

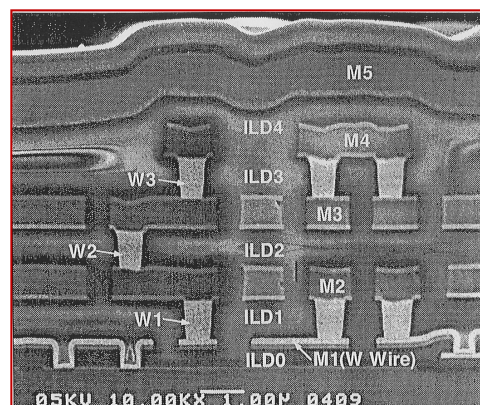
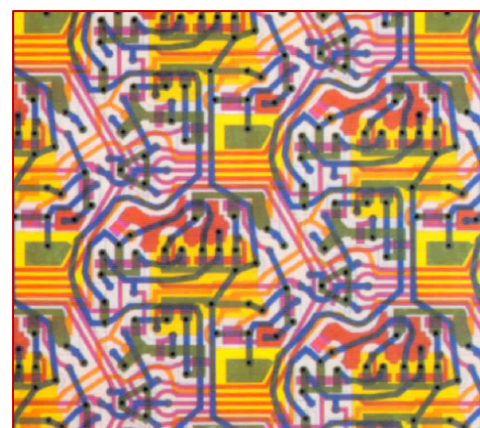
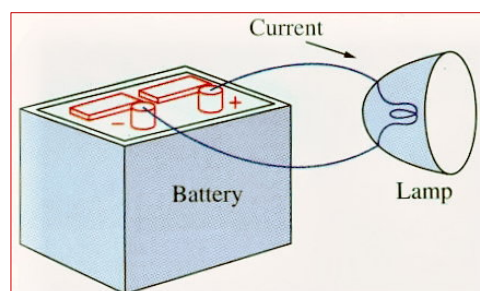
2. Introduzione alla Teoria dei Circuiti Elettrici

Teoria dei Circuiti

La *teoria dei circuiti elettrici* (*electric circuit theory*) e la *teoria dei campi elettromagnetici* (*electromagnetic fields theory*) sono le due teorie fondamentali su cui si basano tutti i settori dell'*Ingegneria Elettrica ed Elettronica* (*Electrical and Electronic Technology*). Molti di questi settori, come la produzione, la trasmissione e l'utilizzazione dell'energia elettrica, le macchine e gli azionamenti elettrici, l'elettronica di segnale e l'elettronica di potenza, il controllo automatico, l'elettronica per le telecomunicazioni, la strumentazione di misura elettrica ed elettronica sono state sviluppate grazie principalmente alla teoria dei circuiti elettrici.

Buona parte dell'Ingegneria Elettrica riguarda il trasferimento di segnali elettrici o dell'energia elettrica da un punto ad un altro. Durante il trasferimento il segnale viene in parte elaborato o trasformato. Ciò richiede un'interconnessione di dispositivi elettrici che operano e trasformano il segnale. L'interconnessione viene attuata per mezzo di un circuito e ciascun suo componente è detto **elemento circuitale** (*circuit element*), il quale interviene sul segnale elettrico. Nella prima figura a fianco l'energia elettrica fornita al circuito dalla batteria, viene trasferita alla lampada, viene da essa utilizzata ed è trasformata in luce. Il circuito elettrico è formato da due elementi circuitali: batteria e lampada. Tali elementi sono connessi fra loro. La seconda figura si riferisce ad un impianto per il trasporto di potenza ad alta tensione (400 kV). Nella terza e nella quarta figura sono mostrati due esempi che riguardano l'elaborazione del segnale. Nella terza figura è mostrato un circuito stampato di una scheda elettronica di controllo. Nella quarta figura è mostrata una sezione ingrandita al microscopio elettronico di una CPU per calcolatore elettronico a cinque strati. Tutti questi apparati sono stati progettati utilizzando la teoria circuitale.

Il termine circuito elettrico indica il luogo fisico in cui avvengono fenomeni elettromagnetici. L'altro significato del termine circuito elettrico riguarda i modelli matematici che lo descrivono. Di solito il termine viene utilizzato per indicare i circuiti e i relativi modelli che soddisfano la descrizione per mezzo di **parametri concentrati** (*lumped parameters*). Questa ipotesi considera tutti i fenomeni elettromagnetici concentrati all'interno di corpi fisici (resistori, condensatori, induttori, generatori di tensione e di corrente, diodi, transistori, amplificatori operazionali). Questi sono gli elementi circuitali che compongono il circuito. Le cariche elettriche si muovono



tra i componenti circuitali di un circuito attraverso interconnessioni elettriche. Altri dispositivi descritti da **parametri distribuiti** (*distributed parameters*) non possono essere descritti da modelli a parametri concentrati e quindi non possono essere descritti tramite la teoria circuittale. Ad esempio le antenne appartengono a quest'ultima categoria.

Le grandezze a parametri concentrati sono **grandezze integrali** (*integral quantities*) od anche **macroscopiche** (*macroscopic quantities*) quali la corrente, la tensione ed il flusso magnetico. Tali grandezze sono indipendenti dallo spazio e dipendono solo dal tempo. La corrente elettrica è il flusso del vettore densità di corrente. Quindi è un integrale di superficie. La tensione elettrica è l'integrale di linea del vettore campo elettrico. Il flusso magnetico è l'integrale di superficie del vettore induzione magnetica. La densità di corrente, il campo elettrico e l'induzione magnetica sono grandezze caratteristiche del punto e in genere cambiano in dipendenza della posizione nello spazio (grandezze a parametri distribuiti o **grandezze microscopiche** - *microscopic quantities*). Oltre al tempo dipendono dalle coordinate spaziali x, y e z .

Le equazioni della teoria circuittale, che adotta modelli a parametri concentrati, sono equazioni algebriche od equazioni integro-differenziali dipendenti solo dalla coordinata tempo. Anche quest'ultime equazioni in molti casi possono essere ridotte a equazioni algebriche. A questo proposito si vedrà come, per mezzo della trasformata di Steinmetz, sia possibile per grandezze sinusoidali a frequenza fissata (sistemi a corrente alternata), trasformare le equazioni del modello circuittale da equazioni integro-differenziali ad equazioni algebriche. Le equazioni dei modelli a parametri distribuiti sono equazioni alle derivate parziali nel tempo e nello spazio, equazioni che richiedono complesse metodologie di soluzione.

Le caratteristiche dei materiali (conduttori, semiconduttori ed isolanti) hanno permesso lo sviluppo della tecnologia dei circuiti elettrici utilizzati in moltissime applicazioni. La loro descrizione per mezzo della teoria dei circuiti a parametri concentrati con approssimazioni molto vicine alla realtà, rappresenta un fattore fondamentale alla base dello sviluppo dell'Ingegneria Elettrica dell'ultimo secolo.

Il Circuito Elettrico

Un circuito elettrico è composto da un insieme di elementi circuitali interconnessi fra loro. I fenomeni elettromagnetici (EM) sono confinati all'interno degli elementi circuitali. Le interconnessioni sono considerate ideali, cioè senza perdite e costituite da conduttori ideali a resistenza nulla. I fenomeni elettromagnetici all'interno degli elementi circuitali avvengono secondo le leggi dell'elettromagnetismo descritte nel capitolo precedente.

L'approssimazione circuittale si ottiene dall'approssimazione dell'elettro-dinamica quasi-stazionaria dell'elettro-dinamica. Essa assume che:

1. Al di fuori degli elementi circuitali i fenomeni EM tacciono ($\partial \mathbf{D} / \partial t = 0$ e $\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$).
2. Nella regione esterna agli elementi ed all'interno dei conduttori si ha che:
 - il campo elettrico è conservativo ($\mathbf{E} = -\nabla v$) e la tensione elettrica fra due punti 1 e 2 deriva dalla differenza di potenziale nei punti $v_1 - v_2$).
 - la densità di corrente di spostamento è nulla ($\partial \mathbf{D} / \partial t = 0$), La densità di corrente totale coincide con la densità di corrente di conduzione che diviene solenoidale ($\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$).
3. All'interno del circuito l'intervallo di tempo di propagazione di un segnale fra un elemento circuittale e l'altro sia nullo.

Per la prima ipotesi il campo elettrico all'esterno degli elementi circuitali è conservativo e la tensione fra due punti è data da una differenza di potenziale. Per la seconda ipotesi la carica

elettrica nei conduttori non varia nel tempo. In tal caso quindi per la legge di Gauss anche il campo spostamento non varia nel tempo. Perciò la densità di corrente di spostamento è nulla e la densità di corrente totale coincide con la densità di corrente di conduzione. In tal caso quindi all'interno dei conduttori la densità di corrente totale coincide con la densità di corrente di conduzione e il vettore di quest'ultima è solenoidale. Il suo flusso, cioè la corrente di conduzione, non varia per qualsiasi sezione del conduttore. La terza ipotesi considera nulli i tempi di propagazione fra gli elementi circuitali indipendentemente dalla loro distanza.

Le applicazioni circuitali comprendono settori con caratteristiche dei circuiti molto diverse:

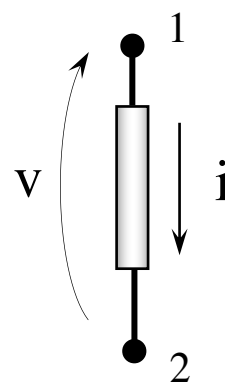
- **Dimensione:** $10^{-3} - 10^6$ m (circuiti integrati, circuiti hi-fi, computer, dispositivi elettronici, sistemi tlc, sistemi per la produzione di potenza elettrica, sistemi di trasporto e di utilizzo della potenza elettrica).
- **Tensione:** $10^{-6} - 10^6$ V (dispositivi per l'analisi del rumore - sistemi di potenza)
- **Corrente:** $10^{-15} - 10^6$ A (elettrometri - sistemi di potenza)
- **Frequenza:** $0 - 10^9$ Hz (circuiti in corrente continua - processori)
- **Potenza:** $10^{-14} - 10^9$ W (segnali radio intergalattici - sistemi elettrici di potenza)

Il Bipolo Elettrico

L'**elemento circuitale a due terminali** (*two terminal element*), anche detto **elemento circuitale a due poli** o **elemento circuitale bipolare** o semplicemente **bipolo**, consiste in una superficie chiusa S da cui emergono due terminali. Tutti i fenomeni elettromagnetici EM sono confinati all'interno di S . Quindi all'interno della superficie S del bipolo il campo elettrico \mathbf{E} può essere non-conservativo, $\partial\mathbf{B}/\partial t$ e $\partial\mathbf{D}/\partial t$ possono essere non-nulli. All'esterno di S tutti i fenomeni EM sono silenti: il campo \mathbf{E} è sempre conservativo, $\partial\mathbf{B}/\partial t$ e $\partial\mathbf{D}/\partial t$ sono sempre nulli. Perciò la superficie dell'elemento circuitale ha funzione di schermo per i fenomeni EM.

Lo stato dell'elemento circuitale ad ogni istante è descritto dalla differenza di potenziale v fra i suoi due terminali e la corrente i che lo attraversa.

La corrente che fluisce attraverso il bipolo, è la corrente entrante da un terminale, corrente uguale a quella uscente dal terminale opposto per la solenoidalità di \mathbf{J} . Per i due terminali del bipolo, all'esterno della superficie chiusa S del bipolo stesso, $\partial\mathbf{D}/\partial t$ è nulla e \mathbf{J} coincide con \mathbf{J}_t . Quindi anche \mathbf{J} è solenoidale. La corrente di conduzione totale uscente da S è nulla. La corrente totale uscente da S è data dalla somma algebrica delle due correnti uscenti dai due terminali. Perciò la corrente entrante da un terminale è uguale alla corrente uscente dall'altro.



Poiché il campo elettrico \mathbf{E} è conservativo, al di fuori della superficie chiusa dell'elemento circuitale, si definisce una funzione potenziale $f(x,y,z) = -v(x,y,z)$ che assume sui due terminali 1 e 2 rispettivamente i valori v_1 e v_2 e la differenza di potenziale $v = v_1 - v_2$ rappresenta la tensione del bipolo.

Nella teoria circuitale un bipolo costituisce un **ramo del circuito** (*circuit branch*). La corrente i è detta **corrente di ramo** (*branch current*) e fluisce dal terminale a potenziale maggiore al terminale a potenziale minore. La differenza di potenziale $v = v_1 - v_2$ è detta **tensione di ramo** (*branch tension* o *branch voltage*).

La relazione fra i e v , data da $v = f(i)$, è definita per ogni elemento circuitale considerato: **equazione caratteristica dell'elemento circuitale (element equation) o equazione di ramo.**

La **potenza elettrica del bipolo (two terminal element electric power)** è il lavoro compiuto dal campo elettrico \mathbf{E} sulle cariche che attraversano la sezione del ramo per unità di tempo:

$$p(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\int_1^2 \Delta q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} / \Delta t \right) = \frac{dq}{dt} \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = i(t) v(t)$$

Qualora si adotti la convenzione precedentemente descritta secondo cui una corrente positiva entra dal terminale a potenziale maggiore, l'espressione sopra definita esprime la potenza assorbita dal bipolo. Quindi una corrente positiva entrante dal terminale a potenziale maggiore da origine ad una potenza assorbita dal bipolo positiva (convenzione dell'utilizzatore o del bipolo passivo).

