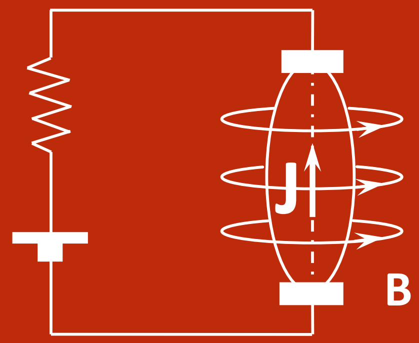
ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA



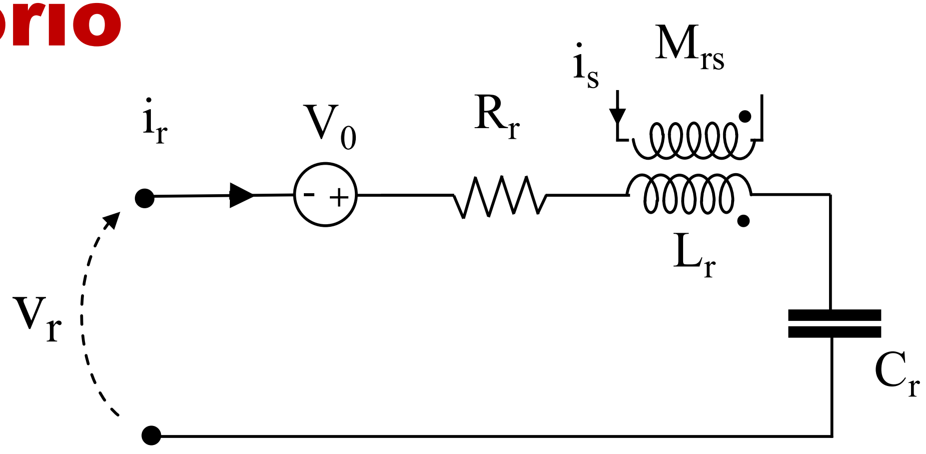
6.
Analisi del transitorio

Elettrotecnica
Corso del CdL in Ingegneria elettronica per l'energia e l'informazione ed in Ingegneria biomedica
Anno Accademico 2020/2021

Dipartimento di Ingegneria dell'Energia Elettrica e dell'Informazione «Guglielmo Marconi»

Analisi del transitorio

L'equazione dell'elemento di ramo in figura quando l'ingresso è dato da una funzione generica del tempo, è:



$$v_r(t) = L_r \frac{di_r}{dt} + M_{rs} \frac{di_s}{dt} + \frac{1}{C_r} \int_{-\infty}^{t} i(t')dt' + R_r i_r(t) \; - V_0$$

Il circuito è descritto dalle equazioni topologiche (LKC e LKT) e dalle equazioni degli elementi della forma dell'equazione sovrastante.

$$\sum\nolimits_n \; i_r = 0$$

$$\sum\nolimits_m v_r = 0$$

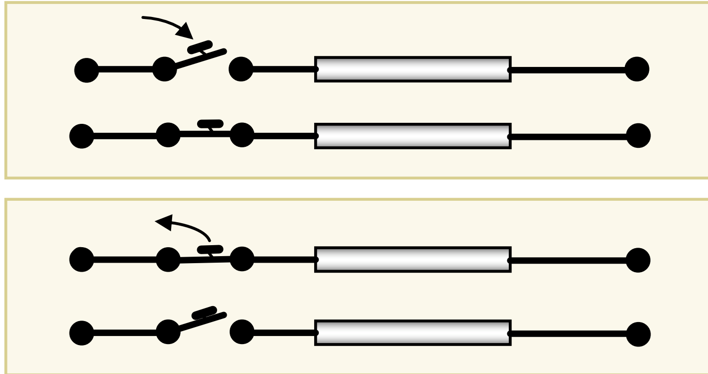
$$v_r = f(i_r)$$

Questo sistema di equazione è un sistema integro-differenziale non omogeneo e può essere risolto con un metodo matematico analitico o numerico.

Analisi del transitorio

Causa del transitorio

Un cambiamento dell'ingresso o delle condizioni di funzionamento del circuito è la causa di un transitorio composto da un regime variabile nel tempo che va a smorzarsi, ed un regime stazionario alle nuove condizioni istauratesi.



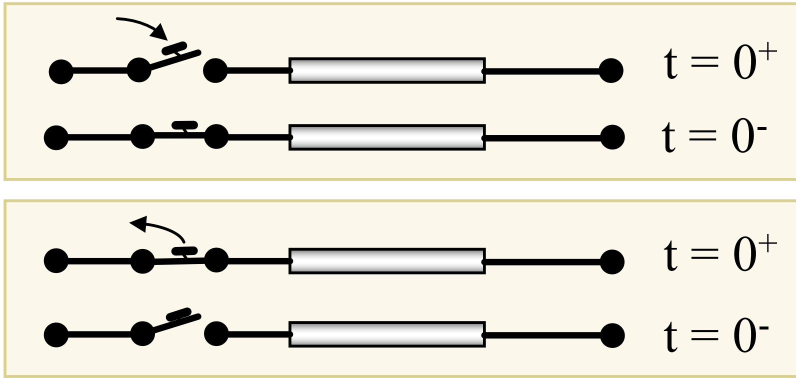
La risposta transitoria è una risposta temporanea del circuito che si esaurisce con il tempo (parte temporanea della risposta).
La risposta seguente è di regime stazionario che descrive il comportamento del circuito molto tempo dopo l'improvviso cambiamento. Questa è la parte permanente della risposta.

Risposta completa : risposta transitoria + risposta stazionaria

L'analisi del regime transitorio, comprendente sia la componente transitoria che si smorza sia la componente stazionaria, può essere studiata nel dominio del tempo per mezzo dell'insieme delle equazioni dell'analisi circuitale.

Principio di conservazione dell’energia

Durante il transitorio, che precede il regime stazionario alle nuove condizioni a cui il circuito è sottoposto, è dovuta al tempo necessario agli elementi con memoria per trasferire l’energia elettromagnetica da uno all’altro elemento come richiesto dalle nuove condizioni.



Gli elementi con memoria per cambiare il loro stato operativo devono rispettando il ***principio di conservazione dell'energia***. Come conseguenza non non è possibile che l’energia immagazzinata da ciascuno di questi elementi subisca durante l’evento che causa il transitorio, da $t = 0^-$ a $t = 0^+$, una variazione istantanea finita. Deve essere quindi:

$$\varepsilon(0^-) = \varepsilon(0^+)$$

dove $\varepsilon(0^-)$ e $\varepsilon(0^+)$ sono i valori dell’energia posseduta da ciascun elemento con memoria agli istanti da $t = 0^-$ e $t = 0^+$. rispettivamente.

Una variazione istantanea dell'energia sarebbe causata solo da una eccitazione con energia infinita. Risulta quindi:

$$p(t=0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varepsilon(0^-) - \varepsilon(0^+)}{\Delta t}$$

Principio di conservazione dell’energia

Al fine di inibire variazioni istantanee dell'energia immagazzinata, i nei condensatori la variazione istantanea della tensione è nulla e negli induttori la variazione istantanea della corrente è nulla. L'energia immagazzinata nell’elemento con memoria deve essere trasferita per ottemperare alla nuova condizione e ciò richiede tempo. L’energia immagazzinata da un elemento non può variare bruscamente:

$$\varepsilon_L(t) = \frac{1}{2} L i^2$$

Energia magnetica dell’induttore

Nell’induttore variazioni istantanee di i non sono possibili

$$\varepsilon_C(t) = \frac{1}{2} C v^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Energia elettrostatica del condensatore

Nel condensatore variazioni istantanee di v e Q non sono possibili

Il transito fra $t = 0^-$ a $t = 0^-$, nel passaggio dallo stato del circuito immediate-mente prima della modifica e subito dopo, deve soddisfare al ***principio di conservazione dell'energia*** con le seguenti conseguenze:

$i(0^+) = i(0^-)$ ***nei rami con induttori***

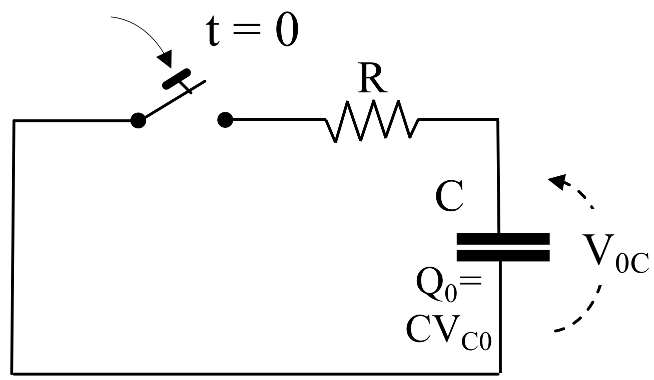
$v(0^+) = v(0^-)$ ***tra i terminali di un condensatore***

$Q(0^+) = Q(0^-)$ ***in ciascuna armatura di un condensatore***

Circuiti del primo ordine: *Circuito RC*

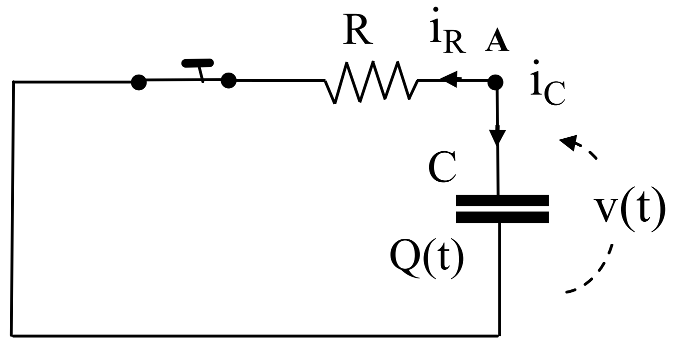
Risposta di un circuito RC privo di eccitazione: *Risposta naturale*

All'istane $t = 0$ il tasto del circuito RC di figura viene chiuso. Per $t = 0^-$ il condensatore è carico con $Q = Q_0 = CV_{0C}$. Alla chiusura del tasto inizia il transitorio che si estingue quando viene raggiunto il regime stazionario delle nuove condizioni.



