Università degli Studi di Bologna

Facoltà di Ingegneria

Dottorato di Ricerca in Ingegneria Elettrotecnica
XIV CICLO

Modellistica per alte frequenze di induttori

Tesi di dottorato di

Giuseppe Sancineto

Il coordinatore:
Prof. Ing. **Francesco Negrini**

Il tutore:
Prof. Ing. **Ugo Reggiani**

I co-tutori:

Dott. Ing. **Gabriele Grandi**

Prof.Ing. **Antonio Massarini**

Ringraziamenti

Desidero ringraziare il Prof. Ugo Reggiani, il Dott. Ing. Gabriele Grandi ed il Prof. Antonio Massarini per essermi stati sempre vicini in questi tre lunghi anni di dottorato e per avermi indirizzato sempre con utili consigli anche nei momenti più difficili da me attraversati.

Desidero inoltre ringraziarli sinceramente per avermi dato la possibilità di lavorare nel loro gruppo di ricerca.

Ringrazio inoltre mio fratello Mario e la mia ragazza Stefania per avermi aiutato nella stesura delle bozze.

INDICE

INTRODUZIONE pag . 1

CAPITOLO 1
Modello circuitale dell'induttore

1.1 Introduzione pag . 3
1.2 Modello circuitale dell'induttore pag . 3

CAPITOLO 2
Parametri elettrici dell'avvolgimento dell'induttore

2.1 Introduzione pag . 7
2.2 Generalità sullo studio di Dowell pag . 7
2.3 Effetto pelle ed effetto prossimità nell'avvolgimento pag . 11
2.4 Avvolgimento con conduttori a sezione circolare. pag . 25

CAPITOLO 3
Modello per alta frequenza di induttore avvolto su nucleo di ferrite

3.1 Introduzione pag . 27
3.2 Circuito equivalente per induttori in nucleo di ferrite pag . 27
3.3 Resistenza dell' avvolgimento pag . 29
3.4 Induttanza principale e resistenza equivalente del nucleo pag . 30
3.5 Risultati sperimentali pag . 33
3.6 Conclusioni pag . 41
3.7 Appendice pag . 41

CAPITOLO 4
Modello per alta frequenza di induttore avvolto su nucleo ferromagnetico laminato

4.1 Introduzione pag . 45
4.2 Modello dell'induttore pag . 46
4.2.1 Modello dell'avvolgimento pag . 47
4.2.2 Modello del nucleo pag . 48
4.2.3 Circuito Equivalente di induttori in nucleo ferromagnetico laminato pag . 49
4.3 Risultati sperimentali pag . 50
4.4 Conclusioni pag . 58
4.5 Appendice pag . 59

CAPITOLO 5
Modello di induttore avvolto su nucleo ferromagnetico laminato per l'analisi di transitori elettromagnetici

5.1 Introduzione pag . 65
5.2 Modello dell'avvolgimento pag . 66
5.3 Modello per il nucleo ferromagnetico laminato pag . 70
5.4 Risultati sperimentali pag. 79
5.5 Conclusioni pag. 81

CAPITOLO 6

Confronto tra induttori in aria ed con nucleo ferromagnetico laminato

6.1 Introduzione pag . 83
6.2 Modello dell'induttore pag . 84
6.2.1 Induttori in aria pag . 85
6.2.1 Induttori con nucleo ferromagnetico laminato pag. 89
6.3 Confronto nel dominio della frequenza pag . 95
6.3.1 Induttanza pag . 95
6.3.2 Perdite pag . 96
6.3.3 Fattore di qualità pag. 97
6.4 Conclusioni pag. 98

OSSERVAZIONI CONCLUSIVE pag. 101

INTRODUZIONE

I recenti progressi dell'elettronica di potenza, in particolare con l'avvento di nuovi componenti e di tecniche di commutazione "dolci" (soft switching), hanno permesso di aumentare la frequenza di commutazione dei convertitori di potenza di tipo switching, consentendo, di conseguenza, di ridurre le dimensioni e i costi dei componenti passivi, quali condensatori, induttori e trasformatori, impiegati in tali convertitori.

Per ottenere tale obiettivo è però importante raggiungere una elevata efficienza operativa anche alle alte frequenze. Si deve inoltre porre particolare attenzione al layout del convertitore ed in particolare ai parametri parassiti dei componenti utilizzati, in modo da prevenire eventuali comportamenti indesiderati del dispositivo.

In questa tesi di dottorato viene presentato uno studio sul comportamento non ideale degli induttori utilizzati come filtri nei convertitori switching. Infatti, al fine di prevenire comportamenti indesiderati dei convertitori statici di potenza, è indispensabile sviluppare modelli circuitali che permettano di caratterizzare il comportamento non ideale degli induttori in un ampio intervallo di frequenza.

Gli induttori oggetto di indagine sono quelli avvolti su nucleo ferromagnetico. Sono dapprima studiati gli induttori avvolti su nucleo di ferrite impiegati come filtri nel campo dei piccoli segnali ed alte frequenze. Successivamente sono presi in esame induttori realizzati con nucleo ferromagnetico laminato tipici per il campo di potenza medio-alto e frequenze medio-basse.

In entrambi i casi lo studio è sviluppato attraverso la soluzione delle equazioni della diffusione delle grandezze elettromagnetiche all'interno del nucleo, che permette di determinare i parametri di resistenza equivalente serie del nucleo ed induttanza principale, in funzione della frequenza.

Per quanto riguarda i parametri elettrici dell'avvolgimento dell'induttore, si adottano le espressioni della resistenza ed induttanza di dispersione, in funzione della frequenza, ricavate originariamente da Dowell. Nella tesi queste formule vengono rielaborate e presentate in una nuova forma analitica adatta a mettere in evidenza l'influenza dei parametri geometrici dell'avvolgimento.

Nel modello sono inoltre prese in considerazione le capacità parassite tra le spire dell'avvolgimento e tra queste ed il nucleo. La capacità parassita totale è calcolata attraverso la misura della frequenza di autorisonanza dell'induttore.

Nel caso di induttore avvolto su nucleo ferromagnetico laminato è anche sviluppato un modello caratterizzato da parametri indipendenti dalla frequenza, che consente quindi l'analisi nel dominio del tempo, e in particolare l'analisi di transitori elettromagnetici, mediante l'impiego di codici standard per la simulazione circuitale.

Infine è presentato un criterio di confronto tra induttori avvolti su nucleo ferromagnetico laminato ed induttori in aria per individuare il campo di frequenza tipico per le applicazioni dei due tipi di induttore.

CAPITOLO 1

"Modello circuitale dell'induttore"

1.1 INTRODUZIONE

Si vuole presentare un modello circuitale a parametri concentrati di induttore che tenga conto dei parametri parassiti e consenta di prevederne il comportamento nel campo delle alte frequenze.

1.2 MODELLO CIRCUITALE DELL'INDUTTORE

La figura 1.1 presenta un circuito equivalente a parametri distribuiti di un induttore a singolo strato costituito da N spire.

Il comportamento alle alte frequenze dell'induttore è influenzato da parametri parassiti quali le capacità presenti tra le spire $c_{t(i,j)}$, con $i \neq j$ ed i valore intero compreso tra 1 ed N, e tra queste ed il nucleo c_{ci}, la resistenza legata alle perdite nel nucleo r_{ci} e la resistenza legata alle perdite nell'isolamento tra le spire $r_{d(i,j)}$. Inoltre si noti la presenza nel modello dei parametri elettrici resistenza delle spire r_{wi}, induttanza propria l_i per ogni singola spira e induttanza mutua $m_{i,j}$ tra le spire che realizzano l'avvolgimento.

Il circuito equivalente a parametri distribuiti di figura 1.1 è difficile da analizzare, per cui nella figura 1.2 è presentato un circuito a parametri concentrati che può descrivere il comportamento dell'induttore tenendo conto dei parametri parassiti totali, i quali sono causa dello scostamento del comportamento reale da quello ideale, soprattutto nel campo delle alte frequenze.

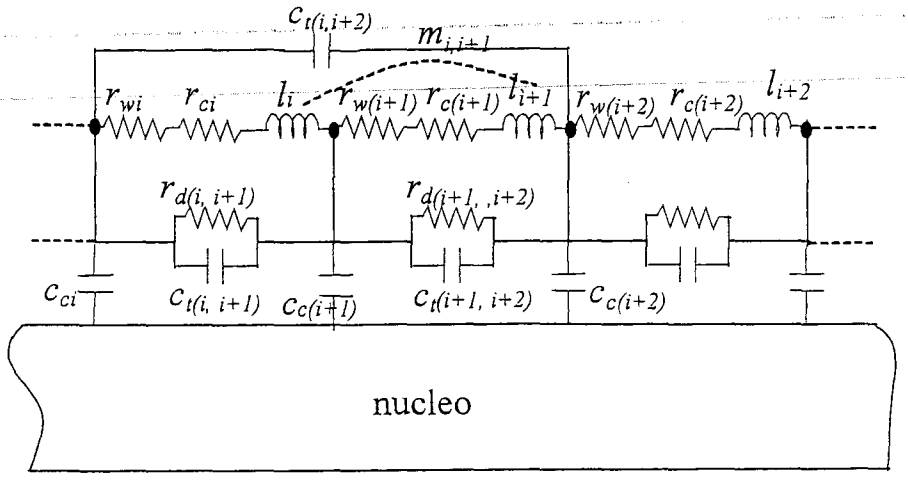

Fig. 1.1. Modello a parametri distribuiti dell'induttore.

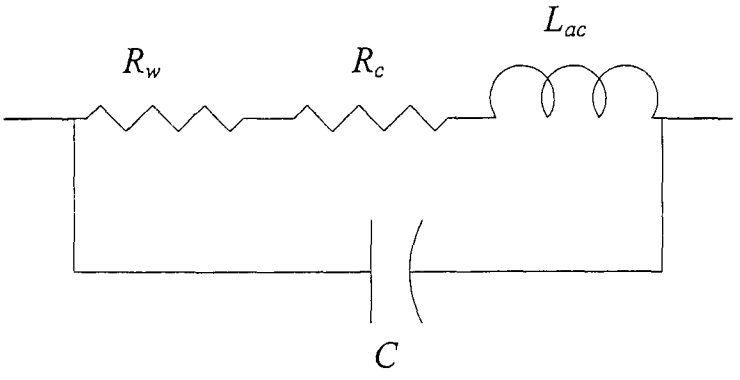

Fig. 1.2. Circuito equivalente a parametri concentrati dell'induttore.

Nella figura 1.2 il parametro R_w rappresenta la resistenza elettrica dell'avvolgimento dell'induttore, R_c è la resistenza equivalente serie che tiene conto delle perdite presenti nel nucleo, L_{ac} è il parametro induttanza totale, somma dell'induttanza di dispersione dell'avvolgimento L'_{ac}, legata ai flussi di campo magnetico disperso che interessano i

conduttori, e di quella principale L_{ac}^{m}, legata invece al flusso magnetico principale che interessa il nucleo.

I parametri descritti R_W, R_C, L_{ac}^{l} e L_{ac}^{m} sono funzione dalla frequenza f e le loro espressioni saranno ricavate nei capitoli successivi per i tipi di induttori oggetto di indagine.

La capacità C è la capacità parassita totale e viene assunta indipendente dalla frequenza.

Indicando la resistenza totale del circuito equivalente con $R_{ac} = R_w + R_c$, segue il circuito di figura 1.3.

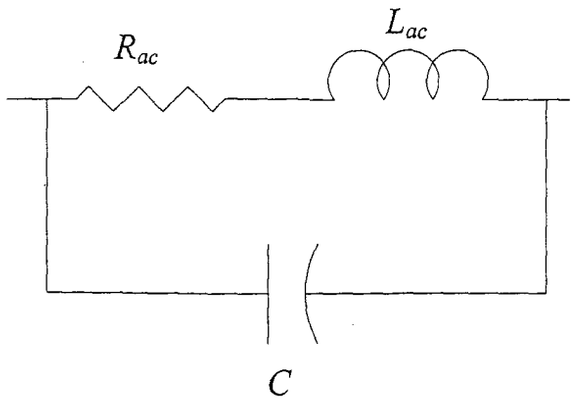

Fig. 1.3. Circuito equivalente a parametri concentrati dell'induttore con $R_{ac} = R_w + R_c$.

La figura 1.4 mostra il circuito equivalente serie ricavato da quello in figura 1.3. L'impedenza del modello dell'induttore è $\hat{Z}_s = R_s + jX_s$.

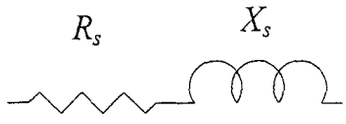

Fig. 1.4. Circuito equivalente serie.

La resistenza equivalente serie R_s si esprime come

$$R_s = \frac{R_{ac}}{(1-\omega^2 L_{ac} C)^2 + (\omega\, C R_{ac})^2}, \tag{1.1}$$

mentre la reattanza equivalente serie X_S è data da

$$X_s = \frac{\omega L_{ac}(1-\omega^2 L_{ac} C - \frac{C R_{ac}^2}{L_{ac}})}{(1-\omega^2 L_{ac} C)^2 + (\omega\, C R_{ac})^2} \tag{1.2}$$

dove $\omega = 2\pi f$ è la pulsazione.

Tenendo conto della espressione (1.2), la induttanza equivalente serie è

$$L_s = \frac{X_s}{\omega} = \frac{L_{ac}(1-\omega^2 L_{ac} C - \frac{C R_{ac}^2}{L_{ac}})}{(1-\omega^2 L_{ac} C)^2 + (\omega\, C R_{ac})^2} \quad . \tag{1.3}$$

Gli analizzatori d'impedenza misurano i parametri R_S e L_S.

La frequenza di risonanza f_r dell'induttore è definita come il valore di frequenza al quale corrisponde un valore nullo di reattanza. Allora, ponendo pari a zero l'espressione della reattanza equivalente (1.2) alla frequenza di risonanza f_r, si ottiene il valore della capacità parassita totale dell'induttore

$$C = \frac{1}{(2\pi f_r)^2 L_{ac}(f_r) + \frac{R_{ac}^2(f_r)}{L_{ac}(f_r)}}. \tag{1.4}$$

La capacità parassita C è dunque determinata dalla (1.4), dopo aver individuato sperimentalmente la frequenza di risonanza f_r, e viene considerata costante in tutto il campo delle frequenze di applicazione dell'induttore.

CAPITOLO 2

"Parametri elettrici dell'avvolgimento dell'induttore"

2.1 INTRODUZIONE

L'effetto delle correnti parassite, indotte nell'avvolgimento della bobina dalla variazione nel tempo del flusso di induzione magnetica concatenato con le spire, si manifesta con un aumento della resistenza e una diminuzione dell'induttanza di dispersione della bobina all'aumentare della frequenza. Le espressioni utilizzate per descrivere i parametri elettrici della bobina in funzione della frequenza derivano dallo studio di Dowell [1].

2.2 GENERALITÀ SULLO STUDIO DI DOWELL

Lo studio di Dowell [1] sviluppa un metodo per calcolare la variazione della resistenza e dell'induttanza di dispersione degli avvolgimenti di un trasformatore al variare della frequenza.

Dowell ipotizza nel suo lavoro che l'aumento della frequenza alteri la distribuzione della densità di corrente nella sezione di ogni conduttore della bobina, ma che la corrente totale attraverso il conduttore rimanga inalterata. Tale approccio porta a trascurare, soprattutto per elevati valori della frequenza, le eventuali correnti di dispersione attraverso le capacità parassite presenti tra le spire dell'avvolgimento e tra queste e il nucleo (figura 2.1), ma d'altra parte un approccio analitico che tenga conto di questo fenomeno risulta molto complesso.

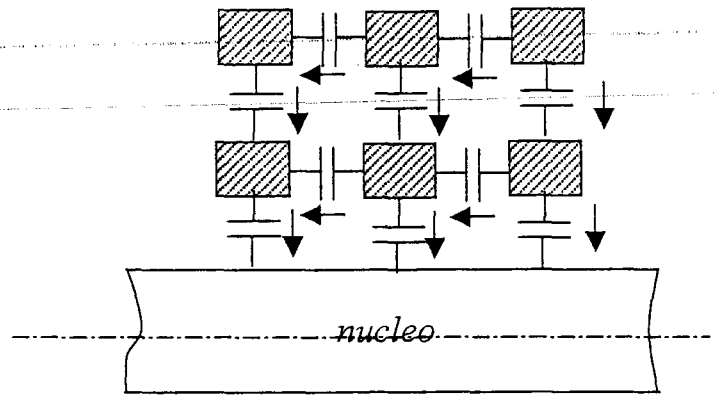

Fig. 2.1. Sezione di induttore con evidenziate le spire avvolte e le capacità parassite tra le spire e tra queste ed il nucleo.

L'aumento della frequenza altera dunque l'andamento della f.m.m. nei conduttori, per semplicità ritenuti di sezione rettangolare, rispetto a quello della f.m.m. in c.c. schematizzato in figura 2.2, ma lascia inalterata la f.m.m. nello spazio tra i diversi strati dell'avvolgimento.

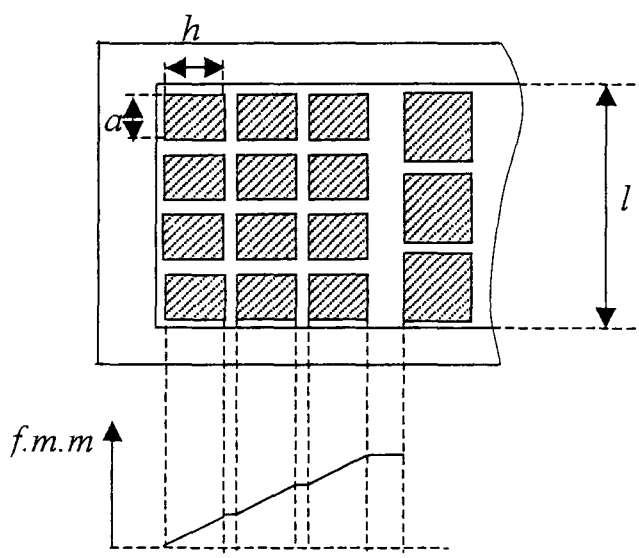

Fig. 2.2. Sezione di un trasformatore con avvolgimento e relativo diagramma di f.m.m in c.c.

Sotto tali ipotesi Dowell determina l'espressione dell'impedenza dell'avvolgimento di un trasformatore

$$\hat{Z}_w = R_{wdc}\left\{M + \frac{\left(N_l^{\,2} - 1\right)D}{3}\right\}, \tag{2.1}$$

con

R_{wdc} valore della resistenza dell'avvolgimento in c.c.

$$M = \alpha h \coth \alpha h \tag{2.2}$$

$$D = 2\alpha h \tanh \frac{\alpha h}{2}, \tag{2.3}$$

N_l numero di strati dell'avvolgimento

dove

$$\alpha = \sqrt{\frac{j\omega\mu_o\eta}{\rho}} \tag{2.4}$$

$$\eta = \frac{N_t a}{l}, \tag{2.5}$$

con

N_t numero di spire per strato di avvolgimento,

a larghezza della sezione del conduttore,

h altezza della sezione del conduttore,

ρ resistività del conduttore,

μ_0 permeabilità magnetica del conduttore,

l larghezza della finestra del trasformatore o lunghezza assiale della bobina.

Dalla (2.1), prendendone la parte reale, segue l'espressione della resistenza dell'avvolgimento

$$R_w = \mathrm{Re}\left(\hat{Z}_w\right) = R_{wdc}\left\{M' + \frac{\left(N_l^2 - 1\right)D'}{3}\right\}, \tag{2.6}$$

mentre l'espressione della induttanza di dispersione è

$$L_{lw} = \frac{\mathrm{Im}\left(\hat{Z}_w\right)}{\omega} = R_{wdc}\frac{1}{\omega}\left\{M'' + \frac{\left(N_l^2 - 1\right)D''}{3}\right\} \tag{2.7}$$

dove M', D' e M'', D'' sono rispettivamente le parti reali e le parti immaginarie di M e D.

L'approccio matematico di Dowell, applicato al caso di induttori avvolti in aria o su nucleo ferromagnetico con differente geometria da quella del trasformatore, porta alle stesse espressioni (2.6), (2.7) a condizione di ipotizzare la distribuzione dell' intensità del campo magnetico in c.c. dell'avvolgimento come in figura 2.3.

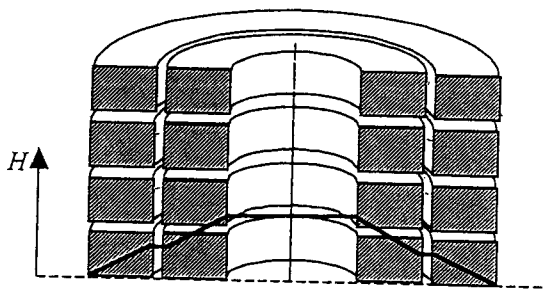

Fig. 2.3. Distribuzione dell'intensità del campo magnetico all'interno di un avvolgimento multistrato.

Il diagramma di figura 2.3 è ottenuto ipotizzando il campo magnetico diretto parallelamente all'asse della bobina all'interno di essa e considerandolo nullo al suo esterno.
Le espressioni di Dowell sono molto utilizzate nel campo dell'elettronica di potenza per descrivere il comportamento elettrico degli avvolgimenti, sia dei trasformatori sia degli induttori, avvolti in aria o su nucleo ferromagnetico per le applicazioni ad alta frequenza.

2.3 EFFETTO PELLE ED EFFETTO PROSSIMITÀ NELL'AVVOLGIMENTO

I principali parametri geometrici, che descrivono una spira in un dato strato di un avvolgimento, sono quelli descritti in figura 2.4.

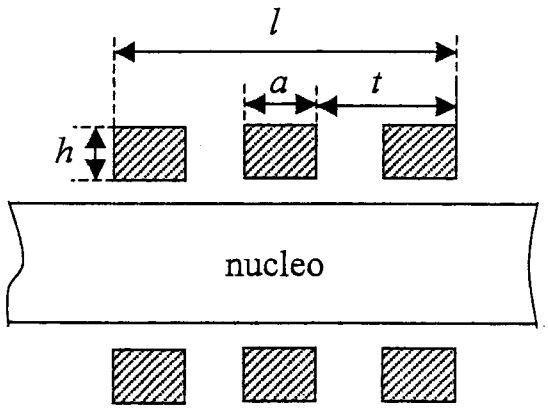

Fig. 2.4. Parametri geometrici dell'avvolgimento:

a, h lati della sezione del conduttore,

t distanza tra gli assi di due spire adiacenti appartenenti allo stesso strato della bobina.

l lunghezza assiale della bobina.

Definita t la distanza tra gli assi di due spire adiacenti appartenenti allo stesso strato, la lunghezza assiale della bobina l può essere così scritta

$$l \approx (N_t - 1)t \approx N_t t . \qquad (2.8)$$

Tenendo conto dei parametri geometrici dell'avvolgimento e delle (2.8), (2.4) e (2.5), possiamo scrivere

$$\alpha h = h\sqrt{\frac{j\omega\mu_o\eta}{\rho}} = h\sqrt{\frac{\omega\mu N_l a}{2\rho\, l}}(1+j) = h\sqrt{a}\sqrt{\frac{\pi f\mu}{\rho\, t}}(1+j) = A(1+j) \qquad (2.9)$$

con

$$A \equiv A_r = h\sqrt{a}\sqrt{\frac{\pi f\mu}{\rho t}} = \frac{h}{\delta}\sqrt{\frac{a}{t}} \qquad (2.10)$$

dove

$$\delta = \sqrt{\frac{\rho}{\mu\pi f}} = \sqrt{\frac{\rho}{\mu_o\mu_{rw}\pi f}}, \qquad (2.11)$$

rappresenta lo spessore di penetrazione del conduttore.

A è un parametro adimensionale legato ai parametri geometrici t, a, h dell'avvolgimento, alle caratteristiche elettromagnetiche μ, ρ dei conduttori con cui è realizzata la bobina e alla frequenza f.

Sostituendo le (2.2), (2.3) e (2.9) nell'espressione dell'impedenza dell'avvolgimento (2.1), si può scrivere

$$\hat{Z}_w = R_{wdc}\left[\frac{A+jA}{\tanh(A+jA)} + \frac{2(N_l^2-1)}{3}(A+jA)\tanh\left(\frac{A+jA}{2}\right)\right].$$

$$= R_{wdc}A(1+j)\left[\frac{e^{A+jA}+e^{-A-jA}}{e^{A+jA}-e^{-A-jA}} + \frac{2(N_l^2-1)}{3}\frac{e^{\frac{A+jA}{2}}-e^{-\frac{A+jA}{2}}}{e^{\frac{A+jA}{2}}+e^{-\frac{A+jA}{2}}}\right] =$$

$$= R_{wdc} A(1+j)\left[\frac{\cos A\left(e^{A}+e^{-A}\right)+j\sin A\left(e^{A}-e^{-A}\right)}{\cos A\left(e^{A}-e^{-A}\right)+j\sin A\left(e^{A}+e^{-A}\right)}+\right.$$

$$\left.+\frac{2\left(N_l^2-1\right)}{3}\frac{\cos\frac{A}{2}\left(e^{\frac{A}{2}}-e^{-\frac{A}{2}}\right)+j\sin\frac{A}{2}\left(e^{\frac{A}{2}}-e^{-\frac{A}{2}}\right)}{\cos\frac{A}{2}\left(e^{\frac{A}{2}}-e^{-\frac{A}{2}}\right)+j\sin\frac{A}{2}\left(e^{\frac{A}{2}}+e^{-\frac{A}{2}}\right)}\right]. \qquad (2.12)$$

Eliminando la parte immaginaria nel denominatore dei due termini frazionari entro parentesi quadra, si ottiene

$$\hat{Z}_w = R_{wdc} A(1+j)\left[\frac{\cos A\ \left(e^{A}+e^{-A}\right)+j\sin A\ \left(e^{A}-e^{-A}\right)}{\cos A\ \left(e^{A}-e^{-A}\right)+j\sin A\ \left(e^{A}+e^{-A}\right)}\cdot\right.$$

$$\cdot\frac{\cos A\ \left(e^{A}-e^{-A}\right)-j\sin A\ \left(e^{A}+e^{-A}\right)}{\cos A\ \left(e^{A}-e^{-A}\right)-j\sin A\ \left(e^{A}+e^{-A}\right)}+$$

$$+\frac{2\left(N_l^2-1\right)}{3}\frac{\cos\frac{A}{2}\left(e^{\frac{A}{2}}-e^{-\frac{A}{2}}\right)+j\sin\frac{A}{2}\left(e^{\frac{A}{2}}-e^{-\frac{A}{2}}\right)}{\cos\frac{A}{2}\left(e^{\frac{A}{2}}-e^{-\frac{A}{2}}\right)+j\sin\frac{A}{2}\left(e^{\frac{A}{2}}+e^{-\frac{A}{2}}\right)}\cdot$$

$$\left.\bullet\frac{\cos\frac{A}{2}\left(e^{\frac{A}{2}}-e^{-\frac{A}{2}}\right)-j\sin\frac{A}{2}\left(e^{\frac{A}{2}}+e^{-\frac{A}{2}}\right)}{\cos\frac{A}{2}\left(e^{\frac{A}{2}}-e^{-\frac{A}{2}}\right)-j\sin\frac{A}{2}\left(e^{\frac{A}{2}}+e^{-\frac{A}{2}}\right)}\right.\cdot$$

In definitiva, dalla parte reale dell'impedenza e da quella immaginaria divisa per la pulsazione ω, si ottengono, rispettivamente, le espressioni della resistenza e della induttanza di dispersione dell'avvolgimento

$$R_w = R_{wdc} A \left[\frac{e^{2A} - e^{-2A} + 2\sin(2A)}{e^{2A} + e^{-2A} - 2\cos(2A)} + 2\frac{N_l^2 - 1}{3} \cdot \frac{e^{A} - e^{-A} - 2\sin A}{e^{A} + e^{-A} + 2\cos A} \right] \tag{2.13}$$

$$L_{lw} = R_{wdc} \frac{A}{\omega} \left[\frac{e^{2A} - e^{-2A} - 2\sin(2A)}{e^{2A} + e^{-2A} - 2\cos(2A)} + 2\frac{N_l^2 - 1}{3} \cdot \frac{e^{A} - e^{-A} + 2\sin A}{e^{A} + e^{-A} + 2\cos A} \right] \tag{2.14}$$

dove

$$R_{wdc} = \rho \frac{N_l N_t l_t}{ah} \tag{2.15}$$

con l_t lunghezza media delle spire.

Nella (2.13) è evidenziato il duplice aspetto delle correnti parassite.

Le correnti parassite si oppongono alla penetrazione del campo magnetico all'interno dei conduttori, per cui le correnti che li attraversano tendono a distribuirsi in prossimità della loro superficie libera. L'effetto globale è quello di ridurre l'effettiva area della sezione del conduttore utilizzabile per il passaggio di corrente e la conseguenza è che la resistenza in c.a. dell'avvolgimento diventa maggiore di quella in c.c.

Quello descritto è l'effetto pelle legato al campo magnetico proprio del conduttore.

Inoltre quando un conduttore è vicino ad altri conduttori che trasportano corrente, si ha una perdita addizionale. Il campo magnetico totale risultante genera correnti parassite che fluiscono in opposte direzioni nelle differenti regioni del conduttore incrementandone le perdite.

Questo meccanismo di perdita è l'effetto prossimità.

L'espressione (2.13) della resistenza dell'avvolgimento può essere riscritta evidenziando i due aspetti, come segue

$$R_w = R_{wdc} F_r = R_{wdc}\left(F_{r-skin} + F_{r-prox.}\right), \tag{2.16}$$

dove

$$F_{r-skin} = A\ \frac{e^{2A} - e^{-2A} + 2\sin(2A)}{e^{2A} + e^{-2A} - 2\cos(2A)} \tag{2.17}$$

$$F_{r-prox} = A\ 2\frac{N_l^2 - 1}{3} \cdot \frac{e^{A} - e^{-A} - 2\sin A}{e^{A} + e^{-A} + 2\cos A}. \tag{2.18}$$

Il fattore F_{r-skin} è legato all'effetto pelle, mentre F_{r-prox} tiene conto dell'effetto di prossimità degli strati.

Dalla figura 2.5 possiamo osservare che il fattore F_{r-skin} è funzione crescente di A.

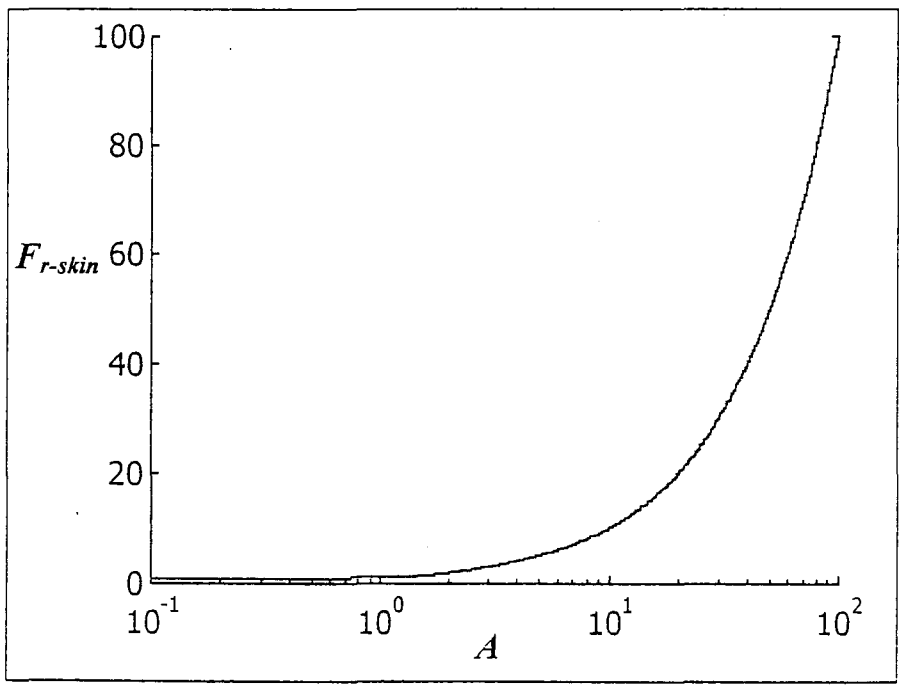

Fig. 2.5. $F_{r\text{-}skin}$ verso A.

La figura 2.6 mostra l'andamento di F_{r-prox} al variare di A e al crescere del numero di strati, in particolare N_l assume i valori interi compresi tra 2 e 5.