Elemento circuitale ad n terminali (n-polo)

Un elemento circuitale con n terminali, o poli, con $n > 2$ viene detto **elemento circuitale ad n poli o n-polo (n-terminal circuit element).**

Scelto un terminale di riferimento (M.0), ad esso vengono riferite le tensioni degli altri nodi (M.1, M.2, M.3, ..., M.n-1). Infatti, poiché \mathbf{E} è conservativo all'esterno dell'elemento circuitale, le tensioni sono le differenze fra il potenziale agli $n-1$ nodi di non-riferimento (M.1, M.2, ..., M.n-1) ed il potenziale al nodo di riferimento M.0:

$$\begin{aligned} V_1 &= V_{M.1} - V_{M.0} \\ V_2 &= V_{M.2} - V_{M.0} \\ V_3 &= V_{M.3} - V_{M.0} \\ &\dots\dots\dots \\ V_{n-1} &= V_{M.n-1} - V_{M.0} \end{aligned}$$

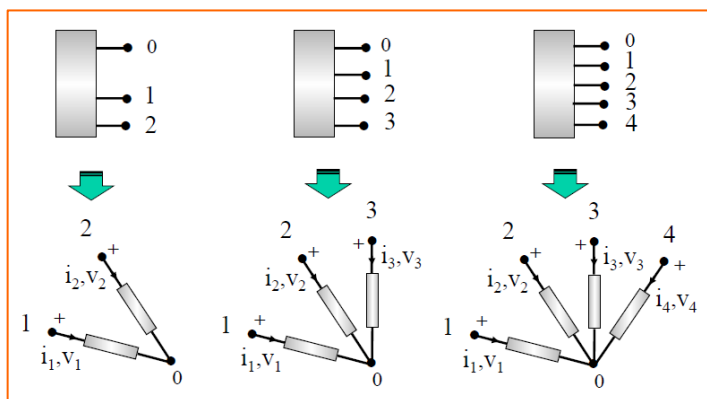
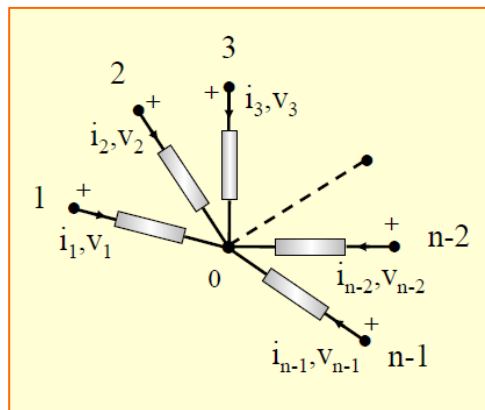
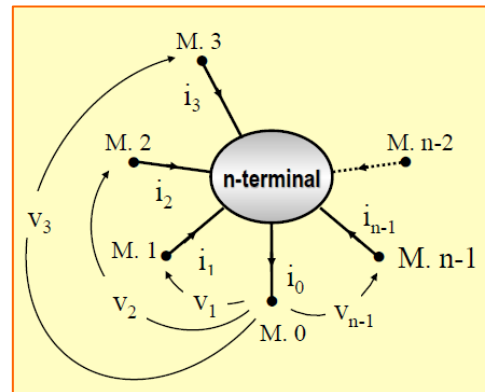
Inoltre si assumono positive le correnti entranti nei nodi non di riferimento ($i_1, i_2, i_3, \dots, i_{n-1}$) e la corrente uscente dal nodo di riferimento (i_0). Per la solenoidalità di \mathbf{J} all'esterno dell'elemento circuitale risulta:

$$i_0 = i_1 + i_2 + \dots + i_{n-1}$$

Lo stato dell'n-polo è definito da $n-1$ coppie di valori tensione-corrente:

$$\begin{aligned} &V_1, V_2, V_3, \dots, V_{n-1} \\ &i_1, i_2, i_3, \dots, i_{n-1} \end{aligned}$$

Perciò l'elemento circuitale ad n terminali è equivalente ad $n-1$ bipoli con un nodo in comune (stella di $n-1$ bipoli). Il nodo in comune è il nodo di riferimento dell'n-polo. L'n-polo quindi corrisponde ad una porzione di un circuito ad $n-1$



rami. Un n -polo è descritto da $n-1$ equazioni che legano le $n-1$ correnti ($i_1, i_2, i_3, \dots, i_{n-1}$) alle $n-1$ tensioni ($v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}$):

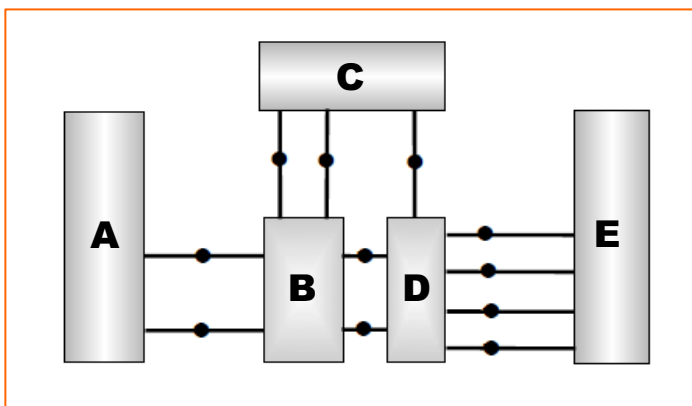
$$v_1=f(i_1), v_2=f(i_2), v_3=f(i_3), \dots, \\ v_{n-1} = f(i_{n-1})$$

Un tripolo quindi corrisponde a due bipoli con un terminale in comune. Un quadripolo corrisponde a tre bipoli collegati a stella. Un elemento a cinque terminali corrisponde a quattro bipoli collegati a stella. Ecc.

Il circuito elettrico

Un circuito elettrico è formato da elementi circuitali interconnessi fra loro. Nel modello circuitale ogni elemento circuitale corrisponde ad una stella di bipoli ognuno dei quali costituisce un **ramo** del circuito. Le interconnessioni si assumono costituite da conduttori ideali (privi di resistenza elettrica e quindi con conducibilità infinita). I **nodi** del circuito sono i punti di connessione di due o più rami. Un circuito è costituito da n nodi ed r rami.

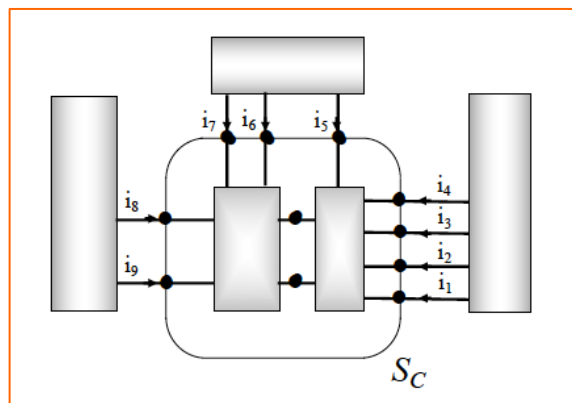
In figura è mostrato un circuito con cinque elementi circuitali. L'elemento A è un bipolo, e quindi è rappresentato da un ramo. L'elemento B ha 6 terminali (6 poli). Esso equivale a 5 bipoli a stella e perciò è rappresentato da 5 rami in un circuito teorico equivalente. L'elemento C da 2 rami, l'elemento D da 6 rami e l'elemento E da 3 rami. Il circuito perciò è formato da $1+5+2+6+3=17$ rami e 11 nodi. Il suo stato è descritto da 17 coppie di valori, le 17 tensioni e le 17 correnti di ramo. Per ciascuno dei 17 rami sono definite altrettante equazioni di ramo.



In un circuito si individuano delle maglie. Una **maglia (loop)** è un qualunque percorso chiuso costituito da rami del circuito passante per ognuno di tali rami una volta sola.

Legge di Kirchhoff delle correnti (LKC)

Si consideri una superficie chiusa S_C che contenga una porzione di un circuito che passi per alcuni nodi del circuito e che non intersechi elementi circuitali. La **legge di Kirchhoff delle correnti (LKC - Kirchhoff current law)** afferma che **la somma algebrica delle correnti uscenti dalla superficie chiusa è nulla**.



Sulla superficie S_C , che non interseca elementi circuitali, $\partial \mathbf{D} / \partial t$ è nullo e \mathbf{J}_t coincide con \mathbf{J} . Per la solenoidalità di \mathbf{J}_t , sulla superficie chiusa S_C il flusso totale della densità di corrente, e quindi della corrente di conduzione, uscente dalla superficie chiusa S_C è nullo:

$$\oiint_{S_C} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = 0$$

Tale flusso è dato dalla somma algebrica delle correnti uscenti dalla superficie S_C . Quindi dalla LKC si ottiene che la somma algebrica di tali correnti è nulla:

$$i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_9 = 0$$

Qualora S_C contenga un solo nodo, si ottiene il seguente corollario: **la somma algebrica delle correnti uscenti da un nodo è nulla**. L'equazione ottenuta prende anche il nome di **equazione di nodo**:

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0$$

Il circuito in figura è costituito da 5 rami e 4 nodi. Per i nodi A, B, e C dalla LKC si ottiene:

$$i_1 - i_4 - i_5 = 0 \quad (\text{A})$$

$$i_1 + i_2 = 0 \quad (\text{B})$$

$$i_2 + i_3 + i_5 = 0 \quad (\text{C})$$

Ogni equazione contiene almeno una corrente non considerata dalle altre due equazioni e perciò aggiunge informazioni non considerate dalle altre equazioni. Nell'equazione per il nodo D vi sono solo correnti già apparse nelle equazioni degli altri tre nodi A, B e C. Essa quindi riporta informazioni già contenute nelle equazioni precedenti. L'equazione del nodo D è una combinazione lineare delle altre tre equazioni. Infatti dalla LKC al nodo D si ricava:

$$i_3 - i_4 = 0$$

Questa equazione si ottiene anche dalla somma algebrica (A)-(B)+(C).

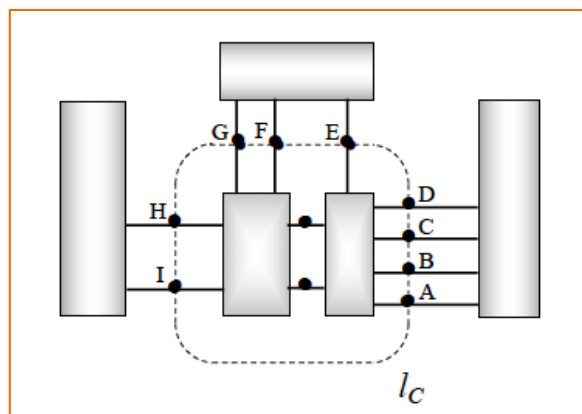
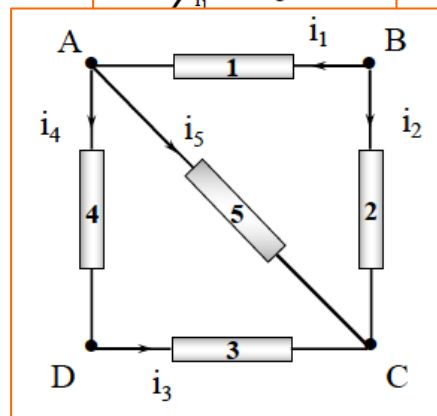
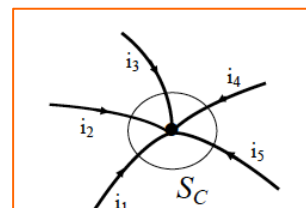
Per un generico circuito elettrico, qualora esso sia costituito da n nodi, **$n-1$ equazioni di nodo sono linearmente indipendenti**.

Legge di Kirchhoff delle tensioni (LKT)

Si consideri una linea chiusa l_C che passi per alcuni nodi di un circuito e non intersechi elementi circuitali. Poiché il vettore campo elettrico \mathbf{E} è un vettore conservativo all'esterno degli elementi circuitali la circuitazione di \mathbf{E} lungo l_C è nulla:

$$\oint_{l_C} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

ed anche:



$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_B^C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \dots \\ \dots + \int_H^I \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_I^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Poiché gli integrali di linea considerati sono integrali di un vettore conservativo per cui $\mathbf{E} = -\nabla v(x,y,z)$, essi sono uguali alle differenze fra i valori che la funzione potenziale $v(x,y,z)$ assume su nodi successivi per cui passa la linea l_c . Quindi dalla LKT si ottiene che **la somma algebrica delle differenze di potenziale fra i nodi per cui passa una linea chiusa è nulla**:

$$V_{AB} + V_{BC} + \dots + V_{HI} + V_{IA} = 0$$

Qualora la linea chiusa l_c sia costituita da una maglia di un circuito si ottiene il seguente corollario: **la somma algebrica delle tensioni di ramo lungo una maglia è nulla**. L'equazione ottenuta prende anche il nome di **equazione di maglia**.

Si considerino le maglie ADCA e ABCA del circuito in figura. Per la LKT si ottiene:

$$-v_4 - v_3 + v_5 = 0$$

$$v_1 - v_2 + v_5 = 0$$

Tutte le tensioni di ramo sono comprese nelle due equazioni di maglia precedenti. Per la maglia ABCDA dalla LKT si ottiene un'equazione che non contiene tensioni di ramo oltre a quelle comprese nelle due equazioni precedenti e quindi non introduce informazioni aggiuntive. Per un generico circuito elettrico, qualora un circuito sia costituito da r rami, **$r-n+1$ equazioni di maglia sono linearmente indipendenti**.

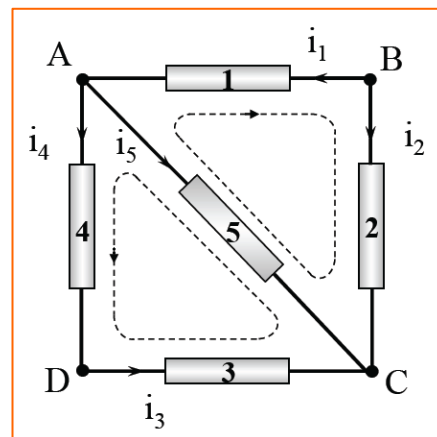
Il Problema di analisi circuitale:

Equazioni topologiche ed equazioni di ramo

Un circuito elettrico di r rami ed n nodi è descritto da r tensioni di ramo ed r correnti di ramo, in totale quindi da $2r$ grandezze. Dalla LKT si ottengono $r-n+1$ equazioni di maglia linearmente indipendenti e dalla LKC si derivano $n-1$ equazioni di nodo linearmente indipendenti. In tutto **dalle leggi di Kirchhoff si ottengono r equazioni omogenee, linearmente indipendenti**. Il problema di analisi circuitale è definito qualora siano determinate le $2r$ grandezze incognite, date dalle tensioni di ramo e dalle correnti di ramo. Il problema ha una ed una sola soluzione qualora si abbiano $2r$ equazioni pari alle sue grandezze incognite. Le r equazioni mancanti sono date dalle **r equazioni di ramo** (o equazioni caratteristiche degli elementi circuitali).