$- \infty < t \leq 0^-$

La tensione, dovuta al campo elettrostatico creato dalle cariche $+Q_0$ e $-Q_0$ sulle due armature, le spinge da un'armatura verso l'altra lungo il conduttore attraverso il resistore. Il flusso delle cariche, corrente elettrica, trasferisce l'energia elettrostatica del condensatore al resistore dove è dissipata come energia termica.



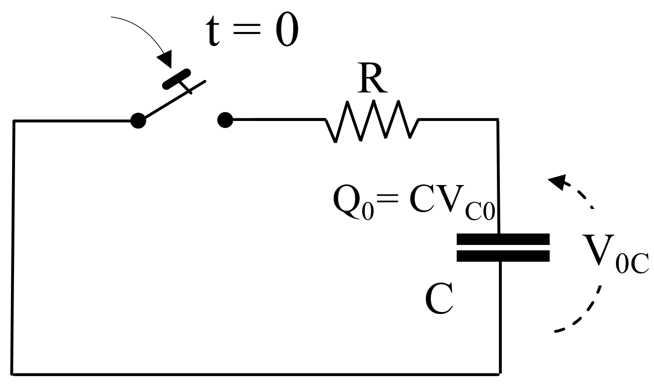
$0^+ \leq t < + \infty$

Quando le armature si sono scaricate, tutta l'energia elettrostatica è trasformata in calore dal resistore e dissipata. Il campo elettrico e la tensione si annullano e il transitorio si spegne.

Circuiti del primo ordine: *Circuito RC*

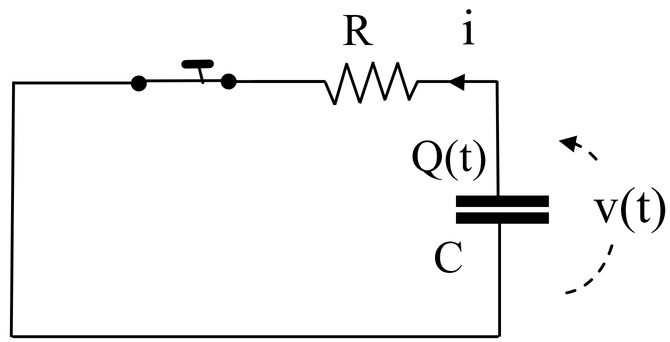
Risposta di un circuito RC privo di eccitazione: *Risposta naturale*

➢ Il circuito è eccitato dall'energia immagazzinata nel condensatore. L'energia viene dissipata dal resistore. La carica se ne va dalle armature, il campo nel dielettrico e la tensione fra le armature si annullano poichè non sono presenti generatori indipendenti (fonti esterne di energia).



$- \infty < t \leq 0^-$

➢ L'obiettivo è quello di determinare la risposta di transitorio data dal comportamento della tensione attraverso il condensatore nel tempo v(t).



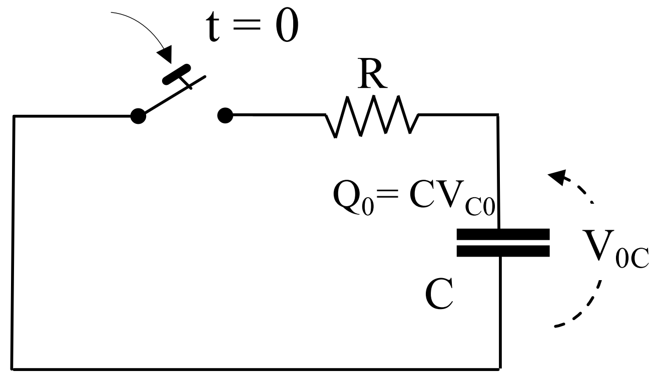
$0^+ \leq t < + \infty$

*La **risposta naturale** di un circuito si riferisce al al transitorio (in termini di tensione o di corrente) che va ad estinguersi. Nel circuito in questo caso non vi sono fonti esterne di eccitazione (generatori indipendenti).*

Circuiti del primo ordine: *Circuito RC*

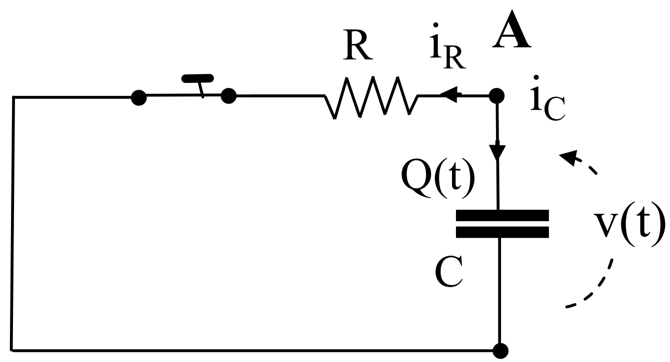
Risposta di un circuito RC privo di eccitazione: *Risposta naturale*

Nell'intervallo di tempo $-\infty < t \leq 0^-$ si ha $Q = Q_0 = CV_{C0}$. Per il principio di conservazione dell'energia nella nuova configurazione col tasto chiuso, per $t = 0^+$ è $Q(0^+) = Q(0^-) = Q_0$ e $v(0^-) = v(0^+) = Q_0/C = V_{C0}$.



$-\infty < t \leq 0^-$

Per $0^+ \leq t < +\infty$, le correnti attraverso il resistore, $i_R = v/R$, ed il condensatore, $i_C = C\,dv/dt$, dalla LKC al nodo A si ha:



$0^+ \leq t < +\infty$

$$i_R + i_C = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{CR} = 0$$

*Questa è un'equazione differenziale omogenea del primo ordine, la cui soluzione rappresenta la risposta naturale di un circuito del primo ordine (motivazione del termine «**circuito del primo ordine**»).*

Circuiti del primo ordine: *Circuito RC*

Risposta di un circuito RC privo di eccitazione: *Risposta naturale*

La soluzione dell'equazione differenziale omogenea del primo ordine che descrive il transitorio del circuito RL dopo la chiusura del tasto ($0^+ \leq t < +\infty$) è:

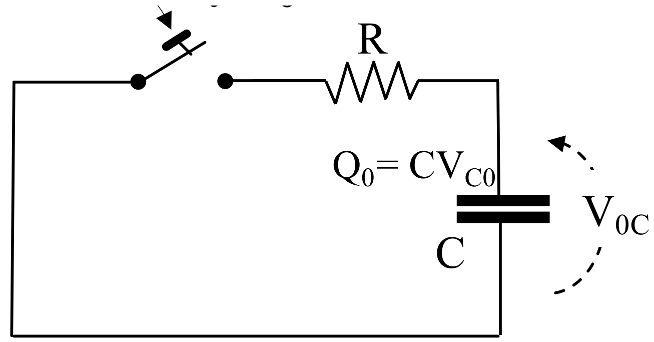
$$v(t) = A\, e^{\alpha t} \qquad \text{con} \qquad \alpha = -1/\tau = -{}^{1}/_{RC}$$

dove $\alpha = -1/\tau$ è la soluzione dell'equazione caratteristica associata all'equazione differenziale. τ nell'espressione di α è definita come ***costante di tempo***.

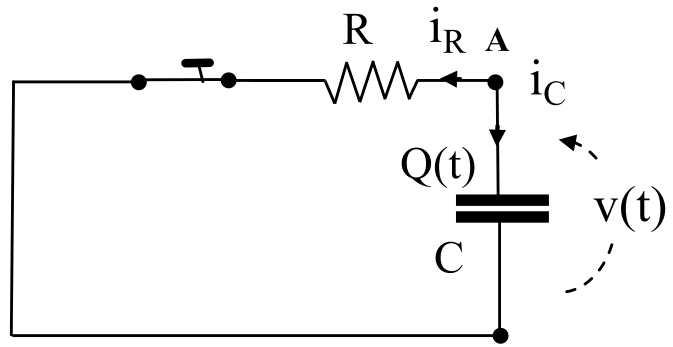
La costante A, costante di integrazione, è determinate per mezzo delle condizioni iniziali a $t = 0^+$:

$$Q(0^+) = Q_0, \quad v(0^+) = V_{C0} = Q_0/C\ .$$

$$\Rightarrow \qquad v(t) = V_{C0}\, e^{-t/\tau}$$



$-\infty < t \leq 0^-$



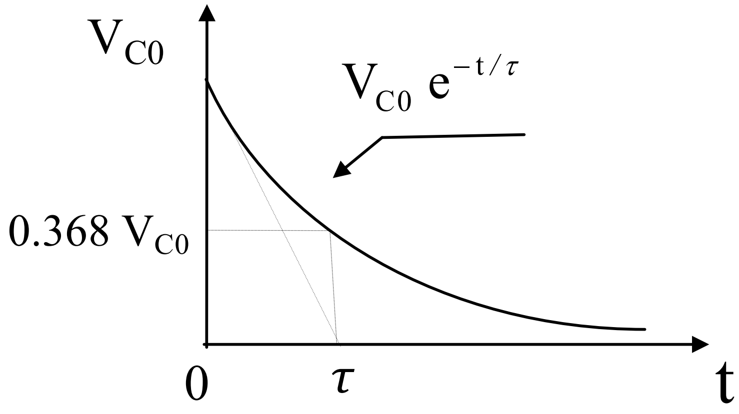
$0^+ \leq t < +\infty$

Circuiti del primo ordine: *Circuito RC*

Risposta di un circuito RC privo di eccitazione: *Risposta naturale*

Il transitorio del circuito RL per $0^+ \leq t < +\infty$ è:

$$v(t) = V_{C0}\, e^{-t/\tau} \quad \text{con} \quad \tau = RC$$



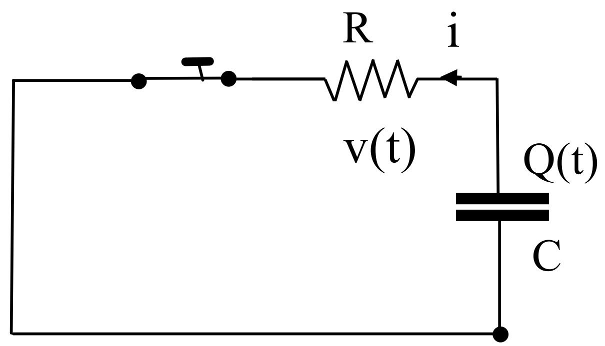
La costante di tempo τ *di un circuito è il tempo necessario per il decadimento di un fattore* $1/e$ *pari al* 36,8 % *del suo valore iniziale.*

Ad ogni intervallo di tempo di τ la tensione viene ridotta di 36,8 % del suo valore precedente. Dopo un intervallo di 5τ la tensione di transitorio si è ridotta al disotto dell'1 % e lo stato stabile può essere considerato raggiunto.

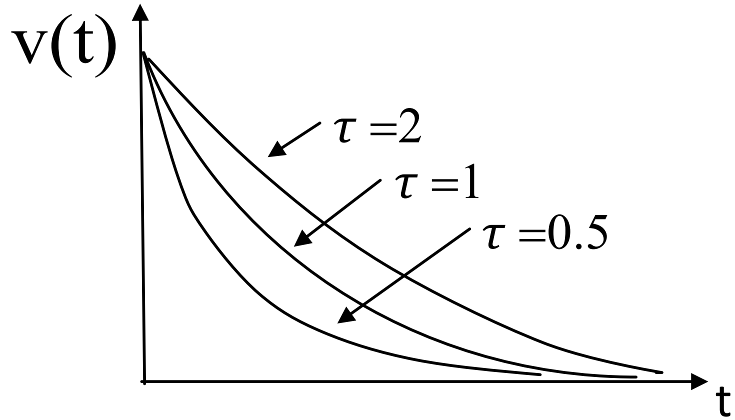
t	**$v(t)/V_{C0}$**
τ	0.36788
2 τ	0.13534
3 τ	0.04979
4 τ	0.01832
5 τ	0.00674

Circuiti del primo ordine: *Circuito RC*

Risposta di un circuito RC privo di eccitazione: *Risposta naturale*



$0^+ \leq t < +\infty$



La corrente per $0^+ \leq t < +\infty$ è:

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{V_{C0}}{R}\, e^{-t/\tau}$$

La potenza dissipata dal resistore è:

$$p(t) = v(t)\, i(t) = \frac{v(t)2}{R} = \frac{V_{CO}{}^2}{R}\, e^{-2t/\tau}$$

$V_{CO}{}^2$ è l'energia trasferita dal condensatore al resistore durante il transitorio è:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t p(t')dt' = \int_0^t \frac{V_{CO}{}^2}{R}\, e^{-2t'/\tau}\, dt' =$$

$$= \left(\frac{\tau V_{CO}{}^2}{2R}\, e^{-2t/\tau}\right)\Bigg|_0^t = \frac{CV_{CO}{}^2}{2}\,(1 - e^{-2t/\tau})$$

Per $t = +\infty$ si ha $\varepsilon(+\infty) = CV_{CO}{}^2/2$.

Il circuito **RC** *può essere simulato da circuito equivalente (Thévenin o Norton).*

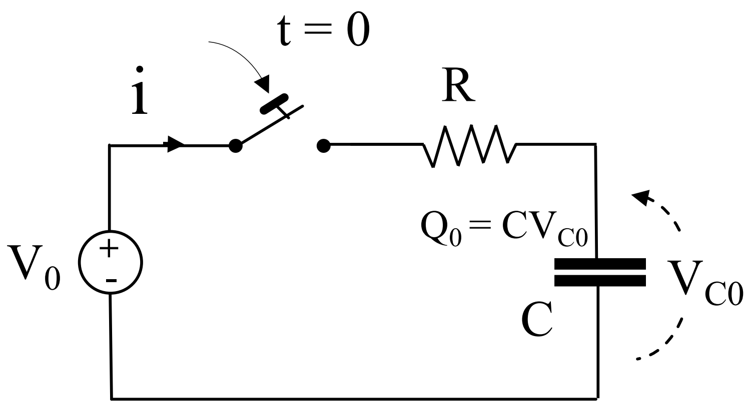
Grandezze chiave:

1. *Tensione iniziale del condensatore* $\mathbf{v(0^-) = v(0^+) = V_{C0}}$
2. *La costante di tempo:* $\mathbf{t = RC}$

Circuiti del primo ordine: *Circuito RC*

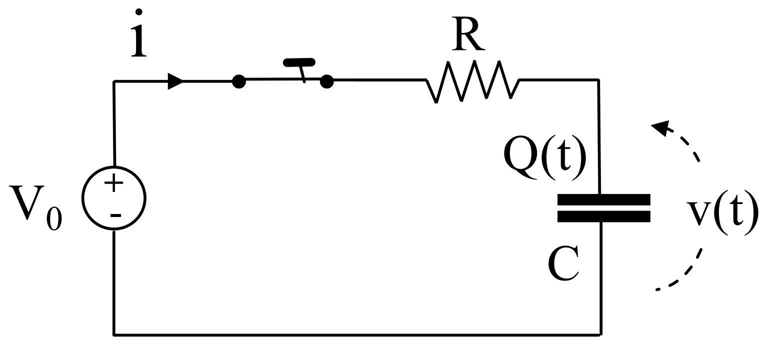
Risposta di un circuito RC con eccitazione: *Risposta completa (naturale + forzata)*

Il transitorio è causato da un salto di tensione. Questo può essere ottenuto da un generatore di tensione indipendente ed un interruttore che viene chiuso all’istante $t = 0$. Si innesca quindi un transitorio (risposta naturale) che va spegnendosi in un tempo prossimo a $5 \div 6\,\tau$, e che lascia il ad un regime stazionario non-nullo a causa del generatore di tensione.



$-\infty < t \leq 0^-$

In questo caso si ha una ***riposta completa*** data dalla ***risposta naturale*** più la ***risposta forzata*** (***regime stazionario***).



$0^+ \leq t < +\infty$

La risposta naturale è descritta da un’equazione differenziale ordinaria omogenea. Quando è presente un generatore indipendente, solitamente l’equazione diviene differenziale ***non omogenea*** *la cui* ***soluzione particolare*** *a* $t = +\infty$ *descrive la* ***risposta forzata***.

Circuiti del primo ordine: *Circuito RC*

Risposta di un circuito RC con eccitazione: *Risposta completa (naturale + forzata)*

Nel caso in esame per $-\infty < t \leq 0^-$ si ha:

$$Q = Q_0, \quad v(t) = Q_0/C = V_{C0}$$

Per $0^+ \leq t < +\infty$ dalla LKT si ha:

$$V_{C0} + \frac{1}{C}\int_0^t i(t')dt' + R\, i(t) - V_0 = 0$$

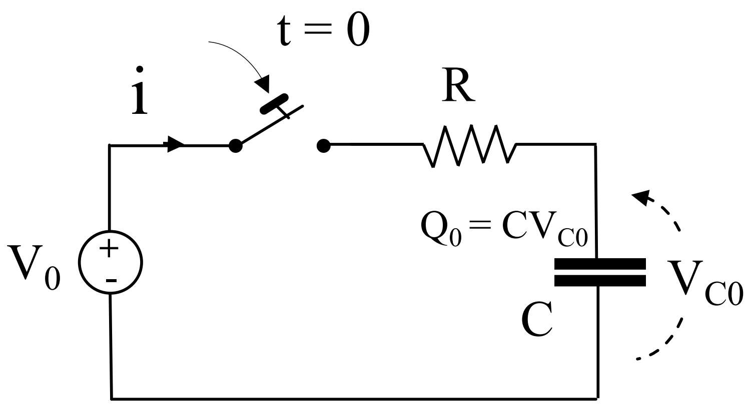
Derivando questa equazione si ottiene:

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{RC}\, i(t) = 0$$

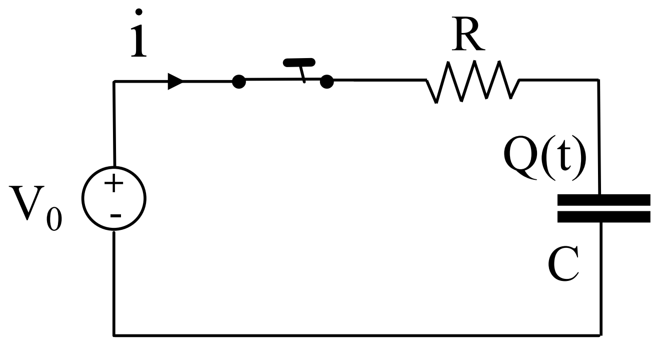
la cui soluzione è:

$$i(t) = A\, e^{\alpha t} \qquad \text{con} \qquad \alpha = -1/\tau = -{}^{1}/_{RC}$$

α e τ sono ottenute dalla soluzione dell'e-quazione caratteristica associata all'equazio-ne differenziale omogenea. La costante di integrazione A è determinate delle condizioni iniziali a $t = 0^+$.