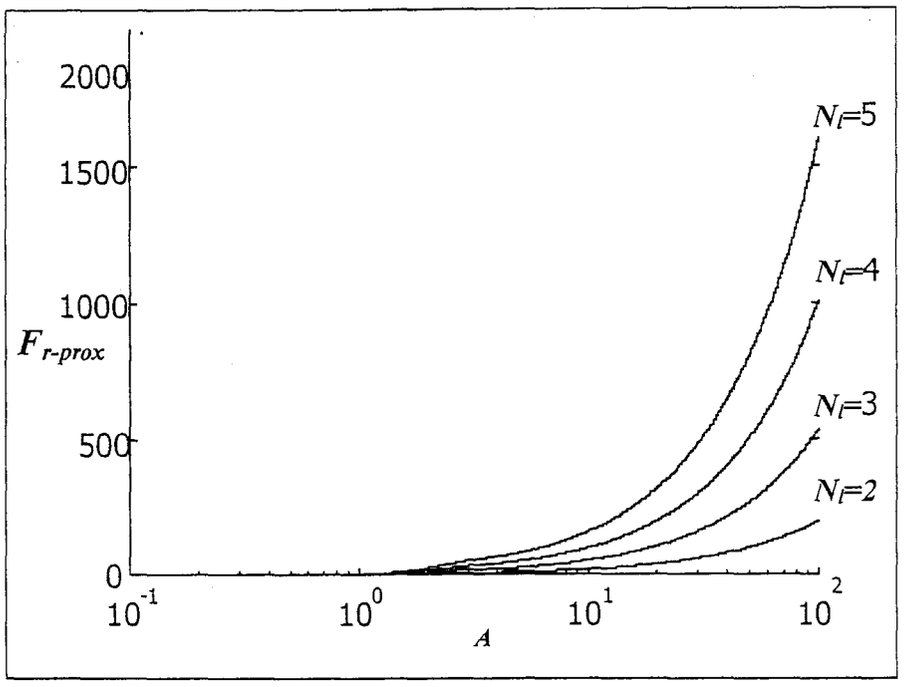

Fig. 2.6 $F_{r\text{-}prox}$ verso A.

È evidente dalla figura 2.6 come l'effetto prossimità è tanto più importante a parità di A, quindi a parità della geometria dell'avvolgimento, del materiale conduttore e della frequenza, quanto maggiore è il numero degli strati N_l con cui si realizza l'avvolgimento.

Si osserva inoltre che per un avvolgimento in cui è fissato il numero degli strati N_l, i parametri geometrici e il tipo di conduttore, il parametro F_{r-prox} cresce all'aumentare della frequenza. Infatti, nelle ipotesi sopra elencate, A è una funzione monotona crescente della frequenza f ($A = k\sqrt{f}$ con $k = h\sqrt{\frac{a}{t}}\sqrt{\frac{\pi\mu}{\rho}}$ costante) ed F_{r-prox} è, come da figura 2.3.3, funzione crescente di A.

Dalla figura 2.5 risulta quindi che, come è noto, F_{r-skin} è una funzione crescente di f.

La figura 2.7 mostra la curva del rapporto F_{r-prox}/F_{r-skin} in funzione di A.

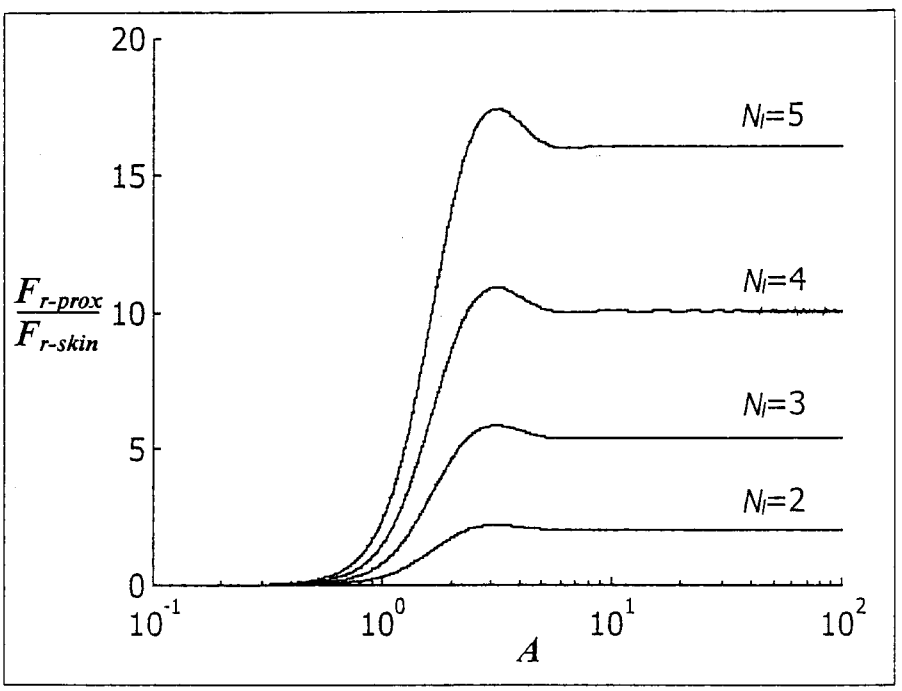

Fig. 2.7. $F_{r\text{-}prox}/F_{r\text{-}skin}$ verso A.

Da tale figura, si evince che il peso dell'effetto prossimità diventa dominante rispetto all'effetto pelle per alti valori di A e tanto più quanto più è alto il numero degli strati. Comunque già per valori di $A \cong 2$ il rapporto F_{r-prox}/F_{r-skin} diventa maggiore dell'unità.

Nella figura 2.8 è graficata la curva $F_r = R_w/R_{wdc}$ al variare di A per diversi valori di N_l.

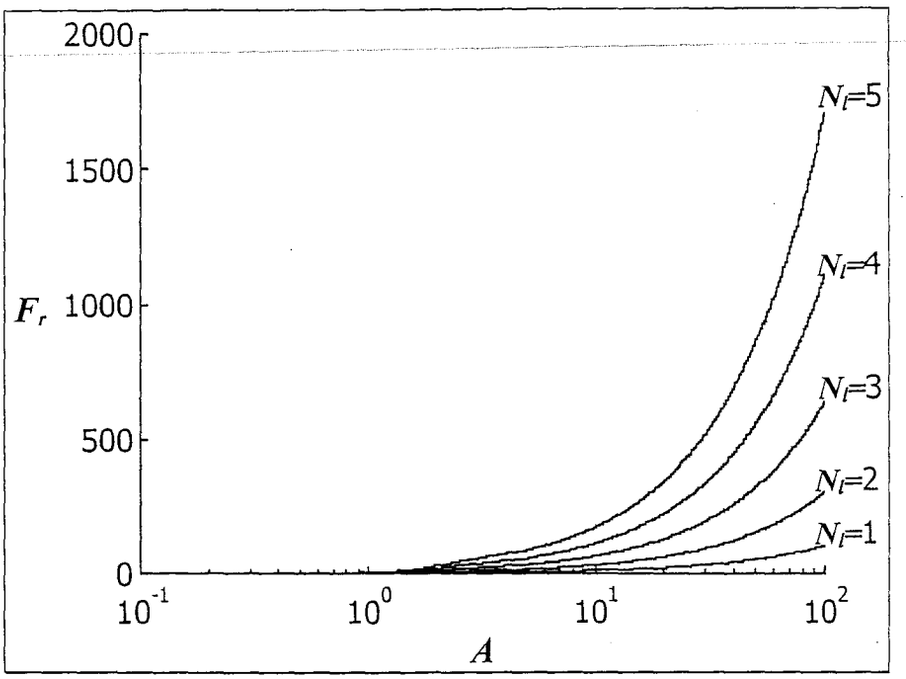

Fig. 2.8. F_r verso A.

L'andamento di F_r è quello di una funzione crescente secondo A, ed è naturalmente crescente anche all'aumentare della frequenza una volta fissata la geometria dell'avvolgimento e scelto il materiale conduttore.

Dall'esame della figura 2.8, o della espressione (2.16), si deduce che per ridurre il valore della resistenza R_w di un avvolgimento, è preferibile, fissato il numero totale di spire $N = N_l N_t$ con cui deve essere realizzato l'avvolgimento, disporle su un unico strato; infatti in tale configurazione il termine F_{r-prox} è nullo.

L'induttanza di dispersione dell'avvolgimento (2.14), legata all'energia magnetica immagazzinata nei conduttori, è esprimibile come segue

$$L_{ac}^{l} = R_{wdc}\frac{A}{\omega}F_l = R_{wdc}\frac{A}{\omega}\left(C + 2\frac{N_l^2 - 1}{3}D\right), \qquad (2.19)$$

dove

$$C = \frac{e^{2A} - e^{-2A} - 2\sin(2A)}{e^{2A} + e^{-2A} - 2\cos(2A)} \tag{2.20}$$

$$D = \frac{e^{A} - e^{-A} + 2\sin A}{e^{A} + e^{-A} + 2\cos A}. \tag{2.21}$$

L'induttanza dell'avvolgimento in c.c. può essere espressa come

$$L_{wdc} = \frac{2W_{mdc}}{I^2} = \mu_o \frac{N_t^2 N_l^3 h l_t}{3l} \tag{2.22}$$

dove l_t è la lunghezza media delle spire.

Tenendo conto delle (2.10), (2.15) e (2.19), il termine $R_{wdc} A/\omega$ può essere espresso come

$$R_{wdc} \frac{A}{2\pi f} = \frac{\rho}{2\pi f} \frac{N_l N_t l_t}{ha} \frac{3N_t t}{N_t^2 N_l^3 \mu_o h l_t} \frac{h\sqrt{a}}{\delta\sqrt{t}} L_{wdc}$$

$$= 3\frac{\rho}{\mu_o} \frac{1}{2\pi f} \frac{t}{N_l^2 h^2 a} \frac{h\sqrt{a}}{\delta\sqrt{t}} L_{wdc} = \frac{3}{2} \frac{1}{N_l^2} \frac{\delta}{h} \sqrt{\frac{t}{a}} L_{wdc} = \frac{3}{2} \frac{1}{N_l^2} \frac{1}{A} L_{wdc}. \tag{2.23}$$

Sostituendo la (2.23) nella (2.19), si ottiene la seguente espressione

$$L_{ac}^{l} = \frac{3}{2} \frac{L_{wdc}}{N_l^2} \frac{1}{A} \left[C + 2\frac{N_l^2 - 1}{3} D \right] = \frac{3}{2} L_{wdc} \frac{1}{A} \left[\frac{C}{N_l^2} + \frac{2}{3} \frac{N_l^2 - 1}{N_l^2} D \right] =$$

$$= \frac{3}{2} L_{wdc} \frac{1}{A} \left[\left(1 - \frac{N_l^2 - 1}{N_l^2} \right) C + \frac{2}{3} \frac{N_l^2 - 1}{N_l^2} D \right]$$

$$=\frac{3}{2}L_{wdc}\frac{1}{A}\left[C-\frac{N_l^2-1}{N_l^2}\left(C-\frac{2}{3}D\right)\right]. \tag{2.24}$$

La (2.24) si può allora scrivere come

$$L_{ac}^{l}=L_{wdc}F_l=L_{wdc}\left[F_{l-skin}+F_{l-prox}\right] \tag{2.25}$$

dove

$$F_{l-skin}=C=\frac{3}{2}\frac{1}{A}\frac{e^{2A}-e^{-2A}-2\sin(2A)}{e^{2A}+e^{-2A}-2\cos(2A)} \tag{2.26}$$

$$F_{l-prox}=-\frac{3}{2}\frac{N_l^2-1}{N_l^2}\frac{1}{A}\left(C-\frac{2}{3}D\right)=-\frac{3}{2}\frac{N_l^2-1}{N_l^2}\frac{1}{A}\left[\frac{e^{2A}-e^{-2A}-2\sin(2A)}{e^{2A}+e^{-2A}-2\cos(2A)}+\right.$$
$$\left.-\frac{2}{3}\frac{e^{A}-e^{-A}+2\sin A}{e^{A}+e^{-A}+2\cos A}\right]. \tag{2.27}$$

Il termine F_{l-skin} è il fattore legato al fenomeno di espulsione delle linee di campo magnetico dovuto all'effetto pelle; F_{l-prox} è, invece, legato all'effetto prossimità degli altri strati della bobina i quali inaspriscono l'effetto di espulsione del campo dai conduttori.
La figura 2.9 mostra l'andamento F_{l-skin} in funzione di A.

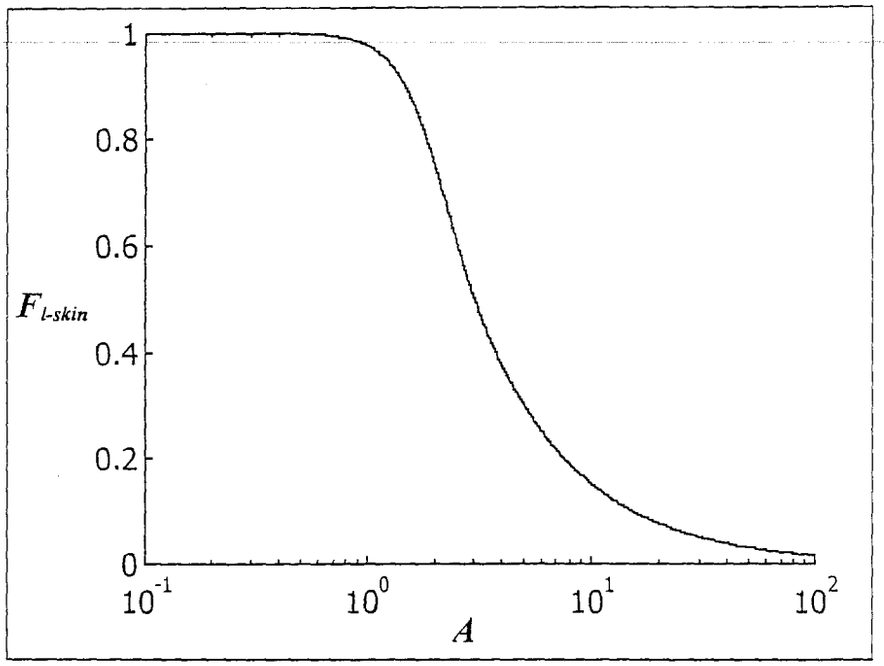

Fig. 2.9. $F_{l\text{-}skin}$ verso A.

La curva in esame è una funzione decrescente di A. Se la geometria della bobina e il tipo di conduttore sono fissati, F_{l-skin} è funzione della sola frequenza e, osservato che all'aumentare di f corrisponde un aumento di A, possiamo concludere che anche la curva F_{l-skin} decresce al crescere della frequenza f.

La figura 2.10 rappresenta F_{l-prox} funzione di A per un numero differente di strati N_l.

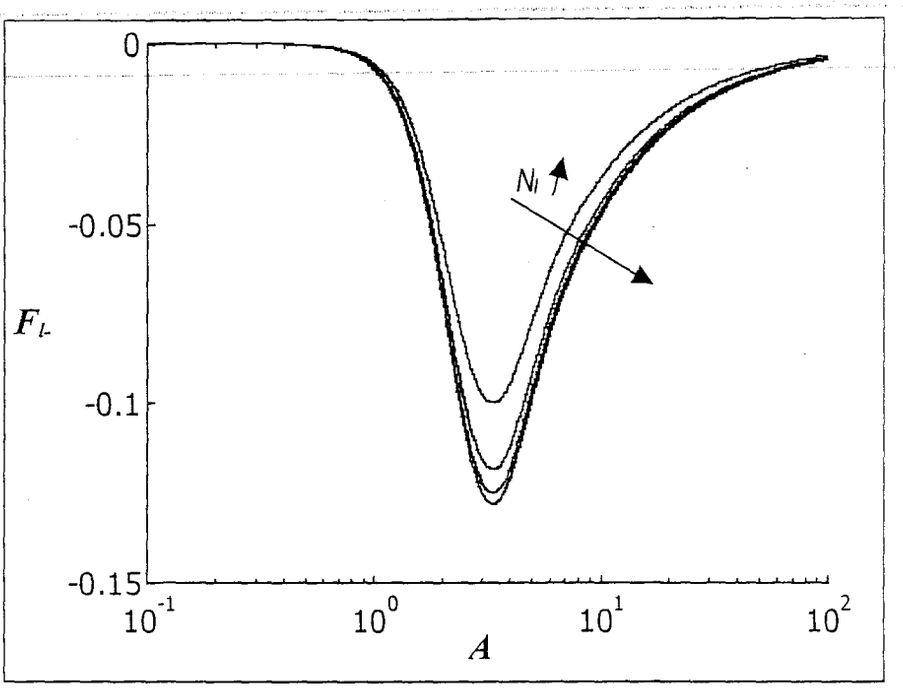

Fig. 2.10. $F_{l\text{-}prox}$ verso A.

Si nota che F_{l-prox} assume valori negativi quindi l'effetto complessivo è una diminuzione di F_l. Per ogni valore fissato di A, è possibile osservare che il valore assoluto di F_{l-prox} cresce al crescere di N_l.e la conclusione è che l'effetto prossimità diventa più importante quanto più numerosi sono gli strati.

Nella figura 2.11 è riportato l'andamento di $\left|F_{l-prox}/F_{l-skin}\right|$ in funzione di A.

Osserviamo che il rapporto è minore dell'unità

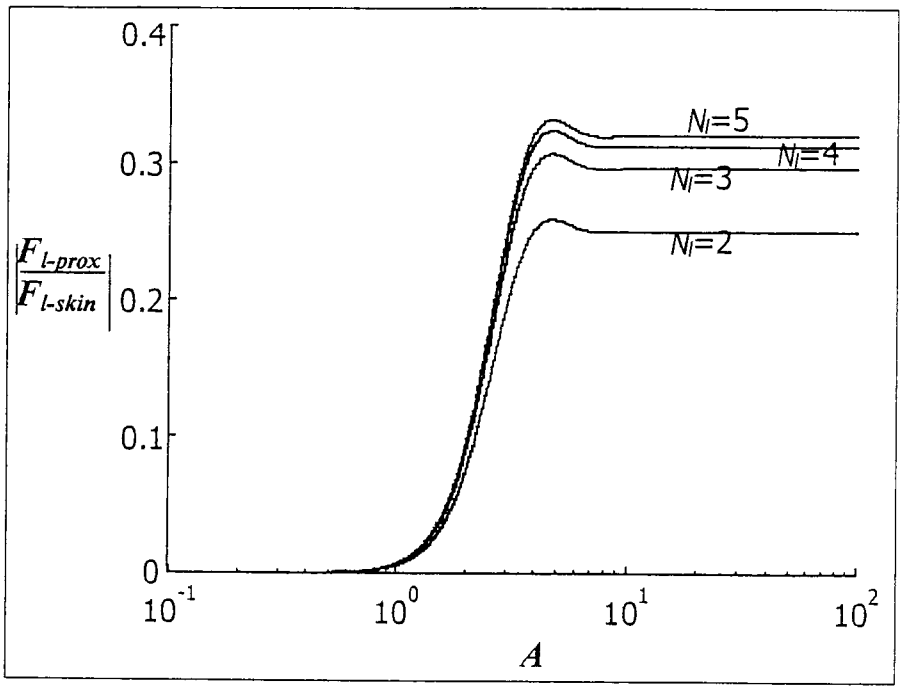

Fig. 2.11. $F_{l\text{-}prox}/F_{l\text{-}skin}$ verso A.

Considerati gli andamenti di $F_{r\text{-}prox}/F_{r\text{-}skin}$ e di $F_{l\text{-}prox}/F_{l\text{-}skin}$ (figure 2.7 e 2.11), possiamo concludere che l'effetto prossimità ha un peso più rilevante nella determinazione del valore di resistenza che non dell'induttanza di dispersione della bobina.

La figura 2.12 mostra l'andamento decrescente di $F_l = L_{ac}^l / L_{wdc}$ verso A al crescere del numero di strati N_l con cui è realizzata la bobina.

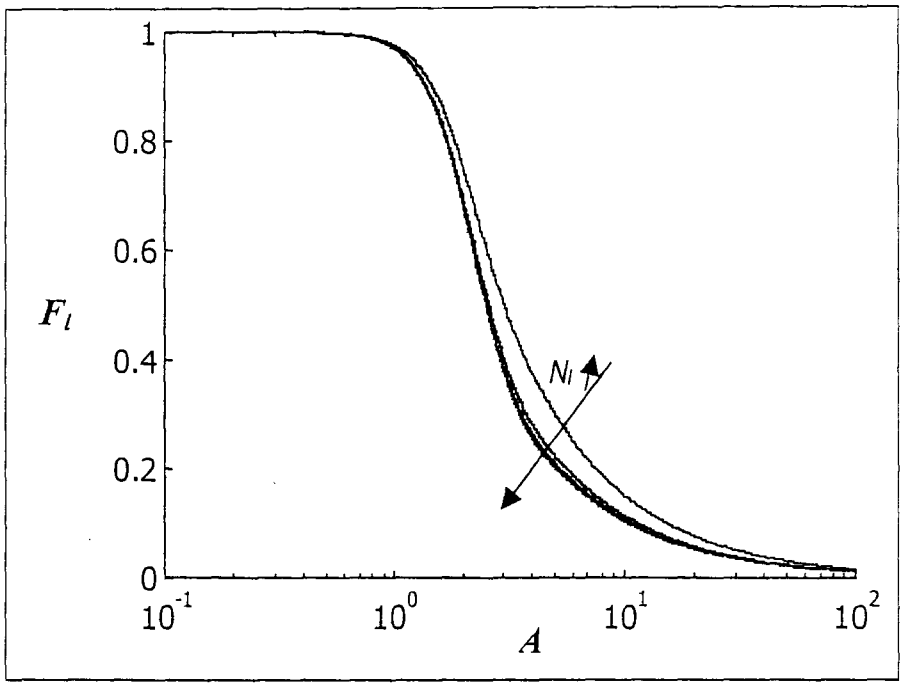

Fig. 2.12. F_l verso A.

Si può osservare che le curve L_{ac}^l / L_{wdc} per un numero di strati maggiore di 2 ($N_l > 2$) sono quasi coincidenti con quella tracciata per un numero di strati pari a 2 ($N_l = 2$).

A parità del valore di induttanza in c.c., L_{wdc}, una geometria della bobina con un solo strato, presenta una diminuzione dell'induttanza al crescere della frequenza meno accentuata.

2.4 AVVOLGIMENTO CON CONDUTTORI A SEZIONE CIRCOLARE

Come già specificato nel paragrafo 2.2, lo studio di Dowell prende in considerazione avvolgimenti realizzati con conduttori di sezione rettangolare, in modo da rendere più agevole l'uso delle equazioni di Maxwell nel caso della geometria esaminata.

A questo punto si rende necessario estendere la validità delle espressioni di Dowell ad avvolgimenti costituiti da conduttori di sezione circolare.

Nel caso di conduttore di sezione quadrata ($h=a$), A si esprime come

$$A_q = h^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\rho\, t}} = \frac{h^{\frac{3}{2}}}{\delta \sqrt{t}} \tag{2.28}$$

e le espressioni per la resistenza e l'induttanza sono sempre date dalle (2.13) e(2.14).

Il conduttore a sezione cilindrica di diametro d, invece, viene sostituito da un conduttore a sezione quadrata di area equivalente, come è mostrato in figura 2.13.

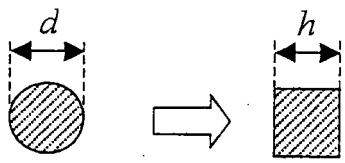

Fig. 2.13. Sostituzione del conduttore cilindrico con un conduttore di sezione quadrata di pari area.

Dalla uguaglianza delle aree delle due differenti sezioni si trova

$$h = \sqrt{\frac{\pi}{4}}d \,. \tag{2.29}$$

Sostituendo la (2.29) nella (2.28), l'espressione di A in questo caso risulta

$$A_c = d^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{4}}\sqrt{\frac{\pi f \mu}{\rho t}} = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{4}}\frac{d^{\frac{3}{2}}}{\delta\sqrt{t}} \,. \tag{2.30}$$

La conseguenza di tale equivalenza e dell'espressione di A_C risultante è di rendere utilizzabili le (2.13) e (2.14) anche per avvolgimenti con conduttori circolari.

BIBLIOGRAFIA

[1] P. J. Dowell, "Effects of eddy currents in transformer windings," *Proc. IEE*, Vol. 113, No. 8, pp. 1387-1394, August 1966.

CAPITOLO 3

"Modello per alta frequenza di induttore avvolto su nucleo di ferrite"

3.1 INTRODUZIONE

Un metodo per ridurre le dimensioni ed il peso dei convertitori di potenza è quello di aumentare la frequenza di commutazione oltre parecchie centinaia di kilohertz. Ciò consente di poter utilizzare induttori, condensatori e trasformatori di volumi molto minori. Per raggiungere tale obiettivo, è importante ottenere una elevata efficienza alle alte frequenze operative. Devono essere, inoltre, accuratamente determinati i componenti parassiti nel circuito del convertitore per prevenire comportamenti indesiderati del dispositivo.
Obiettivo di questo capitolo è di investigare il comportamento dell' induttore in nucleo di ferrite e presentare un modello circuitale valido alle alte frequenze. Nel modello sono prese in considerazione le capacità parassite, le perdite nell'avvolgimento e nel nucleo e l'induttanza dipendente dalla frequenza. Sono ricavate espressioni per la resistenza equivalente serie del nucleo e l'induttanza principale in funzione della frequenza. Si utilizzano le formule alle equazioni di Dowell [1] per la resistenza e l'induttanza di dispersione dell'avvolgimento. Sono inoltre illustrati i risultati sperimentali.

3.2 CIRCUITO EQUIVALENTE PER INDUTTORI IN NUCLEO DI FERRITE

La Fig. 3.1(a) mostra un modello a parametri concentrati di un induttore in nucleo di ferrite [2], [3], dove R_w è la resistenza dell'avvolgimento, R_c la resistenza equivalente serie del nucleo, L_{ac} l'induttanza totale e C è la capacità parassita totale. In generale, R_w, R_c e L_{ac} sono dipendenti dalla frequenza. In Fig. 3.1(b) è mostrata la resistenza totale in c.a. $R_{ac} = R_w + R_c$. L'impedenza del modello dell'induttore è $\hat{Z}_s = R_s + jX_s$. La Fig. 3.1(c)

descrive un circuito equivalente serie dell'induttore, dove la resistenza equivalente serie (ESR) è [2], [3]

$$R_s = \frac{R_{ac}}{(1-\omega^2 L_{ac} C)^2 + (\omega\, C R_{ac})^2} \tag{3.1}$$

e la reattanza equivalente serie è

$$X_s = \frac{\omega L_{ac}(1-\omega^2 L_{ac} C - \frac{C R_{ac}^2}{L_{ac}})}{(1-\omega^2 L_{ac} C)^2 + (\omega\, C R_{ac})^2} \tag{3.2}$$

dove $\omega = 2\pi f$. Quindi, l'induttanza equivalente serie (ESL) è data da

$$L_s = \frac{X_s}{2\pi f}, \tag{3.3}$$

la quale è significativa in quanto molti analizzatori d'impedenza misurano R_s e L_s.

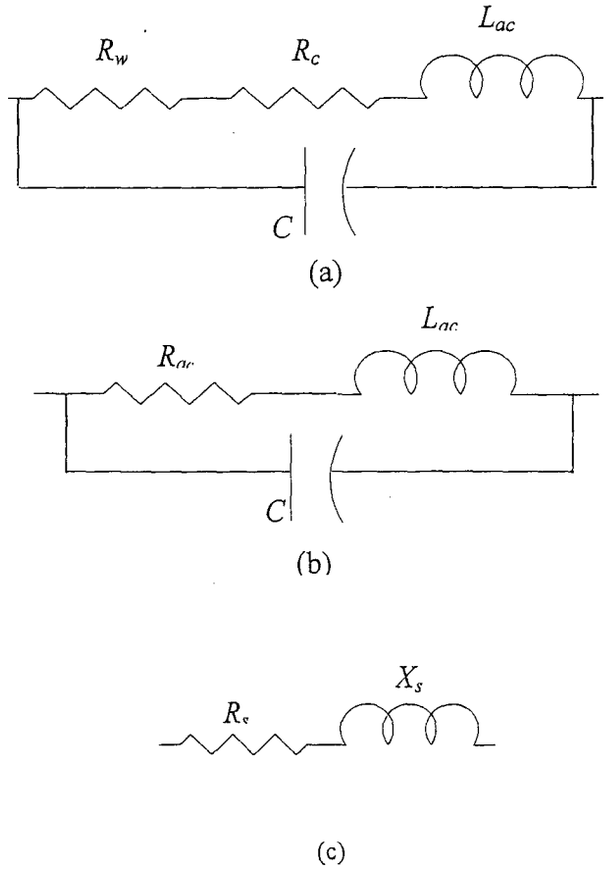

Fig. 3.1.Circuito equivalente dell' induttore.
(a) Circuito a parametri concentrati.
(b) Circuito equivalente con $R_{ac} = R_w + R_c$.
(c) Circuito equivalente serie.

La frequenza di risonanza f_r di un induttore è definita come la frequenza alla quale la reattanza X_s è zero. Quindi, dalla (3.2), la capacità parassita totale dell'induttore puo' essere calcolata come

$$C = \frac{1}{(2\pi f_r)^2 L_{ac}(f_r) + \dfrac{R_{ac}^2(f_r)}{L_{ac}(f_r)}} \tag{3.4}$$

dove $L_{ac}(f_r)$ e $R_{ac}(f_r)$ sono l'induttanza totale e la resistenza totale calcolati alla frequenza di risonanza f_r, rispettivamente. La capacità C è assunta indipendente dalla frequenza.

3.3 RESISTENZA DELL' AVVOLGIMENTO

La resistenza dell'avvolgimento di un induttore aumenta con la frequenza a causa dell' effetto pelle e dell'effetto prossimità, dovuti alle correnti parassite generate nel conduttore dalla variazione nel tempo del campo elettromagnetico. Il risultato finale di questi due effetti combinati è una riduzione dell'area effettiva della sezione trasversale del conduttore utilizzabile per la circolazione della corrente; pertanto la resistenza in c.a. ad alta frequenza è maggiore di quella in c.c.. La resistenza in c.a. dell'avvolgimento di un induttore con N_l strati è [1]

$$R_w = R_{wdc} A \left[\frac{e^{2A} - e^{-2A} + 2\sin(2A)}{e^{2A} + e^{-2A} - 2\cos(2A)} + 2\frac{N_l^{\,2} - 1}{3} \cdot \frac{e^{A} - e^{-A} - 2\sin A}{e^{A} + e^{-A} + 2\cos A} \right], \tag{3.5}$$

dove R_{wdc} è le resistenza in c.c. dell'avvolgimento ad una data temperatura T e A per un conduttore a sezione circolare è

$$A = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{4}} \frac{d^{\frac{3}{2}}}{\delta\, t^{\frac{1}{2}}}, \tag{3.6}$$

nella quale d è il diametro del conduttore, t è la distanza tra i centri di due conduttori adiacenti e δ è la profondità di penetrazione del conduttore data da

$$\delta = \sqrt{\frac{\rho_w}{\pi \mu_0 \mu_{rw} f}}. \tag{3.7}$$

Nella (3.7), ρ_w è la resistività del conduttore (ρ_w =17.24x10^{-9} Ωm per un conduttore in rame alla temperatura T= 20°C), μ_{rw} è la permeabilità magnetica relativa del materiale conduttore (μ_{rw} = 1 per un conduttore in rame), e μ_0 = 4π 10^{-7} H/m.

3.4 INDUTTANZA PRINCIPALE E RESISTENZA EQUIVALENTE DEL NUCLEO

Consideriamo una bobina uniformemente avvolta attorno ad un nucleo di ferrite di lunghezza l e di sezione trasversale circolare di raggio r_o. Assumendo che la lunghezza del nucleo cilindrico sia molto grande rispetto al suo diametro ($l >> r_o$), gli effetti di estremità possono essere trascurati. Così il campo magnetico può essere considerato uniforme lungo l'asse z di un sistema di riferimento di coordinate cilindriche, come mostrato in fig. 3.2.