Le equazioni derivanti dalle leggi di Kirchhoff dipendono solo dal numero di rami e di nodi, e dalle interconnessioni fra i rami del circuito. Dipendono cioè dalla topologia del circuito e non dalle caratteristiche di ciascun ramo. Perciò le r equazioni definite dalle leggi di Kirchhoff prendono anche il nome di **equazioni topologiche** del circuito (**topology equations**).

Un circuito perciò è descritto in modo univoco (con una ed una sola soluzione) dal seguente sistema di equazioni:

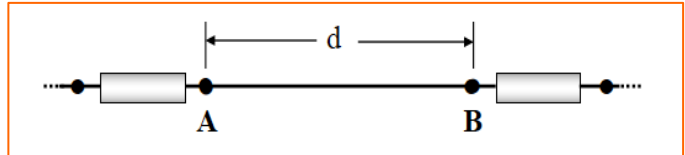


$$\sum_{k=n-1} i_k = 0 \quad \text{da LKC, } n-1 \text{ equazioni}$$

$$\sum_{k=r-n+1} v_k = 0 \quad \text{da LKT, } r-n+1 \text{ equazioni}$$

$$v_k = f(i_k) \quad \text{equazioni di ramo}$$

I regimi che vengono normalmente descritti dal sistema di equazioni che si ottiene dalle equazioni topologiche e dalle equazioni di ramo sono: il regime in corrente continua CC (DC) in cui le correnti e le tensioni sono costanti nel tempo, il regime in corrente alternata CA (AC) in cui tali grandezze sono descritte da funzioni sinusoidali nel tempo a frequenza data ed il regime transitorio con grandezze elettriche tempo-dipendenti.



Esempio di analisi circuitale

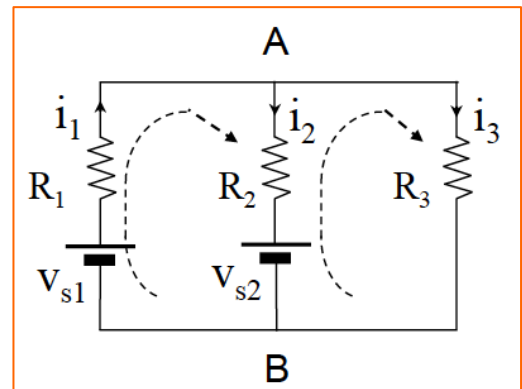
Il circuito in figura è composto da tre rami ($r = 3$) e due nodi ($n = 2$). Si individuano quindi tre correnti di ramo e tre tensioni di ramo. Nel caso in esame le equazioni topologiche sono tre e tre sono le equazioni di ramo. Il problema circuitale consiste quindi di sei equazioni in sei incognite.

Dalle leggi di Kirchhoff si ottengono $n-1 = 1$ equazione di nodo e $r-n+1 = 2$ equazioni di maglia. Quindi le tre equazioni topologiche sono:

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

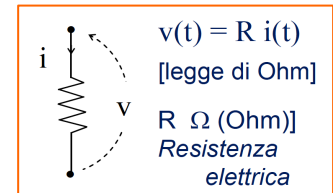
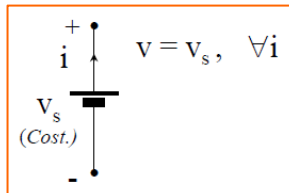
$$-v_1 - v_2 = 0$$

$$v_2 - v_3 = 0$$



Le equazioni caratteristiche degli elementi circuitali (equazioni di ramo) sono note in quanto dati del problema. Esse sono in numero pari al numero dei rami. Nei rami del circuito sono presenti tre resistori e due generatori di tensione in CC (corrente continua).

Le equazioni caratteristiche di questi elementi circuitali sono riportate nelle due figure a fianco. Le resistenze R_1 , R_2 ed R_3 e le tensioni dei generatori v_{s1} e v_{s2} sono dati del problema. Le tre equazioni caratteristiche dei tre rami del circuito sono:



$$v_1 = R_1 i_1 - v_{s1}$$

$$v_2 = R_2 i_2 + v_{s2}$$

$$v_3 = R_3 i_3$$

Le sei equazioni nelle sei incognite i_1 , i_2 , i_3 , v_1 , v_2 e v_3 descrivono il circuito in modo univoco.

Un ramo può anche contenere più di un elemento circuitale con funzioni diverse. Infatti nel circuito in esame le tensioni dei rami 1 e 2 sono date da:

$$v_1 = R_1 i_1 - v_{s1}$$

$$v_2 = R_2 i_2 + v_{s2}$$

L'approssimazione circuitale a parametri concentrati

Le grandezze elettriche in un circuito possono avere tempi di variazione rapidi o lenti rispetto ai **tempi di transito** fra gli elementi circuitali del circuito. L'approssimazione

introdotta dalla descrizione a parametri concentrati assume che **i tempi di transito siano trascurabili rispetto ai tempi di variazione delle grandezze elettriche**, tensioni e correnti che sono i parametri concentrati della descrizione circuitale.

Nella trattazione di grandezze ondulatorie ad elevata frequenza f e ridotta lunghezza d'onda λ , l'approssimazione a parametri concentrati assume che i tempi di transito fra gli elementi circuitali siano nulli o comunque molto inferiori rispetto alle variazioni delle grandezze elettriche nel tempo e quindi rispetto al periodo della sinusoidale che descrive la dipendenza temporale delle grandezze elettriche coinvolte. Le grandezze elettriche si propagano con la velocità della luce $c \cong 3 \times 10^8$ m/s. Per una distanza d fra due elementi circuitali adiacenti con terminali affacciati A e B, il tempo di transito affinché un segnale elettrico passi da un elemento all'altro è $t_{AB} = d/c$. Il periodo della sinusoidale è $T = 1/f = \lambda/c$. L'approssimazione circuitale richiede che:

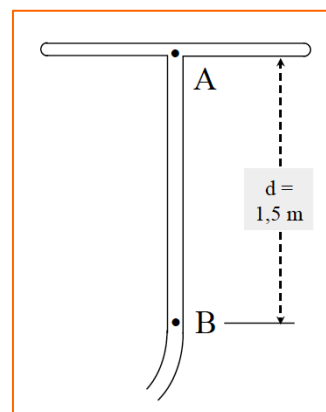
$$t_{AB} \ll T \quad \longleftrightarrow \quad d \ll \lambda$$

Nell'esempio in figura il segnale sinusoidale ricevuto dall'antenna ha frequenza $f = 100$ MHz. La frequenza angolare corrispondente è $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 10^8$. Si considerino i punti A e B sul connettore che collega l'antenna ad un circuito di amplificazione. Il connettore si suppone a resistenza nulla (conducibilità infinita). I due punti sono ad una distanza $d = 1.5$ m. In A un segnale di tensione all'istante t è:

$$v_A(t) = V_0 \sin \omega t = V_0 \sin(2\pi \times 10^8 t)$$

In B il segnale arriva dopo un intervallo di tempo $\Delta t = d/c = 1.5/(3 \times 10^8)$ s. Quindi in B il segnale all'istante t è uguale al segnale registrato in A all'istante $t - \Delta t$:

$$\begin{aligned} v_B(t) &= v_A(t - \Delta t) = \\ &= V_0 \sin[2\pi \times 10^8 (t - \Delta t)] = \\ &= V_0 \sin[2\pi \times 10^8 (t - 0,5 \times 10^{-8})] = \\ &= V_0 \sin(2\pi \times 10^8 t - \pi) = \\ &= -V_0 \sin(2\pi \times 10^8 t) = -v_A(t) \end{aligned}$$



All'istante t in B si ha un segnale opposto a quello registrato nello stesso istante in A. Quindi in questo caso l'approssimazione circuitale a parametri concentrati non è valida.

Esempi di frequenze e lunghezze d'onda

| | | | |
|--------------------------|----------------|---------------|--------------------------|
| ✓ Sistemi di potenza: | $f = 50/60$ Hz | \rightarrow | $\lambda = 6000/5000$ km |
| ✓ Microonde: | $f = 100$ MHz | \rightarrow | $\lambda = 3$ m |
| ✓ Clock di un Computer : | $f = 3$ GHz | \rightarrow | $\lambda = 10$ cm |

Modelli circuitali del bipolo

L'equazione caratteristica che definisce il legame fra tensione di ramo v , differenza di potenziale fra i due terminali del ramo, e corrente di ramo i , che vi fluisce attraverso, è definita dai fenomeni fisici che avvengono al suo interno.

Se nell'equazione caratteristica la corrente appare come incognita indipendente, il bipolo si dice essere **controllato in corrente**:

$$v = f(i)$$

Qualora la tensione di ramo v sia l'incognita indipendente, il bipolo si dice essere **controllato in tensione**:

$$i = g(v)$$

Il **bipolo passivo** assorbe o comunque non produce energia. Per la convenzione del bipolo passivo la corrente di ramo è positiva qualora entri nel bipolo dal terminale a potenziale maggiore. Secondo tale convenzione l'energia $w(t)$ del bipolo sino al tempo t risulta positiva o nulla:

$$w(t) = \int_{-\infty}^t v(t') i(t') dt' \geq 0$$

Il **bipolo attivo** immette energia nel circuito. Sono bipoli attivi i **generatori indipendenti di tensione e di corrente**, che sono le **sorgenti** del circuito. Le batterie e gli accumulatori sono bipoli attivi. Per la **convenzione del bipolo attivo** si definisce positiva la corrente entrante dal terminale a potenziale minore.

Il **bipolo lineare** è descritto da un'equazione con tutti i termini lineari:

$$v(t) = a + b i(t) + c \frac{di(t)}{dt} + d \int_{t_0}^t i(t') dt'$$

Il **bipolo non lineare** è descritto da un'equazione con termini non lineari:

$$v(t) = a' + b' i^2(t)$$

L'elemento circuitale può essere un **bipolo indipendente dal tempo** od un **bipolo tempo-dipendente**. Nel primo caso di bipolo tempo indipendente i coefficienti dell'equazione caratteristica non dipendono dal tempo: i coefficienti a, b, c, d, a' e b' sono costanti nel tempo. Nel caso del bipolo tempo dipendente i coefficienti a, b, c, d, a' e b' , od alcuni di loro, variano nel tempo.

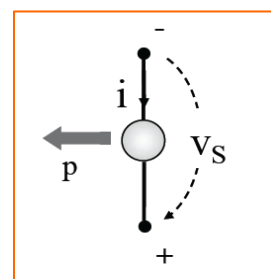
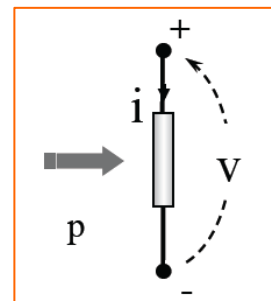
I **bipoli senza memoria** sono descritti da una relazione tra v ed i al medesimo istante di tempo:

$$v(t) = a + b i^2(t) + c \sin [i(t)]$$

Per i **bipoli con memoria (storage element)** la tensione dipende da ciò che accadrà alla corrente o da ciò che è avvenuto alla corrente. Nel primo caso v dipende da una funzione della derivata temporale di i . Nel secondo caso v dipende da una funzione di un integrale di i . Esempi dei due casi sono rispettivamente:

$$v(t) = a + b i(t) + c \frac{di}{dt}$$

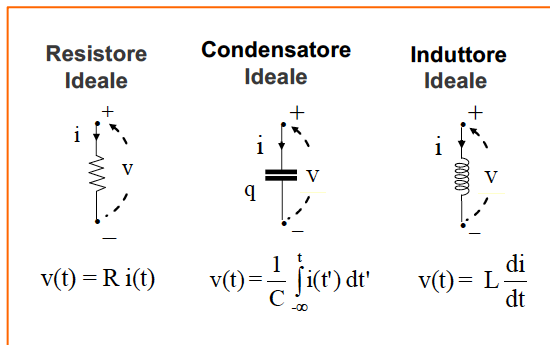
$$v(t) = \int_{-\infty}^t a i(t') dt'$$



Quanto detto si riferisce ai bipoli con memoria controllati in corrente. Nel caso di bipoli con memoria controllati in tensione, la corrente è espressa da una funzione dell'integrale della tensione nel primo caso o da una funzione della derivata temporale della tensione nel secondo caso.