$-\infty < t \leq 0^-$



$0^+ \leq t < +\infty$

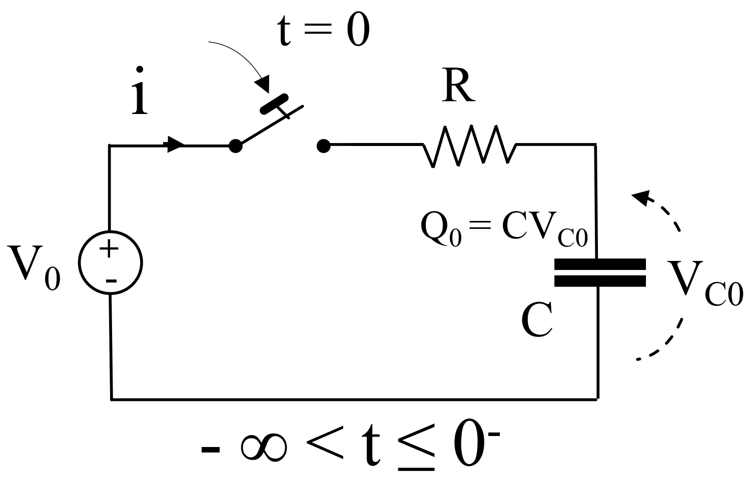
ALMA MATER STUDIORUM UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Circuiti del primo ordine: *Circuito RC*

Risposta di un circuito RC con eccitazione: *Risposta completa (naturale + forzata)*

Analisi dei dati iniziali a $t = 0^-$:

$$v_C(0^-) = V_{C0}; \quad Q(0^-) = C\,V_{C0}$$
$$i(0^-) = 0$$



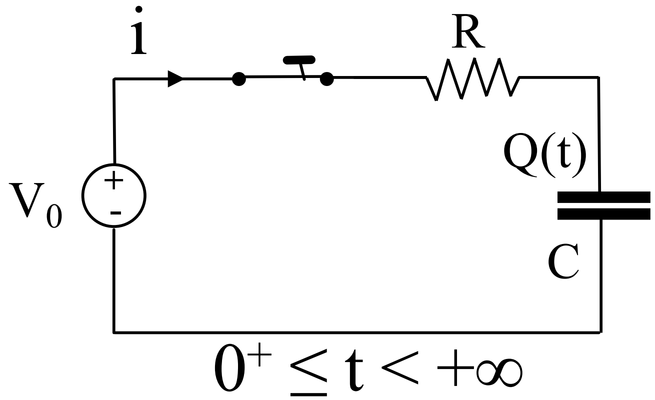
Analisi delle condizioni iniziali a $t = 0^+$:

- La tensione sul condensatore è:

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = V_{C0}$$

e dalla KLT risulta:

$$Ri - V_0 + V_{C0} = 0$$
$$\rightarrow \quad i(0^+) = (V_0 - V_{C0})/R$$



Analisi del transitorio per $0^+ \leq t < +\infty$:

- La soluzione dell'equazione differenziale che soddisfa alle condizioni iniziali é:

$$i(t) = \frac{V_0 - V_{C0}}{R}\, e^{-t/(RC)}$$

ALMA MATER STUDIORUM UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Circuiti del primo ordine: *Circuito RC*

Risposta di un circuito RC con eccitazione: *Risposta completa (naturale + forzata)*

Per $0^+ \leq t < +\infty$ la corrente $i(t)$, soluzione dell'equazione differenziale, è:

$$i(t) = \frac{V_0 - V_{C0}}{R}\, e^{-t/(RC)} \; V_{C0}$$

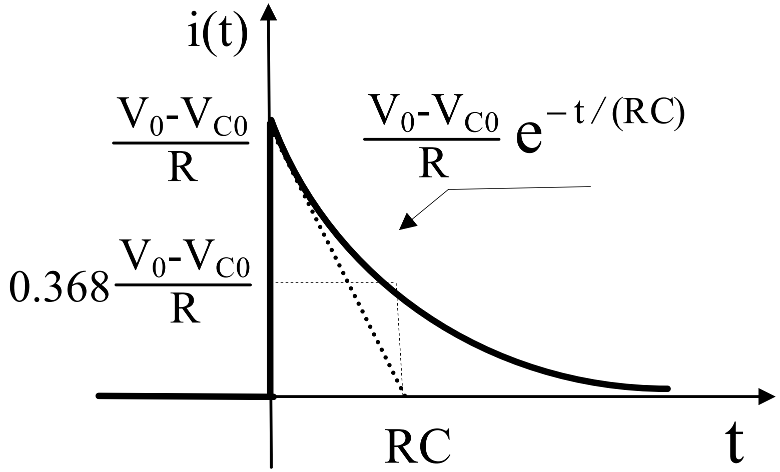
La tensione sul condensatore $v_C\,(t)$ è:

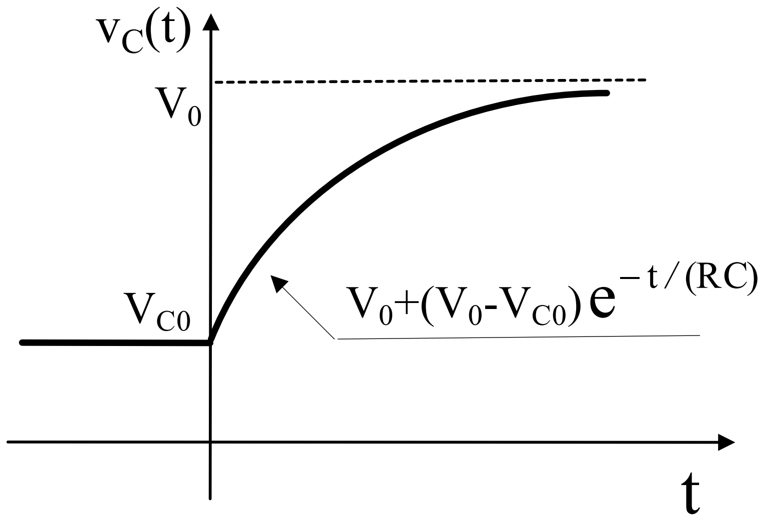
$$v_C\,(t) = V_{C0} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t')dt'$$

$$\rightarrow \quad v_C\,(t) = V_0 + (V_{C0} - V_0)\, e^{-t/(RC)}$$

Essa descrive la risposta del circuito RC (o circuito equivalente di Thévenin o di Norton) ad un gradino di tensione.

All'estinzione del transitorio per $t = +\infty$ *nel regime stazionario (risposta forzata) si ha* $i(+\infty) = 0$ *e* $v_C(+\infty) = V_0$. *In questo caso il condensatore rimane carico con energia immagazzinata* $\varepsilon(+\infty) = CV_0^2/2$.

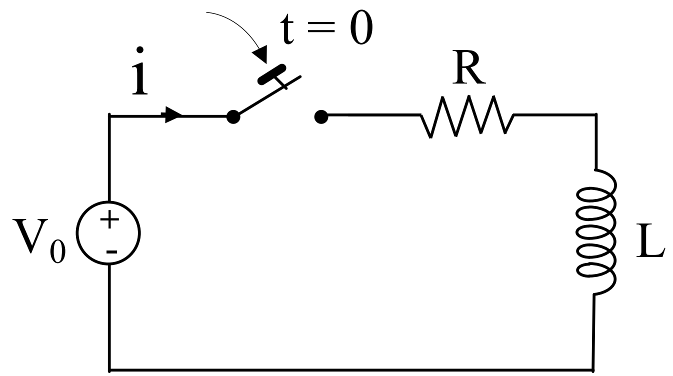




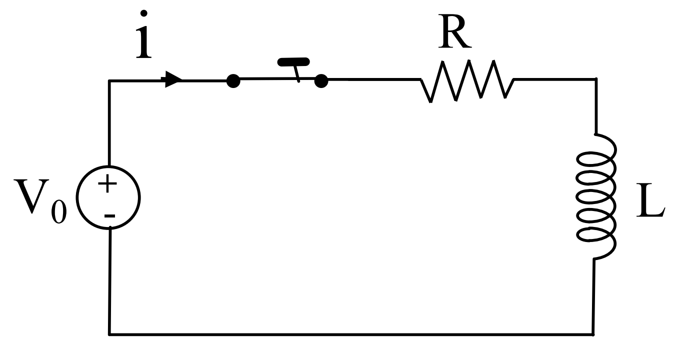
Circuiti del primo ordine: *Circuito RL*

Risposta di un circuito RL con eccitazione: *Risposta completa (naturale + forzata)*

Il circuito RL di figura con generatore di tensione indipendente, è sottoposto ad un gradino di tensione alla chiusura del tasto all'istante $t = 0$.



