RICHIAMI SUGLI OPERATORI VETTORIALI

Gradiente

E' un operatore differenziale del primo ordine che si applica ad una generica grandezza scalare φ, e genera un vettore secondo la seguente definizione:

$$\nabla\varphi \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial\varphi}{\partial n} \tag{1}$$

Il prodotto del gradiente per il versore di una qualsiasi direzione è quindi pari alla derivata in quella direzione. Il gradiente di φ è quindi un vettore diretto secondo la massima variazione di f e perpendicolare alle superfici su cui φ è costante.

Sia $\mathbf{u} = \nabla\varphi$. L'integrale di $\mathbf{u}$ lungo una generica linea dipende unicamente dai valori che f assume agli estremi di integrazione. Si ha infatti:

$$\int_A^B \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_A^B \nabla\varphi \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_A^B \frac{\partial\varphi}{\partial l}\mathrm{d}l = \int_A^B \mathrm{d}\varphi = \varphi_B - \varphi_A \tag{2}$$

Si ha anche:

$$\oint \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = 0 \tag{3}$$

Un campo vettoriale che goda di tale proprietà si dice **conservativo**. In un dominio linearmente connesso un campo conservativo può sempre essere espresso come gradiente di un opportuno potenziale scalare, definito a meno di una funzione a gradiente nullo (quindi una costante).

Divergenza.

E' un operatore differenziale del primo ordine, che si applica ad una generica grandezza vettoriale $\mathbf{u}$, e fornisce come risultato una funzione scalare. Sia ΔV un volumetto delimitato dalla superficie chiusa ΔS, in cui la generica grandezza vettoriale $\mathbf{u}$ sia continua assieme alle derivate delle sue componenti. Sia inoltre $\Phi(\mathbf{u})$ il flusso di $\mathbf{u}$ attraverso ΔS. La divergenza di $\mathbf{u}$ è definita come:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Phi(\mathbf{u})}{\Delta V} \tag{4}$$

La divergenza di un vettore $\mathbf{u}$ in un punto p può quindi essere intesa come limite del rapporto tra flusso di $\mathbf{u}$ attraverso la superficie che racchiude un intorno di p ed il volume dell'intorno. Sia τ un dominio delimitato dalla superficie chiusa S in cui la grandezza vettoriale $\mathbf{u}$ è continua assieme alle derivate delle sue componenti. Vale allora il **teorema della divergenza** (o **di Gauss**), che si esprime come segue: i*l flusso del vettore* $\mathbf{u}$ *attraverso la superficie chiusa S è pari all'integrale della divergenza di* $\mathbf{u}$ *sul volume* τ *racchiuso in S.* Ovvero:

$$\int_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \int_\tau \nabla \cdot \mathbf{u}\,\mathrm{d}\tau \tag{5}$$

Un vettore $\mathbf{u}$ si dice **solenoidale** su un dominio **S** quando il flusso di $\mathbf{u}$ attraverso qualsiasi superficie chiusa in **S** è nullo, ovvero quando $\nabla \bullet \mathbf{u} = \mathbf{0}$ ovunque in **S**.

Rotore

E' un operatore differenziale del primo ordine, che si applica ad una generica grandezza vettoriale $\mathbf{u}$, e fornisce come risultato una funzione vettoriale. Sia ΔS una superficie aperta, avente come contorno la curva chiusa Γ, su cui la generica grandezza vettoriale $\mathbf{u}$ sia continua assieme alle derivate delle sue componenti. Sia inoltre $\mathrm{C}(\mathbf{u})$ la circuitazione di $\mathbf{u}$ lungo la curva Γ. Il rotore di $\mathbf{u}$ è definito come:

$$\nabla\times\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{C(\mathbf{u})}{\Delta S} \tag{6}$$

Sia S una superficie aperta qualsiasi, su cui sia definita la generica grandezza vettoriale **u**, continua assieme alle derivate delle sue componenti, ed avente come contorno la curva Γ. Vale il **teorema di Stokes**: *il flusso del vettore* $\nabla\times\mathbf{u}$ *attraverso la superficie S è pari alla circuitazione di* **u** *lungo la curva* Γ. Cioè:

$$\int_S \nabla\times\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S=\int_\Gamma \mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} \tag{7}$$