Bipoli ideali passivi

I bipoli ideali passivi sono: il **resistore ideale (ideal resistor)**, il **condensatore ideale (ideal capacitor)** e l'**induttore ideale (ideal inductor)**. Ciascuno di questi elementi descrive un singolo processo elettromagnetico (EM) elementare. In un bipolo reale non è mai presente un unico processo EM, anche se uno dei tre è il processo dominante. Le equazioni caratteristiche per i tre bipoli ideali sono:



- resistore: $v(t) = R i(t)$
- condensatore: $v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t') dt'$
- induttore: $v(t) = L \frac{di}{dt}$

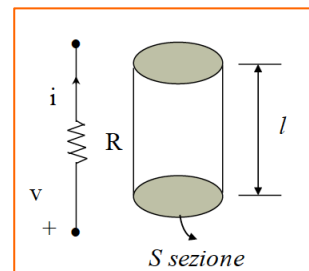
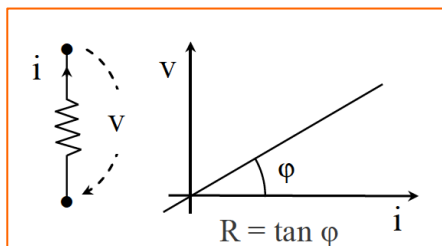
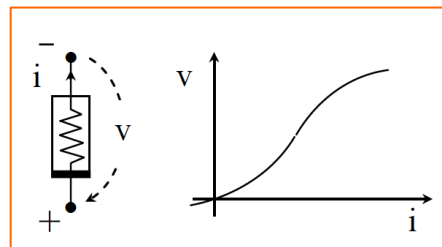
Il resistore

Il resistore è un elemento bipolare passivo che dissipa energia. Il campo elettrico fornisce energia alle cariche elettriche accelerandole. L'energia elettrica diviene in tal modo energia cinetica delle particelle cariche associate alla corrente elettrica che attraversa il resistore. Le cariche elettriche in moto urtano contro le particelle del materiale con cui il resistore è costituito e cedono loro parte della propria energia cinetica che diviene energia termica di questo materiale. Per mantenere in moto le cariche e la corrente elettrica associata, è necessario fornire alle cariche l'energia spesa negli urti sotto forma di lavoro del campo elettrico, lavoro che dipende dalla tensione a cui il resistore è sottoposto.

In un resistore vi è una relazione fra velocità delle cariche elettriche e lavoro speso per mantenere tale velocità e quindi fra corrente elettrica e tensione del resistore:

$$v(t) = f[i(t)]$$

Un resistore ideale elementare è un elemento tempo-indipendente in cui v è proporzionale ad i . L'equazione caratteristica del bipolo ideale è data dalla **legge di Ohm (Ohm's law)**:



$$v(t) = R i(t)$$

dove R è la **resistenza elettrica** (**electrical resistance**), caratteristica del resistore, la cui unità di misura nell'SI è l'**ohm** [simbolo: Ω]. L'inverso della resistenza $G = 1/R$ è la **conduttanza** (**conductance**), L'unità di misura della conduttanza nell'SI [simbolo: S].

La resistenza elettrica definisce la proprietà del resistore di opporsi al flusso di carica e perciò alla corrente elettrica che attraversa il resistore stesso. Essa è data dalla tensione necessaria per mantenere una corrente unitaria:

$$v = R i \quad \Rightarrow \quad R = v/i$$

R è una grandezza macroscopica. La proprietà microscopica del materiale di opporsi al flusso di carica per unità di superficie perpendicolare alla densità di corrente è la resistività ρ :

$$\rho = 1/\sigma$$

L'unità di misura di ρ nel sistema SI è l'**ohm-metro** [simbolo: Ωm]. σ è la conducibilità elettrica con unità di misura SI: **simens/metro** [simbolo: S/m]. Nella figura a fianco sono tabulati i valori della resistività dei materiali isolanti, semiconduttori e conduttori. La resistività di un buon isolante è di circa 10^{12} - 10^{19} Ωm (vetro - 10^{12} Ωm ; ceramica - 10^{19} Ωm). La resistività di un conduttore (alluminio, rame, oro e ferro) ha una resistività minore di circa 10^{-8} Ωm . La differenza fra le resistività (o le conducibilità dei due tipi di materiali) è di un ordine di grandezza pari a 10^{19} - 10^{26} .

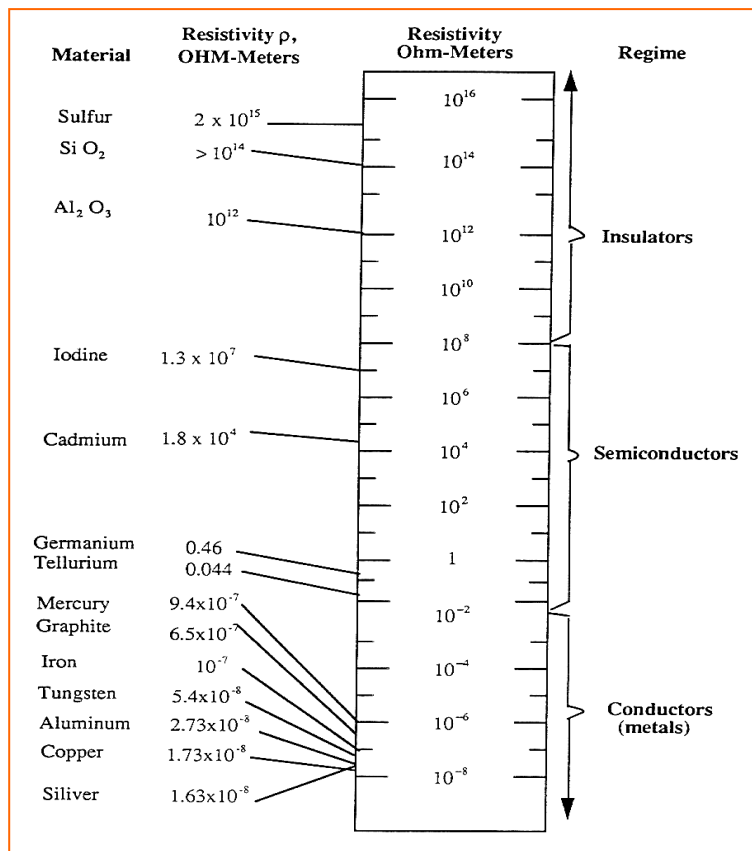
In genere la resistività è una caratteristica del punto e non è uniforme all'interno di un resistore. Per un resistore costituito da un cilindro di materiale di resistività uniforme e costante nel tempo, con direzione del flusso delle cariche lungo l'asse del cilindro, la resistenza R è proporzionale, oltre che alla resistività, alla lunghezza l dell'altezza del cilindro ed inversamente proporzionale alla superficie S della sezione del cilindro:

$$R = \rho l/S$$

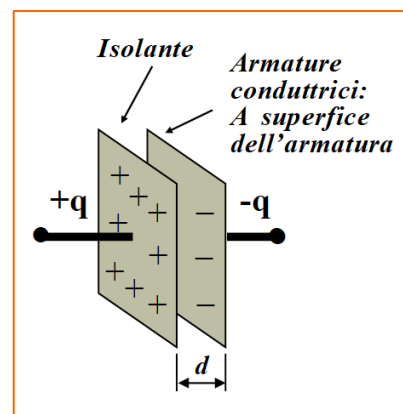
La legge di Ohm in termini microscopici ha la seguente espressione:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{E} = \rho \mathbf{J}$$

Nella figura è riportata la resistività di materiali utilizzati in diverse applicazioni tecnologiche. In genere si dividono in materiali conduttori, semi-conduttori ed isolanti.



Il **condensatore** è un elemento bipolare passivo che assorbe energia dal circuito e l'immagazzina sotto forma di energia elettrostatica. È poi in grado di restituire completamente al circuito l'energia immagazzinata. Il condensatore è un elemento con memoria (storage element). Il condensatore è costituito da due **armature (conducting plates)**, piastre di materiale conduttore, separate da un isolante. Una carica q portata su una delle due armature conduttrici induce nell'isolante un campo elettrico che richiama una carica uguale ed opposta $-q$ sulla armatura opposta. Si genera a seguito di ciò un campo elettrico nella regione dell'isolante, origine di una tensione fra le due armature. L'energia immagazzinata a seguito dell'accumulo di carica viene fornita al condensatore dal circuito. Essa viene restituita al circuito quando le cariche lasciano le armature.

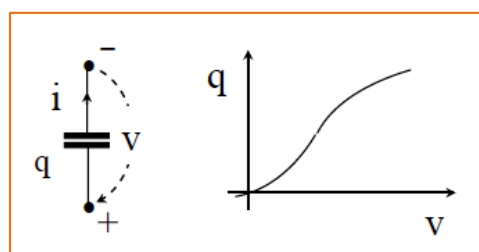


La relazione fra il modulo della carica q sull'armatura e la tensione v fra le due armature indotta da q è in generale la seguente:

$$q = f(v)$$

La corrente elettrica che entra dal terminale positivo, è data da:

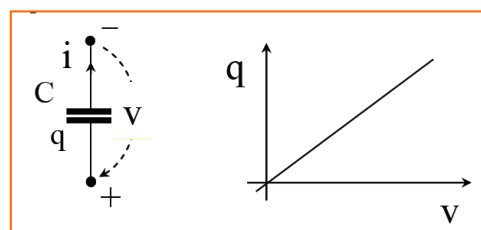
$$i = \frac{dq}{dt} \quad \Rightarrow \quad i = \frac{df(t)}{dt}$$



Un condensatore ideale è un elemento tempo-indipendente lineare descritto da:

$$q(t) = C v(t) \quad \Rightarrow \quad i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

La **capacità (capacitance)** C del condensatore nel sistema SI si misura in **farad** [simbolo SI: F]. Essa è la carica richiamata su ciascuna delle due armature per unità di tensione.



Considerando un condensatore costituito da due armature uguali, piane e parallele, di superficie A ed a distanza d (si veda figura), per un isolante uniforme la capacità C è data da

$$C = \frac{A}{d} \epsilon$$

dove ϵ è la **costante dielettrica (dielectric constant)** del materiale isolante.

Per il condensatore ideale si ha:

$$q(t) = C v(t) \quad \Rightarrow \quad dq = C dv \quad \Rightarrow \quad i(t) = \frac{dq}{dt} = C \frac{dv}{dt}$$

$$i(t) = C \frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad dv = \frac{1}{C} i(t) dt \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t') dt' \quad \text{se si assume che } v(-\infty) = 0, \text{ od anche}$$

$$v(t) = v(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t') dt', \quad \forall t > t_0$$

L'energia W_c immagazzinata dal condensatore all'istante t , sotto forma di energia elettrostatica, è data da:

$$W_c(t) = \int_{-\infty}^t v(t') i(t') dt' = \int_0^{q(t)} v(q') dq' = \frac{1}{C} \int_0^{q(t)} q' dq' \Rightarrow$$

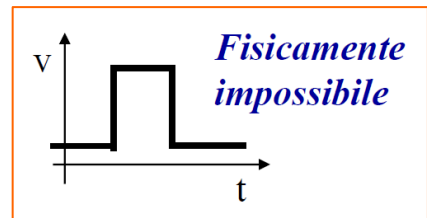
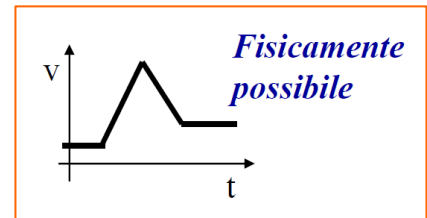
$$\Rightarrow W_c(t) = \frac{1}{2} \frac{q(t)^2}{C} = \frac{1}{2} C v(t)^2 \quad [\text{si assume che } q(-\infty) = 0]$$

In regime stazionario (in corrente continua - DC current) un condensatore è un circuito aperto (nell'isolante $R = +\infty$):

- A tensione costante nel tempo, la corrente che attraversa il condensatore è nulla ($i = C dv/dt = 0$)
- Un condensatore collegato ad una batteria si carica ($q = C v$).

La tensione e la carica in un condensatore non possono variare istantaneamente:

- Poiché per un condensatore $q = C v$ ed $i = dq/dt = C dv/dt$, una variazione finita della tensione in un tempo infinitesimo comporterebbe una carica elettrica ed una corrente infinite. Inoltre anche una variazione finita della carica presente in ciascuna delle due armature in un tempo infinitesimo comporterebbe una corrente infinita. Ciò non è fisicamente possibile. Quindi il condensatore si oppone a salti istantanei della tensione e della carica elettrica.
- Dall'espressione dell'energia di un condensatore, una variazione finita della tensione e della carica comporterebbero una variazione finita dell'energia elettrostatica immagazzinata in un tempo infinitesimo. Ciò corrisponde ad una potenza infinita in quell'istante di tempo. Quindi, per avere un salto finito della carica e della tensione in un condensatore, è necessaria una potenza infinita.



Il condensatore è un bipolo passivo che non dissipa energia. L'energia viene immagazzinata sotto forma di energia elettrostatica. L'energia viene utilizzata per creare il campo elettrico indotto dalle cariche deposte sulle armature. L'energia immagazzinata è poi restituita quando le cariche lasciano le armature e la corrente cambia direzione.

L'induttore

L'**induttore** è un elemento bipolare passivo che, attraversato da una corrente elettrica, induce un campo di induzione magnetica ed un flusso magnetico associato. Esso perciò assorbe energia dal circuito per generare il campo, e immagazzina tale energia sotto forma di energia elettromagnetica. Quando la corrente, e di conseguenza il flusso magnetico diminuiscono, esso restituisce al circuito l'energia immagazzinata. L'induttore è l'altro elemento con memoria (storage element) della teoria circuitale.

È solitamente costituito da un conduttore percorso da corrente avvolto attorno ad un nucleo di materiale ferromagnetico (vedi figura). La corrente genera un flusso magnetico nel nucleo. Una variazione del flusso induce per la legge dell'induzione (2° legge di Maxwell) una tensione ai capi del conduttore, terminali dell'induttore stesso.