$-\infty < t \leq 0^-$



$0^+ \leq t < +\infty$

Analisi del transitorio per $0^+ \leq t < +\infty$:

- Dalla LKT si deriva la seguente equazione differenziale ordinaria non omogenea del primo ordine:

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) - V_0 = 0$$

La soluzione $i(t)$ dell'equazione differenziale omogenea, ***risposta naturale***, è:

$$i(t) = A\, e^{\alpha t}$$

dove $\alpha = -1/\tau = -R/L$ è data dalla soluzione dell'equazione caratteristica associata all'equazione differenziale omogenea.

Dipartimento di Ingegneria dell'Energia Elettrica e dell'Informazione «Guglielmo Marconi»

ALMA MATER STUDIORUM UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Circuiti del primo ordine: *Circuito RL*

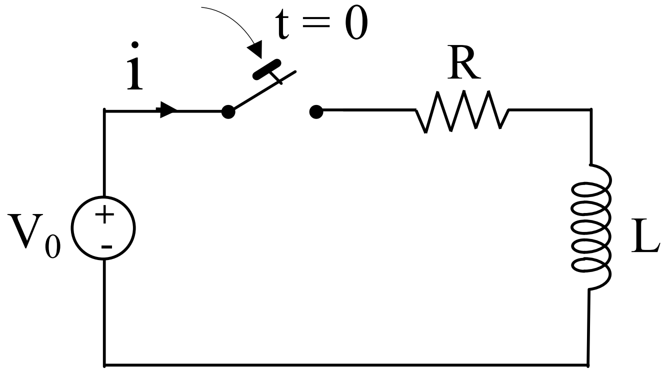
Risposta di un circuito RL con eccitazione: *Risposta completa (naturale + forzata)*

La ***risposta completa***, data dalla risposta naturale più la risposta forzata è:

$$i(t) = A\,e^{-(R/L)\,t} + f_0$$

dove f_0 è la soluzione particolare dell'equazione differenziale non omogenea a $\mathbf{t = +\infty}$ (***risposta forzata***):

$$f_0 = i(+\infty)$$



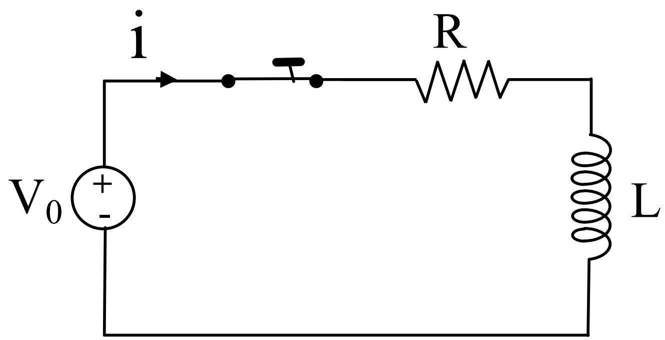
$-\infty < t \leq 0^-$

Analisi della risposta forzata a $t = +\infty$**:**

$$i(+\infty) = A\,e^{-\infty} + f_0 = f_0$$

da LKT $\longrightarrow$ $R\,i(+\infty) - V_0 = 0 \longrightarrow i(+\infty) = V_0/R$

$\longrightarrow \quad f_0 = V_0/R$



$0^+ \leq t < +\infty$

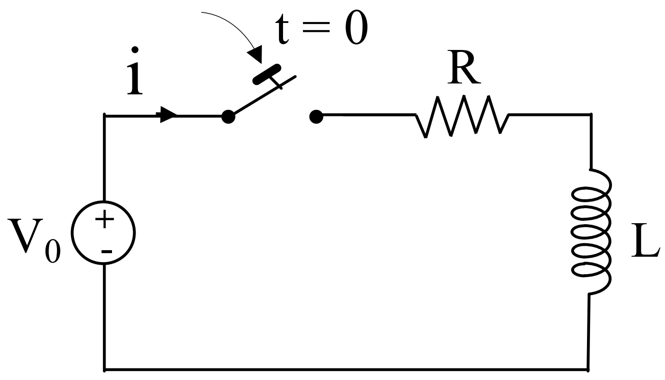
Quindi $i(t)$ **per** $0^+ \leq t < +\infty$ **diviene:**

$$i(t) = A\,e^{-(R/L)\,t} + V_0/R$$

Circuiti del primo ordine: *Circuito RL*

Risposta di un circuito RL con eccitazione: *Risposta completa (naturale + forzata)*

La costante A, costante di integrazione, è determinata imponendo che la soluzione dell'equazione differenziale non omogenea soddisfi alle condizioni iniziali.



$-\infty < t \leq 0^-$

Analisi dei dati iniziali a $-\infty < t \leq 0^-$:

$$i(0^-) = 0$$

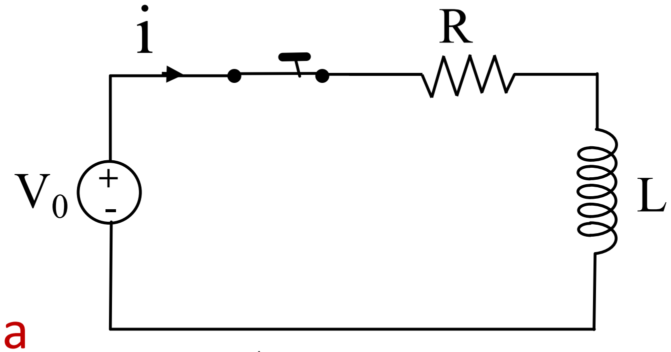
Analisi delle condizioni iniziali a $t = 0^+$:

- La corrente attraverso l'induttore è:

$$i(0^+) = i(0^-) = 0$$

$$\rightarrow \quad i(0^+) = A\,e^{-(R/L)\,t} + V_0/R = A + V_0/R$$

$$\rightarrow \quad A = -\,V_0/R$$



$0^+ \leq t < +\infty$

La ***risposta completa*** del circuito RL eccitato da una tensione a gradino, per $0^+ \leq t < +\infty$ è:

$$i(t) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-(R/L)\,t}\right)$$

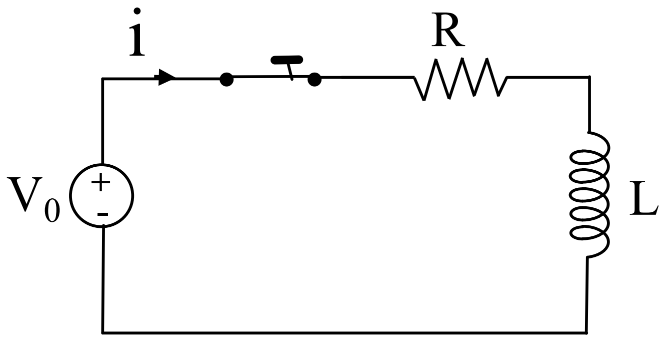
ALMA MATER STUDIORUM UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Circuiti del primo ordine: *Circuito RL*

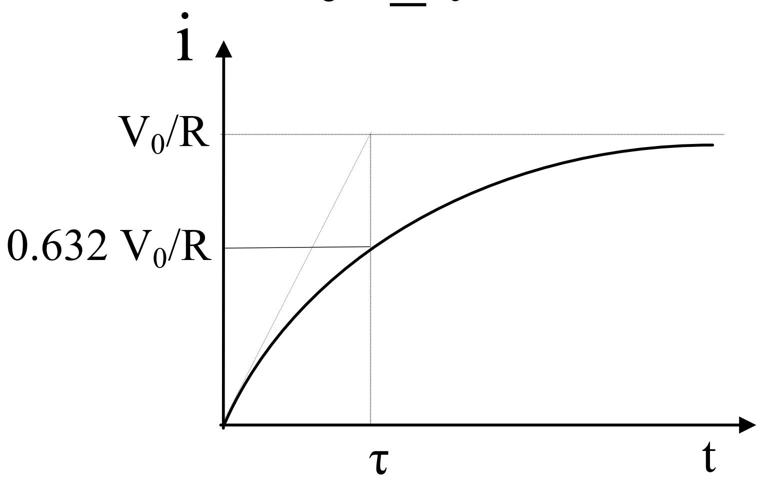
Risposta di un circuito RL con eccitazione: *Risposta completa (naturale + forzata)*

La ***risposta completa*** del circuito RL eccitato da una tensione a gradino, per $0^+ \leq t < +\infty$ è:

$$i(t) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-(R/L)\,t}\right)$$



$0^+ \leq t < +\infty$



La risposta completa del circuito RL è la risposta risposta transitoria (risposta naturale), che si annulla dopo alcune costanti di tempo $\tau = L/R$*, aggiunta alla risposta dello stato stazionario a* $t = +\infty$ *data da* V_0/R *(risposta forzata).*

Il circuito RL ***può essere simulato dal circuito equivalente (Thévenin o Norton).***

Grandezze chiave:

1. ***Corrente iniziale attraverso l'induttore*** $\mathbf{i(0^-) = i(0^+)} = 0$;
2. ***La costante di tempo:*** $\boldsymbol{\tau = L/R}$.