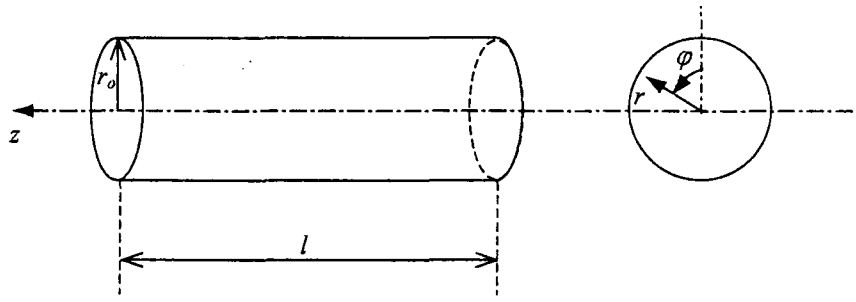

Fig. 3.2. Vista geometrica del nucleo

A causa della simmetria cilindrica, i campi elettrici e magnetici sono indipendenti dalle coordinate φ e z. In particolare, il vettore campo magnetico è dato da

$$\boldsymbol{H}(r,\varphi,z,t) = H_z(r,t)\,\boldsymbol{a}_z. \tag{3.8}$$

Nel caso di regime sinusoidale, è possibile introdurre il vettore complesso per il campo magnetico

$$\hat{\boldsymbol{H}}(r) = \hat{H}(r)\,\boldsymbol{a}_z, \tag{3.9}$$

dove il fasore del campo magnetico $\hat{H}(r)$ è dato da

$$\hat{H}(r) = \hat{H}_z(r) = H_m(r)\,e^{j\alpha(r)}. \tag{3.10}$$

Il modello considera le perdite per isteresi magnetica presenti nel nucleo per mezzo di una permeabilità magnetica complessa dipendente dalla frequenza [4]

$$\hat{\mu}_c = \mu_o \hat{\mu}_{rc} = \mu_o (\mu'_{rc} - j\mu''_{rc}). \tag{3.11}$$

Pertanto l' induzione magnetica è descritta per mezzo di un vettore complesso

$$\hat{\boldsymbol{B}} = \hat{\mu}_c \hat{\boldsymbol{H}} = \mu_o (\mu'_{rc} - j\mu''_{rc}) \hat{\boldsymbol{H}}. \tag{3.12}$$

Per considerare le perdite dielettriche dovuta all'isteresi elettrica [4] [5] del nucleo e che hanno luogo nelle regioni tra i grani, la permettività elettrica è anch'essa espressa come una quantità complessa dipendente dalla frequenza

$$\hat{\varepsilon}_c = \varepsilon_o \hat{\varepsilon}_{rc} = \varepsilon_o (\varepsilon'_{rc} - j\varepsilon''_{rc}). \tag{3.13}$$

La relazione tra il vettore complesso spostamento elettrico, $\hat{\boldsymbol{D}}$, e il vettore complesso campo elettrico, $\hat{\boldsymbol{E}}$, è data da

$$\hat{\boldsymbol{D}} = \hat{\varepsilon}_c \hat{\boldsymbol{E}} = \varepsilon_o (\varepsilon'_{rc} - j\varepsilon''_{rc}) \hat{\boldsymbol{E}}. \tag{3.14}$$

Per determinare l'induttanza principale e la resistenza equivalente del nucleo dalla tensione indotta nell'avvolgimento dalla variazione del flusso magnetico, occorre ricavare la distribuzione del campo magnetico nel nucleo tramite le equazioni di Maxwell. Le equazioni di Maxwell in termini di vettori complessi possono cosi' essere espresse

$$\nabla \times \hat{\boldsymbol{H}} = \hat{\boldsymbol{J}} + j\omega \hat{\boldsymbol{D}} = \gamma_c \hat{\boldsymbol{E}} + j\omega \hat{\varepsilon}_c \hat{\boldsymbol{E}} = (\gamma_c + j\omega \hat{\varepsilon}_c) \hat{\boldsymbol{E}} = \hat{\gamma}_c \hat{\boldsymbol{E}}, \tag{3.15}$$

$$\nabla \times \hat{\boldsymbol{E}} = -j\omega \hat{\boldsymbol{B}} = -j\omega \hat{\mu}_c \hat{\boldsymbol{H}}. \tag{3.16}$$

dove $\hat{\boldsymbol{J}}$ è il vettore complesso della densità di corrente di conduzione, γ_c è la conduttività elettrica del nucleo e $\hat{\gamma}_c = \gamma_c + j\omega \hat{\varepsilon}_c$ è la sua conduttività complessa. In (3.15) $\gamma_c \hat{\boldsymbol{E}}$ è responsabile della perdita per la circolazione delle correnti parassite dovuta al fatto che la conducibilità del nucleo γ_c è diversa da zero, mentre il termine $\omega \varepsilon_o \varepsilon''_{rc} \hat{\boldsymbol{E}}$ tiene conto delle perdite dielettriche ed il termine $\omega \mu_o \mu''_{rc} \hat{\boldsymbol{H}}$ in (3.16) è legato alle perdite d'isteresi magnetica.

Dalla (3.15) e (3.16), si puo' scrivere

$$\nabla \times \left(\nabla \times \hat{\boldsymbol{H}}\right) = \hat{\gamma}_c \nabla \times \hat{\boldsymbol{E}} = -j\omega \hat{\mu}_c \hat{\gamma}_c \hat{\boldsymbol{H}} = -j\hat{k}^2 \hat{\boldsymbol{H}} \tag{3.17}$$

dove

$$\hat{k}^2 = \omega \hat{\mu}_c \hat{\gamma}_c. \tag{3.18}$$

Dalla (3.9) e (3.17), segue che

$$\frac{\mathrm{d}^2 \hat{H}}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\hat{H}}{\mathrm{d}r} - j\hat{k}^2 \hat{H} = 0. \tag{3.19}$$

Questa è la nota equazione differenziale di Bessel con un' unica soluzione per $r \to 0$

$$\hat{H}(r) = GJ_0(j^{\frac{3}{2}}\hat{k}r) \tag{3.20}$$

dove J_0 è la funzione di Bessel di prima specie di ordine zero e G è una costante d'integrazione. Applicando al fasore campo magnetico le seguenti condizioni al contorno sulla superficie del cilindro:

$$\hat{H}_o = \hat{H}(r_o) = GJ_0(j^{\frac{3}{2}}\hat{k}r_o) \quad , \tag{3.21}$$

si ottiene

$$\hat{H}(r) = \hat{H}_o \frac{J_0(j^{\frac{3}{2}}\hat{k}r)}{J_0(j^{\frac{3}{2}}\hat{k}r_o)}, \tag{3.22}$$

con

$$\hat{H}_o = \frac{N\hat{I}}{l}, \tag{3.23}$$

dove N è il numero totale di spire avvolte attorno al cilindro e $\hat{I}$ è il fasore della corrente nella bobina. Il fasore del flusso magnetico attraverso una sezione trasversale del cilindro è calcolato come

$$\hat{\Phi} = \int_S \hat{\mu}_c \hat{H} \mathrm{d}S = 2\pi \int_0^{r_0} \hat{\mu}_c \hat{H}(r) r \mathrm{d}r = \frac{2\pi\hat{\mu}_c \hat{H}_o}{J_0\left(j^{\frac{3}{2}}\hat{k}r_o\right)} \int_0^{r_o} rJ_0\left(j^{\frac{3}{2}}\hat{k}r\right)\mathrm{d}r . \tag{3.24}$$

Dopo alcuni passaggi (vedi Appendice 3.7), l' equazione (3.24) diventa

$$\hat{\Phi} = L_{dc}^m \hat{I} \frac{2}{N} \frac{1}{\mu_o \mu_{rc}'} \frac{\hat{\mu}_c}{j^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}\frac{r_0}{\hat{\delta}}} \frac{J_1\left(j^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}\frac{r_0}{\hat{\delta}}\right)}{J_0\left(j^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}\frac{r_0}{\hat{\delta}}\right)}, \tag{3.25}$$

dove L_{dc}^m è l'induttanza principale valutata a bassa frequenza, J_1 è la funzione di Bessel di prima specie di ordine 1 e $\hat{\delta}$ è data dalla (A.8) (dell'appendice 3.7). Trascurando il flusso di dispersione, il flusso magnetico concatenato alla bobina è

$$\hat{\Phi}_c = N\hat{\Phi} . \tag{3.26}$$

Quindi, la tensione indotta nell'avvolgimento dalla variazione nel tempo del flusso magnetico è

$$\hat{V} = j\omega\,\hat{\Phi}_c, \tag{3.27}$$

e l'impedenza dell'induttore è data da

$$\hat{Z} = \frac{\hat{V}}{\hat{I}} = j2\omega L_{dc}^{m} \frac{1}{\mu_o \mu_{rc}^{'}} \frac{\hat{\mu}_c}{j^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}\frac{r_0}{\hat{\delta}}} \frac{J_1\left(j^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}\frac{r_0}{\hat{\delta}}\right)}{J_0\left(j^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}\frac{r_0}{\hat{\delta}}\right)}. \tag{3.28}$$

Le parti reale ed immaginaria di $\hat{Z}$ rappresentano la resistenza equivalente serie del nucleo R_c (la quale tiene conto sia delle perdite per correnti parassite sia delle perdite per isteresi elettrica e magnetica presenti nel nucleo) e la reattanza principale della bobina ωL_{ac}^{m}, rispettivamente.

Le espressioni di tali parametri sono:

$$R_c = Re\left(\hat{Z}\right) = -\frac{4\pi}{\mu_{rc}^{'}} f\, L_{dc}^{m} Im\left[\frac{\hat{\mu}_{rc}}{j^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}\frac{r_0}{\hat{\delta}}} \frac{J_1\left(j^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}\frac{r_0}{\hat{\delta}}\right)}{J_0\left(j^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}\frac{r_0}{\hat{\delta}}\right)}\right] \tag{3.29}$$

e

$$L_{ac}^{m} = \frac{Im\left(\hat{Z}\right)}{2\pi f} = \frac{2}{\mu_{rc}^{'}} L_{dc}^{m} Re\left[\frac{\hat{\mu}_{rc}}{j^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}\frac{r_0}{\hat{\delta}}} \frac{J_1\left(j^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}\frac{r_0}{\hat{\delta}}\right)}{J_0\left(j^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}\frac{r_0}{\hat{\delta}}\right)}\right]. \tag{3.30}$$

3.5 RISULTATI SPERIMENTALI

Per verificare la validità del modello circuitale, un induttore è stato avvolto su un nucleo di ferrite Siemens EC52 (part no. B66341) con sezione trasversale circolare della gamba centrale e nessun traferro. Questo nucleo è costituito da materiale magnetico con sigla N27. Il diametro della gamba centrale è $2\,r_0$ = 13.75 mm. Un filo di rame con d = 0.66 mm e $t \approx d$ (AWG#22) è stato avvolto sulla gamba centrale per ottenere uno strato d'avvolgimento dell'induttore (N_l = 1) e si sono rese necessarie un numero di spire N_t = 39 per realizzare

l'avvolgimento. Dai data sheets, il fattore d'induttanza è A_L = 3.4 μH e il valore calcolato dell'induttanza principale a bassa frequenza risulta pari a $L_{dc}^{m} = (N_l N_t)^2 A_L$ = 5.15 mH. La resistenza in c.c. calcolata per l'avvolgimento è $R_{wdc} = 4\rho_w D N_t / d^2$ = 84.89 mΩ, mentre la resistività del nucleo è ρ_c = 3 Ωm. Le misure sono state eseguite usando un HP 4194A, analizzatore d'impedenza, equipaggiato con un dispositivo HP 16047D [6] per raggiungere una più elevata accuratezza, minimizzando i parametri residui quali la resistenza di contatto.

Usando i data sheets del catalogo della Siemens, la parte reale ed immaginaria della permeabilità complessa $\mu_{rc}^{'}(f)$ e $\mu_{rc}^{''}(f)$ per bassi valori dell' induzione magnetica B sono stati approssimati nel campo di frequenza da 100 Hz a 2 MHz come mostrato in Fig. 3.3.

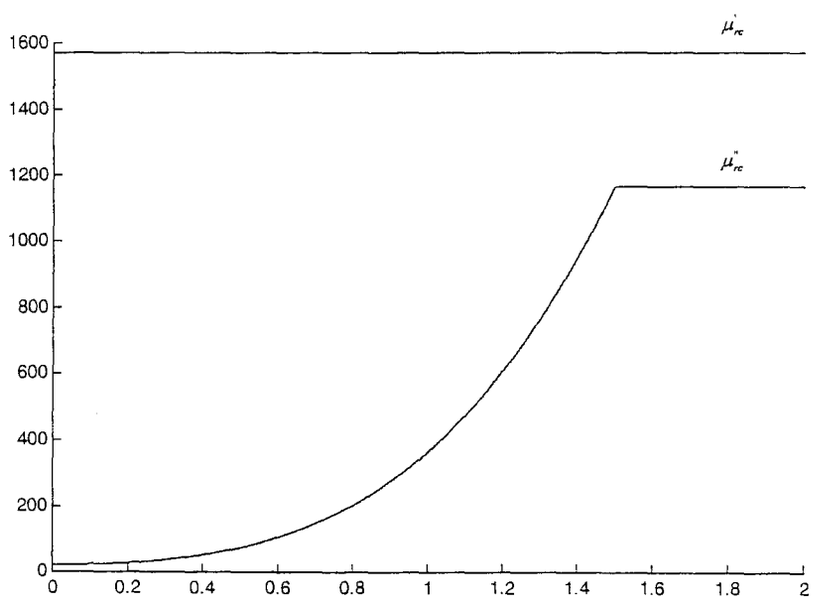

Fig. 3.3 Parte reale, $\mu_{rc}^{'}$, e parte immaginaria, $\mu_{rc}^{''}$, della permeabilità relativa di un nucleo Siemens N27 in funzione della frequenza.

La frequenza di risonanza del nucleo ferromagnetico è attorno ai 2 MHz; molti induttori operano ben al di sotto della risonanza ferromagnetica . Per il nucleo in esame, l'isteresi elettrica è stata trascurata, per cui è stata presa in considerazione unicamente la parte reale della permettività relativa, da cui $\hat{\varepsilon}_c = \varepsilon_o \varepsilon_{rc}^{'}$. La permettività elettrica $\varepsilon_{rc}^{'}$ è stata calcolata da misure di tipo capacitivo usando come dielettrico un campione di materiale del nucleo e impiegando l' analizzatore d'impedenza HP 4194A. La Fig. 3.4 mostra la parte reale

della permettività relativa del nucleo ottenuta dalla misura (linea a tratti) e la sua approssimazione teorica (linea continua) usata nei calcoli. Si noti come la parte reale della permettività decresca con la frequenza.

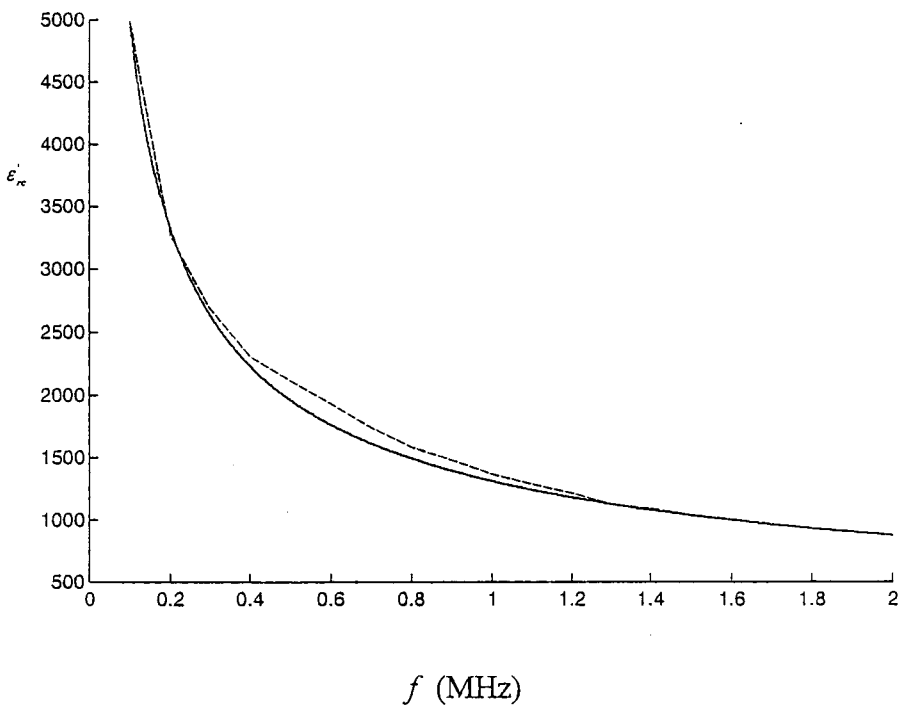

Fig. 3.4. Permeabilità relativa, ε'_{rc}, misurata (linea tratteggiata) e approssimata (linea continua) di un nucleo Siemens N27 in funzione della frequenza.

In Fig. 3.5, è disegnato l'andamento in funzione della frequenza della resistenza dell'avvolgimento , R_w, ottenuto usando l'equazione di Dowell; si può osservare che la resistenza dell'avvolgimento cresce rapidamente per frequenze $f > 20$ kHz.

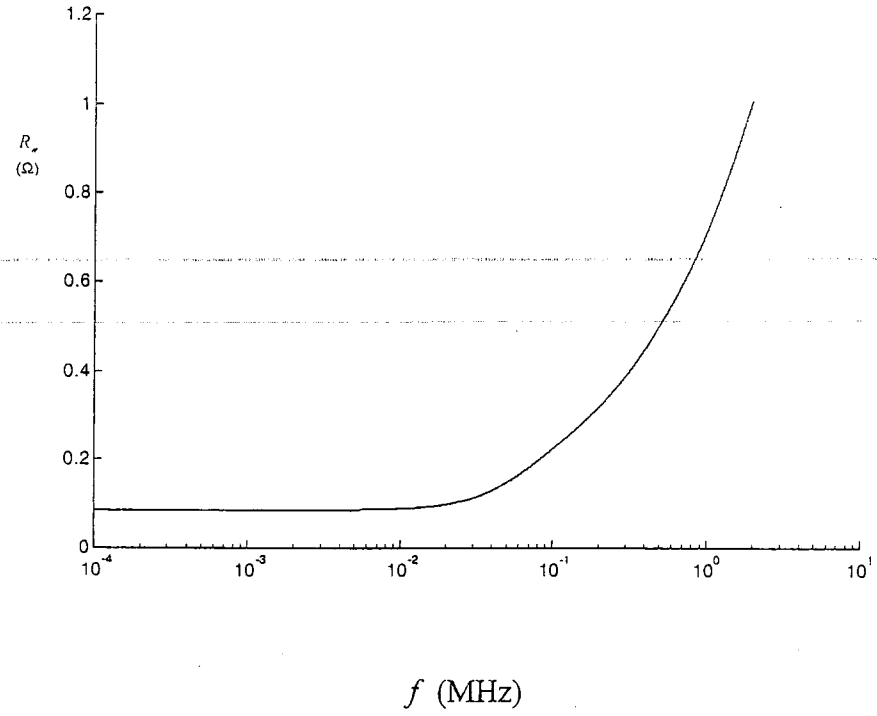

Fig. 3.5 . Resistenza dell'avvolgimento, R_w, in funzione della frequenza.

La resistenza equivalente serie del nucleo R_c data dall'espressione (3.29) è riportata in funzione della frequenza nella Fig. 3.6. Come atteso, la resistenza del nucleo aumenta con l'aumentare della frequenza e raggiunge valori elevati dell'ordine di 40 kΩ.

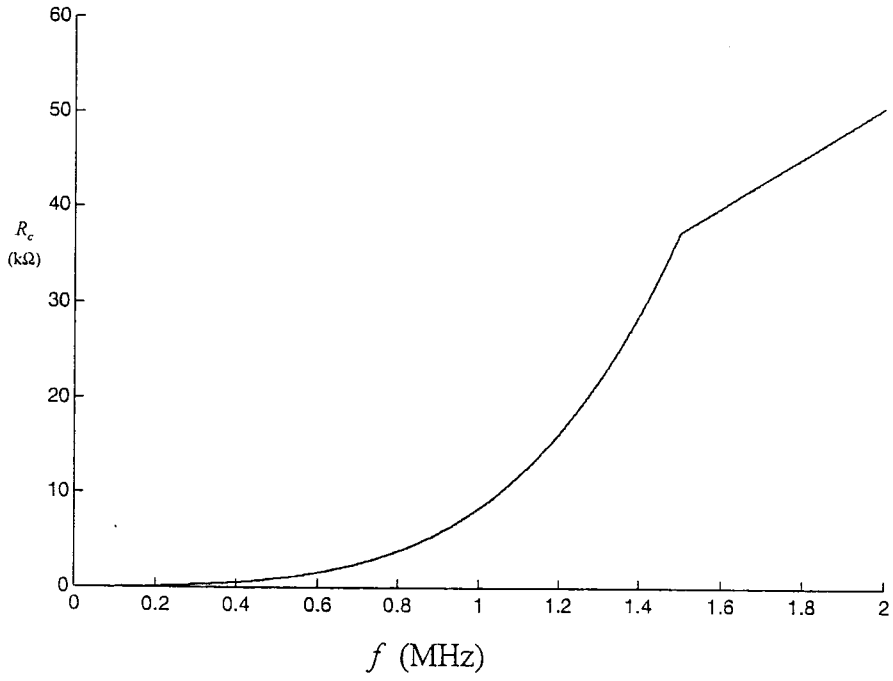

Fig. 3.6. Resistenza equivalente serie del nucleo , R_c, in funzione della frequenza.

L'induttanza principale L_{ac}^{m} in funzione della frequenza, data dall'espressione (3.30), è mostrata in Fig. 3.7: essa è indipendente dalla frequenza fino ad 1 MHz e poi decresce

rapidamente. Alle alte frequenze, infatti, il campo magnetico nel nucleo è fortemente indebolito dalle correnti parassite e di conseguenza l'induttanza principale diminuisce.

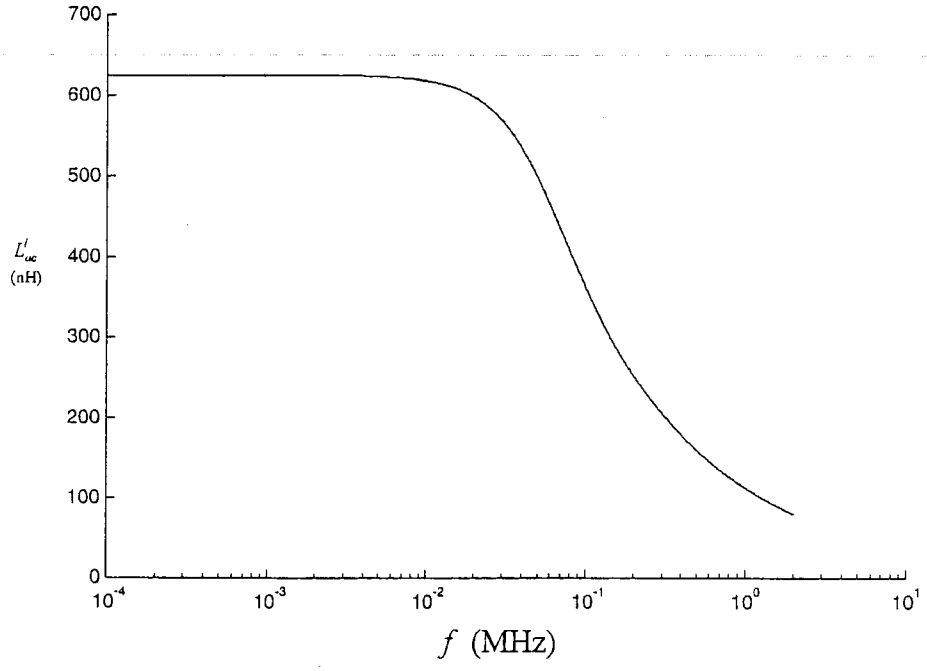

Fig. 3.7. Induttanza principale, L^m_{ac}, in funzione della frequenza.

La Fig. 3.8 mostra la resistenza equivalente serie ESR, R_s, calcolata e misurata in funzione della frequenza.

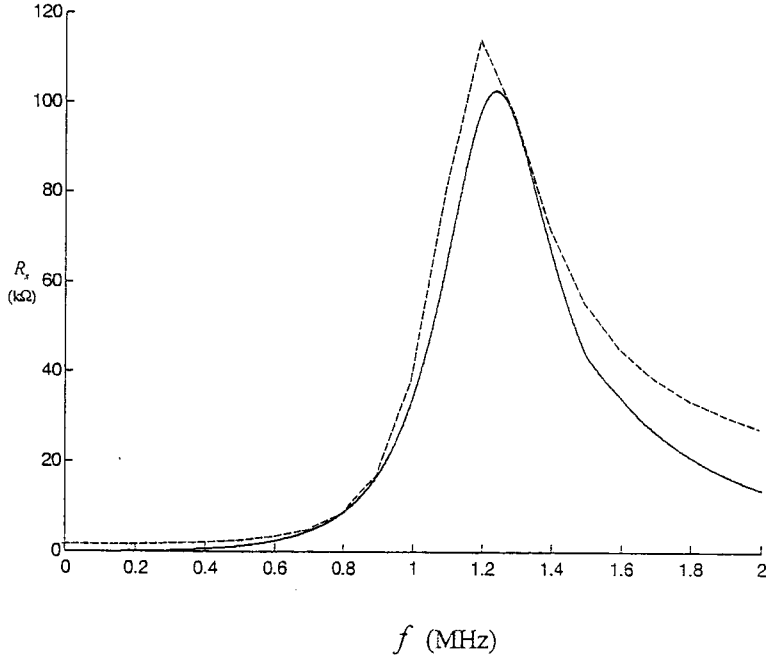

Fig. 3.8. ESR, R_s, misurata (linea tratteggiata) e calcolata (linea continua) in funzione della frequenza.

La Fig. 3.9 mostra la induttanza equivalente serie ESL, L_s, calcolata e misurata in funzione della frequenza.

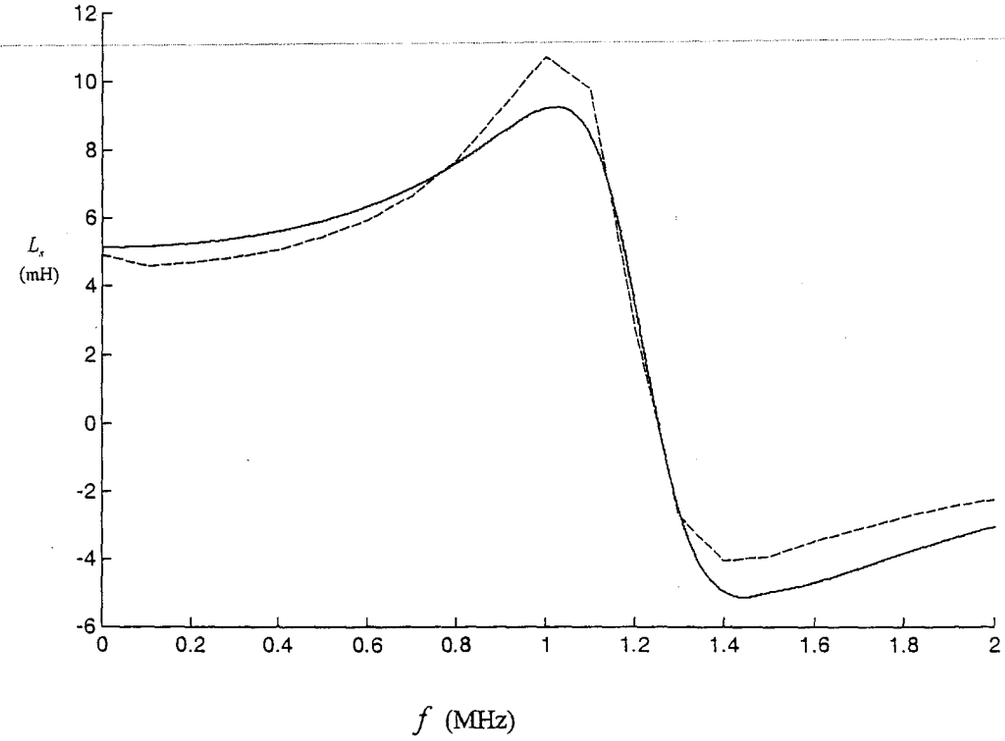

Fig. 3.9. ESL, L_s, misurata (linea tratteggiata)e calcolata (linea continua) in funzione della frequenza.

Nella Fig. 3.10 sono confrontati gli andamenti teorico e sperimentale del modulo dell'impedenza dell'induttore.

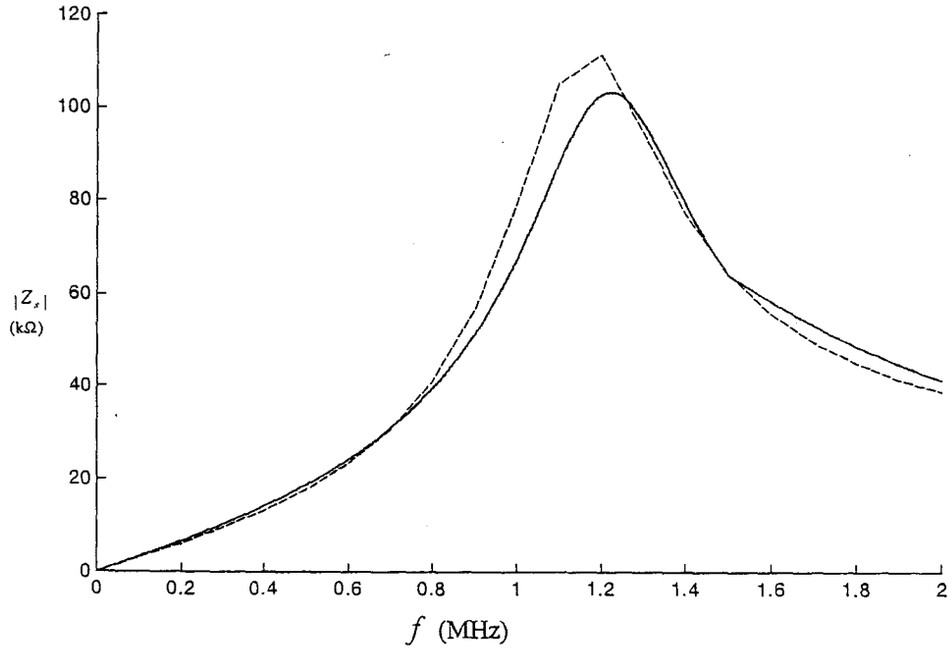

Fig. 3.10. Andamenti sperimentale (linea tratteggiata) e teorico (linea continua) del modulo dell'impedenza dell' induttore, $|\hat{Z}_s|$, in funzione della frequenza.

La Fig. 3.11 mostra l'andamento teorico e sperimentale della fase dell'impedenza dell'induttore in funzione della frequenza.

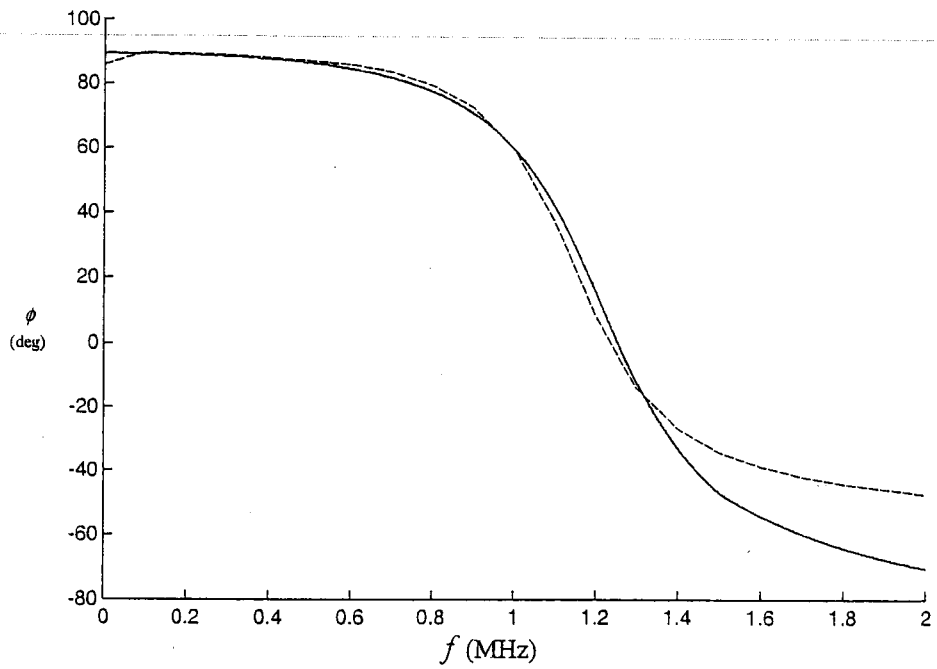

Fig. 3.11 Andamento teorico (linea continua) e sperimentale (linea tratteggiata) della fase, ϕ, dell'impedenza dell' induttore in funzione della frequenza.

La Fig. 3.12 mostra un grafico dell'induttanza di dispersione L_{ac}^{l} in funzione della frequenza. L'induttanza di dispersione è quasi indipendente dalla frequenza per bassi valori di questa e decresce a zero per alti valori. Infatti, alle alte frequenze, la corrente tende a concentrarsi alla superficie del conduttore ed il campo magnetico interno tende a zero.

Il rapporto L_{ac}^{l}/L_{ac}^{m} in funzione della frequenza è mostrato in Fig. 3.13. Si può concludere che l'induttanza di dispersione è trascurabile se confrontata con l'induttanza principale L_{ac}^{m} nel caso esaminato di induttore in nucleo di ferrite con un singolo strato. Per questa ragione, L_{ac}^{l} è trascurata rispetto a L_{ac}^{m} nel calcolo di L_{ac}.