Dalla legge della circuitazione (1° legge di Maxwell), dalla legge di legame materiale e per la definizione di flusso magnetico si ha:

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = i_{Cnct}, \quad \mathbf{B} = f_2(\mathbf{H}), \quad \Phi_B = \iint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \Rightarrow$$

Quindi il flusso magnetico risulta dipendere dalla corrente elettrica. In generale la relazione che lega Φ_B ad i è:

$$\Phi_B = f(i)$$

Si supponga che Φ_B sia il flusso attraverso la superficie S il cui contorno è definito dal circuito della corrente i . In tal caso il flusso è il flusso concatenato con la corrente i . Per la legge dell'induzione (2° equazione di Maxwell) si ha:

$$v = \frac{d\Phi_B}{dt} \Rightarrow v = \frac{d}{dt} f(i)$$

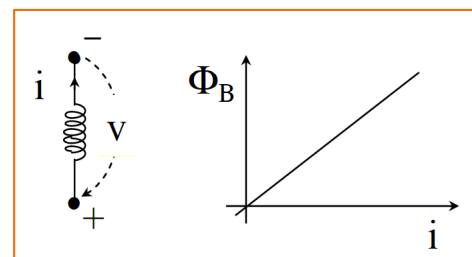
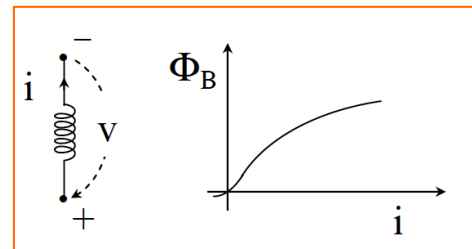
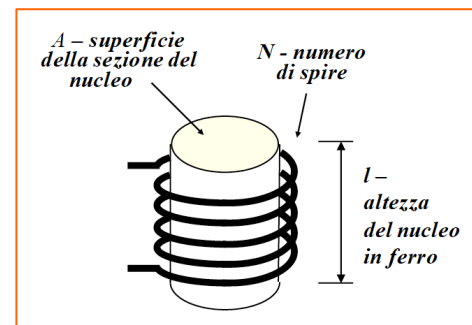
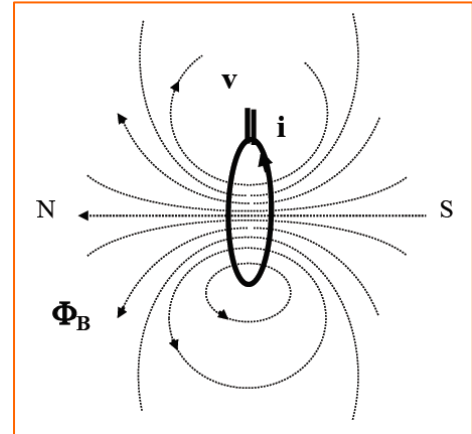
Un induttore ideale è un elemento tempo-indipendente lineare descritto da:

$$\Phi_B(t) = L i(t) \Rightarrow v(t) = L \frac{di}{dt}$$

L'**induttanza** L nel sistema SI si misura in **henry** (simbolo SI: H). L'induttanza è il flusso magnetico indotto per unità di corrente.

Per un induttore con nucleo in ferro cilindrico di lunghezza l e sezione A di materiale ferromagnetico uniforme attorno al quale si avvolge un conduttore con un numero N di spire, l'induttanza è:

$$L = \frac{N^2 A}{l} \mu$$



Dove μ è la **permeabilità magnetica** (*magnetic permeability*) del nucleo in ferro e si misura in henry al metro (simbolo SI: H/m).

Per l'induttore ideale si ha:

$$\Phi_B(t) = L i(t) \quad \Rightarrow \quad d\Phi_B = L di \quad \Rightarrow \quad v(t) = \frac{d\Phi_B}{dt} = L \frac{di}{dt}$$

$$v(t) = L \frac{di}{dt} \quad \Rightarrow \quad di = \frac{1}{L} v(t) dt \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(t') dt' \quad \text{se si assume che } i(-\infty) = 0, \text{ od anche}$$

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(t') dt', \quad \forall t > t_0$$

L'energia W_L immagazzinata dall'induttore all'istante t , sotto forma di energia elettromagnetica, è data da:

$$W_L(t) = \int_{-\infty}^t v(t') i(t') dt' = \int_0^i L i' di' \quad \Rightarrow$$

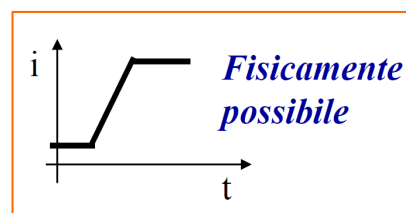
$$\Rightarrow \quad W_L(t) = \frac{1}{2} L i(t)^2 \quad [\text{si assume che } i(-\infty) = 0]$$

In regime stazionario (in corrente continua - DC current) un induttore è un circuito chiuso (il conduttore si assume sia a conducibilità infinita per cui $R = 0$):

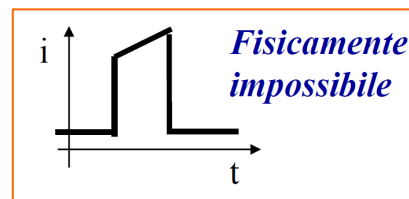
- Quando la corrente è costante nel tempo la tensione indotta dall'induttore è nulla ($v = L(di/dt)$).

La corrente che attraversa un induttore non può variare istantaneamente:

- Poiché in un induttore $v = L di/dt$, una variazione finita della corrente in un tempo infinitesimo comporterebbe una tensione infinita. Ciò non è fisicamente possibile. Quindi l'induttore si oppone a salti istantanei della corrente elettrica.
- Dall'espressione dell'energia di un induttore, una variazione finita della corrente comporterebbe una variazione finita dell'energia magnetica immagazzinata in un tempo infinitesimo. Ciò corrisponde ad una potenza infinita in quell'istante di tempo. Quindi, per avere un salto finito della corrente in un induttore è necessaria una potenza infinita.

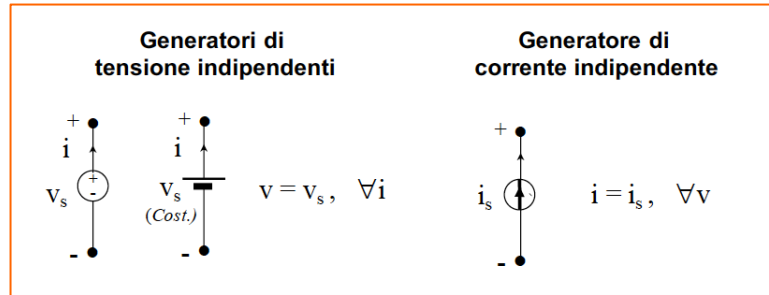


L'induttore è un bipolo passivo che non dissipa energia. L'energia viene immagazzinata sotto forma di energia elettromagnetica. L'energia viene utilizzata per creare il campo magnetico indotto dalla corrente che fluisce nel conduttore avvolto attorno al nucleo. L'energia immagazzinata è poi restituita quando la corrente diminuisce.



Bipoli attivi: generatori indipendenti

I generatori indipendenti di tensione e di corrente ideali sono riportati in figura. Essi sono le sorgenti indipendenti del circuito. Il generatore indipendente di tensione con tensione comunque variabile nel tempo è rappresentato dal primo simbolo a sinistra in figura. Il secondo simbolo rappresenta un generatore di tensione costante (batteria od accumulatore). Il terzo simbolo si riferisce ad un generatore di corrente indipendente.



Il generatore indipendente di tensione

Per il generatore indipendente di tensione ideale, la tensione generata non varia al variare della corrente che attraversa il bipolo. In questa ipotesi si trascura la resistenza interna del bipolo che produce una tensione che si oppone alla tensione generata e che aumenta all'aumentare della corrente.

Poiché nei generatori reali la tensione indotta dalla resistenza interna al passaggio della corrente si oppone alla tensione del generatore, essa è anche detta una **caduta di tensione**.

Un generatore indipendente reale è perciò rappresentato da un ramo con un generatore ideale di tensione in serie (vedi figura) ad una resistenza che è la resistenza interna R_i del generatore reale (due bipoli in serie hanno un terminale in comune e la stessa corrente attraversa prima l'uno e poi l'altro bipolo). La tensione ai terminali del generatore reale è perciò data dalla tensione del generatore ideale v_s meno la caduta di tensione dovuta al passaggio di corrente attraverso la resistenza interna:

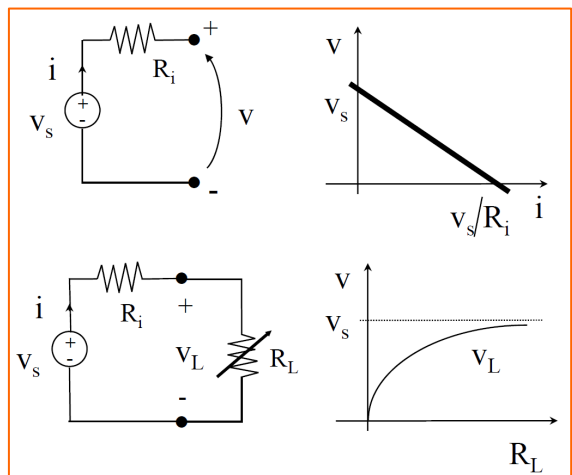
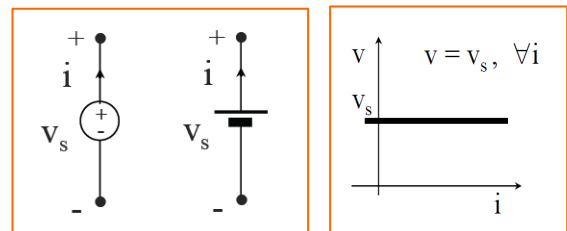
$$v = v_s - R_i i$$

Qualora si colleghi al generatore reale una resistenza di carico R_L (si veda circuito in figura ove il simbolo per R_L indica una resistenza che può essere variata), dalla LKT si ottiene:

$$R_L i + R_i i - v_s = 0$$

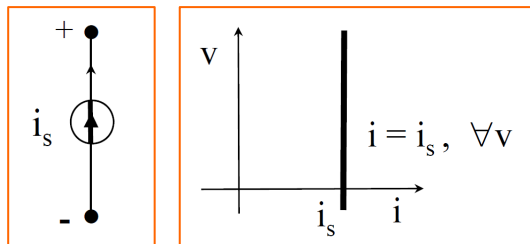
$$R_L i - v_L = 0 \quad \text{ove } v_L \text{ è la tensione a cui è sottoposto il carico.}$$

$$\Rightarrow v_L = \frac{R_L}{R_L + R_i} v_s$$



Il generatore indipendente di corrente

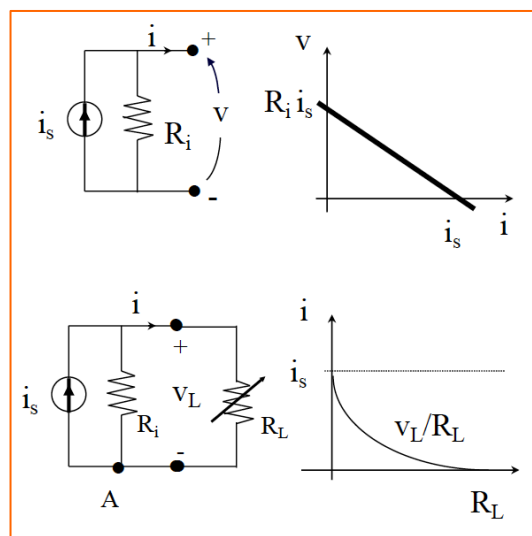
Per il generatore indipendente di corrente ideale, la corrente generata non varia al variare della tensione a cui il bipolo è sottoposto.



Un generatore indipendente reale è costituito da due rami in parallelo (vedi figura): un generatore ideale di corrente e una resistenza che è la resistenza interna R_i del generatore reale. I due rami in parallelo hanno entrambi i terminali in comune e sono sottoposti alla stessa tensione. In questo caso parte della corrente generata fluisce attraverso la resistenza R_i con ricircolo interno. La corrente i del generatore reale è:

$$i = i_s - v/R_i$$

ove i_s è la corrente generata dal generatore ideale e v/R_i è la corrente che ricircola all'interno del generatore reale attraverso la resistenza interna. Qualora si colleghi al generatore reale una resistenza di carico R_L , dalla LKC si ottiene:



$$i - i_s + v_L/R_i = 0$$

$v_L = R_L i$ ove v_L è la tensione ai cui è sottoposto il carico.

$$\Rightarrow i = \frac{R_i}{R_L + R_i} i_s$$

Generatori pilotati

Nei **generatori pilotati** o **generatori dipendenti di tensione o di corrente** (*controlled sources - dependant sources*) la tensione generata o la corrente generata dipendono dalla tensione o dalla corrente in un altro ramo del circuito.

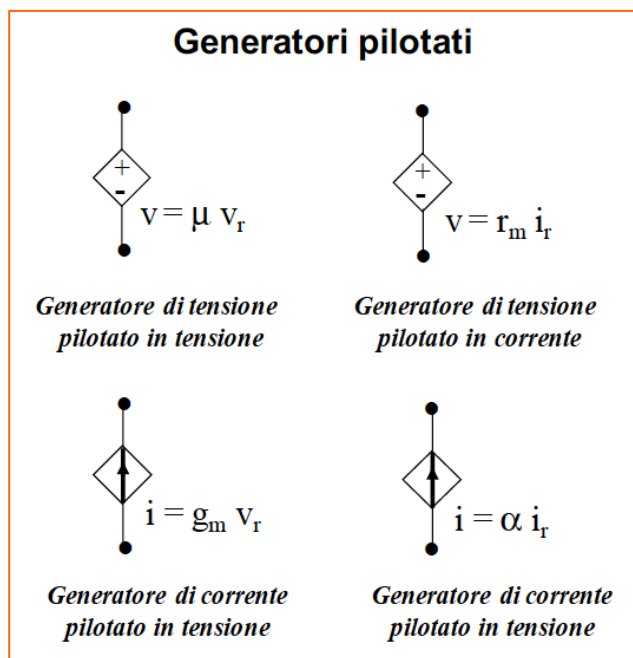
Le equazioni caratteristiche dei generatori pilotati sono:

$v = \mu v_r$ per il generatore di tensione pilotato in tensione

$v = r_m i_r$ per il generatore di tensione pilotato in corrente

$i = g_m v_r$ per il generatore di corrente pilotato in tensione

$i = \alpha i_r$ per il generatore di corrente pilotato in corrente



ove v_r e i_r sono tensione e corrente pilotanti in rami diversi da quelli del generatore dipendente. r_m e g_m hanno le dimensioni di una resistenza e di una conduttanza rispettivamente. μ ed α sono numeri puri.