Da ciò si deduce subito che:

- i flussi di $\nabla\times\mathbf{u}$ attraverso due superfici qualsiasi che abbiano lo stesso contorno Γ è uguale. Il rotore è quindi un vettore solenoidale. Vale cioè l'identità:

$$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{u}=0; \tag{8}$$

- se in un dominio linearmente connesso $\nabla\times\mathbf{u}=\mathbf{0}$, il vettore **u** è, su tale dominio, anche conservativo. Viceversa, se **u** è conservativo, $\nabla\times\mathbf{u}=\mathbf{0}$ ovunque. Vale cioè l'identità:

$$\nabla\times\nabla\varphi=0; \tag{9}$$

si dimostra inoltre che se **u** è solenoidale in un dominio a connessione superficiale semplice, può sempre essere espresso come rotore di un opportuno potenziale vettoriale, definito a meno di una funzione irrotazionale (e quindi conservativa).

RICHIAMI SULLE NOZIONI PRINCIPALI DI ELETTROMAGNETISMO

Definizione dei vettori CAMPO ELETTRICO e CAMPO MAGNETICO (INDUZIONE MAGNETICA)

Per una carica puntiforme in moto nel vuoto vale:

$$\mathbf{F} = \mathrm{q}\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) \tag{10}$$

dove:
F = forza che si esercita sulla carica puntiforme (N);
q = carica elettrica (C);
v = velocità (m/s);
E = campo elettrico (V/m);
B = induzione magnetica (T).

Le due definizioni sono equivalenti (vedi nel seguito) e sono ampiamente utilizzate sia nel campo ingegneristico che fisico.

Definizione del vettore POLARIZZAZIONE ELETTRICA

$$\mathbf{P}(P,t) = \frac{\sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}_i}{\Delta V} \tag{11}$$

dove :
P = polarizzazione elettrica del mezzo (C/m^2);
$\mathbf{P_i}$ = momento di dipolo elettrico elementare contenuto nel volume ΔV (C m);
ΔV = intorno del punto P in cui si determina il vettore polarizzazione (m^3).
t = istante di tempo in cui si valuta il vettore polarizzazione
La sommatoria a secondo membro si intende estesa a tutti i dipoli elettrici contenuti all'interno del volume ΔV.

- Il volume ΔV deve essere sufficientemente piccolo da poter trascurare le variazioni delle grandezze nella regione dello spazio considerata, ma allo stesso tempo sufficientemente grandi da contenere un numero elevato di atomi, tale da poter trascurare le fluttuazioni delle grandezze su scala atomica.

Definizione del vettore MAGNETIZZAZIONE

$$\mathbf{M}(P,t)=\frac{\sum_{i=1}^{N}\mathbf{M}_i}{\Delta V} \tag{12}$$

dove:
M = magnetizzazione del mezzo nel punto P all'istante *t* (A/m);
$\mathbf{M}_i$ = momento di dipolo magnetico elementare contenuto in un intorno di P (A m^2);
ΔV = volume dell'intorno di P considerato (m^3).

Definizione dei vettori SPOSTAMENTO ELETTRICO e INDUZIONE MAGNETICA (CAMPO MAGNETICO)

$$\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P} \tag{13}$$

$$\mathbf{B}=\mu_0\left(\mathbf{H}+\mathbf{M}\right) \qquad \text{oppure} \qquad \mathbf{H}=\frac{\mathbf{B}}{\mu_0}-\mathbf{M} \tag{14}$$

dove:
D = spostamento elettrico (C/m^2);
B = induzione magnetica (T);
ε_0 = costante dielettrica del vuoto (pari a $8.854\ 10^{-12}$ F/m);
H = campo magnetico (A/m);
μ_0 = permeabilità magnetica del vuoto (pari a $1.256\ 10^{-6}$ H/m).
Spesso è possibile supporre che la polarizzazione elettrica sia proporzionale al campo elettrico:

$$\mathbf{P}=\varepsilon_0\ \chi_e\mathbf{E} \tag{15}$$

e che la magnetizzazione sia proporzionale al campo magnetico:

$$\mathbf{M}=\chi_m\mathbf{H} \tag{16}$$

dove χ_e χ_m sono rispettivamente la suscettività elettrica e magnetica. In questo caso è possibile riscrivere le (13)-(14) come segue:

$$\mathbf{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\mathbf{E} \quad \text{con} \quad \varepsilon_r=1+\chi_e \tag{17}$$

$$\mathbf{B}=\mu_0\mu_r\mathbf{H} \quad \text{con} \quad \mu_r=1+\chi_m \tag{18}$$

