e' data dalla relazione:

$$L_e = 0.04 \cdot h \cdot Re \quad (5.1.3)$$

dove con Re si indica il numero di Reynolds [4]. Definito il valore del numero di Reynolds, si determina il valore della velocita' media, U_b . Un profilo di velocita' piatto, con valore di velocita' pari alla velocita' media e' il profilo utilizzato a $t=0^-$ come condizione iniziale. Integrando la (5.1.2) sull'altezza h del condotto si ottiene:

$$U_b \cdot h = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2\mu_0} \int_0^h (h^2 - y^2) dy \quad (5.1.4)$$

in base alla quale e' possibile determinare il valore di Δp da considerare per eseguire la prova di validazione.

Il test e' stato eseguito considerando i valori caratteristici del fluido operatore e le caratteristiche geometriche del canale riportati in Tabella 5.2.

Temperatura di ristagno (°K)	1800
γ =rapporto cp/cv	1.4
cp	717.4
R=costante dei gas	287.06
Lunghezza del canale (m)	0.8
Altezza del canale (m)	0.05
Numero dei punti di griglia lungo x	40
Numero dei punti di griglia lungo y	40
Viscosita' dinamica del gas (Ns/m ²)	1.6e-5
Conducibilita' termica (W/mK)	0.55
Parametro di convergenza impiegato	1.e-5
Salto di pressione Δp (Pa)	1
Numero di Reynolds	400
Velocita' di bulk U_b (m/s)	0.98

Tab. 5.2 - Valori caratteristici del fluido operatore e caratteristiche del condotto impiegati per il secondo test dei metodi numerici.

Tutti i tre metodi numerici sviluppati hanno superato con successo le due prove di verifica di affidabilita' in regime di moto laminare in assenza di interazione magnetofluidodinamica.

5.2 TEST DI VALIDAZIONE DEL MODELLO DELLA TURBOLENZA

La prova di validazione del modello della turbolenza viene eseguita considerando lo stesso fluido operatore ed un canale con parametri geometrici identici a quelli utilizzati per i due test illustrati al paragrafo precedente. Il sistema di coordinate a cui fare riferimento e' sempre quello indicato in figura 5.1.

Considerando un numero di Reynolds pari a 10000 ed un numero di Mach pari a 0.3, si pone come condizione iniziale, a $t=0^-$, in tutte le sezioni del canale un profilo di velocita' dato dalla relazione [4]:

$$u(y) = U \cdot \left(\frac{u}{\delta_2} \right)^{1/7} \quad (5.2.1)$$

in cui δ_2 e' il cosiddetto "momentum thickness" e U il valore massimo di velocita' che si raggiunge al centro del canale.

Il momentum thickness viene determinato in base alla relazione:

$$\delta_2 = \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad (5.2.2)$$

in cui con δ si indica lo spessore dello strato limite. La relazione (5.2.1) identifica il tipico profilo di velocità in regime di moto turbolento.

Potendo trascurare la dipendenza della viscosità μ dalla coordinata y , si possono scrivere le seguenti due relazioni:

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_w \quad (5.2.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (5.3.4)$$

τ_w , che compare nella (5.2.3), è la tensione alla parete. Dalla (5.2.3) e dalla (5.2.4) si ottiene il valore di Δp in grado di compensare la τ_w imposta e che viene usato per eseguire la prova di validazione:

$$\Delta p \cong 2\tau_w \frac{1}{h} \quad (5.2.5)$$

A convergenza, il profilo descritto dalla (5.2.1) deve conservarsi ed essere confrontato con l'andamento di figura 5.2, ottenuto attraverso prove sperimentali.

Il processo di validazione vero e proprio del modello della turbolenza implementato avviene tramite valutazioni relative all'andamento di $u^+(y^+)$, in cui u^+ ed y^+ hanno il significato espresso al Capitolo 4.

Esistono in letteratura [4,31,32] curve ottenute sperimentalmente per diversi numeri di Mach che forniscono la cosiddetta "legge universale della distribuzione di velocità" entro lo strato limite turbolento". Sono diagrammi semilogaritmici $u^+(y^+)$, come mostrato in Fig. 5.3, ed, a convergenza, i valori di u^+ e di y^+ ottenuti grazie al codice numerico testato devono essere in grado di riprodurre il loro andamento per il numero di Mach in gioco.