Circuito aperto

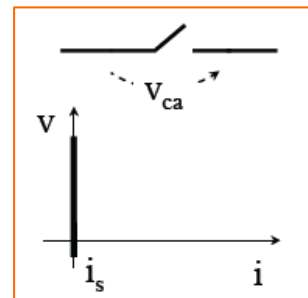
Un ramo in **circuito aperto** (*open circuit*) non permette il passaggio di corrente per qualsiasi valore della tensione ai due terminali del ramo. Questo ad esempio è il comportamento di un interruttore aperto.

Un ramo in circuito aperto può essere considerato come:

- un generatore di corrente indipendente con $i_s = 0$
- un resistore con $R = +\infty$

L'equazione caratteristica è:

$$i = 0, \quad \forall v$$



Corto circuito

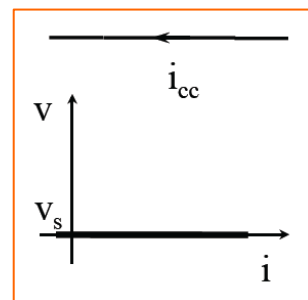
Un ramo in **cortocircuito** (*closed circuit*) permette il passaggio di una corrente di qualsiasi valore inducendo una tensione nulla fra i suoi due terminali. Questo ad esempio è il comportamento di un interruttore chiuso.

Un ramo in cortocircuito può essere considerato come:

- un generatore di tensione indipendente con $v_s = 0$
- un resistore con $R = 0$

L'equazione caratteristica è:

$$v = 0, \quad \forall i$$



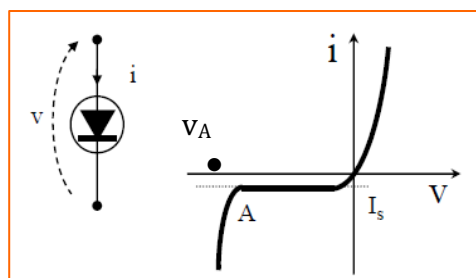
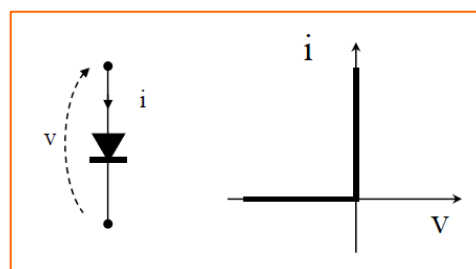
Il diodo

Il **diodo ideale** (*ideal diode*) è un bipolo che funge da circuito aperto per una corrente positiva e da circuito chiuso per una corrente negativa. Quando $v < 0$ (**diodo polarizzato negativamente**) la corrente è nulla. Quando $i > 0$ (**diodo in conduzione**) la tensione è nulla. L'equazione caratteristica del diodo ideale è:

$$vi = 0 \iff \begin{cases} i = 0 & \text{per } v < 0 \\ v = 0 & \text{per } i > 0 \end{cases}$$

I **diodi a giunzione pn** (*pn-junction diode*) sono elementi circuitali reali con una regione di funzionamento definita da $v > v_A$. Per tensioni inferiori si ha la rottura del diodo. L'equazione caratteristica é:

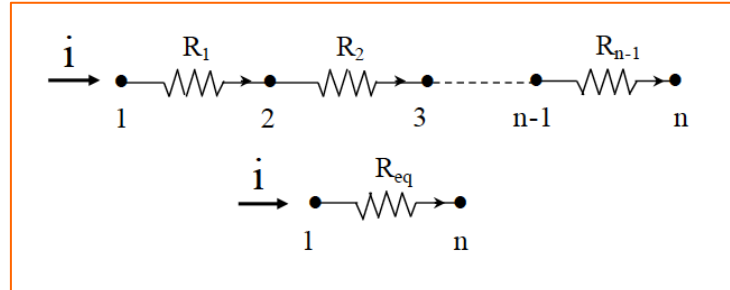
$$i = I_S \left[\exp\left(\frac{v}{V_T}\right) - 1 \right]$$



dove I_s [$\sim \mu\text{A}$] è la **corrente di saturazione (saturation current)**. $V_T = kT/e$ (per $T = 300\text{ K}$ si ha $V_T = 0,026\text{ eV}$) è la **tensione termica (thermal tension)**.

Serie di resistori

Due o più resistori si dicono **in serie (in series)** quando sono posti uno di seguito all'altro (vedi figura). I nodi in comune collegano esclusivamente due dei resistori in serie. Attraverso ciascun resistore fluisce la stessa corrente. Dalla figura si ottiene:



$$V_{1,n} = V_{12} + V_{23} + \dots + V_{n-1,n}$$

$$V_{12} = R_1 i, \quad V_{23} = R_2 i, \quad \dots, \quad V_{n-1,n} = R_{n-1} i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V_{1,n} = i (R_{12} + R_{23} + \dots + R_{n-1,n}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad R_{eq} = (R_{12} + R_{23} + \dots + R_{n-1,n}) = \sum_{k=1}^{n-1} R_k$$

R_{eq} è la resistenza equivalente alla serie di resistori attraverso cui per la stessa tensione fra i nodi 1 ed n fluisce la medesima corrente. Si ha anche:

$$\frac{1}{G_{eq}} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{G_k}$$

Parallelo di resistori

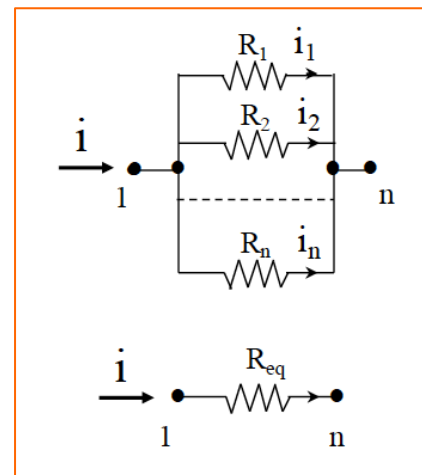
Due o più resistori si dicono **in parallelo (in parallel)** quando hanno in comune i terminali di ingresso ed i terminali di uscita della corrente. Tutti i resistori sono sottoposti alla stessa tensione. Dalla figura si ottiene quanto segue:

$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_n$$

$$V_{1n} = R_1 i_1 = R_2 i_2, \quad \dots = R_n i_n$$

$$\Rightarrow \quad i = V_{1n} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right) = \frac{V_{1n}}{R_{eq}}$$

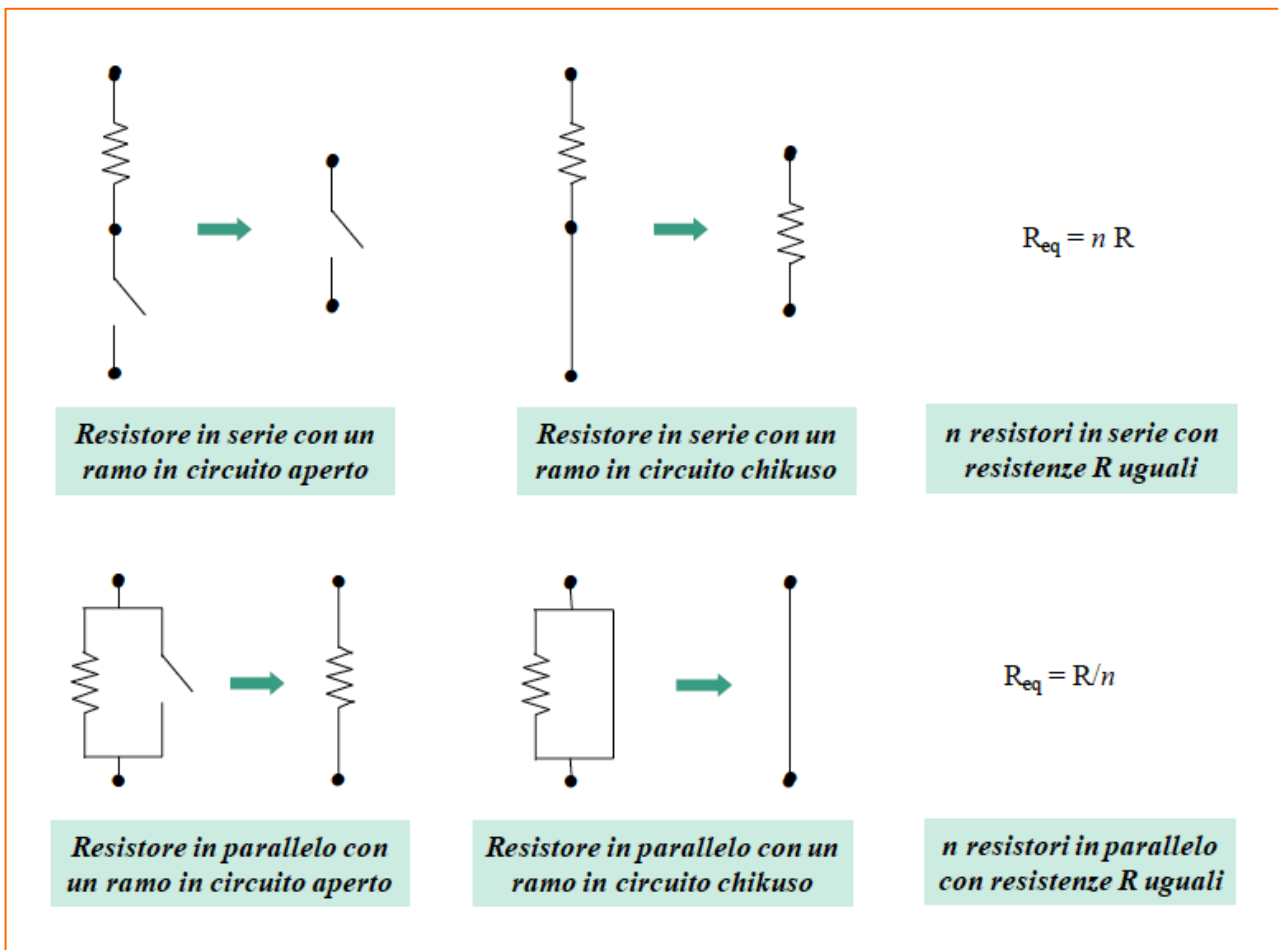
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}$$



R_{eq} è la resistenza equivalente al parallelo di resistori attraverso cui per una data tensione fra i nodi 1 ed n è attraversata dalla corrente pari alla somma delle correnti che attraversano i resistori in parallelo posti fra quella tensione. Si ha anche:

$$G_{eq} = \sum_{k=1}^n G_k$$

Esempi di resistori in serie e parallelo

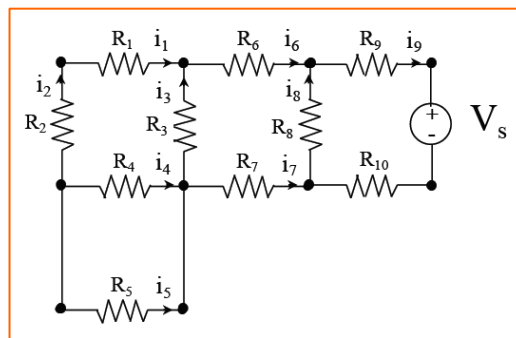


Nella figura sono riportati alcuni esempi particolari di resistori in serie ed in parallelo.

Esempio di analisi circuitale con resistenze in serie e parallelo

Dati del problema:

$R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 1\Omega$, $R_3 = 3\Omega$, $R_4 = 2\Omega$, $R_5 = 2\Omega$,
 $R_6 = 0.5\Omega$, $R_7 = 1\Omega$, $R_8 = 6\Omega$, $R_9 = 1\Omega$, $R_{10} = 1\Omega$.
 $V_s = 40\text{ V}$



Si determinino le tensioni e le correnti di ramo.