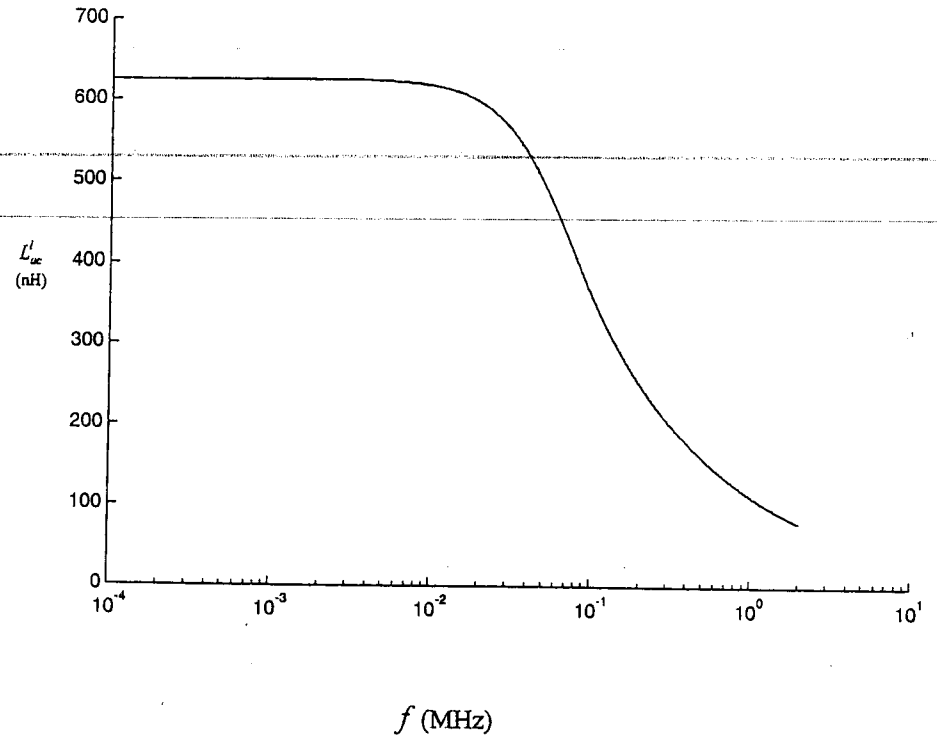

Fig. 3.12. Induttanza di dispersione, L^l_{ac}, in funzione della frequenza.

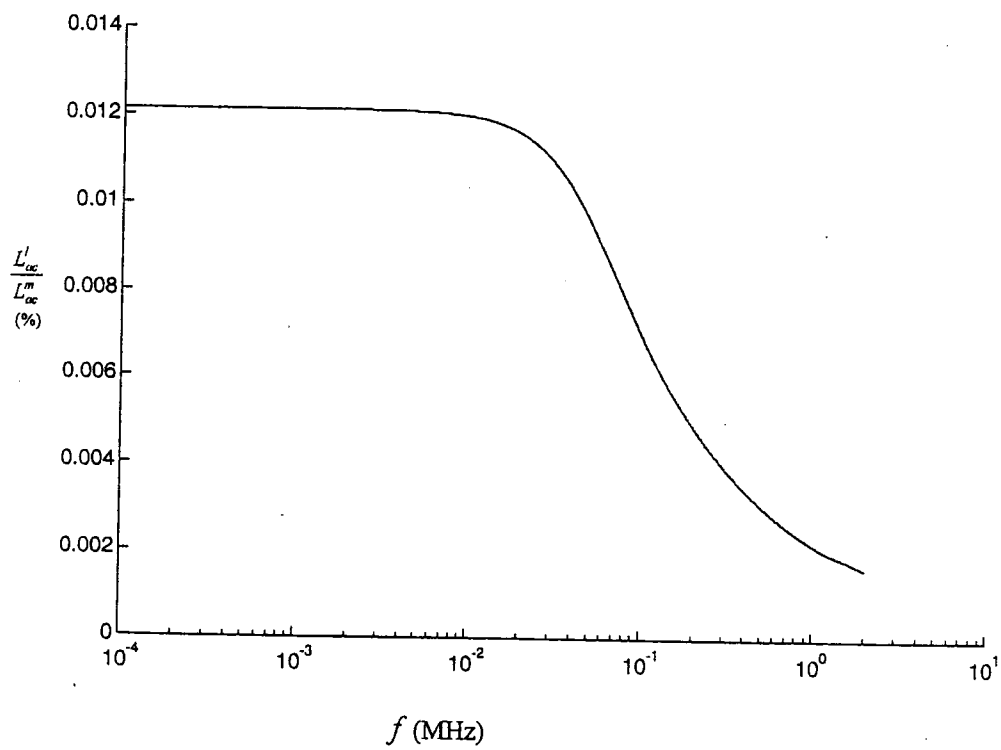

Fig. 3.13. Rapporto tra l'induttanza di dispersione e l'induttanza principale , L^l_{ac}/L^m_{ac}, in funzione della frequenza.

La reattanza misurata è zero per $f = f_r = 1.25$ MHz. Quindi, dalla (3.4) e dalle Figg. 3.5 fino alla 3.7, la capacità parassita risulta essere pari a $C = 2.61$ pF.

La scelta di porre $N_l = 1$ nelle prove sperimentali permette di verificare meglio l'accuratezza delle formule (3.29) e (3.30) proposte. Infatti, le espressioni (3.29) e (3.30) non dipendono dalla variabile N_l, mentre le formule di Dowell (3.5) e (3.31) dipendono da questa. Cosi', è desiderabile che i contributi della resistenza dell'avvolgimento e dell'induttanza di dispersione, date da (3.5) e (3.31), alla resistenza totale in c.a. e all'induttanza totale siano ridotti al minimo. Ciò si verifica quando $N_l = 1$.

3.6 CONCLUSIONI

E' stato esaminato un modello circuitale di induttore con nucleo di ferrite e sono state ricavate funzioni analitiche che descrivono l'andamento dei parametri concentrati in funzione della frequenza nel campo dei piccoli segnali [8]. Sono stati confrontati risultati sperimentali e teorici. Il modello è sufficientemente accurato fino alla frequenza di risonanza. Il componenti del modello sono sensibili alle funzioni fisiche $\varepsilon'_{rc}(f)$, $\mu'_{rc}(f)$, e $\mu''_{rc}(f)$.

3.7 APPENDICE

Partendo dalla equazione (3.24), è possibile ottenere l'espressione (3.25) attraverso i seguenti passaggi.

Assumendo

$$\hat{\eta} = j^{\frac{3}{2}}\hat{k} \tag{A.1}$$

$$\hat{\eta} r = \hat{v} \tag{A.2}$$

si puo' scrivere

$$dr = \frac{d\hat{v}}{\hat{\eta}} \tag{A.3}$$

Quindi, il fasore del flusso magnetico attraverso una sezione trasversale del cilindro, dato dalla (3.24), diventa

$$\hat{\Phi} = 2\pi \frac{N\hat{I}}{l} \frac{\hat{\mu}_c}{J_0(\hat{v}_o)} \int_0^{\hat{v}_o} \frac{\hat{v}}{\hat{\eta}} J_0(\hat{v}) \frac{d\hat{v}}{\hat{\eta}} = 2\pi \frac{N\hat{I}}{l} \frac{\hat{\mu}_c}{J_0(\hat{v}_o)} \frac{1}{\hat{\eta}^2} \int_0^{\hat{v}_o} \hat{v} J_0(\hat{v}) d\hat{v}. \tag{A.4}$$

Usando le proprietà delle funzioni di Bessel [7]

$$\int u^n J_{n-1}(u) du = u^n J_n(u), \tag{A.5}$$

l'equazione (A.4) diventa

$$\hat{\Phi} = 2\pi r_o^2 \frac{N\hat{I}}{l} \frac{\hat{\mu}_c \hat{v}_o}{\hat{\eta}^2 r_o^2} \frac{J_1(\hat{v}_o)}{J_0(\hat{v}_o)} = 2\pi r_o^2 \frac{N\hat{I}}{l} \frac{\hat{\mu}_c}{\hat{v}_o} \frac{J_1(\hat{v}_o)}{J_0(\hat{v}_o)} = L_{dc}^m \hat{I} \frac{2}{N} \frac{1}{\mu_o \mu_{rc}'} \frac{\hat{\mu}_c}{\hat{v}_o} \frac{J_1(\hat{v}_o)}{J_0(\hat{v}_o)}$$

$$= L_{dc}^m \hat{I} \frac{2}{N} \frac{1}{\mu_o \mu_{rc}'} \frac{\hat{\mu}_c}{j^{\frac{3}{2}} (\omega \hat{\mu}_c \hat{\gamma}_c)^{\frac{1}{2}} r_o} \frac{J_1\left[j^{\frac{3}{2}} (\omega \hat{\mu}_c \hat{\gamma}_c)^{\frac{1}{2}} r_o \right]}{J_0\left[j^{\frac{3}{2}} (\omega \hat{\mu}_c \hat{\gamma}_c)^{\frac{1}{2}} r_o \right]}$$

$$= L_{dc}^m \hat{I} \frac{2}{N} \frac{1}{\mu_o \mu_{rc}'} \frac{\hat{\mu}_c}{j^{\frac{3}{2}} \sqrt{2} \frac{r_0}{\hat{\delta}}} \frac{J_1\left(j^{\frac{3}{2}} \sqrt{2} \frac{r_0}{\hat{\delta}} \right)}{J_0\left(j^{\frac{3}{2}} \sqrt{2} \frac{r_0}{\hat{\delta}} \right)} \tag{A.6}$$

dove il valore in bassa frequenza dell'induttanza principale è

$$L_{dc}^m = N^2 \frac{\mu_o \mu_{rc}' \pi r_o^2}{l}. \tag{A.7}$$

L'espressione (A.6) coincide con la (3.25), dove $\hat{\delta}$ è data da

$$\hat{\delta} = \sqrt{\frac{1}{\pi \hat{\mu}_c \hat{\gamma}_c f}} = \sqrt{\frac{1}{\pi f \mu_o (\mu'_{rc} - j\mu''_{rc})(\gamma_c + j2\pi f \hat{\varepsilon}_c)}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\pi f \mu_o (\mu'_{rc} - j\mu''_{rc})[\gamma_c + j2\pi f \varepsilon_o (\varepsilon'_{rc} - j\varepsilon''_{rc})]}}. \tag{A.8}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] P. J. Dowell, "Effects of eddy currents in transformer windings," *Proc. IEE*, Vol. 113, No. 8, pp. 1387-1394, August 1966.

[2] M. Bartoli, M. K. Kazimierczuk, and A. Reatti, "Predicting the high-frequency ferrite-core inductor performance," Electrical Manufacturing & Coil Winding Conference, Chicago, Illinois, September 27-29, 1994, pp. 409-413.

[3] M. Bartoli, M. K. Kazimierczuk, and A. Reatti, "Modeling iron-powder inductors at high frequency," 29th IEEE Industry Applications Society Annual Meeting and Technical Conference, October 2-5, 1994, Denver, Colorado, pp. 1225-1232.

[4] J. K. Watson, *Applications of Magnetism*, New York: John Wiley & Sons, 1980.

[5] H. Saotome and Yo Sakaki, "Iron loss analysis of Mn-Zn Ferrite cores," IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 33, No. 1, pp. 728-734, January 1997.

[6] *The Impedance Measurement Handbook.* Hewlett-Packard Co.

[7] G. N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions, Cambridge University Press, 1966.*

[8] M.K. Kazimierczuk, G. Sancineto, G. Grandi, U. Reggiani, and A. Massarini, "High-frequency small-signal model of ferrite core inductors," *IEEE Trans. Magnetics*, vol. 35, pp. 4185-4191, Sept. 1999.

CAPITOLO 4

"Modello per alta frequenza di induttore avvolto su nucleo ferromagnetico laminato"

4.1 INTRODUZIONE

In molti dispositivi di filtraggio di potenza si preferisce usare induttori con nucleo ferromagnetico laminato rispetto a induttori in aria e a quelli con nucleo in ferrite. Gli induttori in aria sono meno costosi ma presentano dimensioni maggiori e più elevate perdite nel rame. Il campo magnetico di dispersione, inoltre, è importante alle basse frequenze. L'uso della ferrite come nucleo offre alcuni vantaggi come minori perdite nel rame rispetto a quelli in aria e minori perdite nel nucleo rispetto agli induttori con nucleo ferromagnetico laminato.

Il basso valore della conducibilità elettrica, inoltre, limita le correnti parassite e permette alla ferrite di operare propriamente a frequenze fino a parecchi MHz. D'altra parte l'uso della ferrite è ristretto ad applicazioni che richiedono ridotte dimensioni del nucleo, come filtri ad alta frequenza per piccoli segnali o reattori di piccola induttanza e risulta abbastanza costoso. Principalmente per queste ragioni, gli induttori con nucleo ferromagnetico laminato sono largamente impiegati nelle applicazioni di filtraggio di potenza a bassa frequenza. In particolare, la possibilità di diverse disposizioni geometriche dei lamierini dà luogo ad una struttura molto flessibile, capace di soddisfare molte delle richieste costruttive di induttori.

Un punto critico nel progetto degli induttori con nucleo ferromagnetico laminato è la valutazione del comportamento dell'induttanza in funzione della frequenza e delle perdite nel nucleo.

Gli effetti prodotti dalle correnti parassite, dovute alla elevata conducibilità elettrica del ferro, nonostante la laminazione del nucleo, sono significativi a partire da frequenze di parecchie kHz.

In questo capitolo, è sviluppato un modello analitico per induttori con nucleo ferromagnetico laminato, tenendo in considerazione le correnti parassite attraverso uno studio monodimensionale della diffusione delle grandezze elettromagnetiche nel nucleo. Il modello proposto considera la presenza di traferri nel circuito magnetico come avviene nella

realizzazione pratica di induttori. Il modello circuitale *RLC* mostrato in Fig. 4.1 è adottato per rappresentare il comportamento in frequenza dell' intero induttore. I parametri serie equivalenti L_{ac} e R_{ac} sono dipendenti dalla frequenza e tengono conto degli effetti pelle e

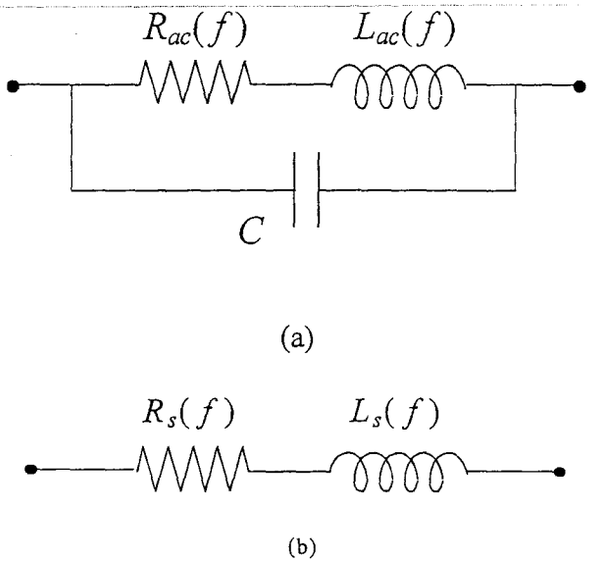

Fig. 4.1. Modello dell'induttore.
(a) Circuito equivalente *RLC*.
(b) Circuito equivalente serie.

prossimità nell'avvolgimento [1] e delle correnti parassite nel nucleo di ferro laminato [2]. La capacità parallela *C* rappresenta le capacità parassite tra le spire e tra queste ed il nucleo ed è assunta indipendente dalla frequenza [3].

4.2 MODELLO DELL'INDUTTORE

Nella seguente sezione, verranno discussi i modelli circuitali rappresentati in Fig. 4.1. In particolare verrano descritte l'induttanza totale L_{ac}, la resistenza totale in c.a. R_{ac} e la capacità totale parassita *C*. I modelli sviluppati per l'avvolgimento e per il nucleo laminato saranno presentati e discussi, separatamente nelle sottosezioni 4.2.1 e 4.2.2, rispettivamente. Nella sottosezione 4.2.3, verrà considerato l'induttore complessivo includendo la capacità parassita, la quale è ottenuta da misure della frequenza di autorisonanza dell'induttore.

4.2.1 Modello dell'avvolgimento

La resistenza dell'avvolgimento di un induttore aumenta con la frequenza a causa degli effetti pelle e prossimità dovuti alla variazione del campo elettromagnetico nel tempo. Il risultato finale di questi due effetti combinati è una riduzione della sezione trasversale del conduttore utilizzabile per il passaggio di corrente. Pertanto, la resistenza in c.a. R_w alle alte frequenze diventa più grande della resistenza in c.c. R_{wdc}. La resistenza in c.a. di un induttore con N_l strati puo' essere espressa come [1]

$$R_w = R_{wdc} A \cdot \left[\frac{e^{2A} - e^{-2A} + 2\sin(2A)}{e^{2A} + e^{-2A} - 2\cos(2A)} + 2\frac{N_l^2 - 1}{3} \cdot \frac{e^A - e^{-A} - 2\sin A}{e^A + e^{-A} + 2\cos A} \right] \tag{4.1}$$

dove A è una quantità adimensionale, che dipende dalla geometria dell'avvolgimento. Il primo e il secondo termine della (4.1) rappresentano l'effetto pelle e l'effetto prossimità nell'avvolgimento, rispettivamente. Per un conduttore circolare con diametro d, la quantità $A = A_r$ è data da

$$A_r = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{4}} \frac{d^{\frac{3}{2}}}{\delta_w p^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{4}} \frac{d}{\delta_w} \frac{1}{\sqrt{p/d}}, \tag{4.2}$$

e per un conduttore rettangolare, avente larghezza w ed altezza h, $A = A_s$ diventa

$$A_s = \frac{h}{\delta_w} \sqrt{\frac{w}{p}} \tag{4.3}$$

dove p è il passo dell'avvolgimento, cioè la distanza tra i centri di due conduttori adiacenti. Nelle (4.2) e (4.3), δ_w è la profondità di penetrazione del conduttore data da

$$\delta_w = \sqrt{\frac{\rho_w}{\pi \mu_0 \mu_{rw} f}} \tag{4.4}$$

in cui ρ_w è la resistività elettrica del conduttore, μ_{rw} è la permeabilità magnetica relativa del conduttore ($\rho_w = 17.24\text{x}10^{-9}\Omega$m and $\mu_{rw} = 1$ per un conduttore di rame a 20°C) e $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$ H/m.

Per quanto riguarda l'induttanza di dispersione L^l_{ac}, legata all'energia magnetica immagazzinata nell'avvolgimento, derivata da Dowell [1], la sua espressione è:

$$L^l_{ac} = R_{wdc} \frac{A}{2\pi f} \cdot \left[\frac{e^{2A} - e^{-2A} - 2\sin(2A)}{e^{2A} + e^{-2A} - 2\cos(2A)} + 2\frac{N_l^2 - 1}{3} \cdot \frac{e^A - e^{-A} + 2\sin A}{e^A + e^{-A} + 2\cos A} \right]. \tag{4.5}$$

4.2.2 Modello del nucleo

I parametri elettrici del nucleo sono ottenuti attraverso una analisi monodimensionale della diffusione elettromagnetica in un pacco di lamierini nel caso di regime sinusoidale. Dettagli di questo studio possono essere trovati in [2]. Un simile studio è stato sviluppato nel cap. 3 per gli induttori con nucleo di ferrite [4]. Nel caso di induttori con nucleo ferromagnetico laminato non saturo senza traferri, le espressioni per la resistenza equivalente serie del nucleo R_c, legata alle perdite dovute alle correnti parassite che circolano nel nucleo, e per l'induttanza principale L_{ac}^{m}, legata alle linee di campo magnetico contenute nel nucleo, sono [2]

$$R_c = 2\pi f L_{dc}^{m} \frac{\delta_c}{s} \frac{\sinh\frac{s}{\delta_c} - \sin\frac{s}{\delta_c}}{\cosh\frac{s}{\delta_c} + \cos\frac{s}{\delta_c}}, \tag{4.7}$$

e

$$L_{ac}^{m} = L_{dc}^{m} \frac{\delta_c}{s} \frac{\sinh\frac{s}{\delta_c} + \sin\frac{s}{\delta_c}}{\cosh\frac{s}{\delta_c} + \cos\frac{s}{\delta_c}} \tag{4.6}$$

rispettivamente, in cui L_{dc}^{m} è l'induttanza principale a bassa frequenza, s è lo spessore del lamierino e δ_c è lo spessore di penetrazione del lamierino di ferro dato da

$$\delta_c = \sqrt{\frac{\rho_c}{\pi \mu_c f}}, \tag{4.8}$$

dove ρ_c e μ_c rappresentano la resistività elettrica e la permeabilità magnetica dei lamierini di ferro, rispettivamente. Le perdite per isteresi in questa analisi sono considerate trascurabili.

Molti degli induttori usati nell'elettronica di potenza sono realizzati con traferri. Infatti, la presenza di un traferro è il modo piu' comune di linearizzare il comportamento di un induttore per una larga escursione della corrente dell'avvolgimento, evitando la saturazione del nucleo e riducendo la distorsione armonica. Consideriamo quindi un nucleo laminato con traferro.

La Fig. 4.2(a) mostra uno dei lamierini del pacco, che costituisce il nucleo, e la fig. 4.2(b) mostra uno sviluppo rettilineo del lamierino lungo l'asse z di un sistema di riferimento cartesiano.

Assumendo il vettore campo magnetico $\boldsymbol{H}_c$ nel lamierino diretto lungo l'asse z e dipendente unicamente dalla coordinata x lungo lo spessore e dal tempo t, la legge di circuitazione

magnetica di Ampère applicata ad un qualsiasi percorso come quello indicato in Fig. 4.2(b), dà la seguente relazione

$$H_c(x,t)\, l_c + H_a(x,t)\, l_a = N\, i(t) + \int_x^{s/2} J_y(x,t)\, l_c\, dx \tag{4.9}$$

dove H_a è il campo magnetico nel traferro, $i(t)$ è la corrente che percorre le N spire dell'avvolgimento, $J_y(x, t)$ è la densità delle correnti parassite nel lamierino, l_c è la lunghezza assiale del lamierino e l_a è la lunghezza del traferro. Nell'Appendice 4.4 a questo capitolo, è mostrato che le espressioni (4.6) e (4.7) sono ancora valide per un nucleo laminato non saturo con traferro se si introduce nella (4.8) la permeabilità equivalente del circuito magnetico

$$\mu_e = \mu_c \frac{l_c}{l_c + \mu_{rc}\, l_a} \tag{4.10}$$

in luogo della permeabilità magnetica del ferro μ_c. In (4.10), μ_{rc} rappresenta la permeabilità magnetica relativa del ferro.

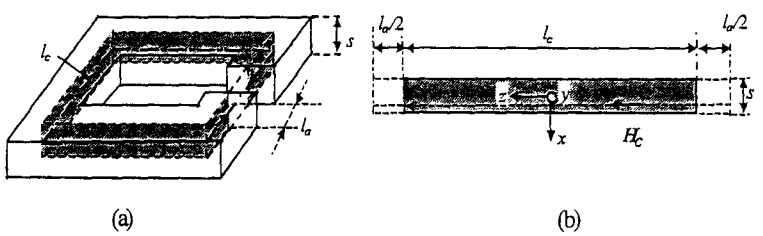

Fig. 4.2. (a) Lamierino di un pacco
(b) Sviluppo rettilineo di un lamierino lungo il suo asse

4.2.3 Circuito Equivalente di induttori con nucleo ferromagnetico laminato

Riconsideriamo ora la Fig. 4.1(a) che mostra un modello a parametri concentrati di un induttore con nucleo ferromagnetico laminato, dove, $R_{ac} = R_w + R_c$ è la resistenza totale in c.a., $L_{ac} = L_{ac}^m + L_{ac}^l$ è l'induttanza totale, e C è la capacità parassita totale [3]; in generale, R_w,

R_c, L_{ac}^m, e L_{ac}^l, sono dipendenti dalla frequenza. La Fig. 4.1(b) descrive invece un circuito equivalente serie dell'induttore dove i parametri equivalenti serie R_s e L_s sono [4]

$$R_s = \frac{R_{ac}}{(1-\omega^2 L_{ac}C)^2 + (\omega C R_{ac})^2} \tag{4.11}$$

e

$$L_s = \frac{X_s}{\omega} = \frac{L_{ac}(1-\omega^2 L_{ac}C - \frac{CR_{ac}^2}{L_{ac}})}{(1-\omega^2 L_{ac}C)^2 + (\omega C R_{ac})^2} \tag{4.12}$$

con $\omega = 2\pi f$. La frequenza di risonanza $f_r = \omega_r / (2\pi)$ di un induttore è definita come la frequenza alla quale la reattanza X_S è zero. Quindi, dall'espressione (4.11) la capacità parassita totale può essere calcolata come

$$C = \frac{1}{(\omega_r)^2 L_{ac}(\omega_r) + \frac{R_{ac}^2(\omega_r)}{L_{ac}(\omega_r)}}. \tag{4.13}$$

Il valore della capacità totale C è ottenuto dalla (4.13) usando la frequenza di autorisonanza misurata, ed è assunta come parametro costante nell'intero intervallo delle frequenze operative dell'induttore. Il valore di C è stato anche verificato facendo misure al di sopra della frequenza di autorisonanza per le quali il ramo capacitivo diventa dominante rispetto al ramo RL di Fig. 4.1(a).

4.3 Risultati sperimentali

Sono state eseguite misure per verificare la validità del modello proposto per tre induttori su nucleo ferromagnetico laminato con traferro. E' stato impiegato a tale scopo un analizzatore d'impedenza (5Hz-13MHz), Hp 4192A LF e per ottenere una maggiore accuratezza, minimizzando i parametri residui e la resistenze di contatto, esso è stato equipaggiato con un dispositivo HP 16047A [5]. Gli induttori in prova sono stati realizzati per mezzo dello stesso nucleo EI rappresentato in Fig. 4.3 in modo da enfatizzare il contributo dell'avvolgimento.

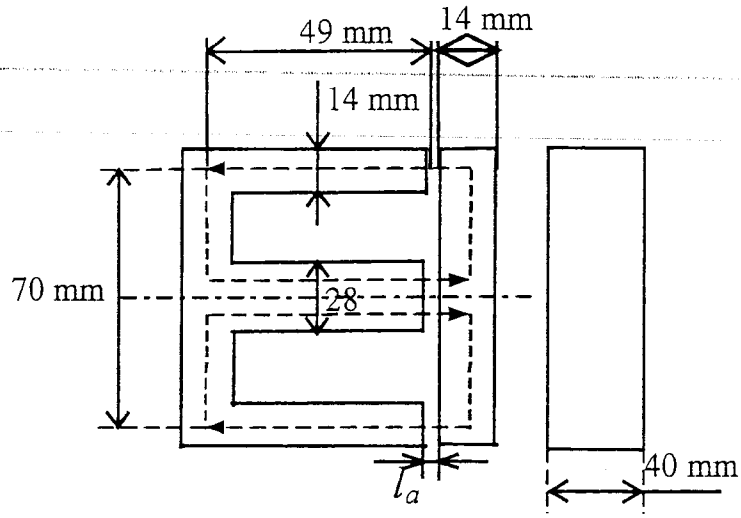

Fig. 4.3. Nucleo EI e sue dimensioni geometriche.

Il valore della permeabilità equivalente del nucleo EI è stato calcolato come

$$\mu_e = \mu_c \frac{l_c}{l_c + 2\mu_{rc} l_a} \tag{4.14}$$

dove l_c è la lunghezza del percorso costituito degli assi geometrici della gamba centrale e quella di una delle due gambe esterne e $2l_a$ è il traferro totale. I parametri d'interesse dei tre tipi di induttori sono riportati in Tabella 4.1.

Tabella 4.1

Parametri degli induttori

	Induttore #1	Induttore #2	Induttore #3
Dimensione dell'avvolgimento del conduttore (mm)	⊘ d=1.5	▨ h=5 a=2	⊘ d=1.46
p	$p \approx d$	$p \approx h$	$p \approx d$
N_l	6	3	2
N_t	23	6	24
A_{Fe} (mm^2)	1067.36		
l_c (mm)	168		
l_a (mm)	0.4	0.5	0.21
μ_e/μ_o	123.53	107.69	175
L_{dc}^m (mH)	18.8	0.28	3.15
R_{wdc} (mΩ)	236	7	73
f_r (MHz)	0.103	3.051	1.485
C (pF)	152.95	62.32	20.69

Il valore di induttanza principale a bassa frequenza è calcolato come $L_{dc}^m = \mu_e (N_l N_t)^2 A_{Fe}/l_c$, dove N_l è il numero di strati, N_t il numero di spire per strato e A_{Fe} è l'area effettiva della sezione trasversale della gamba centrale. Il valore della permeabilità magnetica del nucleo ferromagnetico laminato usato nei calcoli corrisponde alla permeabilità iniziale; la permeabilità relativa iniziale misurata è pari a $\mu_{rci} = 300$, inoltre la resistività misurata del lamierino di ferro è $\rho_c = 7 \times 10^{-7}$ Ωm mentre lo spessore del lamierino è s = 0.3 mm.

Le Figg. 4.4 and 4.5 mostrano la resistenza equivalente serie R_S e la reattanza X_S, misurate (linea tratteggiata) e calcolate (linea continua), dell'induttore in prova #1, in funzione della frequenza.

La resistenza equivalente serie R_S e la reattanza X_S dell'induttore #2 sono riportate nelle Figg. 4.6 e 4.7 e quelle relative all'induttore #3 nelle Figg. 4.8 e 4.9.