Definizione di DENSITÀ VOLUMETRICA DI CARICA ELETTRICA

Si consideri un punto P dello spazio ed un elemento di volume *V* centrato in P.

$$\rho(P,t)=\frac{\sum_{i=1}^{N}Q_i}{\Delta V} \tag{19}$$

dove:
La sommatoria a secondo membro si intende estesa a tutte le cariche elementari contenute all'interno di un intorno del punto P di volume ΔV.
ρ (*P*, *t*)= densità volumetrica di carica elettrica nel punto P all'istante *t* (C/m^3);

Q_i = carica elettrica elementare presente in un intorno di P (C);
ΔV = volume dell'intorno di P considerato (m^3).

Definizione di DENSITÀ VOLUMETRICA DI CORRENTE ELETTRICA

Si consideri un punto P dello spazio ed una superficie piana passante per P.

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = \lim_{\Delta S \to 0} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S \Delta t} \tag{20}$$

dove:
$\mathbf{J}$ = densità volumetrica di corrente elettrica nel punto P (A/m^2);
$\mathbf{n}$ = versore normale alla superficie nel punto P;
ΔS = area dell'elemento di superficie considerato centrato in P (m^2)
ΔQ = carica elettrica che ha attraversato l'elemento di superficie nel verso individuato da $\mathbf{n}$ (C);
Δt = intervallo di tempo considerato (s).

La densità di corrente $\mathbf{J}$ è quindi ascrivibile ad un moto di portatori di carica. Tale grandezza è, in via del tutto generale, somma della densità di corrente di conduzione $\mathbf{J}_{cond}$ e della densità di corrente di convezione $\mathbf{J}_{conv}$:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{cond} + \mathbf{J}_{conv} \, . \tag{21}$$

La corrente di conduzione è dovuta allo scorrimento relativo dei diversi portatori di carica, generato da campi di forza. Nel caso di conduttori metallici gli unici portatori di carica sono gli elettroni. Si ha pertanto:

$$\mathbf{J}_{cond} = n_e e \langle \mathbf{v}_e \rangle \, . \tag{22}$$

dove n_e, e e $\langle \mathbf{v}_e \rangle$ sono rispettivamente la densità, la carica e la velocità media di migrazione nel conduttore dell'elettrone. Esistono conduttori nei quali più di una specie è responsabile della corrente di conduzione. E' il caso dei conduttori elettrolitici (conduttori di seconda specie), nei quali sono presenti ioni negativi e positivi, o dei gas ionizzati, nei quali la corrente è dovuta al moto di ioni positivi ed elettroni. In questo caso la corrente di conduzione totale è data dalla somma dei contributi forniti da ogni singola specie. Ipotizzando un conduttore in cui siano presenti portatori di carica positiva e portatori di carica negativa, l'espressione della corrente di conduzione diventa:

$$\mathbf{J}_{cond} = n_+ q_+ \langle \mathbf{v}_+ \rangle + n_- q_- \langle \mathbf{v}_- \rangle \, . \tag{23}$$

dove n_+, q_+, e $\langle \mathbf{v}_+ \rangle$ sono la densità, la carica e la velocità media di migrazione dei portatori positivi, mentre n_-, q_-, e $\langle \mathbf{v}_- \rangle$ sono le stesse grandezze riferite ai portatori negativi.
La densità di corrente di convezione si verifica nel caso in cui un mezzo elettricamente carico sia animato da velocità $\mathbf{U}$. Essa è pertanto associata al semplice movimento di carica dovuta al trasporto di un corpo carico, senza alcuno spostamento relativo tra la carica e il mezzo stesso. In tal caso la corrente assume la forma:

$$\mathbf{J}_{conv} = \rho \mathbf{U} \, . \tag{24}$$

La corrente di convezione è generalmente trascurabile, e quindi in seguito, salvo nei casi in cui sia indicato diversamente, la densità di corrente $\mathbf{J}$ verrà assunta come coincidente con la densità di corrente di conduzione.