Si sostituiscono via via i resistori in serie e parallelo con i resistori ad essi equivalenti:

$$R_{1eq} = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} = 1\Omega$$

$$v_{1eq} = i_{1eq} R_{1eq} = 3.33 \text{ V}$$

$$i_4 = v_{1eq} / R_4, \quad i_4 = 1.67 \text{ A}$$

$$i_5 = v_{1eq} / R_5, \quad i_5 = 1.67 \text{ A}$$

⇓

⇓

⇑

$$R_{2eq} = R_1 + R_2 + R_{1eq} = 3\Omega$$

$$i_3 = v_{3eq} / R_3 = -3.33 \text{ A}$$

$$i_1 = i_2 = -i_{1eq} = v_3 / R_{2eq}$$

$$i_1 = i_2 = -i_{1eq} = -3.33 \text{ A}$$

⇓

⇑

$$R_{3eq} = \frac{R_{2eq} R_3}{R_{2eq} + R_3} = 1.5\Omega$$

$$i_6 = -i_7 = i_{3eq} = i_{4eq} = -6.67 \text{ A}$$

$$v_{4eq} = v_{3eq} + v_6 - v_7$$

$$v_{3eq} = v_{4eq} - R_6 i_6 + R_7 i_7 = -10 \text{ V}$$

⇓

⇑

$$R_{4eq} = R_6 + R_7 + R_{3eq} = 3\Omega$$

$$v_{5eq} = v_{4eq} = v_8 = -20 \text{ V}$$

$$i_{4eq} = v_{4eq} / R_{4eq}; \quad i_8 = v_8 / R_8$$

$$i_{4eq} = -6.67 \text{ A}; \quad i_8 = -3.33 \text{ A}$$

⇓

⇑

$$R_{5eq} = \frac{R_{4eq} R_8}{R_{4eq} + R_8} = 2\Omega$$

$$v_9 + v_{5eq} + v_{10} = -V_s$$

$$v_{5eq} + R_9 i_9 + R_{10} i_9 = -V_s$$

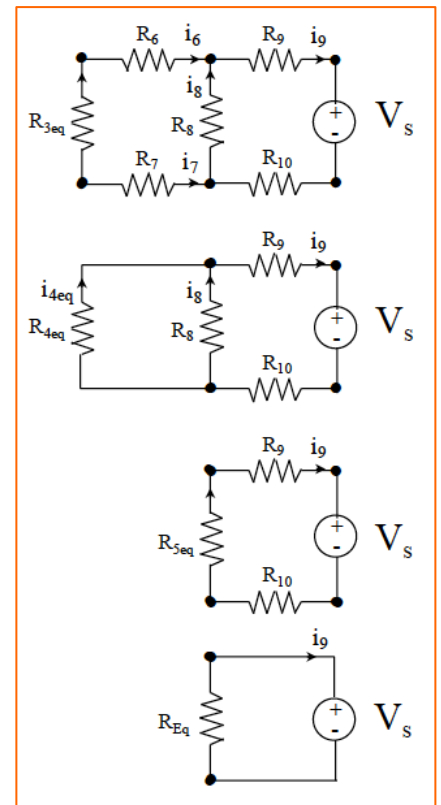
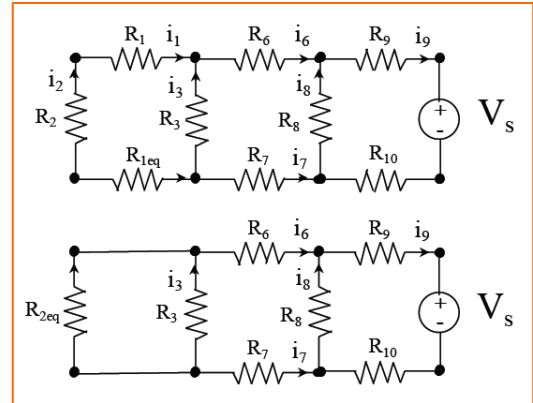
$$v_{5eq} = -20 \text{ V}$$

⇓

⇑

$$R_{Eq} = R_9 + R_{10} + R_{5eq} = 4\Omega$$

$$\Rightarrow \Rightarrow \quad i_9 = -V_s / R_{Eq} = -10 \text{ A}$$



Trovata la tensione equivalente del circuito, percorrendo il percorso inverso si calcolano le tensioni e le correnti di ramo.

Partitore di tensione

La tensione fra il terminale di ingresso e quello di uscita di una serie di resistori si suddivide in modo tale per cui la tensione ai capi di ciascun resistore è direttamente proporzionale al rapporto fra la sua resistenza e la resistenza totale della serie. Per il circuito in figura con due resistori in serie si ha:

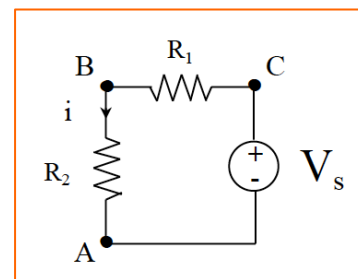
$$R_{eq} = R_1 + R_2 \quad \Rightarrow \quad i = \frac{V_S}{R_{eq}} = \frac{V_S}{R_1 + R_2}$$

Da legge LKT:

$$v_1 + v_2 - V_S = 0$$

$$\Rightarrow \quad v_1 = V_S - v_2 = V_S - R_2 i \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_S$$

$$v_2 = V_S - v_1 = V_S - R_1 i \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_S$$



Partitore di corrente

La corrente entrante in ingresso in un terminale collegato a più resistori in parallelo si suddivide fra di essi in modo tale per cui la corrente attraverso ciascun resistore è direttamente proporzionale al rapporto fra la propria conduttanza e la conduttanza totale del parallelo. Per il circuito in figura con due resistori in parallelo si ha:

$$G_{eq} = 1/R_1 + 1/R_2 = 1/R_{eq} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$$

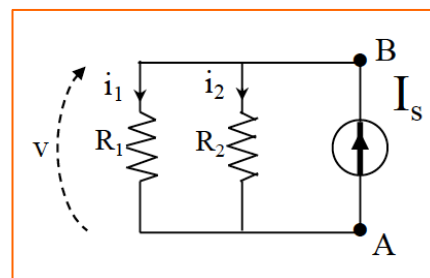
$$\Rightarrow \quad v = I_S / G_{eq} = R_{eq} I_S = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I_S$$

Da legge LKC:

$$i_1 + i_2 - I_S = 0$$

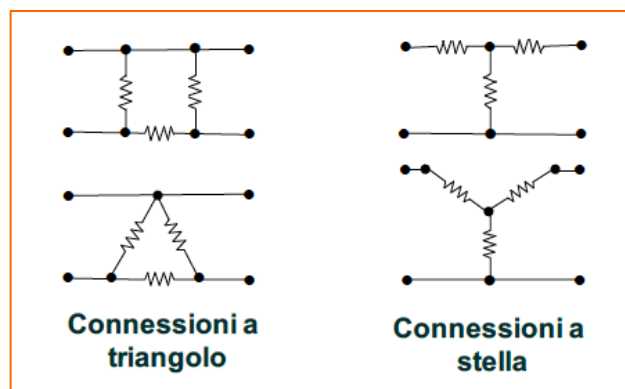
$$\Rightarrow \quad i_1 = I_S - i_2 = I_S - G_2 v \quad \Rightarrow \quad i_1 = I_S - G_2 I_S / G_{eq} \quad \Rightarrow \quad i_1 = I_S \frac{G_1}{G_{eq}} \quad \Rightarrow \quad i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I_S$$

$$i_2 = I_S - i_1 = I_S - G_1 v \quad \Rightarrow \quad i_2 = I_S - G_1 I_S / G_{eq} \quad \Rightarrow \quad i_2 = I_S \frac{G_2}{G_{eq}} \quad \Rightarrow \quad i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_S$$



Connessione di resistenze a stella ed a triangolo

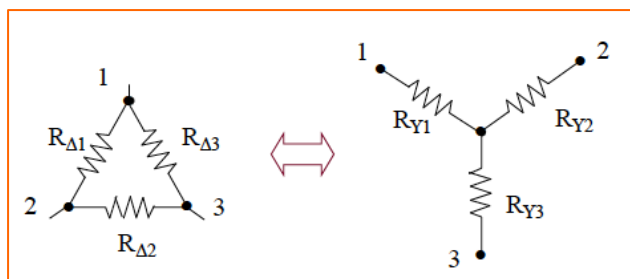
Un sistema circuitale di tre resistori può essere connesso a **triangolo (delta connection)** od a **stella (wye connection)**. Esempi di connessione a triangolo ed a stella sono riportati nella figura a fianco.



È possibile trasformare una stella di resistenze in un triangolo di resistenze che opera in modo equivalente alla stella e viceversa. I tre resistori collegati a stella ed i tre collegati a triangolo operano in modo equivalente quando, qualora i nodi 1, 2 e 3 siano sottoposti alle stesse tensioni, richiamano dal circuito le stesse correnti.

Molto spesso questa operazione risulta di particolare efficacia nell'analisi circuitale.

Si supponga di connettere ad una rete il nodo 1 ed il nodo 2 e di lasciare il nodo 3 non connesso sia nel triangolo che nella stella. La resistenza equivalente della connessione a stella $R_{12}(Y)$ vista dalla rete è data dalla serie delle resistenze R_{Y1} ed R_{Y2} . La resistenza equivalente della connessione a triangolo $R_{12}(\Delta)$ vista dalla rete è data dal parallelo di $R_{\Delta1}$ con la serie delle resistenze $R_{\Delta2}$ ed $R_{\Delta3}$:



$$R_{12}(Y) = R_{Y1} + R_{Y2}; \quad R_{12}(\Delta) = R_{\Delta1} // (R_{\Delta2} + R_{\Delta3})$$

Analogamente qualora si colleghino i nodi 2 e 3 e si lasci scollegato il nodo 1, e successivamente si colleghino i nodi 3 ed 1 e si lasci scollegato il 2 si ottiene:

$$R_{23}(Y) = R_{Y2} + R_{Y3}; \quad R_{23}(\Delta) = R_{\Delta2} // (R_{\Delta1} + R_{\Delta3})$$

$$R_{31}(Y) = R_{Y1} + R_{Y3}; \quad R_{31}(\Delta) = R_{\Delta3} // (R_{\Delta1} + R_{\Delta2})$$

Per l'equivalenza fra il sistema a stella ed il sistema a triangolo deve perciò essere:

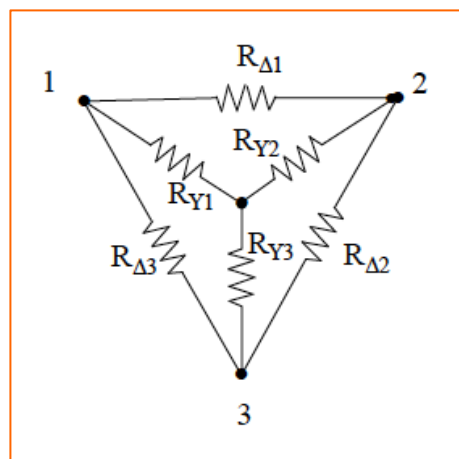
$$R_{12}(Y) = R_{12}(\Delta); \quad R_{23}(Y) = R_{23}(\Delta); \quad R_{31}(Y) = R_{31}(\Delta)$$

Per l'equivalenza stella-triangolo tali uguaglianze devono essere verificate per qualsiasi collegamento dei tre nodi 1, 2 e 3 affinché ciò si verifichi anche per le particolari connessioni descritte sopra. Da esse perciò si ottengono le espressioni di trasformazione dalle resistenze a triangolo alle equivalenti resistenze a stella:

$$R_{Y1} = \frac{R_{\Delta1} R_{\Delta3}}{R_{\Delta1} + R_{\Delta2} + R_{\Delta3}}$$

$$R_{Y2} = \frac{R_{\Delta1} R_{\Delta2}}{R_{\Delta1} + R_{\Delta2} + R_{\Delta3}}$$

$$R_{Y3} = \frac{R_{\Delta2} R_{\Delta3}}{R_{\Delta1} + R_{\Delta2} + R_{\Delta3}}$$



Per $R_{\Delta1} = R_{\Delta2} = R_{\Delta3} = R_{\Delta}$ e $R_{Y1} = R_{Y2} = R_{Y3} = R_Y$, si ha $R_Y = R_{\Delta}/3$.

Per la trasformazione dalle resistenze a stelle alle equivalenti resistenze a triangolo risulta:

$$R_{\Delta 1} = \frac{R_{Y1}R_{Y2} + R_{Y2}R_{Y3} + R_{Y3}R_{Y1}}{R_{Y3}}$$

$$R_{\Delta 2} = \frac{R_{Y1}R_{Y2} + R_{Y2}R_{Y3} + R_{Y3}R_{Y1}}{R_{Y1}}$$

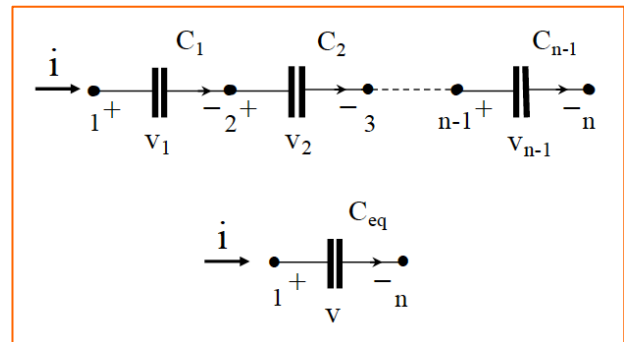
$$R_{\Delta 3} = \frac{R_{Y1}R_{Y2} + R_{Y2}R_{Y3} + R_{Y3}R_{Y1}}{R_{Y2}}$$

Per $R_{Y1}=R_{Y2}=R_{Y3}=R_Y$ e $R_{\Delta 1}=R_{\Delta 2}=R_{\Delta 3}=R_{\Delta}$, si ha $R_{\Delta} = 3 R_Y$.