ALMA MATER STUDIORUM UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Circuiti del secondo ordine

Risposta dei circuiti del secondo ordine

La **risposta completa** del circuito con eccitazione (con generatore indipendente) è data dalla risposta del circuito quando non sono presenti sorgenti esterne (***risposta transitoria*** o ***risposta naturale***), che si spegne nel tempo, sovrapposte alla risposta di regime stazionario (***risposta di regime*** o ***risposta forzata***) che rimane presente quando la risposta transitoria è estinta.

Risposta completa = risposata transitori + risposta di regime
risposta naturale ***risposta forzata***

- ✓ *La risposta naturale, che dà la parte transitoria della risposta, è la soluzione dell'equazione differenziale ordinaria dipendente dal tempo omogenea.*
- ✓ *La risposta forzata, regime stazionario, è la soluzione particolare dell'equazione differenziale ordinaria dipendente dal tempo non omogenea a* $t = +\infty$.

Dipartimento di Ingegneria dell'Energia Elettrica e dell'Informazione «Guglielmo Marconi»

ALMA MATER STUDIORUM UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Circuiti del secondo ordine

Un circuito di secondo ordine è descritto da un'equazione differenziale di secondo ordine.

Il circuito è costituito da resistori e da due elementi con memoria (o equivalenti).

*L'analisi della risposta del circuito di secondo ordine è simile a quella utilizzata per il primo ordine. La **risposta naturale** è originata dal cambiamento (eccitazione/collegamenti) con il trasferimento dell'energia immagazzinata negli elementi con memoria. La **risposta forzata** è il regime a* $t = +\infty$.

In un transitorio con risposta forzata derivata dalla presenza di eccitazione la risposta completa in un circuito del secondo ordine e data da un'equazione differenziale ordinaria dipendente dal tempo non omogenea (equazione con termine noto). La risposta naturale viene calcolata risolvendo l'equazione differenziale omogenea. I tempi caratteristici negli esponenti sono le soluzioni dell'equazione caratteristica associata. Le costanti di integrazione sono determinate tramite le condizioni iniziali. La soluzione dell'equazione non omogenea è ottenuta aggiungendo alla soluzione dell'equazione omogenea la soluzione particolare a $t = +\infty$. Questa costituisce la risposta forzata, risposta di regime.

Dipartimento di Ingegneria dell'Energia Elettrica e dell'Informazione «Guglielmo Marconi»

ALMA MATER STUDIORUM UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Circuiti del secondo ordine

Analisi del transitorio

- **$t = 0^-$:** I dati iniziali sono essenziali per definire ciò che determina il transitorio. Sono l'energia magnetica immagazzinata negli induttori e l'energia elettrostatica nei condensatori. L'energia immagazzinata negli elementi con memoria è determinato dalle correnti degli induttori e le tensioni (o le cariche) nei condensatori a $t = 0^-$, grandezze che si conservano nella transizione a $t = 0^+$ per la conservazione dell'energia in questi elementi. I dati iniziali a $t = 0^-$ sono forniti dalla soluzione del circuito a $t = 0^-$.

- **$t = 0^+$:** Le condizioni iniziali derivano dai dati iniziali, considerando che, durante la transizione da $t = 0^-$ a $t = 0^+$, il principio di continuità energetica deve essere soddisfatto: $i(0^-) = i(0^+)$ negli induttori, $q(0^-) = q(0^+)$, e $v(0^-) = v(0^+)$ nei condensatori.

- **$t = +\infty$:** La soluzione di regime stazionario a $t = +\infty$ è la soluzione particolare della equazione differenziale non omogenee nel caso di risposta forzata quando sono presenti generatori indipendenti.

Dipartimento di Ingegneria dell'Energia Elettrica e dell'Informazione «Guglielmo Marconi»

ALMA MATER STUDIORUM UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Circuiti del secondo ordine: *Circuito RLC*

Risposta completa (circuito RLC)

Per $-\infty < t \leq 0^-$: $Q = Q_0$, $v = V_{C0} = Q_0/C$

$i = 0$

Per $t = 0$: l'interruttore viene chiuso.

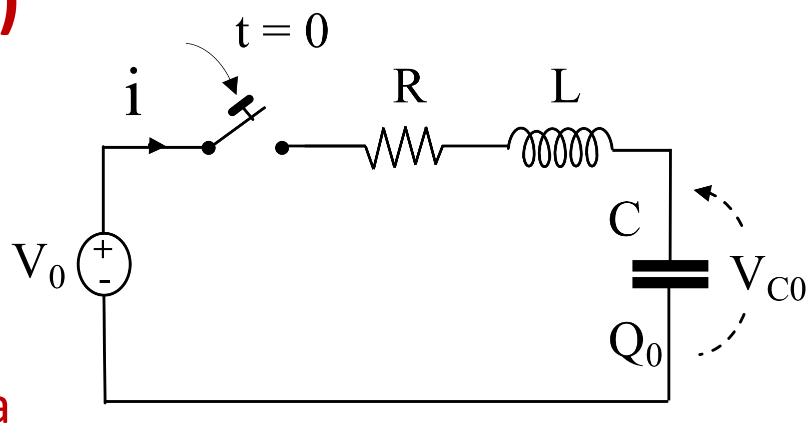
Per $0^+ \leq t < +\infty$: si sviluppa il transitorio seguito dal regime stazionario che si istaura in un tempo pari ad alcuni inter-valli di tempo caratteristici.

Dalla LKT risulta:

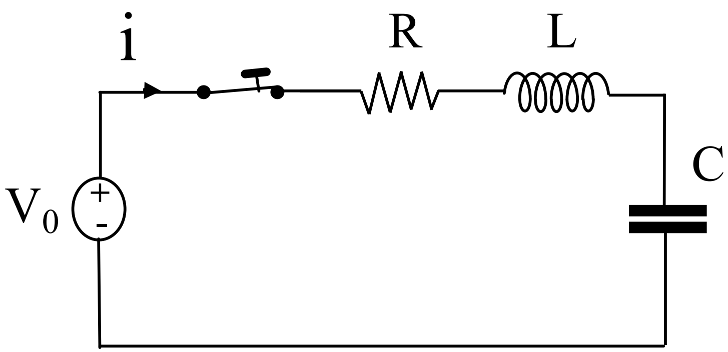
$$V_{C0} + \frac{1}{C}\int_0^t i(t')dt' + L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) - V_0 = 0$$

$$\rightarrow \quad \frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC}\,i(t) = 0$$

Il risultato di questa equazione differen-ziale ordinaria del secondo ordine rappre-senta la risposta completa del transitorio.



$-\infty < t \leq 0^-$



$0^+ \leq t < +\infty$

Dipartimento di Ingegneria dell'Energia Elettrica e dell'Informazione «Guglielmo Marconi»

ALMA MATER STUDIORUM UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Circuiti del secondo ordine: *Circuito RLC*

Risposta completa

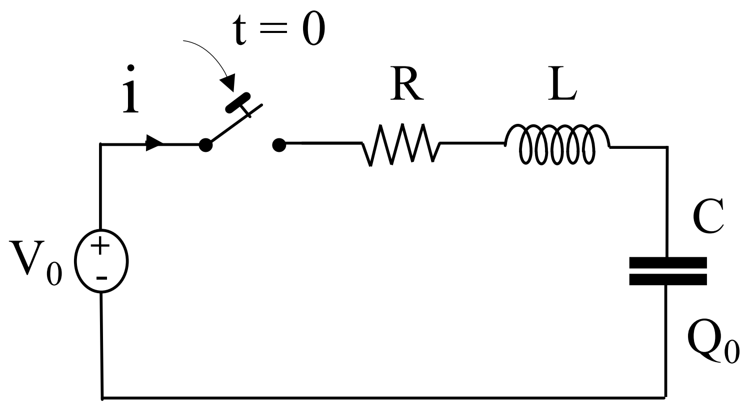
Il risultato di questa ***equazione differenziale ordinaria del secondo ordine*** è:

$$i(t) = A_1\, e^{\alpha_1 t} + A_2\, e^{\alpha_2 t} + i(+\infty)$$

Analisi dei dati iniziali a $t = 0^-$:

$$v_C(0^-) = V_{C0}; \quad Q(0^-) = C\, V_{C0}$$

$$i(0^-) = 0$$



$-\infty < t \leq 0^-$

Analisi delle condizioni iniziali a $t = 0^+$:

- La tensione sul condensatore è.