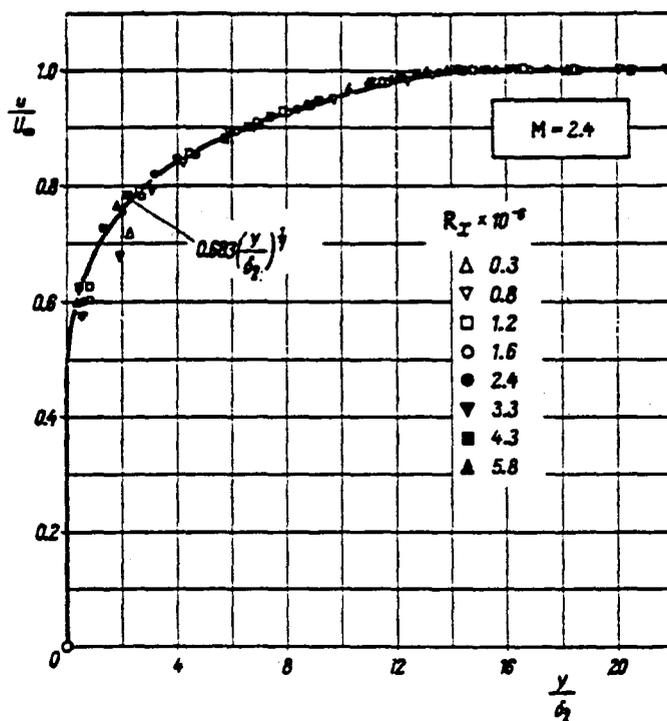


Fig. 5.2 - Profilo di velocità caratteristica di un flusso in regime di moto turbolento entro un canale a sezione rettangolare

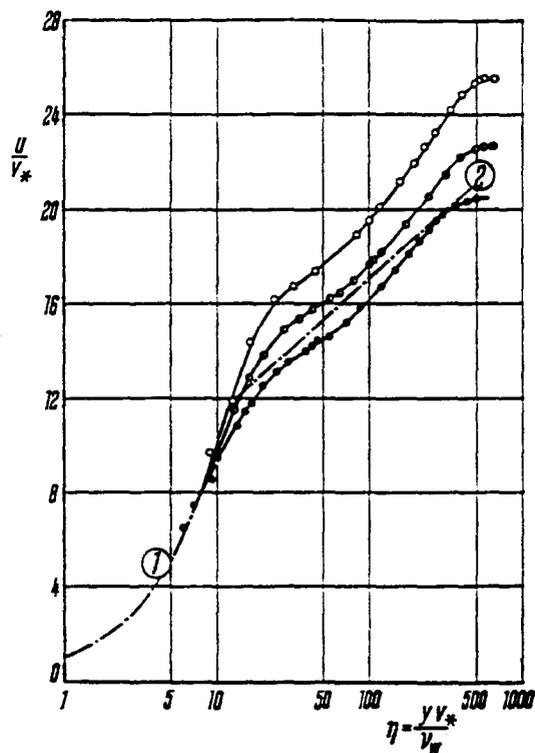


Fig. 5.3 - Legge universale di distribuzione di velocità entro uno strato limite turbolento. Le diverse curve si riferiscono a diversi numeri di Mach. E' posta in rilievo la curva corrispondente ad un numero di Mach=0.3, utilizzato per il test

Un primo controllo per accertarsi di una corretta descrizione dell'andamento delle grandezze entro lo strato limite turbolento consiste nel verificare che, nel punto di griglia piu' prossimo alla parete del canale (nel caso di trattazione ai volumi finiti, per punto di griglia si intende il centro del volume di controllo):

$$- \quad y^+ < 3;$$

$$- \quad u^+ = y^+$$

L'ultima condizione enunciata sopra puo' essere dimostrata come segue:

$$y^+ = \frac{hu_\tau}{\nu} = \frac{h}{\nu} \sqrt{\frac{u}{h}}$$

da cui si ottiene:

$$y^+ = \sqrt{\frac{hu}{\nu}} \tag{5.2.6}$$

Al nodo di griglia piu' prossimo alla parete si ha:

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \cong \mu \frac{u}{h} \quad \text{per la tensione alla parete;}$$

$$u_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho} = \sqrt{\nu \frac{u}{h}} \quad \text{per la velocita' turbolenta;}$$

$$u^+ \text{ e' definita come } u^+ = \frac{u}{u_\tau}$$

$$\text{e quindi } u^+ = \frac{u}{\sqrt{\nu \frac{u}{h}}}$$

Ne deriva:

$$u^+ = \sqrt{\frac{hu}{\nu}} \tag{5.2.7}$$

La (5.2.6) e la (5.2.7) coincidono.

La Fig. 5.4 mostra il confronto fra l'andamento $u^+(y^+)$ riportato in letteratura e quello ottenuto con la prova di validazione del modello della turbolenza facendo uso del metodo ottenuto a partire dall'algoritmo di MacCormack implicito. Come si può notare l'accordo è ottimo; analoghi risultati sono stati ottenuti eseguendo la prova con gli altri due metodi numerici implementati.

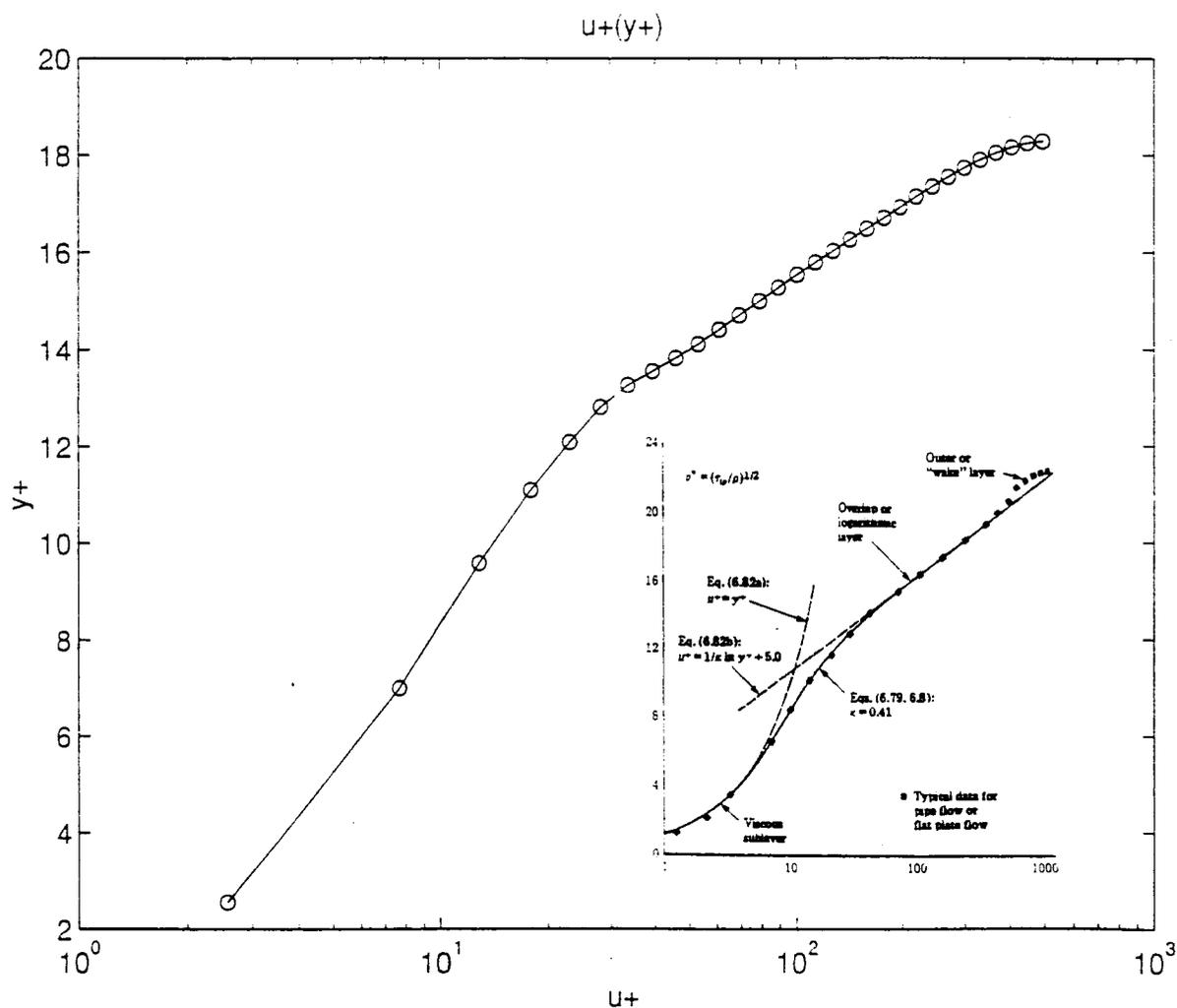


Fig. 5.4 Confronto fra l'andamento $u^+(y^+)$ riportato in letteratura e quello ottenuto con la prova di validazione del modello della turbolenza facendo uso del metodo ottenuto a partire dall'algoritmo di MacCormack implicito

Sul successo delle prove di validazione, molta influenza e' esercitata dal tipo di griglia usata per eseguire le simulazioni. E', infatti, estremamente importante che la griglia sia sufficientemente infittita in prossimita' della parete del canale, in maniera tale da cogliere gli andamenti di strato limite. La dissipazione artificiale dipende: dal tipo di derivate impiegato nella risoluzione del sistema di equazioni (ed e', quindi, in gran parte, una "caratteristica dell'algoritmo impiegato), dal numero di nodi della griglia e dal suo stretching [18,33,34]. Nel processo di validazione del modello della turbolenza, avendo a disposizione dati di confronto di origine sperimentale, si e' eseguito, parallelamente, un processo di individuazione di una griglia in grado di non dare problemi dal punto di vista della dissipazione artificiale. La Fig. 5.5 riporta l'andamento della griglia che ha reso ottimale l'accordo fra gli andamenti riportati nella Fig. 5.4.