Serie di condensatori

Due o più condensatori sono in serie quando sono posti uno di seguito all'altro. I nodi in comune collegano esclusivamente due dei condensatori in serie. Attraverso ciascuno dei condensatori fluisce la stessa corrente. Dalla figura si ha:

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_{n-1}$$



$$\text{dove: } v_k = \frac{1}{C_k} \int_{t_0}^t i(t') dt' + v_k(t_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_{1,n} = \frac{1}{C_1} \int_{t_0}^t i(t') dt' + \frac{1}{C_2} \int_{t_0}^t i(t') dt' + \dots + \frac{1}{C_{n-1}} \int_{t_0}^t i(t') dt' + v_1(t_0) + v_2(t_0) + \dots + v_{n-1}(t_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_{n-1}} \right) \int_{t_0}^t i(t') dt' + v_1(t_0) + \dots + v_{n-1}(t_0)$$

$$\Rightarrow v = \frac{1}{C_{eq}} \int_{t_0}^t i(t') dt' + v(t_0)$$

C_{eq} è la capacità del condensatore equivalente alla serie di condensatori che per la stessa tensione fra i nodi 1 ed n è attraversato dalla medesima corrente:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_{n-1}} \right)$$

Parallelo di condensatori

Due o più condensatori sono in parallelo quando hanno in comune i terminali di ingresso ed i terminali di uscita della corrente. Tutti i condensatori sono sottoposti alla stessa tensione. Per la LKC si ottiene quanto segue:

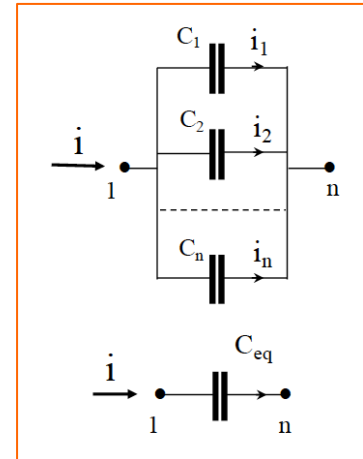
$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_n$$

$$\text{dove: } i_k = C_k \frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow i = C_1 \frac{dv}{dt} + C_2 \frac{dv}{dt} + \dots + C_n \frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i = (C_1 + C_2 + \dots + C_n) \frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i = C_{eq} \frac{dv}{dt}$$



C_{eq} è la capacità di un condensatore equivalente al parallelo di condensatori che per una data tensione fra i nodi 1 ed n è attraversato dalla corrente pari alla somma delle correnti che attraversano i condensatori in parallelo posti fra quella tensione:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

Serie di induttori

Due o più induttori sono in serie quando sono posti uno di seguito all'altro. I nodi in comune collegano esclusivamente due degli induttori in serie. Attraverso ciascuno degli induttori in serie fluisce la stessa corrente. Dalla figura si ha:

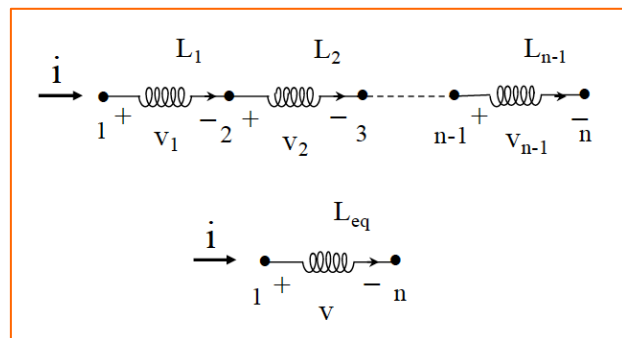
$$v = v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}$$

$$\text{dove: } v_k = L_k \frac{di}{dt}$$

$$\Rightarrow v = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + \dots + L_{n-1} \frac{di}{dt} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = (L_1 + L_2 + \dots + L_{n-1}) \frac{di}{dt} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i = L_{eq} \frac{di}{dt}$$



L_{eq} è l'induttanza dell'induttore equivalente alla serie di induttori che per la stessa tensione fra i nodi 1 ed n è attraversato dalla medesima corrente:

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + \dots + L_{n-1}$$

Parallelo di induttori

Due o più condensatori sono in parallelo quando hanno in comune i terminali di ingresso ed i terminali di uscita della corrente. Tutti i condensatori sono sottoposti alla stessa tensione. Per la LKC si ottiene quanto segue:

$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_n$$

$$\text{dove: } i_k = \frac{1}{L_k} \int_{t_0}^t v(t') dt' + i_k(t_0) \Rightarrow$$

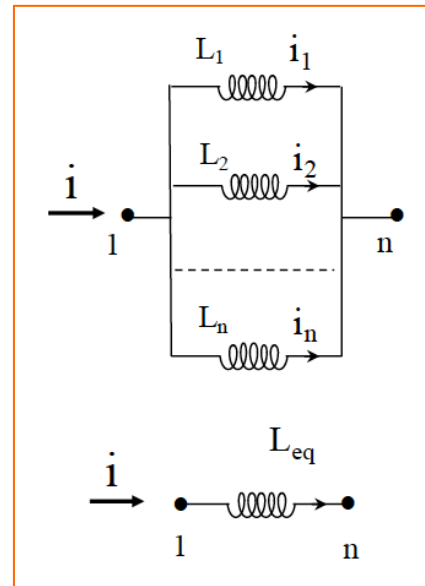
$$\begin{aligned} \Rightarrow i = & \frac{1}{L_1} \int_{t_0}^t v(t') dt' + \frac{1}{L_2} \int_{t_0}^t v(t') dt' + \\ & + \dots + \frac{1}{L_n} \int_{t_0}^t v(t') dt' + \\ & + i_1(t_0) + i_2(t_0) + \dots + i_n(t_0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow i = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n} \right) \int_{t_0}^t v(t') dt' + i_1(t_0) + \dots + i_n(t_0)$$

$$\Rightarrow i = \frac{1}{L_{eq}} \int_{t_0}^t v(t') dt' + i(t_0)$$

C_{eq} è l'induttanza di un induttore equivalente al parallelo di induttori che per una data tensione fra i nodi 1 ed n è attraversato dalla corrente pari alla somma delle correnti che attraversano gli induttori in parallelo posti fra quella tensione:

$$\frac{1}{L_{eq}} = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n} \right)$$



Induttori mutuamente accoppiati

La relazione fra flusso magnetico e corrente elettrica che lo genera, con essa concatenato, per la 1° legge di Maxwell è:

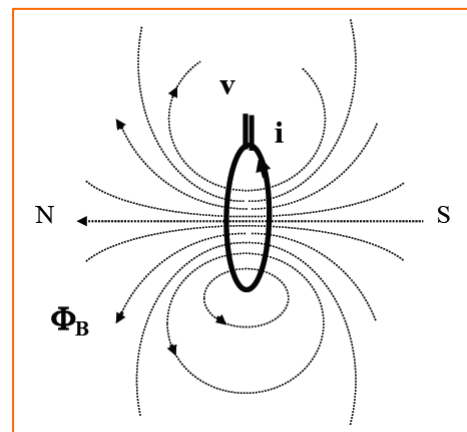
$$\Phi_B = f(i)$$

Inoltre per la 2° legge di Maxwell è:

$$v = \frac{d\Phi_B}{dt} \Rightarrow v = \frac{d}{dt} f(i)$$

Per un induttore ideale:

$$\Phi_B(t) = L i(t) \Rightarrow v(t) = L \frac{di}{dt}$$



Questa relazione assume che la corrente che genera il flusso magnetico sia unica.

Qualora le correnti siano due, i_1 ed i_2 , i contributi al flusso sono due: un contributo generato dalla prima corrente ed uno dalla seconda. Inoltre il flusso può essere il flusso che attraversa la superficie il cui bordo è costituito dal circuito di i_1 , quindi ad essa concatenato, o quello che attraversa una superficie il cui bordo è costituito dal circuito di i_2 e con essa concatenato.

Il contributo al flusso concatenato con il circuito dove fluisce i_1 e generato dalla corrente i_1 è $\Phi_1(i_1)$. Il contributo al flusso concatenato con il circuito di i_1 e generato dalla corrente i_2 è $\Phi_1(i_2)$. Il flusso totale concatenato con i_1 è dato dalla sovrapposizione dei due contributi:

$$\Phi_{C1} = \Phi_1(i_1) + \Phi_1(i_2)$$

Qualora il sistema sia lineare:

$$\Phi_{C1} = L_1 i_1 + M_{12} i_2$$

In questa espressione L_1 è l'**auto induttanza (self inductance)** ed M_{12} è la **mutua induttanza (mutua inductance)**. Per circuiti tempo indipendenti, per cui L_1 ed M_{12} non dipendono dal tempo, si ottiene:

$$v_1 = \frac{d\Phi_{C1}}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt}$$

Analogamente il flusso totale concatenato con i_2 è dato dalla sovrapposizione dei contributi dovuti alle due correnti di i_1 e i_2 :

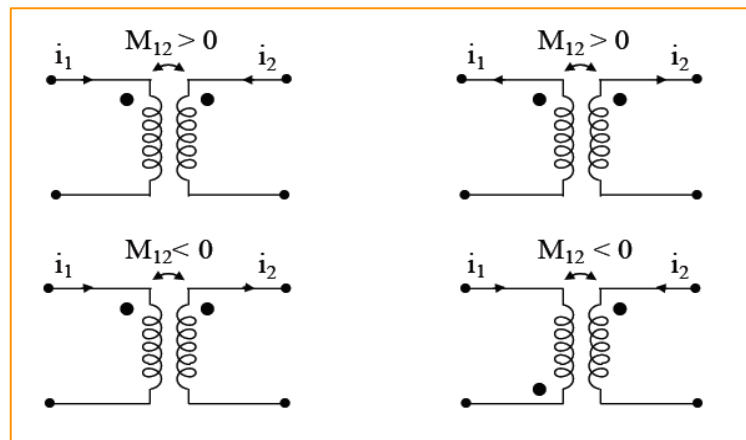
$$\Phi_{C2} = L_2 i_2 + M_{21} i_1$$

la tensione indotta nel circuito di i_2 è:

$$v_2 = \frac{d\Phi_{C2}}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{21} \frac{di_1}{dt}$$

Le auto induttanze sono sempre positive mentre le mutue induttanze possono essere positive o negative. Ciò dipende dal reciproco posizionamento dei due circuiti. **Inoltre si dimostra che $M_{12} = M_{21}$.**

Due induttori mutuamente accoppiati si indicano come nella figura a fianco. La convenzione dei due pallini riguarda il segno di M_{12} . $M_{12} > 0$ quando i pallini corrispondono ai terminali dei due induttori con corrente entrante in entrambi oppure uscente da entrambi. Nel caso in cui i pallini siano posti uno vicino ad un terminale in cui la corrente entra e l'altro vicino ad un terminale da cui la corrente esce, allora $M_{12} < 0$.



Due induttori mutuamente accoppiati si indicano come nella figura a fianco. La convenzione dei due pallini riguarda il segno di M_{12} . $M_{12} > 0$ quando i pallini corrispondono ai terminali dei due induttori con corrente entrante in entrambi oppure uscente da entrambi. Nel caso in cui i pallini siano posti uno vicino ad un terminale in cui la corrente entra e l'altro vicino ad un terminale da cui la corrente esce, allora $M_{12} < 0$.

L'energia W_L immagazzinata dai due induttori accoppiati magneticamente all'istante t , sotto forma di energia elettromagnetica, è data da:

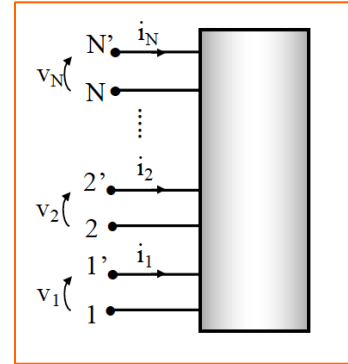
$$\begin{aligned} W_L(-\infty, t) &= \int_{-\infty}^t [v_1(t') i_1(t') + v_2(t') i_2(t')] dt' = \\ &= \int_{-\infty}^t \left\{ L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \left[i_1 \frac{di_2}{dt} + i_2 \frac{di_1}{dt} \right] + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} \right\} dt = \\ &= \int_{-\infty}^t d \left[\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M_{12} i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right] \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow W_L(-\infty, t) = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + M_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2$$

dove $i_1(-\infty) = i_2(-\infty) = 0$. Inoltre I_1 ed I_2 sono i valori delle correnti i_1 ed i_2 all'istante t .

Elemento circuitale multiporta

Un elemento circuitale con un numero pari di terminali $2N$ può essere organizzato come **elemento circuitale multiporta (N port circuit element)**. La corrente entrante per un terminale di ciascuna porta è uguale alla corrente uscente dall'altro terminale della porta medesima. Ogni porta dell'elemento è descritto dalla corrente e dalla tensione fra i due terminali.



Un multiporta che si comporta come tale indipendentemente dai suoi collegamenti esterni si dice **multiporta intrinseco (intrinsic N port element)**.

Il sistema di equazioni caratteristiche di un elemento ad N porte è dato da N equazioni scalari che mettono in relazione le N tensioni di porta alle N correnti di porta:

$$\begin{aligned} v_1 &= f_1(i_1, i_2, \dots, i_N) \\ v_2 &= f_2(i_1, i_2, \dots, i_N) \\ &\dots\dots\dots \\ v_N &= f_N(i_1, i_2, \dots, i_N) \end{aligned}$$

La potenza assorbita dall'elemento multiporta è:

$$p(t) = v_1 i_1 + v_2 i_2 + \dots\dots\dots + v_N i_N$$

L'energia assorbita al tempo t è:

$$W(t) = \int_{-\infty}^t p(t) dt$$

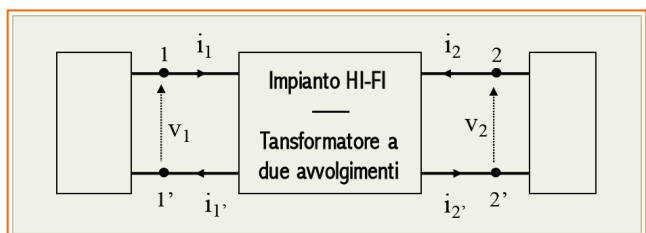
Elemento circuitale biporta

Un elemento circuitale a due porte o **biporta (two port circuit element)** è molto comune nella tecnica. Esso è un quadripolo organizzato in due porte. Solitamente si individua una porta di ingresso con tensione v_1 e corrente i_1 , ed una di uscita, con tensione v_2 e corrente i_2 , come nel caso di un amplificatore di un impianto HI-FI, o di un trasformatore monofase a due avvolgimenti. Il segnale da amplificare entra nell'elemento dalla porta di ingresso ed esce amplificato da quella di uscita. Così nel trasformatore entra dall'ingresso il segnale da trasformare che esce trasformato da quella d'uscita.

L'equazione caratteristica per un elemento biporta è:

$$\begin{aligned} v_1 &= f_1(i_1, i_2) \\ v_2 &= f_2(i_1, i_2) \end{aligned}$$

Per un biporta lineare le funzioni f_1 ed f_2 sono funzioni integro-differenziali lineari nelle variabili i_1 ed i_2 .



La potenza del biporta è:

$$p(t) = v_1 i_1 + v_2 i_2$$

Due induttori mutuamente accoppiati possono essere considerati un elemento circuitale a due porte, dove:

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{12} \frac{di_1}{dt}$$

