

Risolvere la Rete Elettrica di figura.

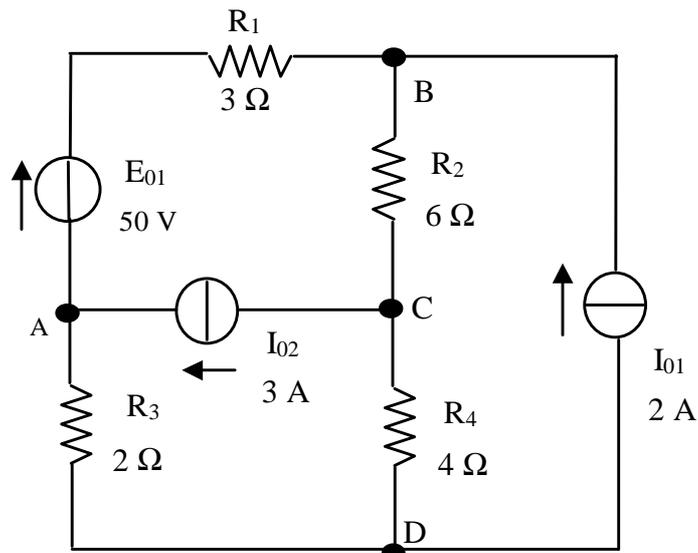


Figura 1

1- Metodo delle Equazioni di Kirchhoff

Il circuito possiede $N=4$ nodi e $R=6$ rami.

- Incognite
- 6 (R) correnti di ramo
 - 6 (R) tensioni di ramo

- Equazioni
- 3 (N-1) Equazioni indipendenti di Kirchhoff delle correnti, relative a N-1 nodi.
 - 3 (R-(N-1)) Equazioni indipendenti di Kirchhoff delle tensioni, relative a R-(N-1) maglie.
 - 6 (R) relazioni costitutive per i componenti posti in ogni ramo del circuito.

Totale: 12

Totale: 12

Si assumono per le tensioni e le correnti in ogni ramo direzioni di riferimento associate. Inoltre per ogni maglia indipendente si assegna arbitrariamente un verso di circuitazione.

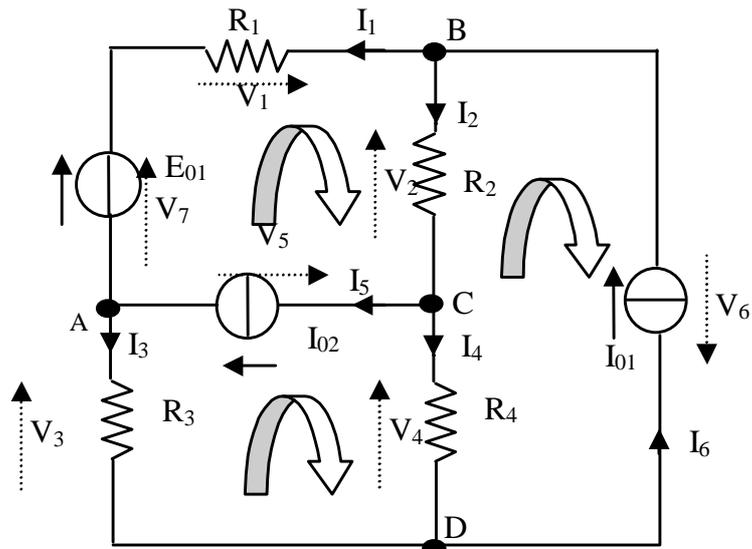


Figura 2

Equazioni di Kirchhoff delle correnti:

$$\begin{cases} -I_1 + I_3 - I_5 = 0 & \text{nodo A} \\ +I_1 + I_2 - I_6 = 0 & \text{nodo B} \\ -I_2 + I_4 + I_5 = 0 & \text{nodo C} \end{cases} \quad (1)$$

Equazioni di Kirchhoff delle tensioni:

$$\begin{cases} V_7 + V_1 - V_2 - V_5 = 0 & \text{maglia ABCA} \\ V_5 - V_4 + V_3 = 0 & \text{maglia ACDA} \\ V_2 + V_6 + V_4 = 0 & \text{maglia CBDC} \end{cases} \quad (2)$$