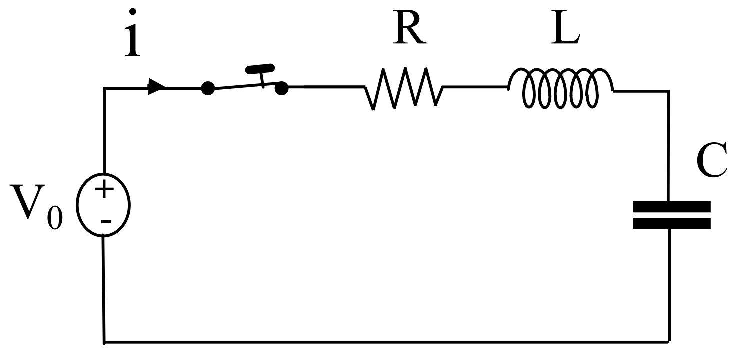
$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = V_{C0}$$

- La corrente attraverso l'induttore è:

$$i(0^+) = i(0^-) = 0$$

inoltre dalla LKT a $t = 0^+$ si ottiene:

$$V_0 - R\, i(0^+) - L\frac{di(0^+)}{dt} - V_{C0} = 0$$



$0^+ \leq t < +\infty$

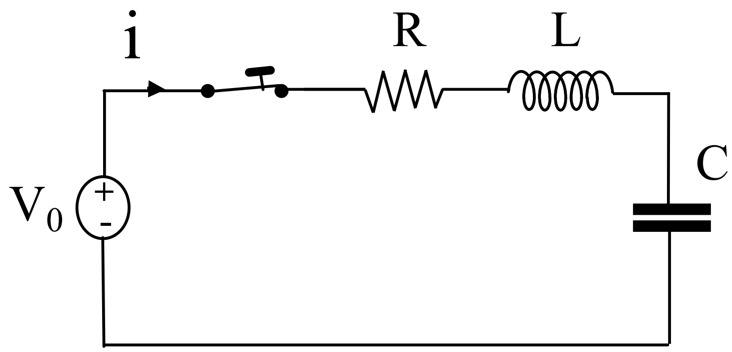
ALMA MATER STUDIORUM UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Circuiti del secondo ordine: *Circuito RLC*

Risposta completa

Poiché si ha $i(0^-) = 0$ si ottiene:

$$\frac{di(0^+)}{dt} = (V_0 - V_{C0})/L$$



$$0^+ \leq t < +\infty$$

Analisi delle stato stazionario a t = +∞:

$$i(+\infty) = 0; \quad v_C(+\infty) = V_0$$

Quindi la soluzione dell'equazione differenziale, risposta completa del transitorio (risposta naturale e risposta forzata), diviene:

$$i(t) = A_1\, e^{\alpha_1 t} + A_2\, e^{\alpha_2 t}$$

Questa è la ***soluzione di un'equazione differenziale ordinaria omogenea del secondo ordine***, come abbiamo visto essere l'equazione differenziale che descrive il circuito con tasto chiuso. In questo caso comunque siamo in presenza di risposta forzata poiché, pur essendo nulla la corrente, $i(+\infty) = 0$, soluzione dell'equazione differenziale, la tensione sul condensatore è diversa da zero: $v_C(+\infty) = V_0$.

Dipartimento di Ingegneria dell'Energia Elettrica e dell'Informazione «Guglielmo Marconi»

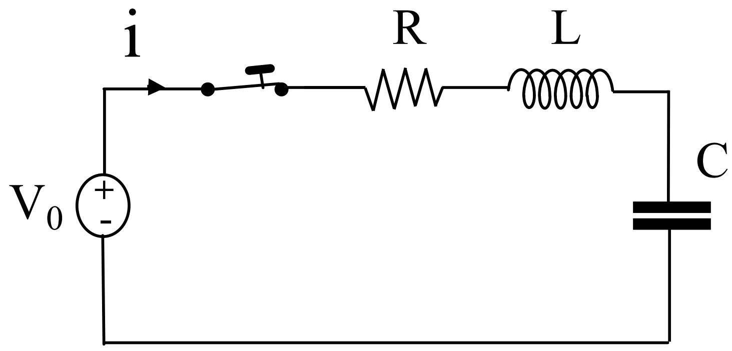
ALMA MATER STUDIORUM UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Circuiti del secondo ordine: *Circuito RLC*

Risposta completa

La soluzione della risposta completa del transitorio quindi è:

$$i(t) = A_1\, e^{\alpha_1 t} + A_2\, e^{\alpha_2 t}$$



$$0^+ \leq t < +\infty$$

dove le costanti di integrazione A_1 e A_2 sono determinate tramite le condizioni iniziali, $i(0^+)$ e $d\, i(0^+)/dt$. α_1 ed α_2, frequenze naturali, sono le soluzioni dell'equazione caratteristica associata all'equazione differenziale omogenea:

$$\alpha^2 + \frac{R}{L}\alpha + \frac{1}{LC} = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha_{12} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$\rightarrow \quad \alpha_{12} = -k \pm \sqrt{k^2 - \omega_0^2}$$

dove: $\alpha_1,\ \alpha_2$ ***frequenze naturali***

$k = R/(2L)$ ***fattore di smorzamento***

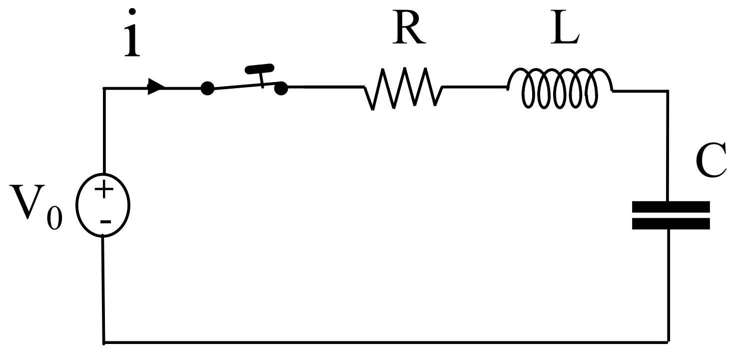
$\omega_0 = 1/\sqrt{CL}$ ***frequenza di risonanza*** o anche ***frequenza naturale non smorzata***

Dipartimento di Ingegneria dell'Energia Elettrica e dell'Informazione «Guglielmo Marconi»

ALMA MATER STUDIORUM UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Circuiti del secondo ordine: *Circuito RLC*

Risposta completa



$$0^{+} \leq t < +\infty$$

La soluzione della risposta completa del transitorio si presentano tre casi:

Caso A: $k > \omega_0 \quad \rightarrow \quad R > 2\sqrt{L/C}$

α_1, α_2 sono reali distinte ed entrambe negative: ***caso sovrasmorzato***

Caso B: $k = \omega_0 \quad \rightarrow \quad R = 2\sqrt{L/C}$

α_1, α_2 sono reali coincidenti negative: ***caso con smorzamento critico***

Caso C: $k < \omega_0 \quad \rightarrow \quad R < 2\sqrt{L/C}$

α_1, α_2 sono complesse coniugate a parte reale negativa: ***caso sottosmorzato***

È perciò necessario in questi tre casi distinti, imporre le condizioni iniziali al fine di determinare le costanti di integrazione A_1 ed A_2.

Circuiti del secondo ordine: *Circuito RLC*

Risposta completa – *Imposizione delle condizioni iniziali*

Caso A – *Caso sovrasmorzato:* $k > \omega_0 \;\rightarrow\; R > 2\sqrt{L/C}$

$\rightarrow\; \alpha_1, \alpha_2$ ***reali distinte***

In questo caso la soluzione dell'equazione differenziale di secondo ordine è:

$$i(t) = A_1\, e^{\alpha_1 t} + A_2\, e^{\alpha_2 t} \quad \text{con} \quad \alpha_{12} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{CL}}$$

Per $t = 0^+$ $i(0^+)$ e $di(0^+)/dt$, i cui valori sono dati dalle condizioni iniziali, sono:

$$i(0^+) = A_1 + A_2 = 0$$

$$\frac{di(0^+)}{dt} = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 = (V_0 - V_{C0})/L$$

$$\Rightarrow \quad A_1 = -A_2 = \frac{V_0 - V_{C0}}{2L\sqrt{\left(\dfrac{R}{2L}\right)^2 - \dfrac{1}{LC}}}$$

Dipartimento di Ingegneria dell'Energia Elettrica e dell'Informazione «Guglielmo Marconi»

ALMA MATER STUDIORUM UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

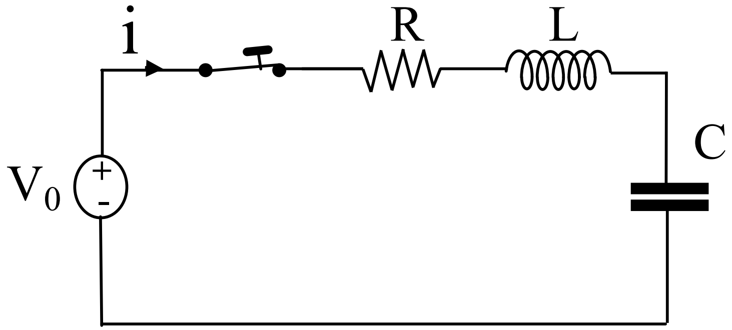
Circuiti del secondo ordine: *Circuito RLC*

Risposta completa – *Imposizione delle condizioni iniziali*

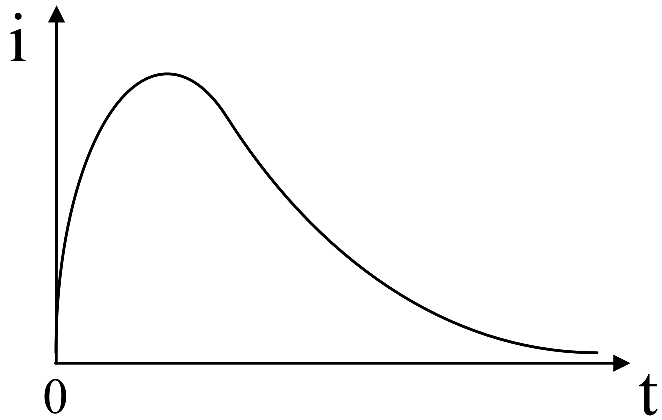
Caso A – *Caso sovrasmorzato:* $k > \omega_0 \;\rightarrow\; R > 2\sqrt{L/C}$