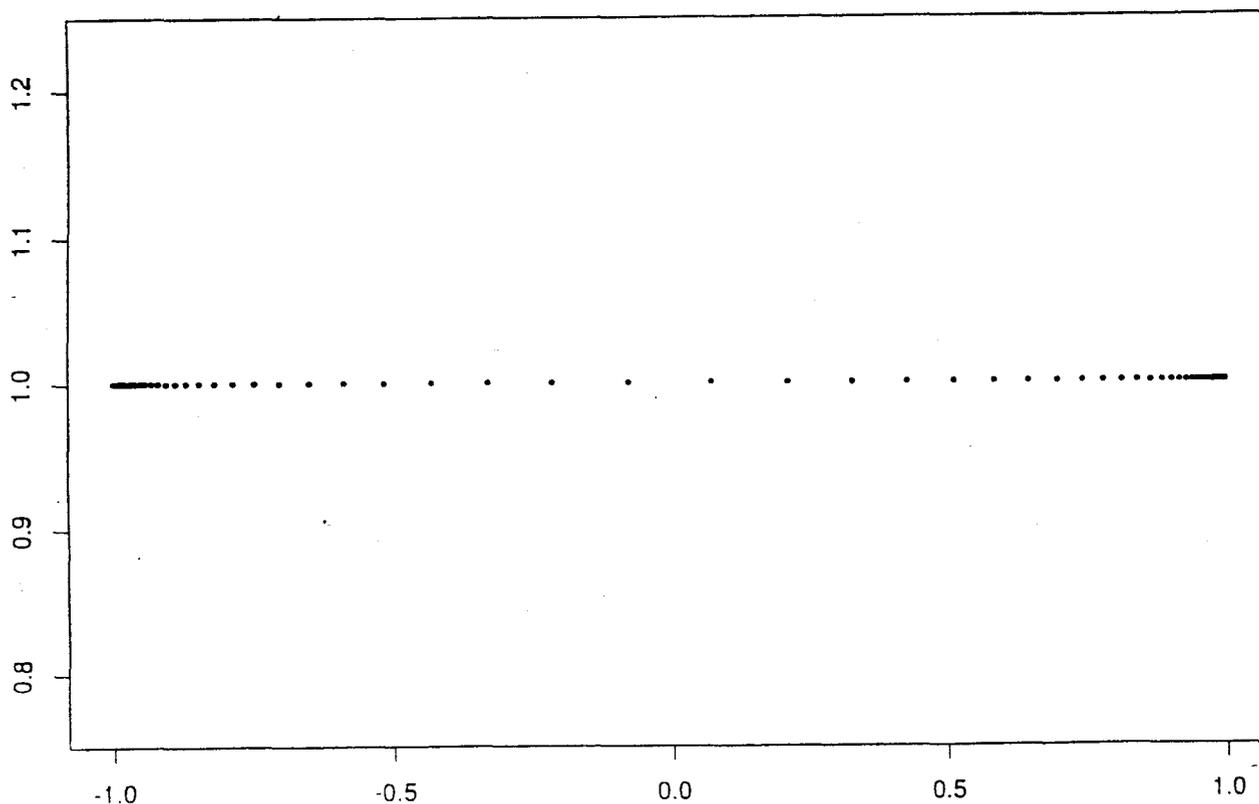


Fig. 5.5 - Griglia usata per eseguire il test di validazione della turbolenza dei tre metodi numerici

Facendo uso della griglia di cui alla Fig. 5.5 sono state eseguite tre simulazioni, col metodo ottenuto a partire dall'algoritmo di MacCormack implicito:

- simulazione con flusso in regime di moto laminare;
- simulazione con flusso in regime di moto turbolento;
- simulazione in cui vengono risolte le equazioni di Eulero, anziche' quelle di Navier-Stokes.

I valori caratteristici del fluido operatore, le caratteristiche geometriche del canale ed gli altri parametri di "simulazione" sono riportati in Tabella 5.3.

Pressione di ristagno all'ingresso del canale (Pa)	501420
Temperatura di ristagno ($^{\circ}$ K)	1900
Pressione statica all'uscita del canale (Pa)	500000
γ =rapporto cp/cv	1.4
cp	717.4
R=costante dei gas	287.06
Lunghezza del canale (m)	0.8
Altezza del canale (m)	0.5
Numero dei punti di griglia lungo x	40
Numero dei punti di griglia lungo y	60
Viscosita' dinamica del gas (Ns/m^2)	5.e-5
Conducibilita' termica (W/mK)	0.055
Parametro di convergenza impiegato	1.e-4
Numero di Reynolds	25000
Salto di pressione Δp (Pa)	1420

Tab. 5.3 - Valori caratteristici del fluido operatore e caratteristiche geometriche del condotto utilizzato per le tre simulazioni eseguite col metodo numerico ottenuto a partire dall'algoritmo di MacCormack implicito.

Le tre simulazioni presentano, come condizione iniziale, un profilo di velocita' del tipo descritto dalla (5.2.1). Il transitorio ha origine dall'imposizione di un salto di pressione pari a 1420 Pa fra ingresso ed uscita.

La figura 5.6 mostra il confronto dei profili di velocita' ottenuti, nella sezione di uscita del condotto.

Dalla valutazione dei profili si puo' notare come il modello della turbolenza permetta una piu' precisa descrizione dell'andamento di strato limite: lo strato limite in regime di moto turbolento e' piu' spesso che in regime di moto laminare. Va prestata particolare attenzione al fatto che nel caso di risoluzione delle equazioni di Eulero (viene, cioe', trascurato completamente ogni effetto prodotto da viscosita' e conducibilita' termica) il profilo di velocita' ottenuto a convergenza, anziche' essere un profilo piatto, come ci si aspetterebbe, e' un profilo praticamente invariato rispetto a quello imposto come condizione iniziale. Cio' e' dovuto all'effetto indotto dalla dissipazione artificiale propria dell' algoritmo.