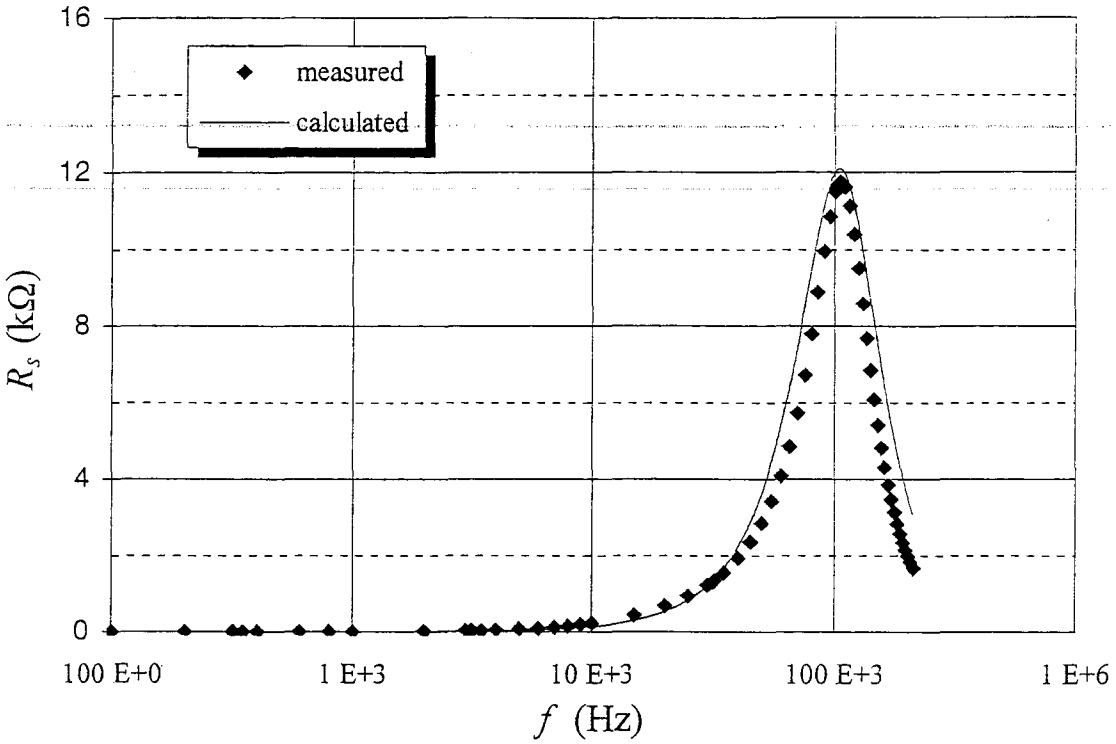

Fig. 4.4.Resistenza equivalente serie, R_S, misurata e calcolata per l'induttore #1

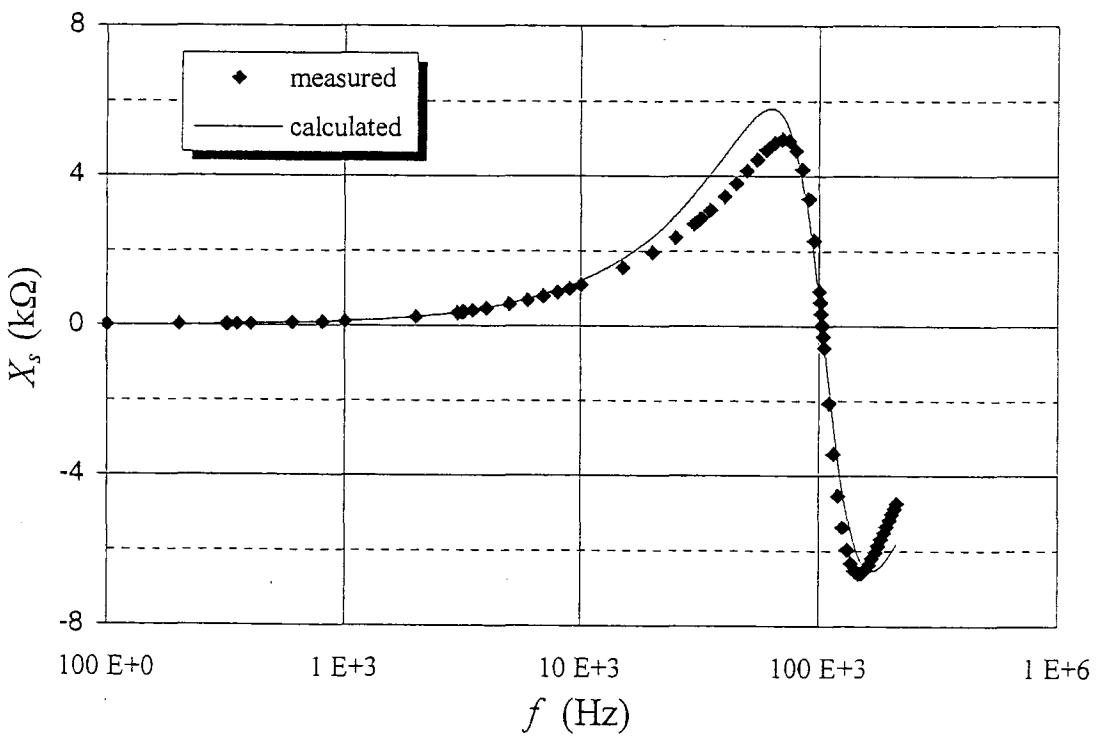

Fig. 4.5.Reattanza equivalente serie, X_S, misurata e calcolata per l'induttore #1

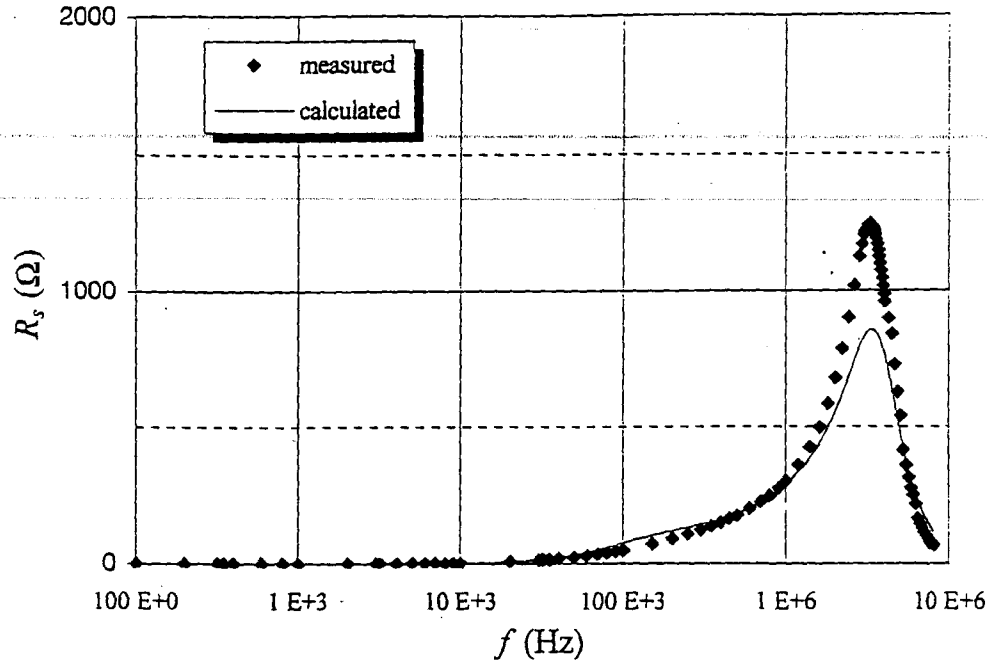

Fig. 4.6.Resistenza equivalente serie, R_S, misurata e calcolata per l'induttore #2

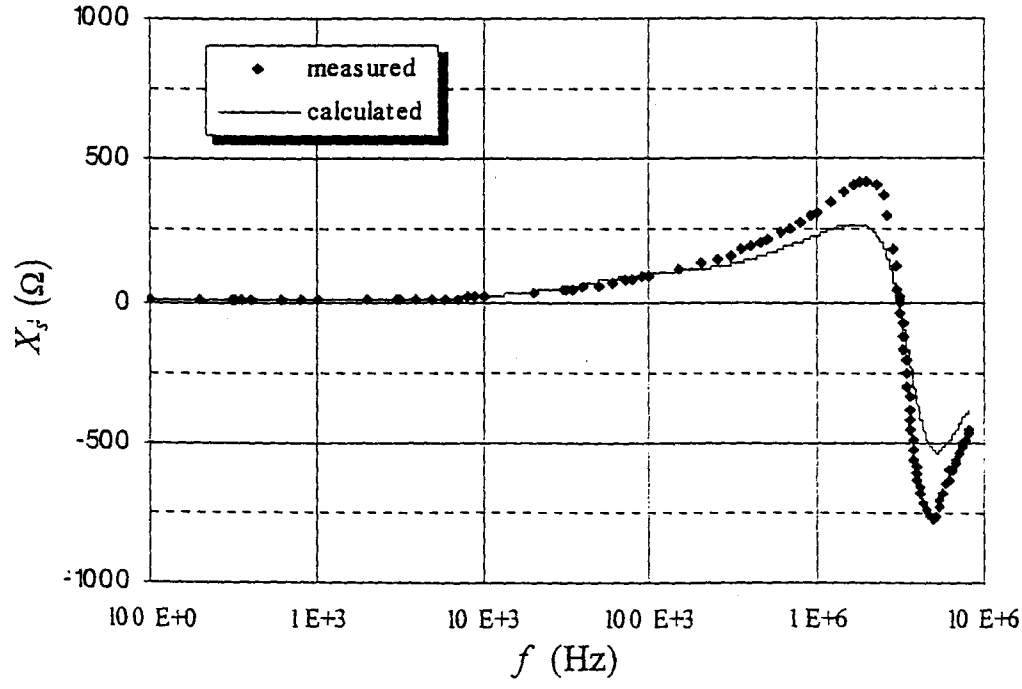

Fig. 4.7.Reattanza equivalente serie, X_S, misurata e calcolata per l'induttore #2

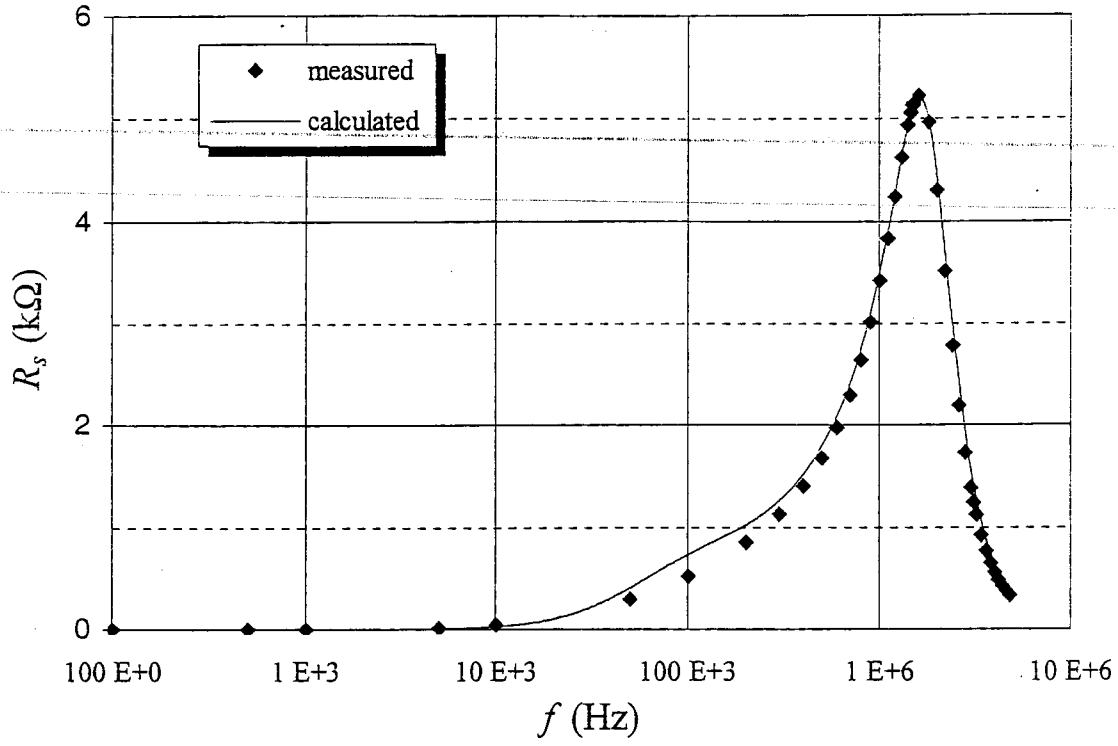

Fig. 4.8.Resistenza equivalente serie, R_S, misurata e calcolata per l'induttore #3

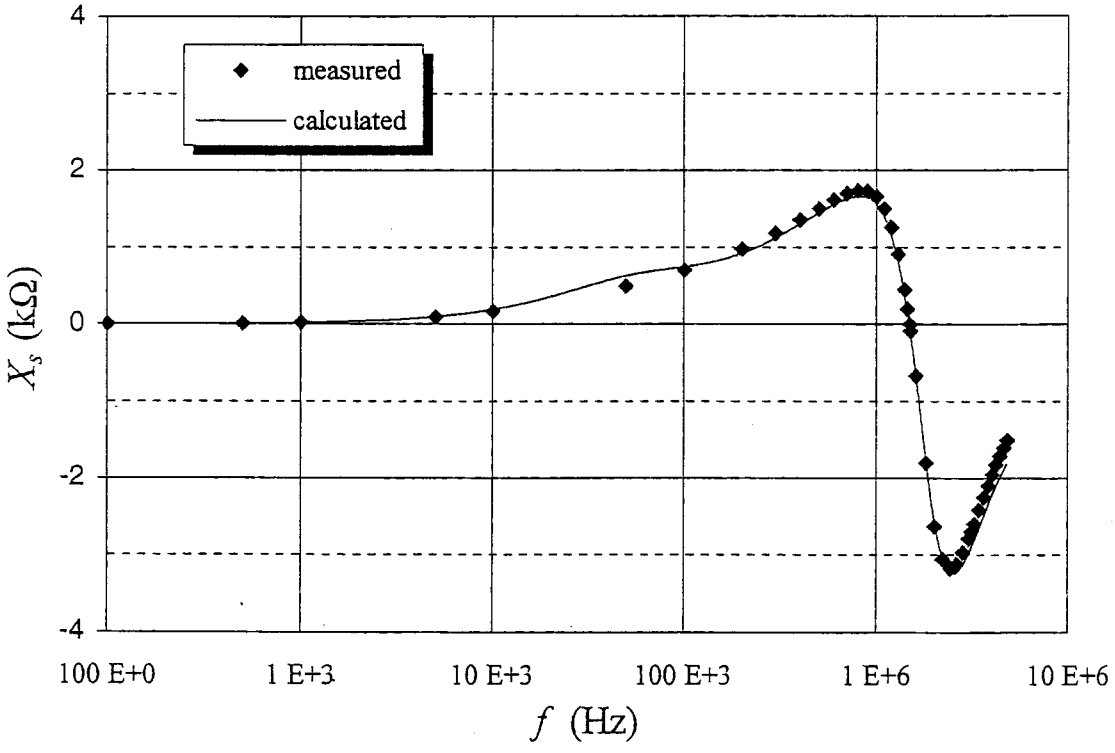

Fig. 4.9.Reattanza equivalente serie, X_S, misurata e calcolata per l'induttore #3

La frequenza di autorisonanza misurata per l'induttore #1 è f_r = 103.08 kHz mentre il valore della capacità calcolata per mezzo della (4.13) è C = 152.95 pF. Nel caso dell'induttore #2, la frequenza di autorisonanza è f_r = 3.051 MHz, risultando un valore calcolato della capacità C = 62.32 pF. L'induttore #3, infine, ha presentato la sua autorisonanza alla frequenza di f_r = 1.485 MHz e il valore della capacità calcolata è stato C = 20.69 pF. Il valore della capacità per l'induttore #1, realizzato con 6 strati, è maggiore di quello realizzato con due soli strati, (induttore #3). Ciò evidenzia che la capacità totale parassita è piu' piccola se l'induttore è realizzato per mezzo di un basso numero di strati [6]. Inoltre, anche l'effetto prossimità nella resistenza dell'avvolgimento (4.1) e nell'induttanza di dispersione (4.5) è più piccolo se il numero di strati è minore. Le figure sopra riportate mostrano che i risultati ottenuti sono in buon accordo con le misure anche oltre la frequenza di autorisonanza.

Il comportamento dell'induttanza totale L_{ac} merita di essere esaminato con particolare attenzione. La Fig. 4.10 mostra l'induttanza totale $L_{ac,}$ e la induttanza equivalente serie L_s , misurata e calcolata, per l'induttore #1. Questa figura evidenzia che la capacità influenza fortemente il comportamento dell'induttore a partire da circa 80 kHz.

L'induttanza totale L_{ac} e la induttanza equivalente serie L_s , misurata e calcolata,, per l'induttore #2 sono mostrati invece in Fig. 4.11: le curve calcolate L_{ac} e L_s coincidono fino a 3 MHz e si discostano per valori della frequenza superiori a 3 MHz. Tale comportamento può essere spiegato considerando che l'effetto della capacità parassita totale è trascurabile fino a 3 MHz e il decremento della induttanza equivalente serie è principalmente dovuto all'effetto delle correnti parassite. Al disopra di tale frequenza, l'induttanza equivalente serie L_s decresce rapidamente attraversando lo zero (risonanza parallela) e assumendo valori negativi che indicano che la capacità parassita totale diventa dominante.

L'induttanza totale L_{ac} e l'induttanza equivalente serie L_s , misurata e calcolata, per l'induttore #3 sono mostrate in Fig. 4.12. Esse seguono lo stesso comportamento descritto per l'induttore #2 sostituendo la frequenza di 3 MHz con 1 MHz.

Gli induttori esaminati evidenziano che gli effetti dovuti alle correnti parassite nel nucleo ferromagnetico e quelli dovuti alle capacità tra le spire e tra queste ed il nucleo sono importanti in differenti intervalli di frequenza. Per frequenze minori della frequenza di autorisonanza, la diminuzione dell'induttanza principale L_{ac}^{m}, rispetto al suo valore a bassa frequenza, è principalmente causato dalle correnti parassite presenti nel nucleo, dato che il campo magnetico è espulso dal nucleo da queste ultime. Per frequenze maggiori della frequenza di autorisonanza, l'effetto della capacità parassita complessiva diventa predominante rispetto all'effetto delle correnti parassite.

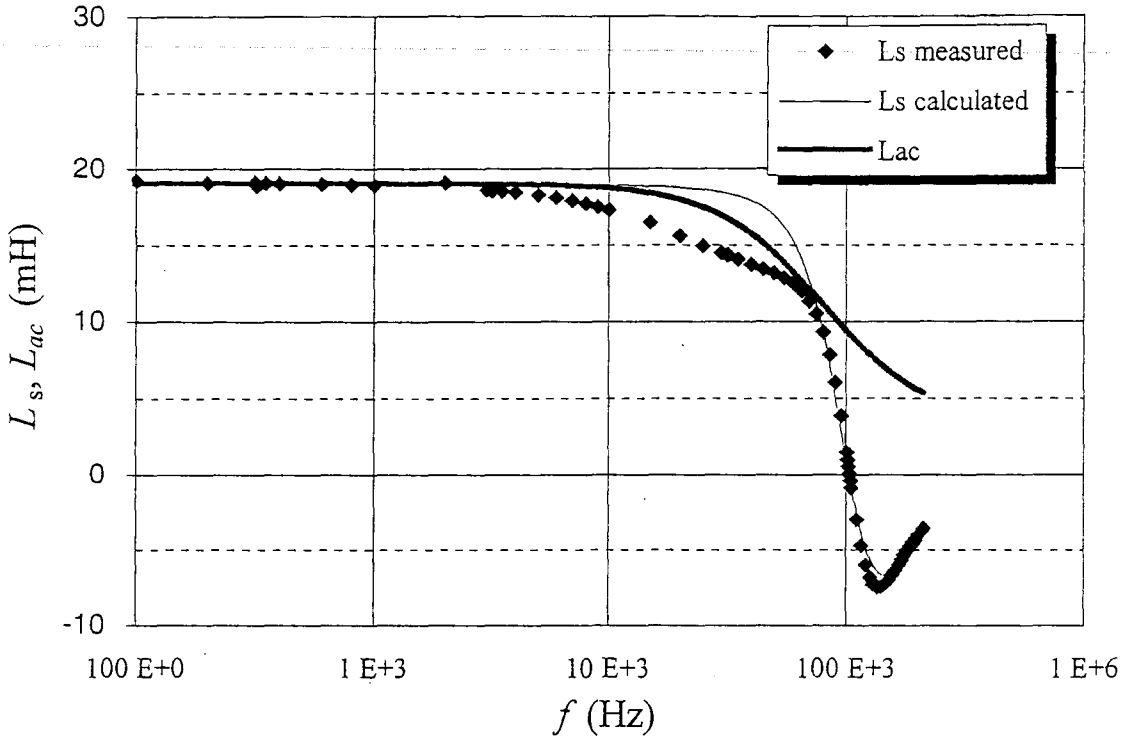

Fig. 4.10. Induttanza equivalente serie, L_S, misurata e calcolata e induttanza totale, L_{ac}, per l' induttore #1.

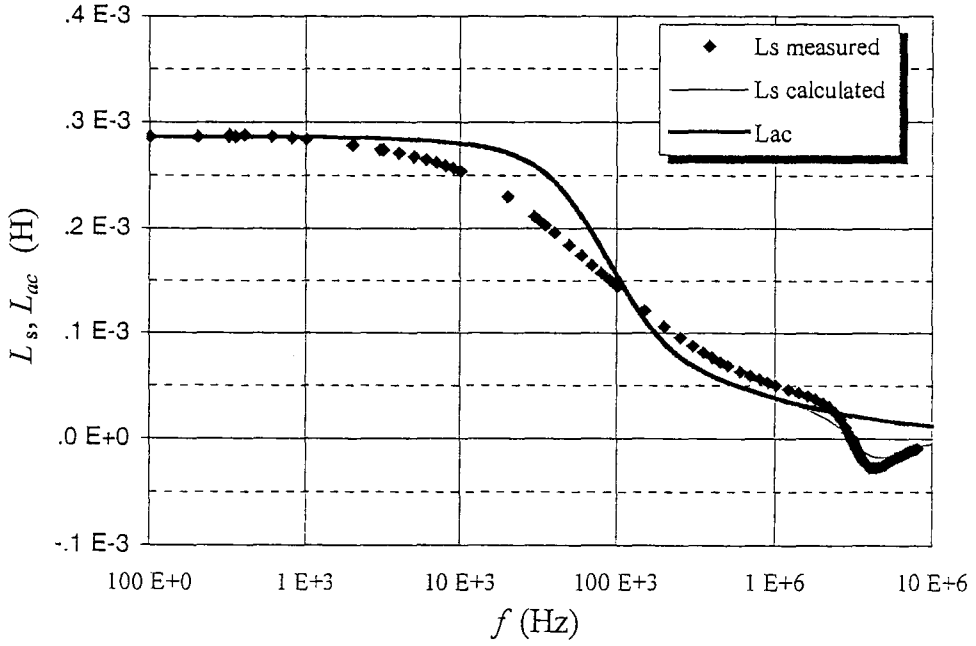

Fig. 4.11. Induttanza equivalente serie, L_S, misurata e calcolata e induttanza totale, L_{ac}, per l'induttore #2.

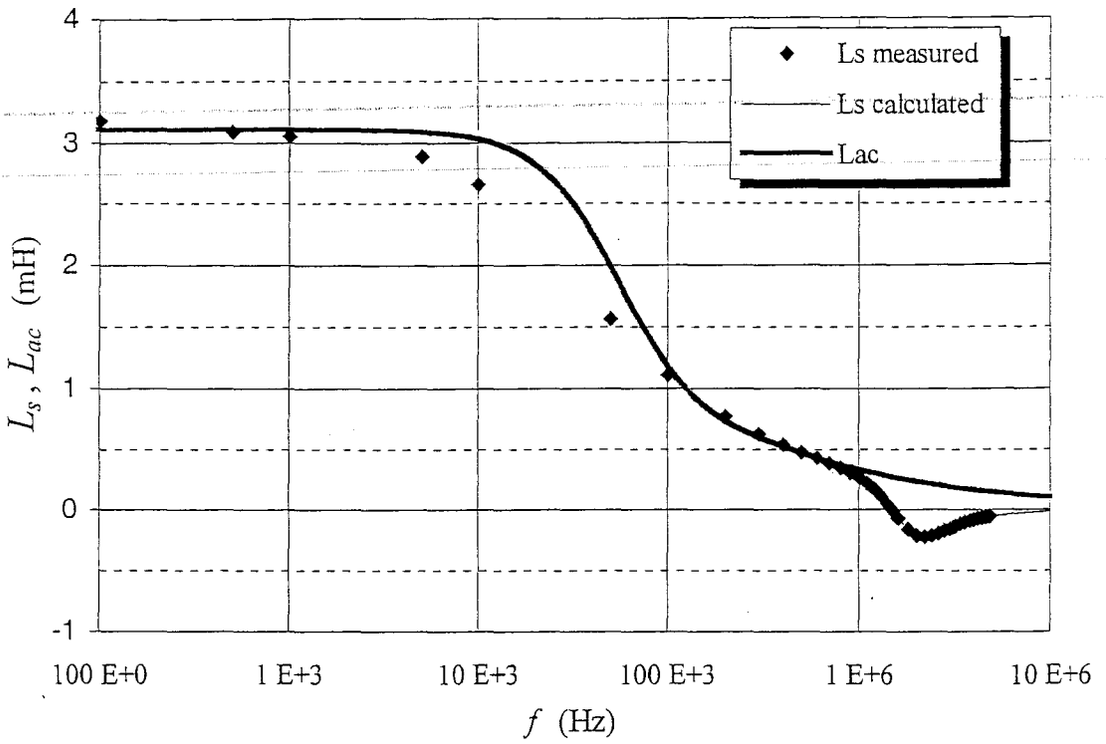

Fig. 4.12. Induttanza equivalente serie, L_S, misurata e calcolata e induttanza totale, L_{ac}, per l'induttore #3.

4.3 CONCLUSIONI

In questo capitolo, è stato proposto un modello circuitale *RLC* per rappresentare il comportamento di induttori con nucleo ferromagnetico laminato per frequenze maggiori del kHz. La resistenza totale in c.a. e l'induttanza totale sono parametri dipendenti dalla frequenza che tengono conto dell'effetto pelle e dell'effetto prossimità nell'avvolgimento e delle correnti parassite nel nucleo ferromagnetico laminato. Le correnti parassite sono valutate per mezzo di un'analisi di campo monodimensionale estesa a nuclei con traferro. La capacità parassita complessiva, che rappresenta le capacità tra le spire e tra queste ed il nucleo, è calcolata sulla base della frequenza di autorisonanza della bobina ed è assunta come indipendente dalla frequenza. I risultati calcolati sono in buon accordo con le misure eseguite sui tre induttori e il modello proposto risulta sufficientemente accurato per frequenze maggiori di quella di autorisonanza. Esso può pertanto essere utilizzato per la simulazione di induttori con nucleo ferromagnetico laminato impiegati nei convertitori di tipo switching [7].

4.4 APPENDICE

Derivazione dell' impedenza per un nucleo ferromagnetico con traferro

Partendo dalla (4.9), sarà mostrato che (4.6) e (4.7) sono ancora valide nel caso di nucleo ferromagnetico laminato con traferro. Trascurando gli effetti di sfrangiamento nel traferro e considerando la continuità dell'induzione magnetica attraverso la superficie di separazione aria – ferro, segue che

$$B_a(x,t) = B_c(x,t). \tag{A.1}$$

Sostituendo (A.1) nella (4.9) e considerando lineari le relazioni di legame materiale nel ferro, si ottiene

$$H_c(x,t)\, l_c = \frac{\mu_e}{\mu_c} N \left[i(t) + \frac{1}{N} \int_x^{s/2} J_y(x,t)\, l_c dx \right] \tag{A.2}$$

dove μ_e è data dalla (4.10). Dalla (A.2), possiamo scrivere

$$\frac{\partial H_c(x,t)}{\partial x} = \frac{\mu_e}{\mu_c} \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_x^{s/2} J_y(x,t) dx \right] = -\frac{\mu_e}{\mu_c} J_y(x,t) \tag{A.3}$$

La legge di Faraday per il problema in esame puo' essere scritta come

$$\frac{\partial E_y(x,t)}{\partial x} = -\frac{\partial B_c(x,t)}{\partial t}. \tag{A.4}$$

Considerando la legge locale di Ohm $J_y = E_y / \rho_c$ e usando la (A.3) e (A.4), si puo' scrivere

$$\frac{\partial^2 H_c(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\mu_e}{\rho_c} \frac{\partial H_c(x,t)}{\partial t}. \tag{A.5}$$

Introducendo il fasore di campo magnetico $\hat{H}_c(x)$ nel regime sinusoidale, la (A.5) diventa

$$\frac{d^2\hat{H}_c(x)}{dx^2} = \hat{k}_t^2 \hat{H}_c(x) \tag{A.6}$$

dove

$$\hat{k}_t = \sqrt{\frac{j\omega\mu_e}{\rho_c}} = \frac{1+j}{\delta_t}. \tag{A.7}$$

L'equazione differenziale (A.6) ha una soluzione generale data da

$$\hat{H}_c(x) = A\, e^{\hat{k}_t x} + B\, e^{-\hat{k}_t x}. \tag{A.8}$$

Date le condizioni di simmetria

$$\hat{H}_c(x) = \hat{H}_c(-x) \tag{A.9}$$

si puo' affermare che

$$\hat{H}_c(x) = C \cosh \hat{k}_t x. \tag{A.10}$$

L'equazione (A.10) diventa

$$\hat{H}_c(x) = \hat{H}_{co} \frac{\cosh\left(\frac{1+j}{\delta_t} x\right)}{\cosh\left(\frac{1+j}{\delta_t} \frac{s}{2}\right)} \tag{A.11}$$

dove $\hat{H}_{co}$ è il fasore del campo magnetico all'estremità $x = s/2$ del lamierino, cioè del campo magnetico prodotto dalla sola corrente i nelle N spire dell'avvolgimento.
Quindi dalla (A.2), segue che

$$\hat{H}_{co} = \frac{\mu_e}{\mu_c} \frac{N}{l_c} \hat{I}. \tag{A.12}$$

Il flusso all'interno del lamierino è dato da

$$\hat{\phi} = 2w \int_0^{s/2} \hat{B}_c(x)dx =$$

$$= 2w\mu_c \frac{\delta_t}{1+j} \hat{H}_{co} tgh\left(\frac{1+j}{\delta_t}\frac{s}{2}\right). \tag{A.13}$$

dove w è la profondità del lamierino nella direzione y.

Il flusso concatenato con la bobina è

$$\hat{\Phi} = Nn\hat{\phi} =$$

$$= 2N\mu_c \frac{\Delta w}{s}\frac{\delta_t}{1+j} tgh\left(\frac{1+j}{\delta_t}\frac{s}{2}\right)\hat{H}_{co} \tag{A.14}$$

dove n è il numero di lamierini del pacco, e $\Delta = ns$ è lo spessore del pacco lamiere.

Sostituendo l'espressione (A.12) nella (A.14), segue

$$\hat{\Phi} = L_{dc}^m \frac{2}{1+j}\frac{\delta_t}{s} tgh\left(\frac{1+j}{\delta_t}\frac{s}{2}\right)\hat{I} \tag{A.15}$$

dove

$$L_{dc}^m = \mu_e \frac{N^2 \Delta w}{l_c} \tag{A.16}$$

è il valore di induttanza a bassa frequenza.

La tensione indotta nella bobina è

$$\hat{V} = j\omega\hat{\Phi} = j\omega L_{dc}^m \frac{2}{1+j}\frac{\delta_t}{s} tgh\left(\frac{1+j}{\delta_t}\frac{s}{2}\right)\hat{I}. \tag{A.17}$$

L'impedenza calcolata è

$$\hat{Z} = \frac{\hat{V}}{\hat{I}} = j\omega L_{dc}^m \frac{2}{1+j}\frac{\delta_t}{s} tgh\left(\frac{1+j}{\delta_t}\frac{s}{2}\right). \tag{A.18}$$

E' possibile scrivere l'equazione (A.18) come

$$\hat{Z} = \omega L_{dc}^{m} \frac{\delta_t}{s} \left(\frac{sinh\frac{s}{\delta_t} - sin\frac{s}{\delta_t}}{\cosh\frac{s}{\delta_t} + \cos\frac{s}{\delta_t}} + j \frac{sinh\frac{s}{\delta_t} + sin\frac{s}{\delta_t}}{\cosh\frac{s}{\delta_t} + \cos\frac{s}{\delta_t}} \right). \tag{A.19}$$

Dalla espressione (A.19) è possibile affermare che

$$R_c = \mathrm{Re}\{\hat{Z}\} = \omega L_{dc}^{m} \frac{\delta_t}{s} \frac{sinh\frac{s}{\delta_t} - sin\frac{s}{\delta_t}}{\cosh\frac{s}{\delta_t} + \cos\frac{s}{\delta_t}} \tag{A.20}$$

$$L_{ac}^{m} = \frac{\mathrm{Im}\{\hat{Z}\}}{\omega} = L_{dc}^{m} \frac{\delta_t}{s} \frac{\sinh\frac{s}{\delta_t} + \sin\frac{s}{\delta_t}}{\cosh\frac{s}{\delta_t} + \cos\frac{s}{\delta_t}}. \tag{A.21}$$

Le espressioni per la resistenza del nucleo (A.20) e per l'induttanza principale (A.21), derivate sopra, sono identiche alle (4.6) e (4.7) ottenute per induttori senza traferro, ma è necessario usare la permeabilità equivalente in (4.8); in questo modo, quindi, si rileva una maggiore profondità di penetrazione del lamierino.

Quindi, un nucleo laminato ferromagnetico con traferro è equivalente ad un nucleo senza traferro a condizione di introdurre la permeabilità equivalente del circuito magnetico.

BIBLIOGRAFIA

[1] P.J. Dowell, "Effects of eddy currents in transformer windings," *Proc. Inst. Elect. Eng.*, vol. 113, pp. 1387-1394, Aug. 1966.

[2] J. Lammeraner and M. Stafl, *Eddy Currents*, London: Iliffe Books Ltd., 1966.

[3] G. Grandi, A. Massarini, M.K. Kazimierczuk, and U. Reggiani, "Stray capacitances of single-layer solenoid air-core inductors", *IEEE Trans. Industry Applications*, vol. 35, pp. 1162-1168, Sept. 1999.

[4] M.K. Kazimierczuk, G. Sancineto, G. Grandi, U. Reggiani, and A. Massarini, "High-frequency small-signal model of ferrite core inductors," *IEEE Trans. Magnetics*, vol. 35, pp. 4185-4191, Sept. 1999.

[5] *The Impedance Measurement Handbook.* Hewlett-Packard Co., 1989.

[6] A. Massarini and M. K. Kazimierczuk, "Self-capacitance of inductors," *IEEE Trans. Power Electronics*, vol. 12, pp. 671-676, July 1997.

[7] U. Reggiani, G. Grandi, G. Sancineto, M.K. Kazimierczuk, and A. Massarini, "High-frequency behavior of laminated iron-core inductors for filtering applications," in *Proc. IEEE-APEC'00*, New Orleans, Louisiana (USA), Feb. 2000, pp. 654-660.

CAPITOLO 5

"Modello di induttore avvolto su nucleo ferromagnetico laminato per l'analisi di transitori elettromagnetici"

5.1 INTRODUZIONE

Lo sviluppo di nuovi componenti elettronici di potenza e tecniche di commutazione soft ha permesso di aumentare la frequenza di commutazione riducendo le dimensioni degli induttori e dei condensatori impiegati. Oggigiorno, occorre studiareil comportamento non ideale in alta frequenza dei componenti passivi per caratterizzare gli elementi parassiti i quali causano il discostamento del comportamento da quello ideale. Modelli circuitali sono utili per prevedere il comportamento in alta frequenza dei dispositivi elettronici di potenza nel range di frequenza da decine di kHz al MHz. Componenti magnetici sono impiegati in molti convertitori switching, cosi' risulta giustificata una rinnovata attenzione verso induttori e trasformatori, con particolare riguardo al comportamento dell'avvolgimento e del nucleo e agli effetti delle capacità parassite.

Induttori in nucleo ferromagnetico laminato sono largamente usati nel campo medio–alto di potenza come bobine di arresto, dispositivi di filtraggio e bobine di accoppiamento. Modelli in alta frequenza di induttori sono stati sviluppati in [1], [2], [3] dove gli effetti pelle

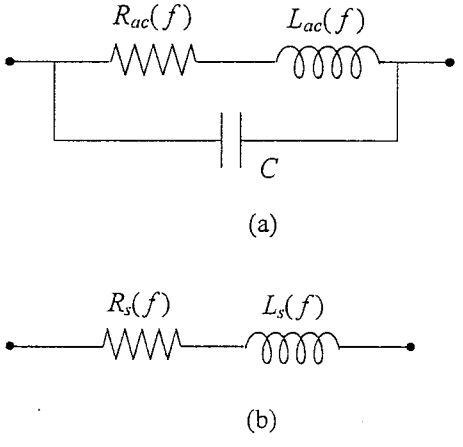

Fig. 5.1. (a) Circuito a parametri concentrati con parametri dipendenti dalla frequenza.
(b) Circuito equivalente serie

e prossimità nell'avvolgimento, le correnti parassite nel nucleo e le capacità tra le spire e tra queste ed il nucleo sono stati tenuti in considerazione.