$\rightarrow\; \alpha_1, \alpha_2$ ***reali distinte***

$$i(t) = \frac{V_0 - V_{C0}}{2L\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}}\left[e^{\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}\right)t} - e^{-\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}\right)t}\right]e^{-\frac{R}{2L}t}$$



$0^+ \leq t < +\infty$



Dipartimento di Ingegneria dell'Energia Elettrica e dell'Informazione «Guglielmo Marconi»

ALMA MATER STUDIORUM UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Circuiti del secondo ordine: *Circuito RLC*

Risposta completa – *Imposizione delle condizioni iniziali*

Caso B – *Smorzato critico:* $k = \omega_0 \rightarrow R = 2\sqrt{L/C}$

$\rightarrow \alpha_1, \alpha_2$ ***reali coincidenti***

In questo caso la soluzione dell'equazione differenziale di secondo ordine è:

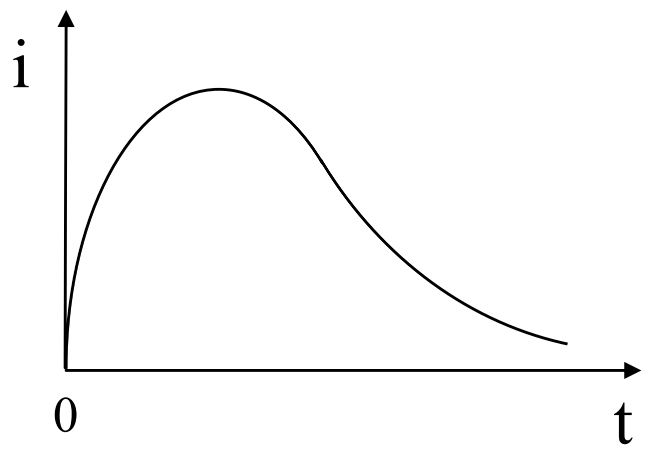
$$i(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 t e^{\alpha_2 t} \quad \text{con} \quad \alpha_{12} = -\frac{R}{2L}$$

Per $t = 0^+$ $i(0^+)$ e $di(0^+)/dt$, i cui valori sono dati dalle condizioni iniziali, sono:

$$i(0^+) = A_1 = 0$$

$$\frac{di(0^+)}{dt} = A_2 = (V_0 - V_{C0})/L$$

$$i(t) = \frac{V_0 - V_{C0}}{L}\, t\, e^{-\frac{R}{2L}t}$$



Dipartimento di Ingegneria dell'Energia Elettrica e dell'Informazione «Guglielmo Marconi»

ALMA MATER STUDIORUM UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Circuiti del secondo ordine: *Circuito RLC*

Risposta completa – *Imposizione delle condizioni iniziali*

Caso C – *Caso sottosmorzato :* $k < \omega_0 \;\rightarrow\; R < 2\sqrt{L/C}$

$\rightarrow \alpha_1, \alpha_2$ ***complesse coniugate***

In questo caso la soluzione dell'equazione differenziale di secondo ordine è:

$$i(t) = (A_1 \cos h\,t + A_2 \sin h\,t)\, e^{-k\,t}$$

ove $\alpha_{12} = k \pm j\,h$ con $k = \dfrac{R}{2L}$ e $h = \sqrt{k^2 - \omega_0^2} = \sqrt{\left(\dfrac{R}{2L}\right)^2 - \dfrac{1}{CL}}$

Per $t = 0^+$ $i(0^+)$ e $di(0^+)/dt$, i cui valori sono dati dalle condizioni iniziali, sono:

$$i(0^+) = A_1 = 0$$

$$\frac{di(0^+)}{dt} = -\,h\,A_2 = (V_0 - V_{C0})/L$$

$$\Rightarrow \quad A_1 = 0, \quad A_2 = \frac{V_0 - VC_0}{L\sqrt{\dfrac{1}{CL} - \left(\dfrac{R}{2L}\right)^2}}$$

Dipartimento di Ingegneria dell'Energia Elettrica e dell'Informazione «Guglielmo Marconi»

ALMA MATER STUDIORUM UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

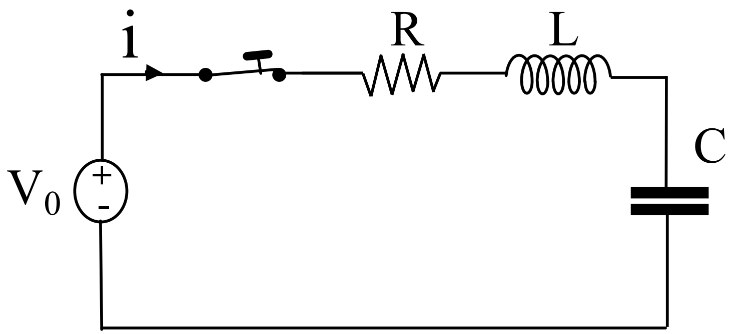
Circuiti del secondo ordine: *Circuito RLC*

Risposta completa – *Imposizione delle condizioni iniziali*

Caso C – *Caso sottosmorzato :* $k < \omega_0 \rightarrow R < 2\sqrt{L/C}$

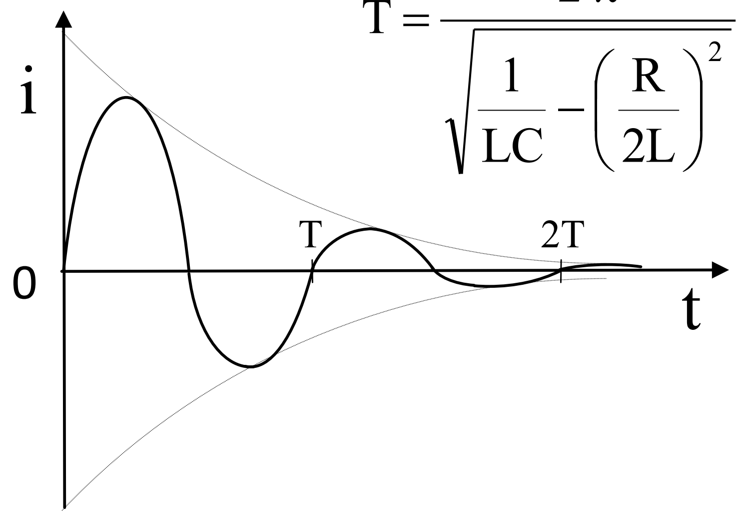
$\rightarrow \alpha_1, \alpha_2$ ***complesse coniugate***

$$i(t) = \frac{V_0 - VC_0}{L\sqrt{\frac{1}{CL} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}} e^{-[R/(2L)]\,t} \sin\left\{\left[\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{CL}}\right] t\right\}$$



$0^+ \leq t < +\infty$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}}$$



Dipartimento di Ingegneria dell'Energia Elettrica e dell'Informazione «Guglielmo Marconi»

ALMA MATER STUDIORUM UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Analisi generale del transitorio *nel dominio del tempo*

1. Scrittura delle equazioni di analisi circuitale (ad esempio per mezzo del metodo di sostituzione della tensione;

2. Derivazione di un'unica equazione differenziale ordinaria in un'unica incognita tramite sostituzioni e derivazioni successive:

$$a_n \frac{d^n i(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} i(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{di(t)}{dt} + a_0\, i(t) = f(t)$$

la cui soluzione è:

$$i(t) = i_T(t) + i_S(t)$$

con

$i_T(t) = \sum_{p=1}^{n} A_p\, e^{\alpha_p t}$ risposta transitoria: $\lim_{t \to +\infty} i_T(t) = 0$

$i_S(t)$ stato stazionario a $t = +\infty$ (soluzione particolare dell'equazione differenziale non omogenea a $t = +\infty$)

Dipartimento di Ingegneria dell'Energia Elettrica e dell'Informazione «Guglielmo Marconi»

ALMA MATER STUDIORUM UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Analisi generale del transitorio *nel dominio del tempo*

3. Per la derivazione di $i_T(t)$:
   - Derivazione delle frequenze naturali di $i_T(t)$ date dalle soluzioni α_1, α_2, α_3,...., α_n della caratteristica associata dell'equazione differenziale omogenea;
   - Derivazione delle costanti di integrazione A_1, A_2, A_3, ..., A_n per mezzo delle condizioni iniziali che sono i valori di $i_k(0)$ nei rami induttivi, $q_k(0)$ e $v_k(0)$ nei rami capacitivi.
4. Derivazione dell'integrale particolare a $t = +\infty$ dell'equazione differenziale non omogene.
5. Derivazione delle altre incognite.

Quindi, al fine di derivare la risposta completa del circuito, è necessario trovare il funzionamento del circuito a:

$\mathbf{t = 0^-}$ ***per i dati iniziali;***

$\mathbf{t = 0^+}$ ***per le condizioni iniziali;***

$\mathbf{t = +\infty}$ ***per la soluzione forzata, integrale particolare dell'equazione differ.***

Dipartimento di Ingegneria dell'Energia Elettrica e dell'Informazione «Guglielmo Marconi»

ALMA MATER STUDIORUM UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Elettrotecnica

Corso dei CdL
in Ingegneria elettronica per l'energia e l'informazione
ed in Ingegneria biomedica

Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

Dipartimento di Ingegneria dell'Energia Elettrica e dell'Informazione
«Guglielmo Marconi»