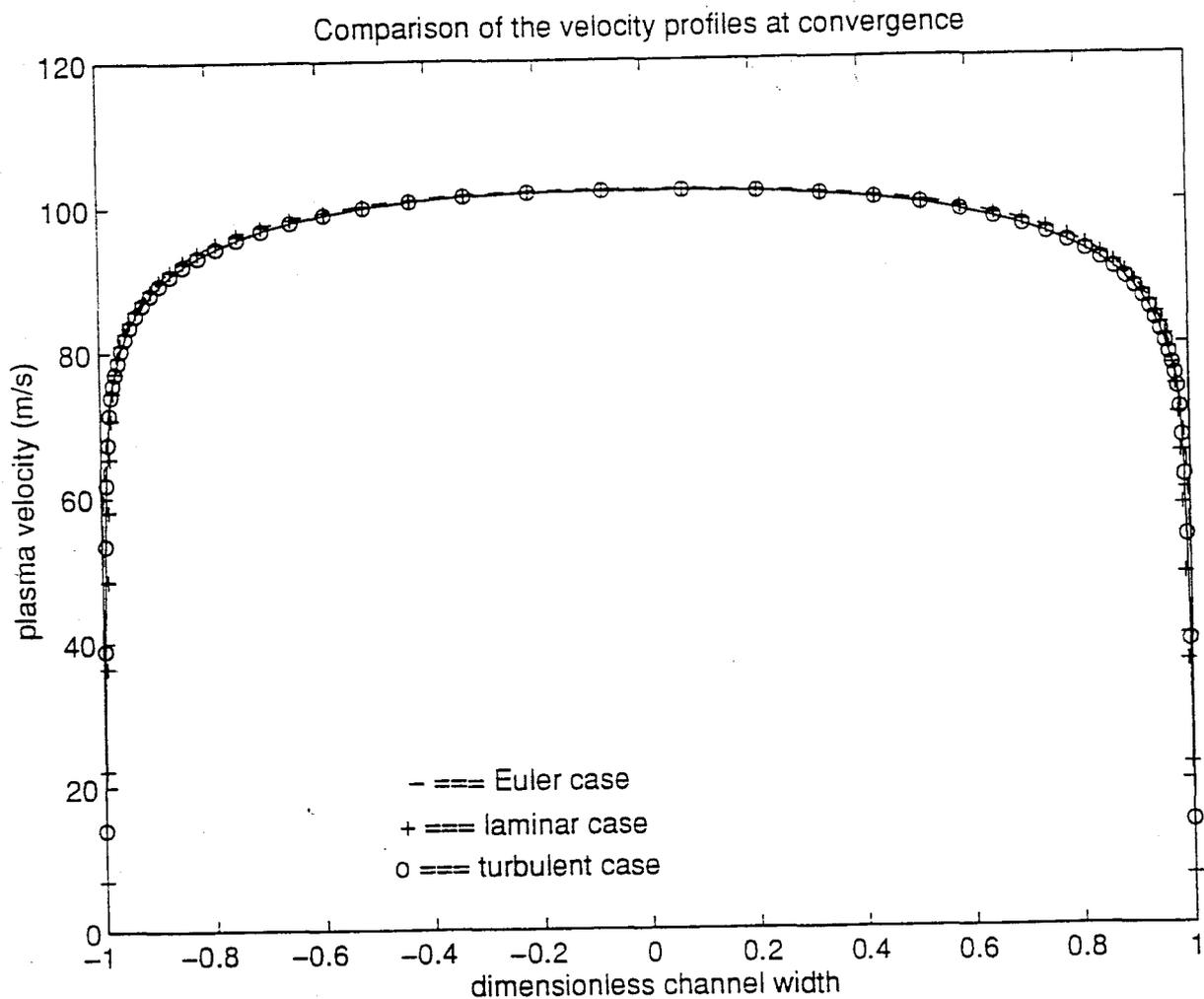


Fig. 5.6 - Confronto fra i profili ottenuti all'uscita del condotto a sezione rettangolare grazie a tre simulazione eseguite usando il metodo numerico ottenuto a partire dall'algoritmo di MacCormack implicito: la prima trascurando il modello della turbolenza, la seconda con modello della turbolenza e la terza risolvendo le equazioni di Eulero invece delle equazioni di Navier-Stokes.