Relazioni costitutive dei componenti:

$$\begin{cases} V_7 + V_1 = E_{01} + R_1 I_1 \\ V_2 = R_2 I_2 \\ V_3 = R_3 I_3 \\ V_4 = R_4 I_4 \\ I_5 = I_{02} \\ I_6 = I_{01} \end{cases} \quad (3)$$

Introducendo le relazioni costitutive nelle equazioni di Kirchhoff delle correnti e delle tensioni e tenendo conto dei valori assegnati alle varie grandezze impresse si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} -I_1 + I_3 = 3 \\ +I_1 + I_2 = 2 \\ -I_2 + I_4 = -3 \\ R_1 I_1 - R_2 I_2 - V_5 = -50 \\ R_3 I_3 - R_4 I_4 + V_5 = 0 \\ R_2 I_2 + R_4 I_4 + V_6 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

da cui si ottiene:

$$I_1 = -3.2 \text{ A}; I_2 = 5.2 \text{ A}; I_3 = -0.2 \text{ A}; I_4 = 2.2 \text{ A}; V_5 = 9.2 \text{ V}; V_6 = -40 \text{ V};$$

2- Metodo dei Potenziali di Nodo

Il circuito possiede $N=4$ nodi e $R=6$ rami. Il nodo D viene assunto come **nodo di riferimento**, ossia il suo potenziale si pone arbitrariamente uguale a zero. Tale assunzione è possibile in quanto il potenziale elettrico è definito a meno di una costante arbitraria.

Le correnti in ogni ramo si esprimono in funzione dei potenziali dei nodi a cui il ramo considerato afferisce. Per i rami che contengono componenti non controllati in tensione non è possibile esplicitare le correnti in termini di potenziali di nodo. Tali correnti devono comparire esplicitamente come incognite nel sistema risolvente e ad esso devono essere aggiunte, come ulteriori equazioni, le relazioni costitutive dei componenti non controllati in tensione.

Incognite	Equazioni
- 3 (N-1) potenziali in tutti i nodi della rete meno quello di riferimento	- 3 (N-1) equazioni indipendenti di Kirchhoff delle correnti, relative a tutti i nodi della rete meno quello di riferimento

Equazioni di Kirchhoff delle correnti:

$$\begin{cases} -I_1 + I_3 - I_5 = 0 & \text{nodoA} \\ +I_1 + I_2 - I_6 = 0 & \text{nodoB} \\ -I_2 + I_4 + I_5 = 0 & \text{nodoC} \end{cases} \quad (5)$$

Espressioni delle correnti di ramo in funzione dei potenziali di nodo:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{V_B - V_A - E_{01}}{R_1} \\ I_2 &= \frac{V_B - V_C}{R_2} \\ I_3 &= \frac{V_A}{R_3} \\ I_4 &= \frac{V_C}{R_4} \\ I_5 &= I_{02} \\ I_6 &= I_{01} \end{aligned} \quad (6)$$

Sistema Risolvente:

$$\begin{cases} -\frac{V_B - V_A - E_{01}}{R_1} + \frac{V_A}{R_3} - I_{02} = 0 \\ +\frac{V_B - V_A - E_{01}}{R_1} + \frac{V_B - V_C}{R_2} - I_{01} = 0 \\ -\frac{V_B - V_C}{R_2} + \frac{V_C}{R_4} + I_{02} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

da cui si ottiene:

$$V_A = -0.4 \text{ V}; V_B = 40 \text{ V}; V_C = 8.8 \text{ V};$$

e conseguentemente

$$I_1 = -3.2 \text{ A}; I_2 = 5.2 \text{ A}; I_3 = -0.2 \text{ A}; I_4 = 2.2 \text{ A}; V_5 = 9.2 \text{ V}; V_6 = -40 \text{ V};$$

3- Metodo delle Correnti di Maglia

Il circuito possiede $N=4$ nodi e $R=6$ rami. Si considerino $R-(N-1)$ percorsi chiusi (maglie) indipendenti all'interno del circuito assegnato. Le maglie si definiscono indipendenti quando ognuna di esse contiene almeno un ramo circuitale che non appartiene a nessuna altra maglia.