La struttura del circuito equivalente proposto nei lavori menzionati è mostrata in Fig. 5.1. Dal momento che la resistenza e l'induttanza in c.a. del modello sono dipendenti dalla frequenza, il circuito equivalente rappresentato in Fig. 5.1 puo' essere usato per l'analisi nel dominio della frequenza, mentre l'analisi nel dominio del tempo è possibile solo per mezzo dell'antitrasformata di Laplace o per mezzo di tecniche di trasformazione di Fourier.

In questo capitolo è sviluppato un modello utile per l'analisi nel dominio del tempo ed, in particolare, di transitori elettromagnetici di induttori con nucleo ferromagnetico laminato. Il modello dell'avvolgimento è basato su un circuito serie di Foster [4] il quale è adattato per mezzo della formula della resistenza di Dowell [5]. Sono inoltre studiate, per mezzo di un appropriato circuito qui proposto, le correnti parassite e gli effetti di queste sui parametri dell'induttore. Sono altresì considerate [6], [7] le capacità tra le spire e tra queste ed il nucleo. Sono infine presentati i risultati sperimentali e confrontati con quelli calcolati tramite il modello al fine di valutare la validità del modello stesso nel caso di un induttore in nucleo ferromagnetico laminato con traferro.

5.2 MODELLO DELL' AVVOLGIMENTO

L'espressione analitica per la resistenza in c.a. dell'avvolgimento e l'induttanza di dispersione di un induttore in funzione della frequenza sono ottenute per mezzo dell'approccio di Dowell [5]. Cosi', la resistenza in c.a. dell'avvolgimento, R_w, e l'induttanza di dispersione, L^l_{ac}, possono essere espresse come

$$R_w = R_{wdc} A \cdot \left[\frac{e^{2A} - e^{-2A} + 2\sin(2A)}{e^{2A} + e^{-2A} - 2\cos(2A)} + 2\frac{N_l^2 - 1}{3} \cdot \frac{e^{A} - e^{-A} - 2\sin A}{e^{A} + e^{-A} + 2\cos A} \right] \tag{5.1}$$

e

$$L^l_{ac} = R_{wdc} \frac{A}{\omega} \cdot \left[\frac{e^{2A} - e^{-2A} - 2\sin(2A)}{e^{2A} + e^{-2A} - 2\cos(2A)} + 2\frac{N_l^2 - 1}{3} \cdot \frac{e^{A} - e^{-A} + 2\sin A}{e^{A} + e^{-A} + 2\cos A} \right] \tag{5.2}$$

dove R_{wdc} è la resistenza c.c. dell'avvolgimento e A è una quantità adimensionale che dipende dalla geometria dell'avvolgimento. Il primo e il secondo termine della (5.1) rappresentano l'effetto pelle e l'effetto prossimità dell'avvolgimento, rispettivamente. Per un conduttore a sezione circolare di diametro d, la quantità $A = A_r$ è data da

$$A_r = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{4}} \frac{d^{\frac{3}{2}}}{\delta_w p^{\frac{1}{2}}}, \tag{5.3}$$

dove p è il passo dell'avvolgimento, ovvero, la distanza tra due conduttori adiacenti. In (5.3), δ_w è la profondità di penetrazione del conduttore espressa come

$$\delta_w = \sqrt{\frac{\rho_w}{\pi \mu_o \mu_{rw} f}}, \tag{5.4}$$

dove f è la frequenza, ρ_w è la resistività elettrica del conduttore, μ_{rw} è la permeabilità magnetica relativa del conduttore ($\rho_w = 17.24\text{x}10^{-9}\Omega$m and $\mu_{rw} = 1$ per un conduttore di rame a 20°C), e $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$ H/m.

L'induttanza di dispersione rappresenta di solito un piccolo contributo alla induttanza totale rispetto a quello dell'induttanza del nucleo [3] e pertanto sarà trascurata. La resistenza in c.a. R_w può essere modellata per mezzo del circuito serie di Foster rappresentato in Fig.5.2; i parametri di questo circuito sono adattati per ricostruire l'espressione analitica di Dowell per la resistenza R_w.

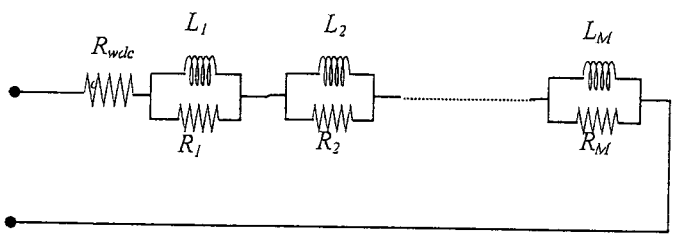

Fig.5.2. Circuito serie di Foster di ordine M.

Il fitting è realizzato per mezzo di un metodo iterativo [4]. La parte reale dell'impedenza del circuito serie di Foster, mostrato in Fig. 5.2, è data da

$$R_{sF}(\omega) = R_{wdc} + \sum_{i=1}^{M} \frac{\omega^2 L_i^2 R_i}{R_i^2 + \omega^2 L_i^2} = R_w(\omega) \tag{5.5}$$

dove $\omega = 2\pi f$. Estraendo il blocco k-esimo dalla (5.5) si ha

$$a_k(\omega) = \frac{\omega^2 L_k^2 R_k}{R_k^2 + \omega^2 L_k^2} \tag{5.6}$$

dove

$$a_k(\omega) = R_w(\omega) - R_{wdc} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{M} \frac{\omega^2 L_i^2 R_i}{R_i^2 + \omega^2 L_i^2} \tag{5.7}$$

Fissando due frequenze, per ciascun k, segue

$$a_k^{'}(\omega_k^{'}) = \frac{\omega_k^{'2} L_k^2 R_k}{R_k^2 + \omega_k^{'2} L_k^2} \qquad (k=1,2,\ldots,M) \tag{5.8}$$

e

$$a_k^{''}(\omega_k^{''}) = \frac{\omega_k^{''2} L_k^2 R_k}{R_k^2 + \omega_k^{''2} L_k^2} \qquad (k=1,2\ldots,M) \tag{5.9}$$

Dalla (5.8) e (5.9), segue

$$R_k = \frac{a_k^{'} a_k^{''} \left(\omega_k^{''2} - \omega_k^{'2}\right)}{a_k^{'} \omega_k^{''2} - a_k^{''} \omega_k^{'2}} \qquad (k = 1,2\ldots,M) \tag{5.10}$$

e

$$L_k = R_k \sqrt{\frac{a_k^{'} \omega_k^{''2} - a_k^{''} \omega_k^{'2}}{\left(a_k^{''} - a_k^{'}\right) \omega_k^{'2} \omega_k^{''2}}} \qquad (k=1,2\ldots,M) \tag{5.11}$$

dove i termini $a_k^{'}$ e $a_k^{''}$ sono calcolati tramite la (5.7).

Essendo la resistenza R_{wdc} nota, partendo da una serie iniziale di $2M$ parametri circuitali del circuito di Foster, le equazioni (5.10) e (5.11) sono usate iterativamente per aggiornare i parametri R_k e L_k fino alla convergenza; per fare ciò è necessario scegliere $2M$ frequenze per determinare i $2M$ parametri del circuito. Il processo di iterazione inizia dalla frequenza piu' elevata [4].

A titolo di esempio, il circuito di Foster è adattato per mezzo dell'espressione (5.1) calcolata per un avvolgimento dell'induttore costituito da $N_t = 23$ spire per strato, $N_l = 6$ strati con conduttori circolari di diametro $d = 1.5$ mm.

In fig. 5.3 la resistenza in c.a. dell'avvolgimento R_w è riportata in funzione della frequenza usando la formula di Dowell (linea continua) e il circuito di serie di Foster di ordine due e tre (linea a punti e a tratti, rispettivamente). Questi circuiti hanno l'esatto valore della resistenza alle frequenze scelte mentre essi si allontanano dal valore esatto per le altre frequenze. La Fig. 5.4 descrive l'errore relativo nella resistenza R_w calcolato per mezzo del circuito di Foster in funzione della frequenza (fino ad 1MHz). Come atteso, l'adattamento è migliore nel circuito di ordine tre, essendo in questo caso l'errore relativo molto più basso. Le frequenze assunte per il fitting e i valori ottenuti per i parametri del circuito sono riportati in Tabella 5.1.

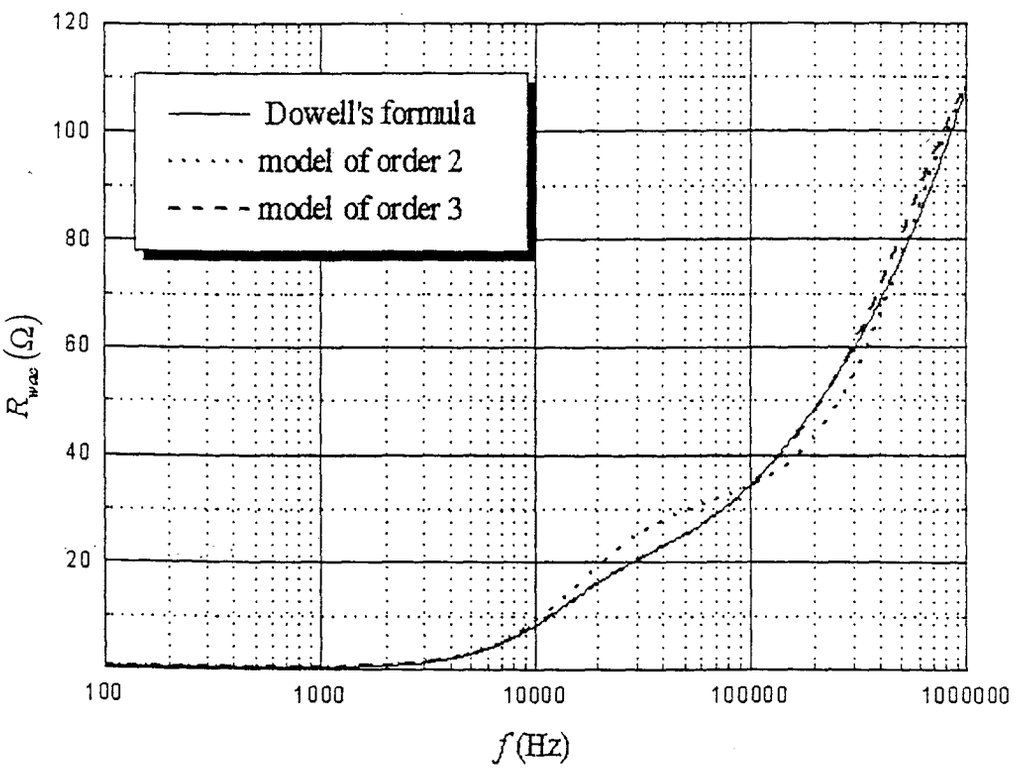

Fig. 5.3. Resistenza in c.a. dell'avvolgimento R_w in funzione della frequenza.

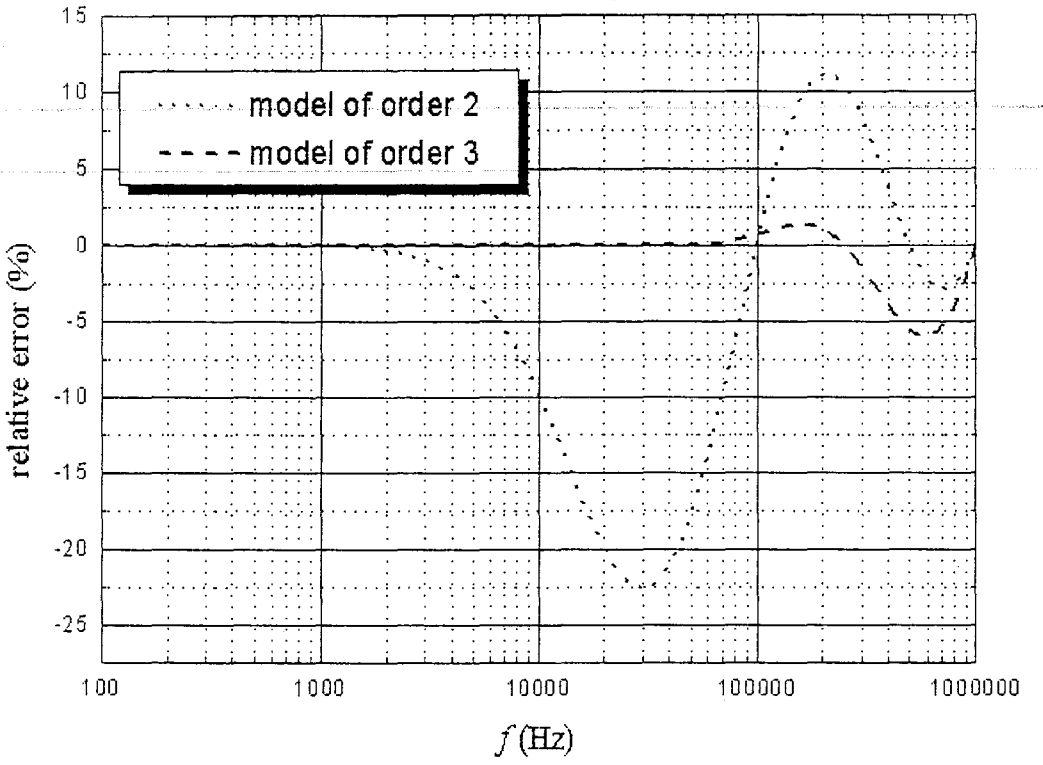

Fig. 5.4. Errore relativo in R_w in funzione della frequenza.

Tabella 5.1
PARAMETRI DEL CIRCUITO DI FOSTER

ordine	2	3
frequenze kHz	0.4, 100, 500, 1000	0.4, 2, 10, 50, 250, 1000
parametri	R_{wdc}=236 mΩ R_1=31.7 Ω L_1=310.91 μH R_2=100.52 Ω L_2=28.8 μH	R_{wdc}=236 mΩ R_1=22.5 Ω L_1=260.24 μH R_2=19.86 Ω L_2=28.5 μH R_3=85.78 Ω L_3=25.26 μH

5.3. Modello per il nucleo ferromagnetico laminato

Il modello elettromagnetico per un lamierino del pacco che realizza il nucleo è basato su un approccio fisico proposto in [8]. La sezione trasversale di un lamierino è divisa in m regioni, come mostrato in Fig. 5.5, per simulare le correnti parassite a differenti profondità

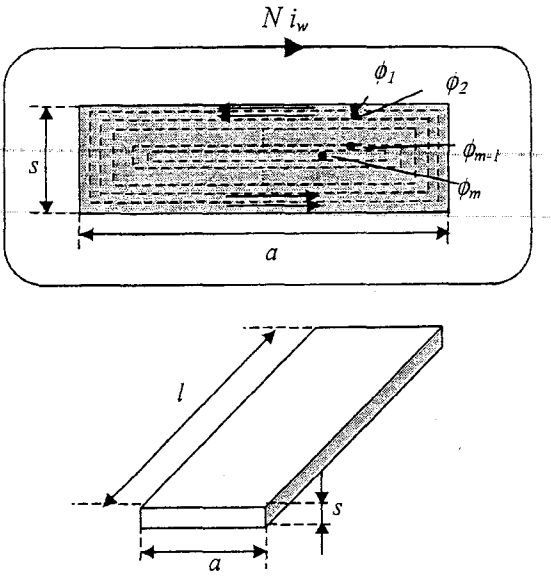

Fig. 5.5. Lamierino e sua suddivisione nelle *m* regioni.

del lamierino. Per una più accurata simulazione, lo spessore delle regioni dovrebbe crescere dalla superficie verso il centro del lamierino.

I flussi magnetici legati a ciascuna regione che fluiscono normalmente alla sezione trasversale del lamierino sono indicati come $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m$, rispettivamente. Le correnti $i_1, i_2, \ldots, i_{m-1}, i_m=0$ rappresentano le correnti indotte nelle regioni considerate che fluiscono nel piano della sezione trasversale. Nel modello, la forza magnetomotrice Ni_W è dovuta alla corrente esterna i_W che percorre le N spire della bobina. Se la lunghezza del lamierino è molto più grande delle sue dimensioni trasversali, l'induzione magnetica e la densità di corrente possono essere assunte monodimensionali. In particolare, l'induzione magnetica esiste unicamente all'interno del lamierino con direzione perpendicolare alla sezione trasversale e l'interazione tra la corrente ed il flusso magnetico nella stessa regione è trascurata. In accordo con queste ipotesi e nel caso di nucleo ferromagnetico non saturo, il flusso magnetico ϕ_j nella regione j-esima è una funzione dell'intensità del campo magnetico in questa regione, cioè è proporzionale alla somma delle correnti all'esterno della j-esima regione $N i_w + \sum_{\substack{h=1 \\ j\neq 1}}^{j-1} i_h$. La costante di proporzionalità è il reciproco della riluttanza $\Re_j = l/(\mu 2 d_j a)$ della j-esima regione. Si ottiene

$$\Re_j\, \phi_j = N\, i_w + \sum_{\substack{h=1 \\ j\neq 1}}^{j-1} i_h \,. \tag{5.12}$$

La Fig. 5.6 descrive le regioni nelle quali è suddivisa la sezione trasversale del lamierino, cio'risulta utile per il calcolo della resistenza elettrica R_h e riluttanza $\Re_h$ di ciascuna regione.

In tale figura le linee di corrente parallele allo spessore del lamierino sono trascurate, essendo lo spessore del lamierino s molto piu' piccolo della dimensione a. Questa ipotesi è la stessa assunta nella soluzione analitica della diffusione delle grandezze elettromagnetiche all'interno del lamierino [9].

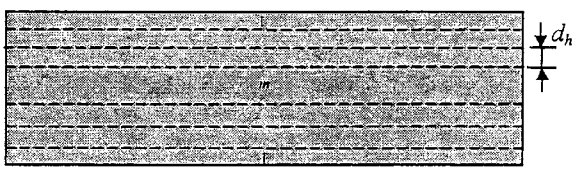

Fig. 5.6. Regioni semplificate per il calcolo della resistenza elettrica e riluttanza.

La corrente i_h indotta nella h-esima regione è ottenuta dalla legge di Faraday e dalla legge di Ohm,

$$i_h = -\frac{1}{R_h} \sum_{k=h+1}^{m} \frac{d\phi_k}{dt} \tag{5.13}$$

dove $R_h = \rho 2a/(d_h l)$ è la resistenza dell'h-esima regione.

Le equazioni (5.12) e (5.13) possono essere considerate le equazioni del circuito magnetico a parametri concentrati mostrato in Fig. 5.7, in cui le sorgenti di forza magnetomotrice sono indicate con i simboli usati per i generatori di tensione indipendenti e dipendenti, a causa dell'analogia tra forza magnetomotrice nei circuiti magnetici e tensione nei circuiti elettrici. Questo circuito descrive gli accoppiamenti elettromagnetici nelle differenti regioni del lamierino e rappresenta un modello per l'analisi nel dominio del tempo. La soluzione del circuito di Fig. 5.7 fornisce i flussi ϕ_j (j = 1,2,..., m). Le correnti parassite i_h (h = 1, 2,..., m-1) possono essere ottenute dalla (5.13). Questo circuito è stato implementato e risolto per mezzo di un simulatore circuitale (PSpice) per l'induttore in nucleo ferromagnetico laminato descritto in Fig. 5.8.

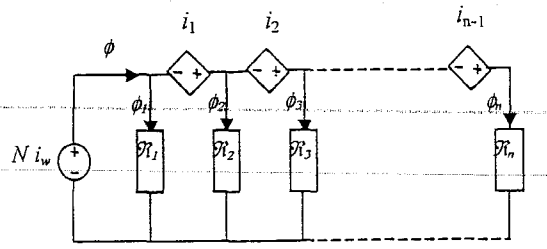

Fig. 5.7. Modello per un lamierino.

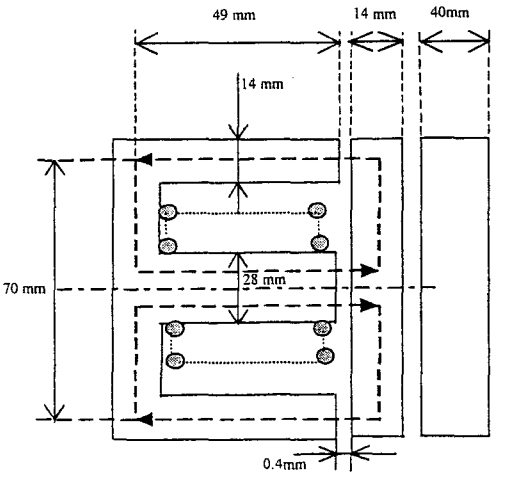

Fig. 5.8. Nucleo magnetico EI e sue dimensioni

Il modello permette di calcolare la tensione indotta attraverso l'avvolgimento per mezzo del flusso magnetico

$$v = Nn\frac{d\phi}{dt} \tag{5.14}$$

dove $N = N_t N_l$ è il numero di spire dell'avvolgimento e n è il numero di lamierini del pacco. In (5.14) ϕ è il flusso magnetico attraverso la sezione trasversale di un lamierino dato da

$$\phi = \sum_{j=1}^{m} \phi_j \,, \tag{5.15}$$

mentre il flusso attraverso il piccolo spazio tra due adiacenti lamierini è trascurato.

In regime sinusoidale alla pulsazione ω, possiamo introdurre i fasori e la (5.14) può essere scritta come

$$\hat{V} = j\omega Nn\hat{\phi} \tag{5.16}$$

Definiamo l'impedenza dell'induttore come

$$\hat{Z} = \frac{\hat{V}}{\hat{I}_w} = \frac{j\omega N n\hat{\phi}}{\hat{I}_w}. \tag{5.17}$$

La parte reale ed immaginaria di $\hat{Z}$ rappresentano la resistenza serie equivalente del nucleo R_c (legata alle perdite dovute alle correnti parassite che fluiscono nel nucleo) e la reattanza principale della bobina ωL_{ac}^m (legata alle linee del campo magnetico nel nucleo), rispettivamente. I parametri R_c e L_{ac}^m possono essere calcolati a diverse frequenze per mezzo del modello mostrato in Fig 5.7.

Le espressioni analitiche per R_c and L_{ac}^m possono essere ottenute per mezzo di un analisi monodimensionale della diffusione delle grandezze elettromagnetiche in un pacco di lamierini in regime sinusoidale [9]. Nel caso di induttori in nucleo ferromagnetico laminato con traferro, le espressioni per la resistenza equivalente serie, R_c ,e induttanza principale, L_{ac}^m, sono

$$R_c = 2\pi f L_{dc}^m \frac{\delta_c}{s} \frac{\sinh\frac{s}{\delta_c} - \sin\frac{s}{\delta_c}}{\cosh\frac{s}{\delta_c} + \cos\frac{s}{\delta_c}}, \tag{5.18}$$

e

$$L_{ac}^m = L_{dc}^m \frac{\delta_c}{s} \frac{\sinh\frac{s}{\delta_c} + \sin\frac{s}{\delta_c}}{\cosh\frac{s}{\delta_c} + \cos\frac{s}{\delta_c}}, \tag{5.19}$$

dove L_{dc}^m è l'induttanza principale a bassa frequenza, s è lo spessore del lamierino e $\delta_c = \sqrt{\rho_c/\pi\mu_e f}$ è la profondità di penetrazione dei lamierini, essendo ρ_c e μ_e la resistività elettrica e la permeabilità magnetica equivalente del nucleo laminato, rispettivamente. Il valore della permeabilità magnetica equivalente del nucleo EI, mostrato in Fig. 5.8, è calcolato come $\mu_e = \mu_c l_c/(l_c + 2\mu_{rc} l_a)$, dove l_c è la lunghezza del percorso costituito dagli assi geometrici della gamba centrale e di quella di una delle due gambe piu' esterne, 2 l_a è il traferro totale e μ_{rc} è la permeabilità relativa del ferro.

Le Figg. 5.9 e 5.10 descrivono, rispettivamente le curve R_c and L_{ac}^m in funzione della frequenza calcolate per il nucleo EI di Fig. 5.8 usando la (5.18) e (5.19) (metodo analitico, AM) e il modello proposto (PM) con m = 10 regioni dello stesso spessore. I parametri principali dell'induttore laminato sono riportati in Tabella 5.2.

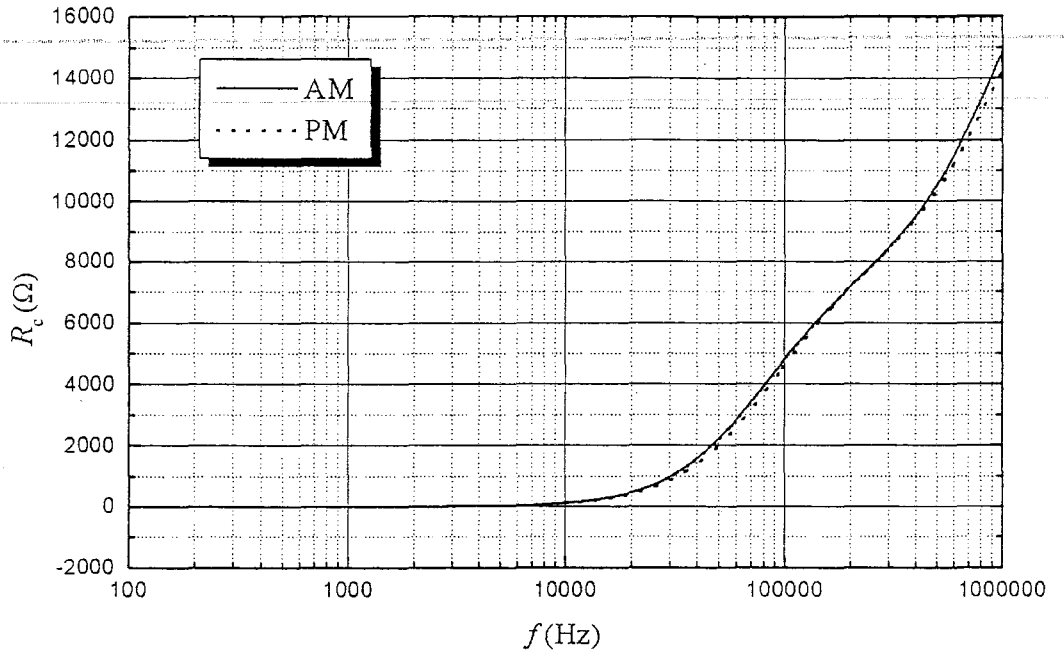

Fig. 5.9. Resistenza equivalente serie R_c in funzione della frequenza.

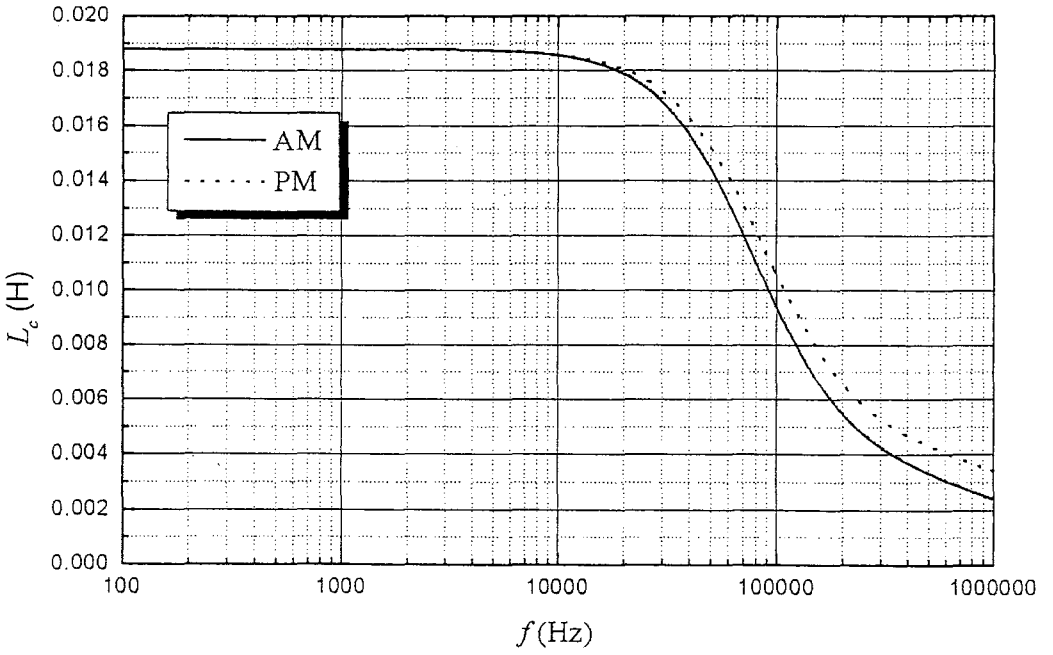

Fig. 5.10. Induttanza principale L_{ac}^{m} in funzione della frequenza.

Tabella 5.2

Parametri principali dell'induttore

d	1.5 mm
p	1.5 mm
N_l	6
N_t	23
A_{Fe}	1067.36 mm^2
l_c	168 mm
l_a	0.4 mm
μ_e / μ_0	123.53
n	127
L_{dc}^m	18.8 mH
R_{wdc}	236 mΩ
f_r	0.103 MHz
C	152.95 pF

Nel range di frequenza 100 Hz ÷ 1 MHz, i valori ottenuti con il modello proposto sono in buon accordo con quelli derivati dal metodo analitico quando il lamierino è diviso in 10 regioni. Nelle Figg. 5.11 e 5.12 sono mostrati i comportamenti della resistenza equivalente del nucleo e dell'induttanza principale per differenti numeri m di regioni. Si può notare che il fitting migliora al crescere del numero delle regioni in cui è suddiviso il lamierino. I casi di m=10 e m=13 mostrano una tendenza molto simile nell'intero range di frequenza, cosi' un numero di regioni pari a 10 pare essere adeguato per descrivere il comportamento dell'induttore.

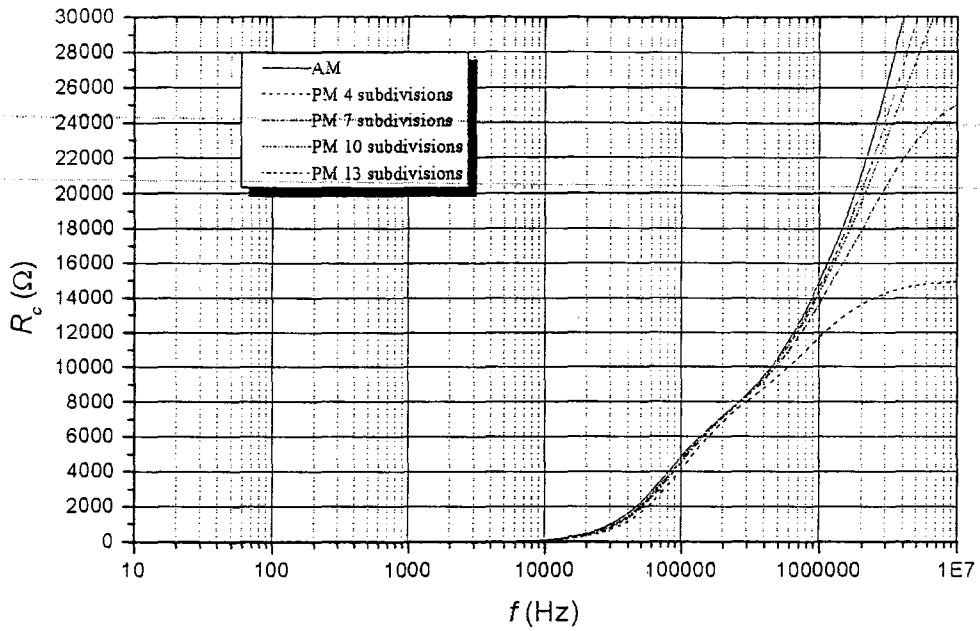

Fig . 5.11. Resistenza equivalente del nucleo in funzione della frequenza per diversi numeri m di regioni .