Data la presenza della "viscosita' artificiale", in caso di simulazioni che non richiedano una particolare accuratezza per i valori di velocita' e temperatura nei punti piu' prossimi alla parete, si potrebbe pensare di usare il codice risolvendo le equazioni di Eulero, se cio' si rivelasse conveniente in termini di tempo di calcolo. A questo scopo' sono stati comparati i tempi di esecuzione delle tre simulazioni precedentemente descritte. I risultati di tale confronto sono riportati in Tabella 5.4.

	Turbolenta	Laminare	Eulero
Elapsed time	1454.186 s	1471.376 s	1206.708 s
N. iterazioni	371	371	371
Elapsed time/iterazioni	3.9 s	3.965 s	3.252 s

Tab. 5.4 - Confronto fra i tempi di durata delle tre simulazioni eseguite col metodo numerico ottenuto a partire dall' algoritmo di MacCormack implicito

Dal confronto si deduce che l'utilizzo della risoluzione delle Eulero non presenta particolari vantaggi dal punto di vista dell'onere computazionale.

La Fig. 5.7 e' il diagramma semilogaritmico $u^+(y^+)$ relativo alla simulazione in cui il metodo

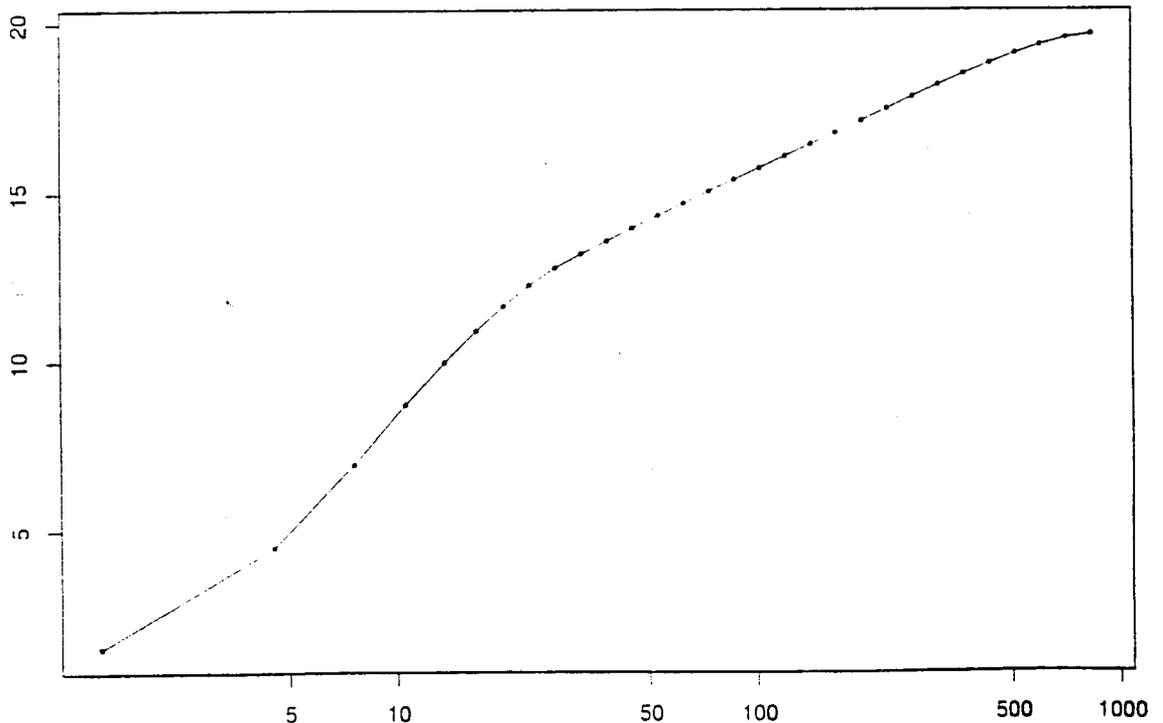


Fig. 5.7 - Diagramma semilogaritmico $u^+(y^+)$ relativo alla simulazione in cui il metodo numerico ottenuto partendo dall' algoritmo di MacCormack implicito viene utilizzato con modello della turbolenza.