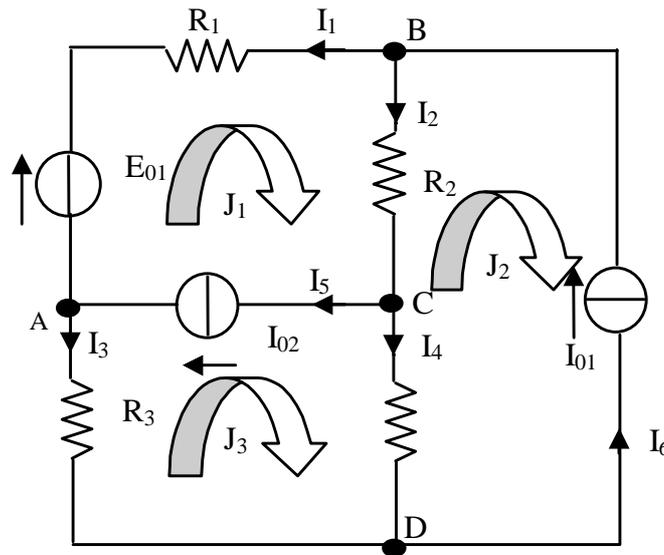


Figura 2

Introducendo le correnti di maglia J_1, J_2, J_3 è possibile scrivere il seguente sistema di 5 equazioni indipendenti nelle 5 incognite costituite dalla correnti di maglia e dalle tensioni sui due generatori di corrente:

$$\begin{cases} R_1 J_1 + R_2 (J_1 - J_2) = E_{01} - V_5 \\ R_2 (J_2 - J_1) + R_4 (J_2 - J_3) = V_6 \\ R_4 (J_3 - J_2) + R_3 J_3 = V_5 \\ J_2 = -2 \\ J_1 - J_3 = 3 \end{cases} \quad (8)$$

Risolvendo il sistema si ottiene:

$$J_1 = 3.2 \text{ A}; J_2 = -2 \text{ A}; J_3 = 0.2 \text{ A}; V_5 = 9.2 \text{ V}; V_6 = -40 \text{ V};$$

Le correnti di ramo si determinano a partire dalle correnti di maglia mediante le seguenti relazioni

$$\begin{cases} I_1 = -J_1 \\ I_2 = J_1 - J_2 \\ I_3 = -J_3 \\ I_4 = J_3 - J_2 \\ I_5 = J_1 - J_3 \\ I_6 = -J_2 \end{cases} \quad (9)$$

dalle quali si ottiene

$$I_1 = -3.2 \text{ A}; I_2 = 5.2 \text{ A}; I_3 = -0.2 \text{ A}; I_4 = 2.2 \text{ A}; I_5 = 3 \text{ A}; I_6 = 2 \text{ A};$$

Nota:

Si consideri la soluzione della rete mediante il metodo delle equazioni di Kirchhoff. Adoperando le equazioni di Kirchhoff delle correnti è possibile esprimere le correnti I_2, I_4, I_5 in funzione delle correnti I_1, I_3, I_6

$$\begin{cases} I_2 = -I_1 + I_6 \\ I_4 = -I_3 + I_6 \\ I_5 = -I_1 + I_3 \end{cases} \quad (10)$$

Sostituendo queste equazioni all'interno delle equazioni di Kirchhoff delle tensioni, e tenendo conto delle relazioni costitutive si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} -R_1 I_1 + R_2 (-I_1 + I_6) = E_{01} - V_5 \\ R_2 (-I_6 + I_1) + R_4 (I_3 - I_6) = V_6 \\ R_4 (-I_3 + I_6) - R_3 I_3 = V_5 \end{cases} \quad (11)$$

Per poter risolvere il sistema occorre aggiungere le equazioni costitutive dei generatori di corrente, ossia

$$\begin{cases} I_6 = 2 \\ -I_1 + I_3 = 3 \end{cases} \quad (12)$$

Le equazioni (11),(12) contengono al loro interno solo tre correnti incognite e coincidono con il sistema (8), ottenuto mediante il metodo delle correnti di maglia, una volta introdotte le relazioni 9; il metodo delle correnti di maglia costituisce quindi una procedura automatica per scrivere un sistema risolvibile ridotto in cui siano presenti solo le correnti associate ai rami circuitali che individuano le maglie indipendenti.