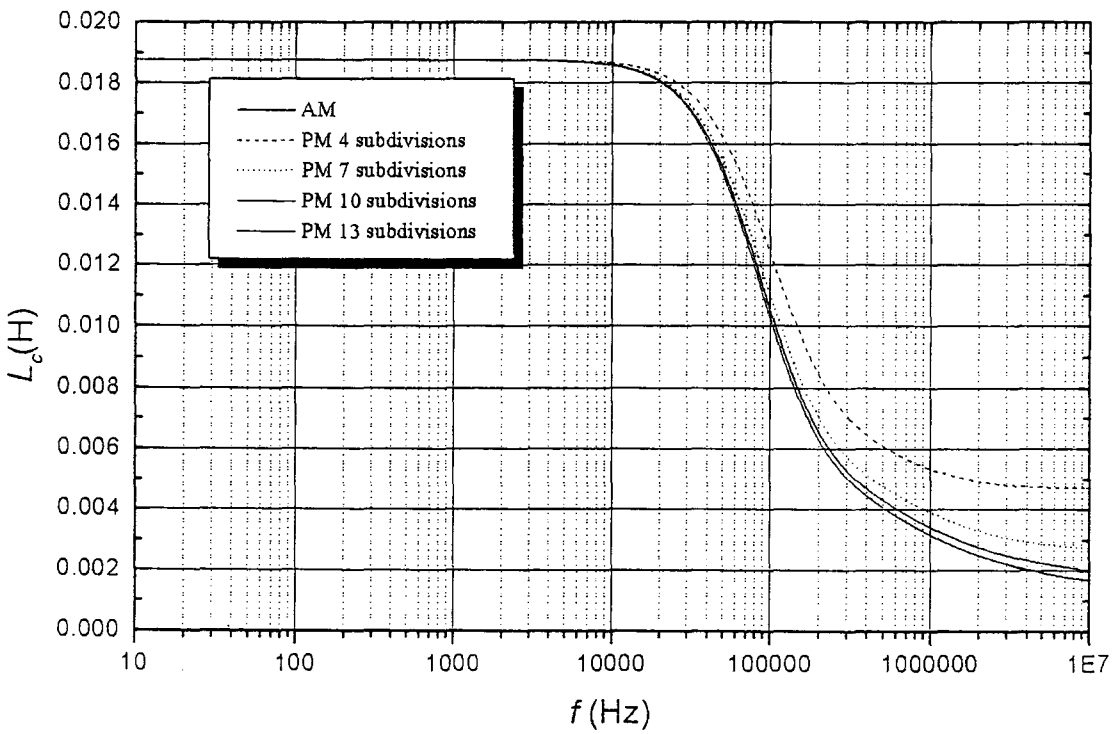

Fig. 5.12. Induttanza principale L_{uc}^{m} in funzione della frequenza per diversi numeri m di regioni.

In Tabella 5.3 sono riportati la resistenza elettrica e la riluttanza per i diversi numeri di regioni considerati.

Tabella 5.3

Resistenza elettrica e riluttanza calcolate per diversi numeri di regioni

m	R mΩ	$\mathcal{R}$ $H^{-1}m^{-1}10^6$
4	6.2	515.6
7	10.8	902.3
10	15.5	1289.0
13	20.2	1675.8

La Fig. 5.13 mostra il modello complessivo dell'induttore con nucleo ferromagnetico laminato includendo la capacità parassita totale C, ottenuta da misure della frequenza di autorisonanza dell'induttore.

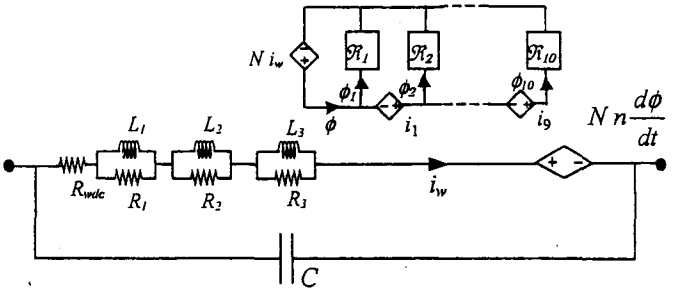

Fig. 5.13. Modello complessivo per l'induttore con nucleo ferromagnetico laminato.

5.4. Risultati sperimentali

Il modello complessivo proposto è stato validato per mezzo di misure su un induttore nel dominio della frequenza. Le misure sono state eseguite su un induttore con nucleo ferromagnetico laminato con traferro descritto in Fig. 5.8 per mezzo di un analizzatore d'impedenza HP 4192A LF (5Hz-13MHz). Riprendendo in esame la Fig. 5.1(b), in essa è rappresentato un circuito equivalente serie, dove i parametri equivalenti serie R_s e L_s sono [3]

$$R_s(\omega) = \frac{R_{ac}}{(1-\omega^2 L_{ac} C)^2 + (\omega C R_{ac})^2} \tag{5.20}$$

e

$$L_s(\omega) = \frac{X_s(\omega)}{\omega} = \frac{L_{ac}(1-\omega^2 L_{ac} C - \frac{C R_{ac}^2}{L_{ac}})}{(1-\omega^2 L_{ac} C)^2 + (\omega C R_{ac})^2} \tag{5.21}$$

dove $R_{ac}=R_w+R_c$ e $L_{ac} = L_{ac}^m$. La frequenza di risonanza $f_r = \omega_r / (2\pi)$ di un induttore è definita come la frequenza alla quale la reattanza è zero.
Quindi dalla (5.21) la capacità parassita totale può essere calcolata come

$$C = \frac{1}{\omega_r^2 L_{ac}(\omega_r) + \frac{R_{ac}^2(\omega_r)}{L_{ac}(\omega_r)}}. \tag{5.22}$$

Il valore della capacità totale C è ottenuto dalla (5.22) usando la frequenza di risonanza misurata ed è assunto come parametro costante nell'intero range delle frequenze operative dell'induttore. Le Figg. 5.14 e 5.15 mostrano i risultati ottenuti dalle misure (linea a punti) e dai calcoli (linea continua) per l'induttore in esame , in termini di R_s e X_s, in funzione della frequenza.

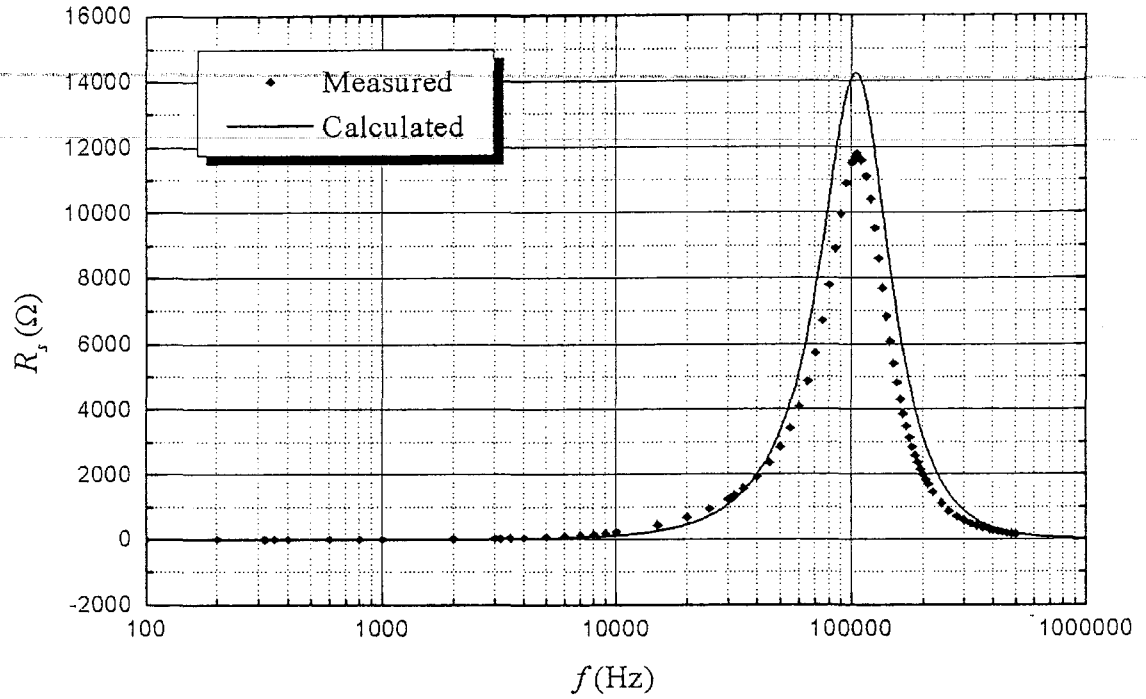

Fig. 5.14. R_s misurata e calcolata in funzione della frequenza.

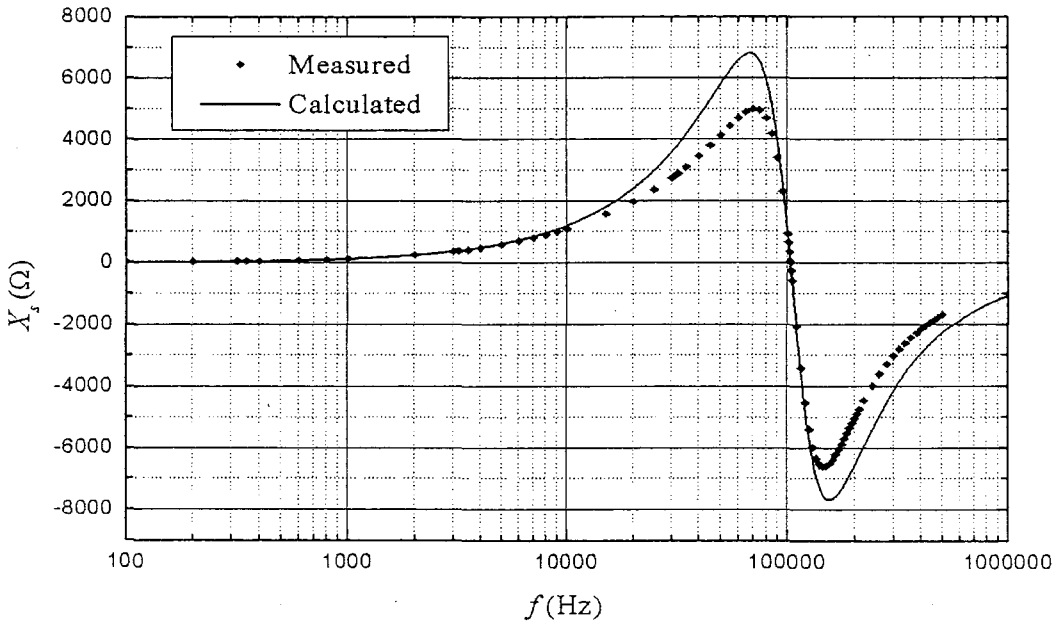

Fig. 5.15. X_s misurata e calcolata in funzione della frequenza.

La Fig. 5.16 mostra circa 100 μs della risposta dinamica del circuito equivalente dell'induttore rappresentato in Fig. 5.13, quando una forma d'onda di tensione rettangolare con una frequenza di 40 kHz è applicata ad esso. La Fig. 5.16 (a) illustra il comportamento della corrente assorbita dall'induttore, nel quale sono predominanti gli *spikes* dovuti alle cariche e scariche del ramo capacitivo. La Fig. 5.16 (b) mostra la corrente nel ramo induttivo, che non è triangolare come nel caso di un induttore ideale.

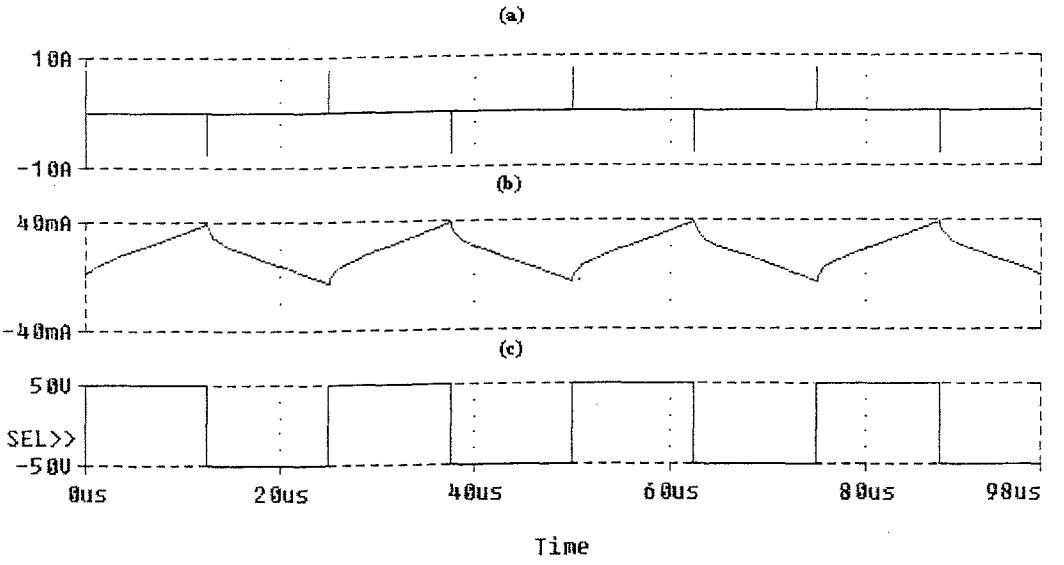

Fig. 5.16. Risultati della simulazione:
(a) corrente assorbita dall'induttore ,
(b) corrente nel ramo induttivo,
(c) forma d'onda di tensione rettangolare applicata all'induttore.

5.5 CONCLUSIONI

E' stato presentato un modello utile alla simulazione dei transitori elettromagnetici di induttori con nucleo ferromagnetico laminato. L'avvolgimento è modellato per mezzo di un circuito serie di Foster di ordine due e tre adattato per mezzo della formula della resistenza di Dowell. Sono state studiate le correnti parassite nel nucleo ferromagnetico laminato e i loro effetti sui parametri del modello dell'induttore per mezzo del circuito qui proposto. I valori dei parametri ottenuti per mezzo del modello sono stati confrontati con quelli derivati dalle formule analitiche e l'accordo ottenuto può considerarsi buono.

Le misure eseguite su un induttore con nucleo ferromagnetico laminato sono state confrontate con i risultati numerici ottenuti per mezzo del modello complessivo proposto. Il confronto è fatto in termini di resistenza equivalente serie e reattanza equivalente serie e ancora l'accordo risulta buono in un ampio range di frequenza. Il modello proposto può

quindi essere impiegato per l'analisi nel dominio del tempo e i risultati di una simulazione sono stati presentati nel caso di un induttore alimentato da una forma d'onda rettangolare di tensione [10].

BIBLIOGRAFIA

[1]U. Reggiani, G. Grandi, G. Sancineto, M.K. Kazimierczuk, and A. Massarini, "High-frequency behavior of laminated iron-core inductors for filtering applications," in *Proc. IEEE-APEC'00*, New Orleans, Louisiana (USA), Feb. 2000, pp. 654-660.

[2]U. Reggiani, G. Grandi, G. Sancineto, G. Serra "Comparison between air-core and laminated iron-core inductors in filtering applications for switching converters," in *Proc. IEEE-CIEP*, Acapulco, Mexico, Oct. 2000, pp. 9-14.

[3]M.K. Kazimierczuk, G. Sancineto, G. Grandi, U. Reggiani, and A. Massarini, "High-frequency small-signal model of ferrite core inductors," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 35, no. 5, Sept.. 1999, pp. 4185-4191.

[4]F. De Leon, and A. Semlyen, "Time domain modeling of eddy current effects for transformer transient," *IEEE Trans. Power Delivery*, vol. 8, no.1, Jan. 1993, pp.271-280.

[5]P.J. Dowell, "Effects of eddy currents in transformer windings," *Proc. IEE*, vol. 113, no. 8, Aug. 1966, pp. 1387-1394.

[6]G. Grandi, M.K. Kazimierczuk, A. Massarini, and U. Reggiani, "Stray capacitances of single-layer solenoid air-core inductors," *IEEE Trans. Ind. Applicat.*, vol. 35, no. 5, Sept./Oct. 1999, pp. 1162-1168.

[7]A.Massarini, M.K.Kazimierczuk, and G.Grandi, "Lumped parameter models of single and multiple layer inductors," in *Proc. IEEE-PESC'96*, Baveno (IT), June 1996, pp. 295-301.

[8] Pär Holmberg, "Modelling the transient response of windings, laminated steel cores and electromagnetic power devices by means of lumped circuits," *PhD Thesis*, Uppsala University, 2000.

[9] J. Lammeraner and M. Stafl, *Eddy Currents*. London: Iliffe Books Ltd., 1966.

[10] G. Grandi, A. Massarini, U. Reggiani, G. Sancineto, "Laminated Iron-Core Inductor Model for Time-Domain Analysis," in *Proc.* IEEE-PEDS Conference, October 22 – 25, 2001 Bali.

CAPITOLO 6

"Confronto tra induttori in aria ed con nucleo ferromagnetico laminato"

6.1 INTRODUZIONE

In molti dispositivi di filtraggio di potenza, sia gli induttori in aria sia quelli con nucleo ferromagnetico laminato sono largamente impiegati in luogo degli induttori in ferrite.

L'uso della ferrite come materiale per il nucleo offre alcuni vantaggi, in particolare: basse perdite nel rame rispetto agli induttori in aria e minori perdite nel nucleo rispetto agli induttori con nucleo ferromagnetico laminato. Inoltre la bassa conducibilità elettrica della ferrite limita le correnti parassite e permette agli induttori di ferrite di operare propriamente fino a frequenze di parecchi MHz. D'altronde, a causa del suo alto costo, l'uso della ferrite è generalmente ristretto ad applicazioni che richiedono ridotte dimensioni del nucleo, come filtri per alta frequenza per piccoli segnali e piccoli induttori. Principalmente per queste ragioni gli induttori in aria ed in nucleo ferromagnetico laminato sono preferiti agli induttori in ferrite nel campo di potenza medio-alto.

Il comportamento alle alte frequenze degli induttori in nucleo di ferrite è stato largamente investigato in letteratura [1]-[5].

Alcuni risultati che riguardano le correnti parassite e le perdite ad alta frequenza nei nuclei laminati sono presentati in [6] and [7]. E' stato pure studiato il comportamento in alta frequenza sia degli induttori in aria [8] e [9] che degli induttori in nucleo ferromagnetico laminato [10].

In questo capitolo, è presentato un confronto tra induttori in aria e in nucleo ferromagnetico laminato con riferimento al loro comportamento ad alta frequenza. In particolare, è sviluppato un circuito equivalente a parametri concentrati e validato per mezzo di test sperimentali. Il modello proposto permette di confrontare il comportamento di questi due diversi tipi di induttori in un ampio campo di frequenza.

6.2 MODELLO DELL'INDUTTORE

Sia gli induttori in aria sia quelli con nucleo ferromagnetico laminato possono essere modellati per mezzo del circuito equivalente a parametri concentrati mostrato in Fig. 6.1(a). Il significato fisico ed il valore dei parametri del circuito (cioè, la resistenza totale in c.a. R_{ac}, l'induttanza totale L_{ac} e la capacità parassita totale C) dipendono dal tipo di induttore. Questi parametri sono studiati, insieme con la resistenza parallela R_p, nelle sottosezioni 6.2.1 e 6.2.2 per induttori in aria ed con nucleo ferromagnetico laminato, rispettivamente. In generale, R_{ac} e L_{ac} sono dipendenti dalla frequenza f. L'impedenza del modello dell' induttore è $\hat{Z}_s = R_s + jX_s$. La Fig. 6.1(b) mostra un circuito equivalente serie dei due tipi di induttori, dove la resistenza equivalente serie (ESR) è

$$R_s = \frac{R_{ac} + \omega^2 R_p R_{ac}\left(R_{ac} + R_p\right)C^2 + \omega^4 R_p L_{ac}^2 C^2}{\left(1-\omega^2 L_{ac} C\right)^2 + \omega^2 C^2 \left(R_{ac} + R_p\right)^2} \tag{6.1}$$

e l'equivalente reattanza serie è

$$X_s = \frac{\omega L_{ac}\left(1-\omega^2 L_{ac} C - C R_{ac}^2 / L_{ac} + \omega^2 R_p^2 C^2\right)}{\left(1-\omega^2 L_{ac} C\right)^2 + \omega^2 C^2 \left(R_{ac} + R_p\right)^2} \tag{6.2}$$

dove $\omega = 2\pi f$. Quindi, l'induttanza equivalente serie (ESL) è data da

$$L_s = \frac{X_s}{2\pi f}; \tag{6.3}$$

essa è importante in quanto molti analizzatori d'impedenza misurano R_s e L_s. La frequenza di risonanza f_r di un induttore è definita come la frequenza alla quale la reattanza diviene zero. Quindi, dalla (6.2) può essere calcolata la capacità parassita totale.

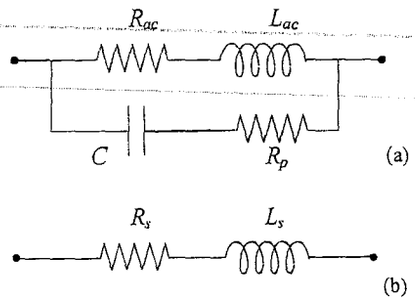

Fig. 6.1.Circuito equivalente dei due tipi di induttori
(a) circuito equivalente a parametri concentrati,
(b) circuito equivalente serie.

6.2.1 Induttori in aria

Per gli induttori in aria, la resistenza totale in c.a. R_{ac} coincide con la resistenza dell'avvolgimento R_w, e l'induttanza totale L_{ac} può essere considerata praticamente indipendente dalla frequenza e uguale al valore di induttanza totale a bassa frequenza L_{dc}.
Il parametro R_w, dipendente dalla frequenza, è calcolato assumendo che le linee del campo magnetico di dispersione attraversino l'avvolgimento nella direzione dell'asse della bobina e trascurando gli effetti di estremità. Un espressione per R_w è data dalla formula di Dowell [11]

$$R_w = R_{wdc} A \cdot \left[\frac{e^{2A} - e^{-2A} + 2\sin(2A)}{e^{2A} + e^{-2A} - 2\cos(2A)} + 2\frac{N_l^2 - 1}{3} \frac{e^A - e^{-A} - 2\sin A}{e^A + e^{-A} + 2\cos A} \right] \tag{6.4}$$

dove R_{wdc} è la resistenza in c.c. dell'avvolgimento, N_l è il numero di strati dell'avvolgimento e A è una quantità adimensionale, dipendente dalla geometria dell'avvolgimento. Il primo ed il secondo termine della (6.4) rappresentano l'effetto pelle e l'effetto prossimità nell'avvolgimento, rispettivamente. Per un conduttore a sezione circolare di diametro d, la quantità A è data da

$$A = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{4}} \frac{d^{\frac{3}{2}}}{\delta_w p^{\frac{1}{2}}} \tag{6.5}$$

dove p è il passo dell'avvolgimento, cioè, la distanza tra i centri di due conduttori adiacenti, e δ_w è la profondità di penetrazione del conduttore espressa come

$$\delta_w = \sqrt{\frac{\rho_w}{\pi \mu_o \mu_{rw} f}} . \tag{6.6}$$

Nella (6.6), ρ_w rappresenta le resistenza elettrica del conduttore, μ_{rw} è la permeabilità relativa del conduttore e $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$ H/m.

Il valore dell'induttanza L_{dc} può essere calcolato per mezzo di formula empiriche [12] o per mezzo di un approccio analitico [8].

Gli induttori in aria non presentano capacità parassite tra le spire ed il nucleo; si considerano pertanto unicamente le capacità parassite tra le spire per valutare la capacità parassita totale C, come descritto in [8] e [9]. La resistenza parallela R_p è introdotta per estendere la validità del modello al di sopra della frequenza di autorisonanza; questa resistenza tiene conto, infatti, delle perdite prodotte dalla corrente che percorre il dielettrico tra due spire ed è dell'ordine di decine o centinaia di Ohm.

I parametri di interesse per i due differenti induttori in aria considerati sono riportati in Tabella 6.1. I due induttori hanno lo stesso numero di spire per strato N_t, ma differente numero di strati N_l. In Tabella 6.1, A_{air} è la sezione trasversale dell'induttore in aria e L_{dc} è il valore di induttanza a bassa frequenza.

Tabella 6.1
PARAMETRI PER GLI INDUTTORI IN ARIA

	Induttore #1	Induttore #2
d (mm)	1.46	1.46
p (mm)	$p \approx d$	$p \approx d$
N_l	8	2
N_t	24	24
A_{air} (mm^2)	1120	1120
R_{wdc} (mΩ)	361.3	73
L_{dc} (mH)	1.6	0.086
f_r (MHz)	0.741	3.877
C (pF)	56	22.24
R_p (Ω)	100	40

Le misure sono state eseguite sui due induttori in aria per provare la validità del modello proposto. E' stato impiegato un analizzatore d'impedenza, HP 4192A LF (5Hz-13MHz), equipaggiato con un HP 16047A test fixture per raggiungere una maggiore accuratezza minimizzando i parametri residui come la resistenza di contatto [13].

Le Figg. 2 e 3 mostrano la resistenza equivalente serie R_s e la reattanza X_s dell'induttore sotto test #1, calcolate (linea continua) e misurate (linea a punti) in funzione della frequenza. La resistenza equivalente serie R_s e la reattanza X_s dell'induttore sotto test #2, calcolate (linea continua) e misurate (linea a punti) sono riportate in Figg. 4 and 5, rispettivamente. Si osservi il buon accordo fra i risultati numerici e quelli sperimentali.

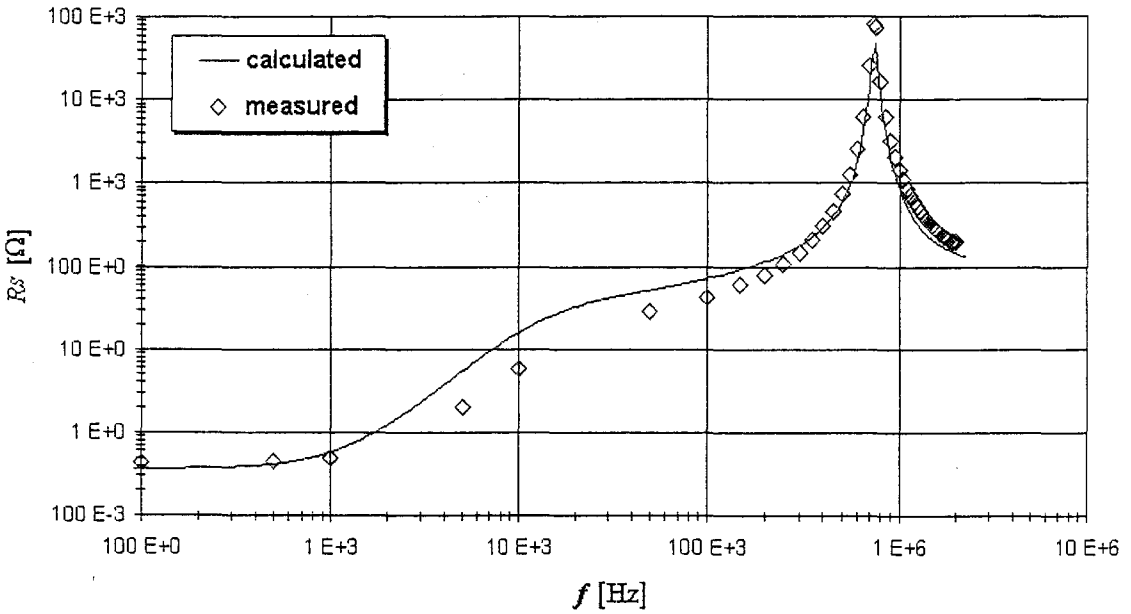

Fig. 6.2. Resistenza equivalente serie, R_s, calcolata e misurata, per l'induttore in aria #1.

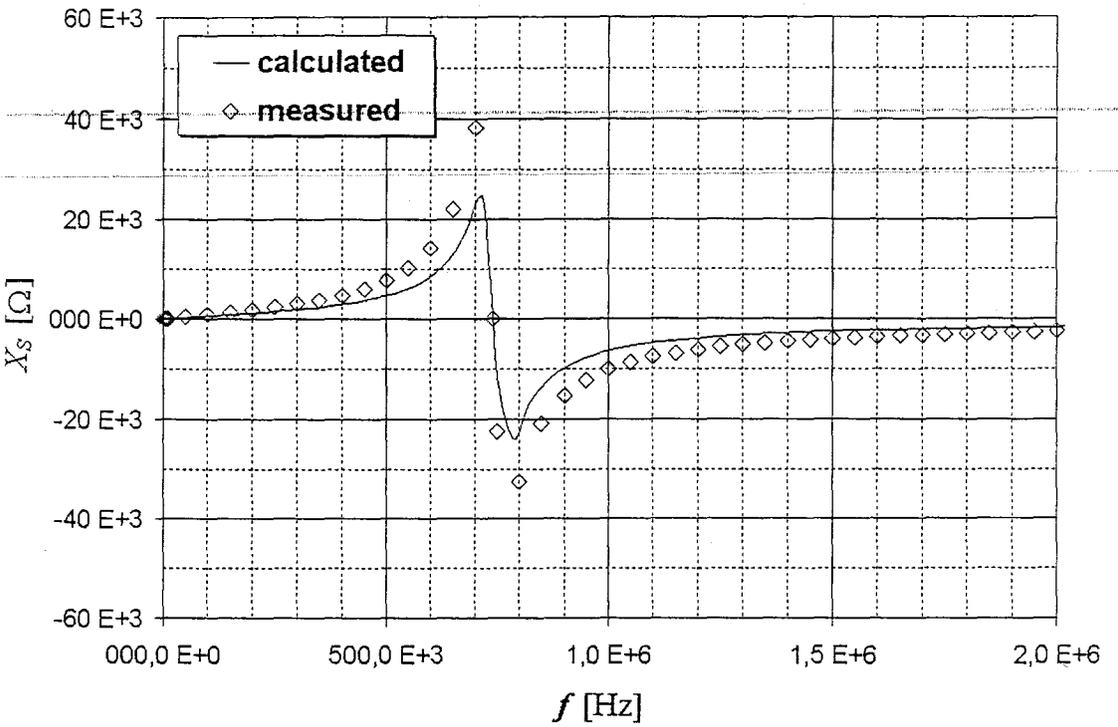

Fig. 6.3. Reattanza equivalente serie, X_s, calcolata e misurata, per l'induttore in aria #1.

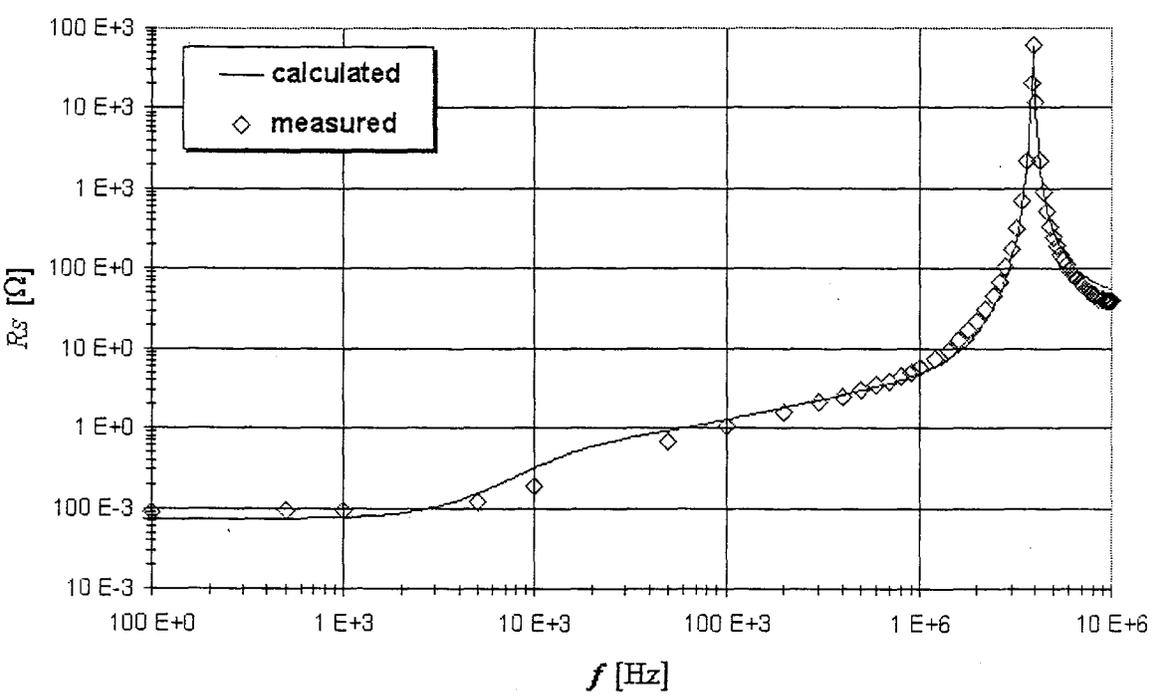

Fig. 6.4. Resistenza equivalente serie, R_s, calcolata e misurata, per l'induttore in aria #2.

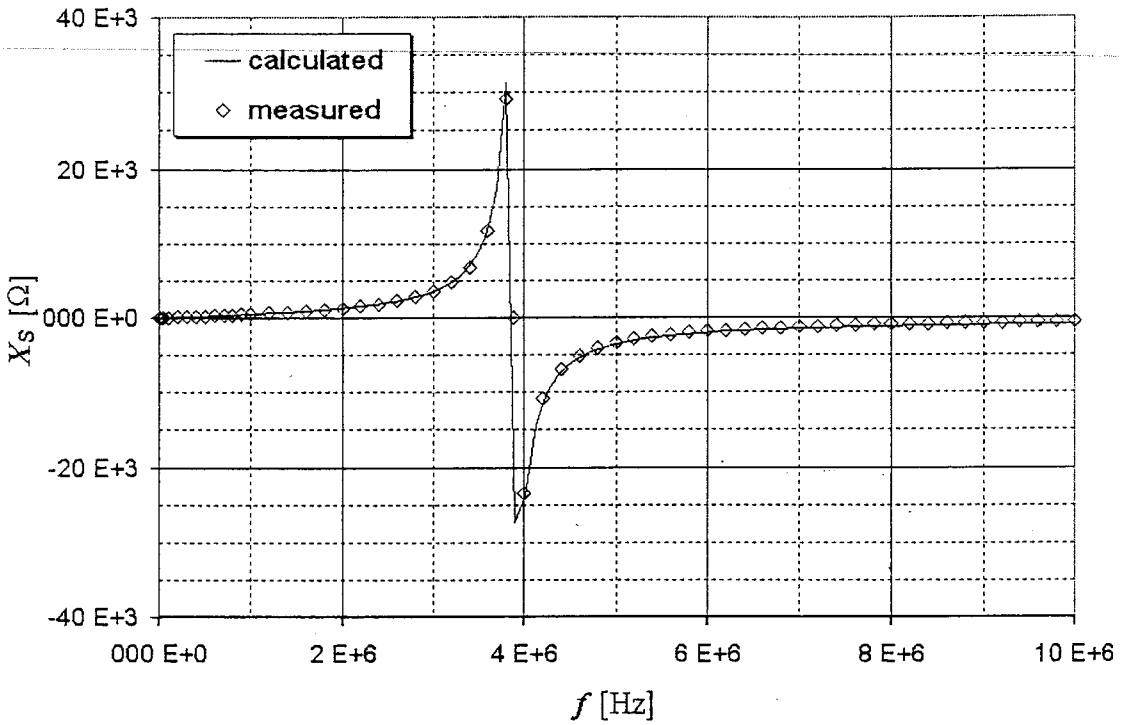

Fig. 6.5. Reattanza equivalente serie, X_s, calcolata e misurata, per l'induttore in aria #2.

6.2.2 Induttori con nucleo ferromagnetico laminato

Negli induttori con nucleo ferromagnetico laminato, a causa della alta conducibilità elettrica del ferro e nonostante la laminazione del nucleo, gli effetti prodotti dalle correnti parassite nel nucleo sono significativi già a partire da frequenze di alcune decine di kHz. Alle alte frequenze le correnti parassite causano perdite addizionali nel nucleo; inoltre, il campo magnetico nel nucleo è indebolito e di conseguenza, l'induttanza principale diminuisce. Le correnti parassite e i corrispondenti parametri nel modello dell'induttore sono stati valutati per mezzo di un' analisi elettromagnetica monodimensionale ed estesa a nuclei con traferro [10]. Infatti, l'introduzione del traferro è il modo comune più usato per linearizzare il comportamento di un induttore per una ampia escursione della corrente dell'avvolgimento, evitando la saturazione del nucleo e riducendo la distorsione armonica.

In questo caso la resistenza totale in c.a. R_{ac} e la induttanza totale L_{ac} sono date da

$$R_{ac} = R_w + R_c \tag{6.7}$$

e

$$L_{ac} = L_{ac}^m + L_{ac}^l \tag{6.8}$$

dove R_c è la resistenza equivalente serie, legata alle perdite dovute alle correnti parassite che fluiscono nel nucleo, L_{ac}^m è l'induttanza principale, legata alle linee di campo magnetico contenute nel nucleo e L_{ac}^l è l'induttanza di dispersione.

Per induttori in nucleo ferromagnetico laminato non saturo, le espressione di R_c e L_{ac}^m sono [10]

$$R_c = \omega L_{dc}^m \frac{\delta_c}{s} \frac{\sinh\frac{s}{\delta_c} - \sin\frac{s}{\delta_c}}{\cosh\frac{s}{\delta_c} + \cos\frac{s}{\delta_c}} \tag{6.9}$$

e

$$L_{ac}^m = L_{dc}^m \frac{\delta_c}{s} \frac{\sinh\frac{s}{\delta_c} + \sin\frac{s}{\delta_c}}{\cosh\frac{s}{\delta_c} + \cos\frac{s}{\delta_c}} \tag{6.10}$$

dove L_{dc}^m è l'induttanza principale a bassa frequenza, s è lo spessore del lamierino e δ_c è la profondità di penetrazione per i lamierini data da

$$\delta_c = \sqrt{\frac{\rho_c}{\pi f \mu_e}} \tag{6.11}$$

con ρ_c resistività elettrica dei lamierini e μ_e permeabilità equivalente del circuito magnetico con traferro. Il valore di μ_e per un nucleo EI è calcolato successivamente.

Nella (6.7) il parametro R_w è calcolato per mezzo della (6.4). L'induttanza di dispersione L_{ac}^l nella (6.8) è dipendente dalla frequenza e può essere valutata per mezzo dell'approccio di Dowell [11] come

$$L_{ac}^l = R_{wdc} \frac{A}{\omega} \cdot \left[\frac{e^{2A} - e^{-2A} - 2\sin(2A)}{e^{2A} + e^{-2A} - 2\cos(2A)} + 2\frac{N_l^2 - 1}{3} \frac{e^A - e^{-A} + 2\sin A}{e^A + e^{-A} + 2\cos A} \right]. \tag{6.12}$$

Negli induttori con nucleo ferromagnetico laminato, la capacità parassita totale C tiene conto degli effetti delle capacità tra le spire e tra queste ed il nucleo e può essere calcolata come descritto in [8]. La resistenza parallela R_p tiene in considerazione gli stessi fenomeni fisici

considerati per gli induttori in aria. Sono stati presi in esame due differenti induttori in nucleo ferromagnetico laminato, realizzati per mezzo dello stesso nucleo EI descritto in Fig. 6.6 in modo da considerare il contributo dell'avvolgimento. Il valore della permeabilità equivalente del nucleo EI è stato calcolato come

$$\mu_e = \mu_c \frac{l_c}{l_c + 2\mu_{rc} l_a} \tag{6.13}$$

dove μ_c *è* la permeabilità magnetica dei lamierini di ferro, μ_{rc} è la corrispondente permeabilità relativa, l_c è la lunghezza del percorso costituito dagli assi geometrici della gamba centrale e quella di una delle due gambe più esterne e $2l_a$ è il traferro totale.

I parametri di interesse sono riportati in Tabella 6.2. In questa Tabella è riportato il valore in bassa frequenza dell'induttanza principale invece di quello totale in quanto per induttori in nucleo ferromagnetico laminato l'induttanza di dispersione è di solito trascurabile se confrontata con il valore di quella principale. Il valore in bassa frequenza dell'induttanza principale è calcolato come

$$L_{dc}^{m} = \mu_e (N_l N_t)^2 \frac{A_{iron}}{l_c} \tag{6.14}$$

dove A_{iron} è l'effettiva sezione trasversale della gamba centrale. La permeabilità magnetica del nucleo ferromagnetico laminato usata nei calcoli corrisponde al suo valore iniziale. La permeabilità relativa iniziale misurata è μ_{rci} = 300 mentre la resistività dei lamierini di ferro misurata è $\rho_c = 7 \times 10^{-7}$ Ωm. Lo spessore del lamierino è s = 0.3 mm.

Le Figg. 6.7 e 6.8 mostrano la resistenza equivalente serie, R_s ,e la reattanza, X_s ,dell'induttore in prova #3, calcolate (linea continua) e misurate (linea a punti), in funzione della frequenza. Le Figg. 6.9 e 6.10 riportano la resistenza equivalente serie R_s e la reattanza X_s per l'induttore #4, calcolate (linea continua) e misurate (linea a punti). Le Figg. 6.7 – 6.10 mostrano un buon accordo tra i risultati calcolati e quelli sperimentali per i parametri equivalenti serie.

Tabella 6.2

PARAMETRI PER INDUTTORI IN NUCLEO FERROMAGNETICO LAMINATO

	Induttore #3	Induttore #4
d (mm)	1.5	1.46
p (mm)	$p \approx d$	$p \approx d$
N_l	6	2
N_t	23	24
A_{iron} (mm^2)	1067	1067
l_c (mm)	168	168
l_a (mm)	0.4	0.21
μ_e / μ_o	123.5	175
R_{wdc} (mΩ)	236	73
L^m_{dc} (mH)	18.8	3.15
f_r (MHz)	0.103	1.485
R_p (Ω)	150	40

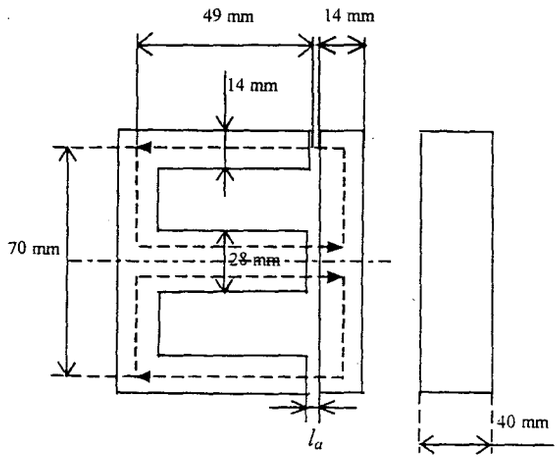

Fig. 6.6. Vista di un nucleo EI.

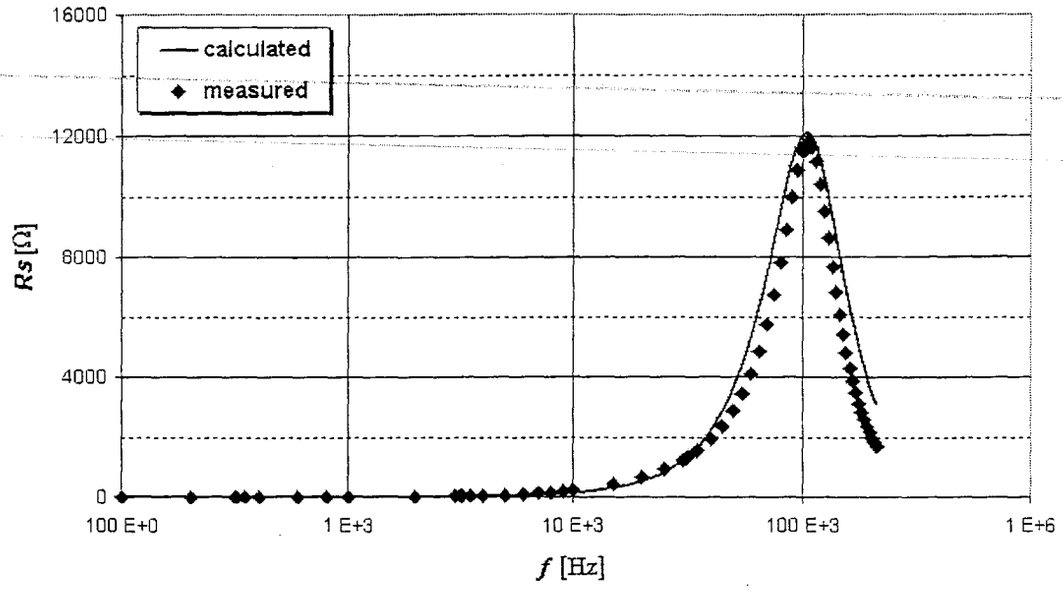

Fig. 6.7. Resistenza equivalente serie, R_s ,calcolata e misurata, in funzione della frequenza, per l'induttore #3.

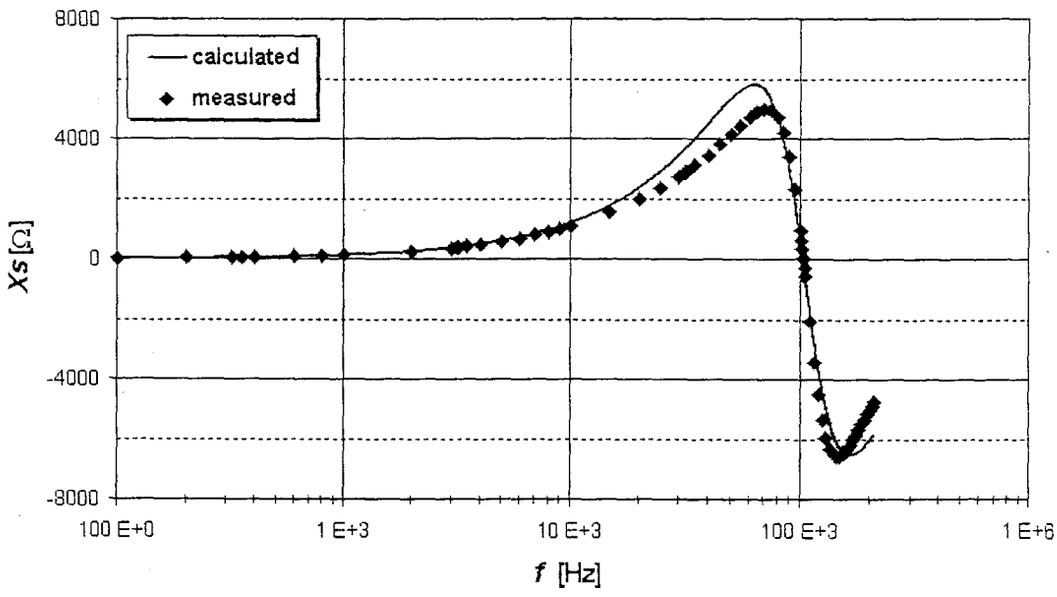

Fig. 6.8. Reattanza equivalente serie, X_s, calcolata e misurata, in funzione della frequenza, per l'induttore #3.

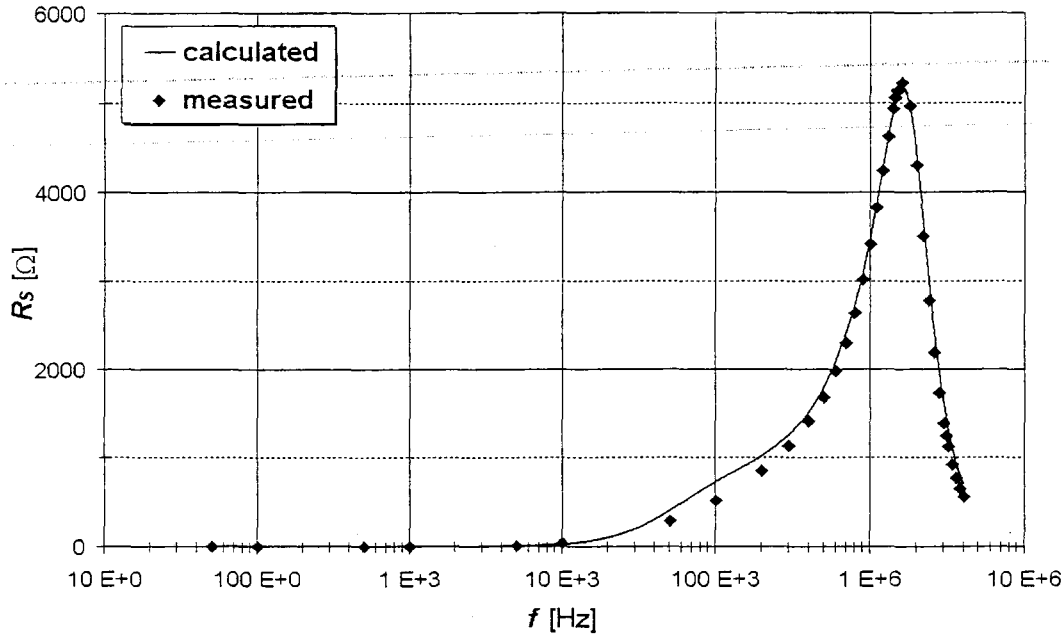

Fig. 6.9. Resistenza equivalente serie, R_s ,calcolata e misurata, in funzione della frequenza, per l'induttore #4.

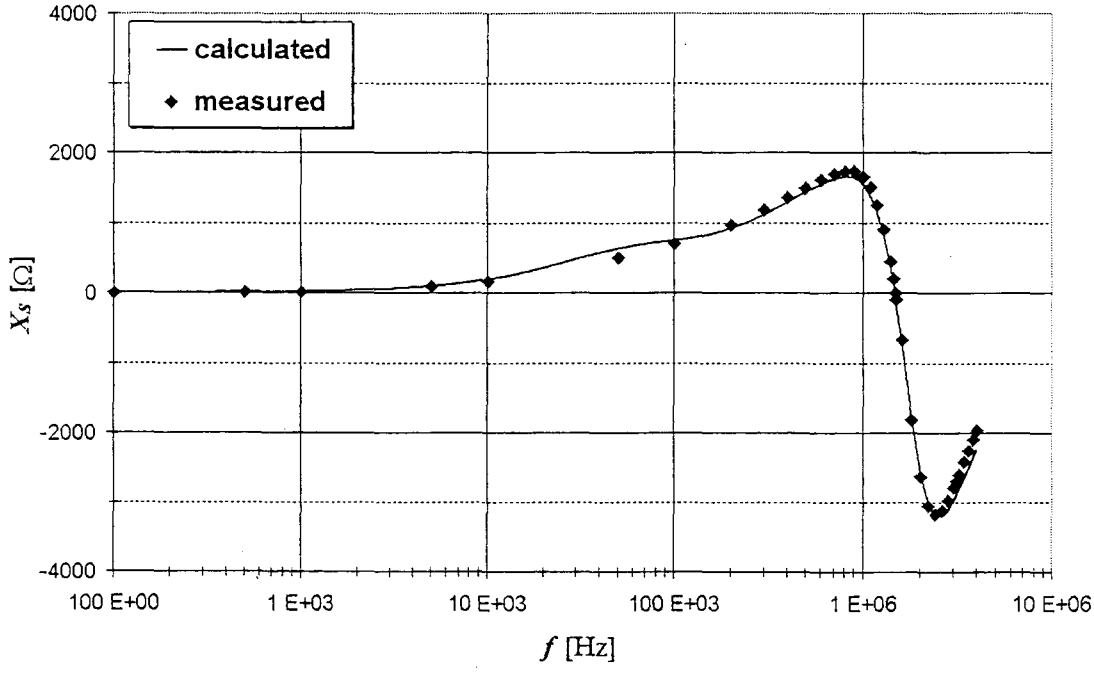

Fig. 6.10. Reattanza equivalente serie, X_s ,calcolata e misurata, in funzione della frequenza, per l'induttore #4.

6.3 CONFRONTO NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA

In questa sezione è studiato un confronto tra induttori in aria e con nucleo ferromagnetico laminato nel campo delle alte frequenze. Tra tutte le possibili realizzazioni dei due tipi di induttori, si è deciso di confrontare quelli con lo stesso avvolgimento; questa scelta permette di valutare come la presenza di un nucleo ferromagnetico laminato influenzi l'induttore nel campo dell' alta frequenza. Il confronto è fatto con riferimento all'induttore in aria #2 e all'induttore con nucleo ferromagnetico laminato #4.

Nelle seguenti sottosezioni, sono calcolate e misurate per questi due induttori alcune grandezze d'interesse (cioè induttanza totale, resistenza totale in c.a., ESL, ESR e fattore di qualità). Per far risaltare gli effetti delle correnti parassite nel nucleo, il ramo capacitivo del circuito equivalente mostrato in Fig. 6.1 (a) non è stato considerato. In questo modo i valori calcolati non dipendono dalla capacità parassita mentre quelli misurati dipendono da essa. E' possibile, cosi', confrontando i risultati teorici e sperimentali, porre in evidenza le frequenze fino alle quali gli effetti capacitivi sono trascurabili.

6.3.1 Induttanza

In questa sezione è studiato il comportamento dell'induttanza totale L_{ac} in funzione della frequenza per i due induttori considerati.

Naturalmente il confronto ha senso se le induttanze sono normalizzate rispetto al loro valore di bassa frequenza così che possa essere messo in evidenza il comportamento in alta frequenza.

La Fig. 6.11 mostra i valori normalizzati dell'induttanza totale calcolata L_{ac} e dell'induttanza equivalente serie misurata L_s in funzione della frequenza. La curva calcolata per l'induttore laminato mostra che la diminuzione dell'induttanza totale L_{ac}, dovuta alle correnti parassite nel nucleo, è piccolo fino a poche decine di kHz mentre il valore misurato di L_s mostra che l'effetto della capacità parassita totale dei due induttori è trascurabile fino a circa 1 MHz.

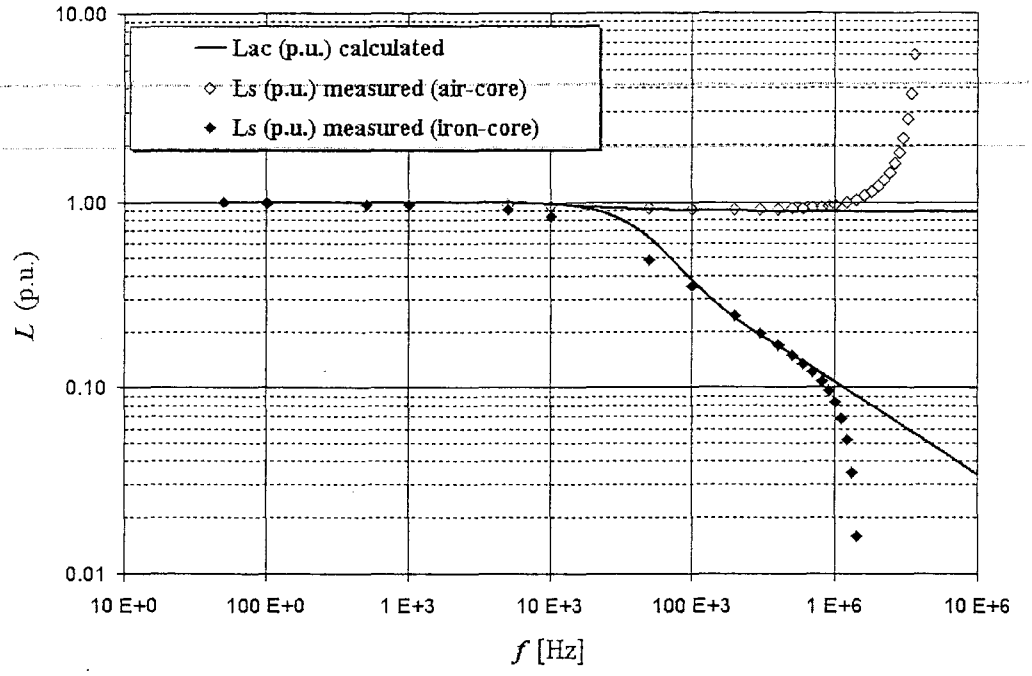

Fig. 6.11. Induttanza totale calcolata, L_{ac}, ed induttanza equivalente serie misurata L_s (p.u.)

6.3.2 Perdite

In questa sottosezione verranno analizzate la perdite dell'induttore in termini di resistenza totale in c.a. La Fig. 6.12 mostra il comportamento della resistenza calcolata in c.a., R_{ac} ,e della resistenza equivalente serie misurata, R_s, normalizzate rispetto alla resistenza inc.c. dell'avvolgimento, in funzione della frequenza.

Come atteso, la resistenza R_{ac} e quindi le perdite aumentano di più nel caso di induttore laminato che in quello di induttore in aria. Nel campo di frequenza da 0.5 a 5 kHz l'incremento della perdita nell'induttore in laminato va da circa 10 a 50 volte le perdite nell'induttore in aria.

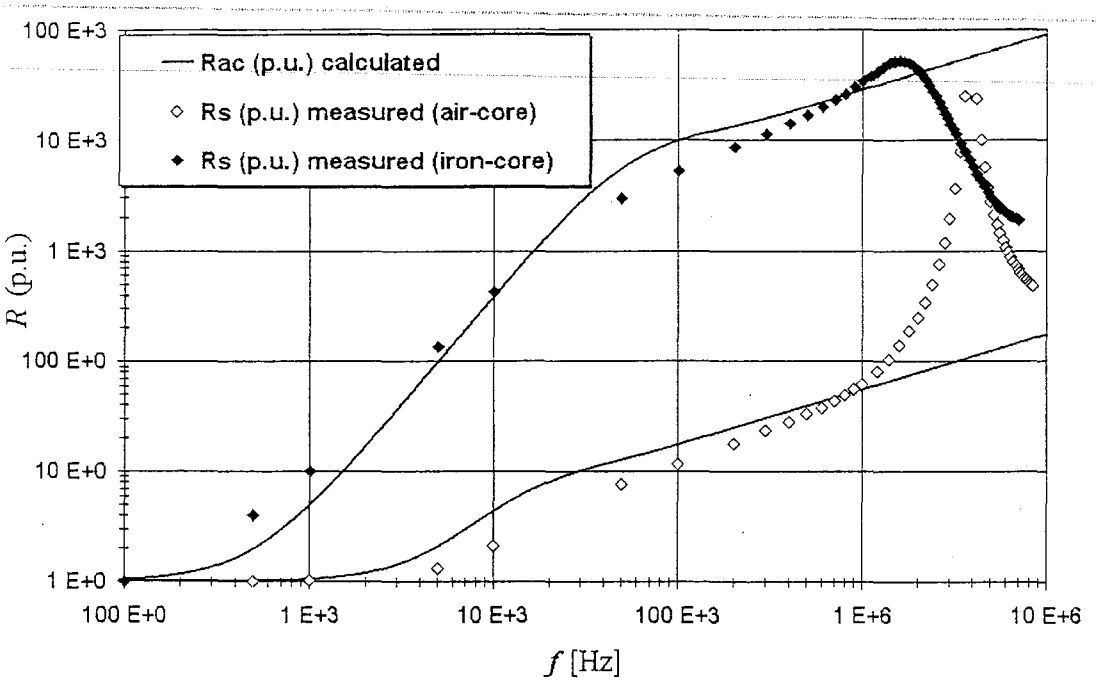

Fig. 6.12. Resistenza totale calcolata ac, R_{ac}, e resistenza equivalente serie misurata, R_s, (p.u.).

6.3.3 Fattore di qualità

La Fig. 6.13 rappresenta il fattore di qualità calcolato, definito come $Q = \omega L_{ac}/R_{ac}$, e quello misurato $Q_s = X_s/R_s$. Può essere evidenziato che per frequenze fino a pochi kHz l'induttore in nucleo ferromagnetico laminato ha un più elevato fattore di qualità e di conseguenza realizza il componente passivo con maggiore efficienza.

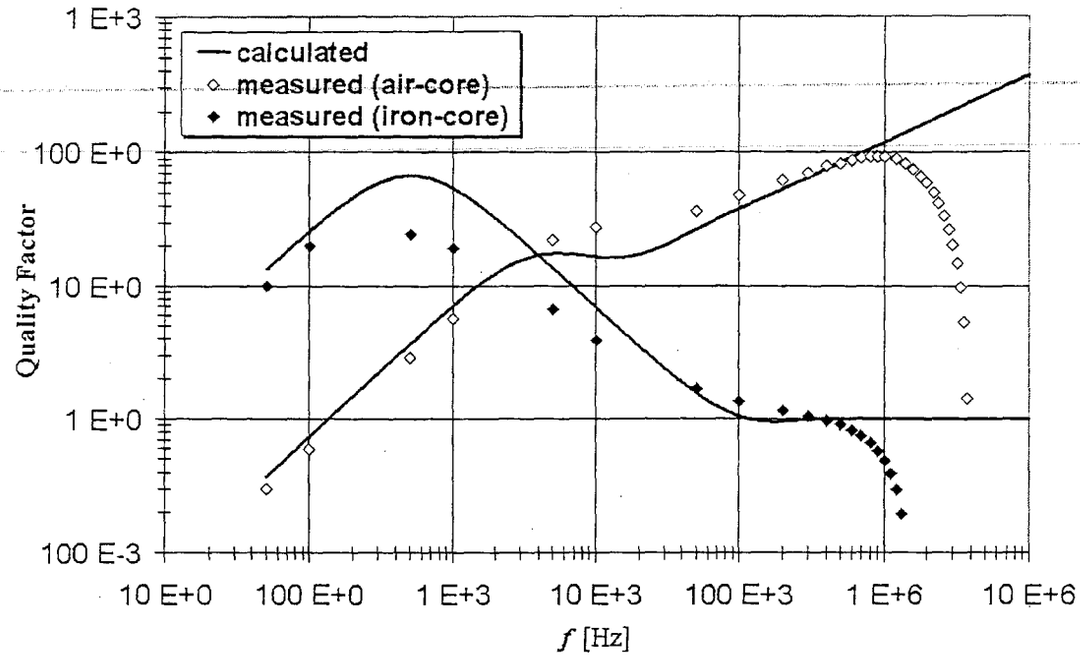

Fig. 6.13 . Fattore di qualità calcolato e misurato.

6.4 CONCLUSIONI

In questo capitolo è stato proposto e validato, per mezzo di prove sperimentali, un circuito equivalente, a parametri concentrati, in alta frequenza, per induttori con nucleo ferromagnetico laminato ed in aria che permette di studiarne il comportamento e confrontarli in termini di induttanza, perdite e fattore di qualità.

Per frequenze fino a pochi kHz si preferisce l'induttore laminato a quello in aria dato il suo più elevato fattore di qualità, anche se l'induttanza dell'induttore laminato decresce leggermente con l'aumentare della frequenza. In questo intervallo di frequenza il nucleo ferromagnetico laminato costituisce un percorso preferenziale per le linee di campo magnetico riducendo così gli accoppiamenti magnetici con altre parti del sistema e limitando le interferenze elettromagnetiche.

I due induttori presi in esame hanno quasi lo stesso valore di capacità parassita totale; quindi la presenza del nucleo ferromagnetico laminato non influenza, praticamente, il valore della capacità parassita, la quale dipende principalmente dalla realizzazione dello avvolgimento identico per i due induttori.

BIBLIOGRAFIA

[1] T. Sato and Y. Sakaki, "Physical meaning of equivalent loss resistance of magnetic cores," *IEEE Trans. Magn.*, vol 26, pp.. 2894-2897, Sept. 1990.

[2] M. Bartoli, A. Reatti, and M.K. Kazimierczuk, "Modeling iron-powder inductors at high frequencies," in *Proc. IEEE IAS Annual Meeting,* 1994, pp.1225-1232.

[3] H. Saotome and Y. Sakaki, "Iron loss analysis of Mn-Zn ferrite cores", *IEEE Trans. Magn*, vol. 33, pp.728-734, Jan. 1997.

[4] D. Zhang and F. Foo, "Theoretical analysis of the electrical and magnetic field distributions in a toroidal core with circular cross section", *IEEE Trans. Magn*, vol. 35, pp. 1924-1931, May 1999.

[5] M.K. Kazimierczuk, G. Sancineto, G. Grandi, U. Reggiani, A, Massarini, "High-frequency small-signal model of ferrite core inductors," *IEEE Trans. Magn*, vol. 35, pp. 4185-4191, Sept. 1999.

[6] L. Rouve, F. Ossart, T. Waeckerlé, A. Kedous-Lebouc, "Magnetic flux and losses computation in electrical laminations," *IEEE Trans. Magn*, vol. 32, pp. 4219-4221, Sept. 1996.

[7] J. Gyselinck, L. Vandevelde, J. Melkebeek, P. Dular, F. Henrotte and W. Legros, " Calculation of eddy currents and associated losses in electrical steel laminations", *IEEE Trans. Magn*, vol. 35, pp. 1191-1194, May 1999.

[8] A. Massarini, M.K. Kazimierczuk, and G. Grandi, "Lumped parameter models of single- and multiple-layer inductors," in *Proc. IEEE PESC*, 1996, pp. 295-301.

[9] G. Grandi, M.K. Kazimierczuk, A. Massarini, and U. Reggiani, "Stray capacitances of single-layer solenoid air-core inductors," *IEEE Trans. Ind. Applicat.*, vol. 35, pp. 1162-1168, Sept./Oct. 1999.

[10] U. Reggiani, G. Grandi, G. Sancineto, M.K. Kazimierczuk, and A. Massarini, "High-frequency behavior of laminated iron-core inductors for filtering applications," in *Proc. IEEE APEC*, 2000, pp. 654-660.

[11] P.J. Dowell, "Effects of eddy currents in transformer windings," *Proc. Inst. Elect. Eng.*, vol. 113, pp. 1387-1394, Aug. 1966.

[12] F.W. Grover, *Inductance Calculations*. New York: D. Van Nostrand Company, Inc., 1947.

[13] M. Honda, *The Impedance Measurament Handbook.* Hewlett Packard Co., 1994.

[14] U. Reggiani, G. Grandi, G. Sancineto, G. Serra, "Comparison between Air-Core and Laminated Iron-Core Inductors in Filtering Applications for Switching Converters," IEEE-CIEP Conference, Acapulco, GRO., MEXICO, OCTOBER 15-19, 2000, PP. 9 - 14.

OSSERVAZIONI CONCLUSIVE

- E' stato sviluppato un modello circuitale a parametri concentrati per la rappresentazione del comportamento alle alte frequenze degli induttori avvolti su nucleo ferromagnetico.

- Le espressioni per l'induttanza principale e la resistenza associata alle perdite nel nucleo sono state ottenute analiticamente in forma chiusa per un nucleo cilindrico di ferrite e per un nucleo laminato.

- Sono stati confrontati gli andamenti, in funzione della frequenza, dei parametri calcolati dal modello e di quelli rilevati sperimentalmente per i due induttori.

- E' stato sviluppato un modello a parametri costanti per induttori in nucleo ferromagnetico laminato per l'analisi nel dominio nel tempo e in particolare di transitori elettromagnetici.

- I modelli sviluppati possono essere utilizzati per descrivere il comportamento degli induttori impiegati nei circuiti elettronici di potenza, dei filtri passivi, ecc.