LE EQUAZIONI FONDAMENTALI DELL'ELETTROMAGNETISMO

Legge Di Ampere-Maxwell
(o della Circuitazione Magnetica)

Si consideri una linea chiusa Γ ed una superficie S che si appoggia alla linea Γ. Sia **n** il versore normale ad S in ogni punto e orientato secondo la regola della vite destrogira con il verso di percorrenza di Γ (vedi figura 1).

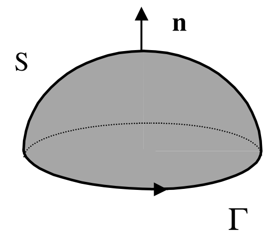

Figura 1

$$\oint_\Gamma \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)\cdot \mathbf{n}\, dS = I + \frac{d\Phi_D}{dt} \qquad (25)$$

dove:

$\oint_\Gamma \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}$ = circuitazione magnetica relativa alla curva Γ;

$I = \iint_S \mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\, dS$ = corrente elettrica di conduzione attraverso la superficie S;

$\Phi_D = \iint_S \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}\, dS$ = flusso del vettore spostamento elettrico attraverso la superficie S.

La quantità $\frac{d\Phi_D}{dt}$ viene definita **corrente di spostamento**. La quantità $I + \frac{d\Phi_D}{dt}$ viene definita **corrente totale** concatenata alla curva Γ.

- La (25) è valida **per ogni linea chiusa Γ e per ogni superficie S che si appoggi a** Γ in ogni punto delle quali risultino definite le funzioni integrande.
- L'integrale superficiale a secondo membro non dipende dalla particolare superficie S considerata, purché questa si appoggi alla stessa linea Γ. Ne consegue che l'**integrale del vettore densità totale di corrente** $\mathbf{J}_t = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ **esteso ad una superficie chiusa qualsiasi è nullo**.

Applicando al primo membro della (25) il teorema di Stokes, con pochi passaggi si ottiene la forma locale (o differenziale) della legge di Ampere-Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad (26)$$

Applicando ad ambo i membri della (26) l'operatore divergenza, si ottiene:

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) = 0 \qquad (27)$$

Si ottiene nuovamente quindi il risultato che la quantità $\mathbf{J}+\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$, che viene definita **densità di corrente totale**, è ovunque solenoidale.

Legge di Faraday, Newmann e Lenz
(o della Circuitazione Elettrica o dell'Induzione Elettromagnetica)

Si consideri una linea chiusa Γ ed una superficie S che si appoggia a tale linea. Sia **n** il versore normale ad S in ogni punto e orientato secondo la regola della vite destrogira con il verso di percorrenza di Γ (vedi figura 1).

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = -\int_{S} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}S = -\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{28}$$

dove:

$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl}$ = forza elettromotrice (f.e.m.) relativa alla curva Γ;

$\Phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}S$ = flusso del vettore induzione magnetica attraverso la superficie S concatenato alla curva Γ.

- La (28) è valida **per ogni linea chiusa Γ e per ogni superficie S che si appoggi a** Γ in ogni punto delle quali risultino definite le funzioni integrande.
- L'integrale superficiale a secondo membro non dipende dalla particolare superficie S considerata, purché questa si appoggi alla stessa linea Γ. Ne consegue che l'**integrale del vettore induzione magnetica esteso ad una superficie chiusa qualsiasi è nullo**. E' quindi possibile scrivere:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}S = 0 \tag{29}$$

essendo S una superficie chiusa qualsiasi. Applicando al primo membro della (28) il teorema di Stokes, con qualche passaggio si ottiene la forma locale (o differenziale) della legge di induzione elettromagnetica:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathrm{t}}. \tag{30}$$

Il fatto che l'integrale del vettore induzione magnetica su una qualsiasi superficie chiusa sia nullo può essere tradotto in forma differenziale, applicando il teorema della divergenza alla (29):

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{31}$$

Principio di conservazione della carica elettrica

Si consideri una superficie chiusa S, che delimita il volume V; sia **n** il versore normale alla superficie in ogni punto ed uscente da essa (vedi figura 2).

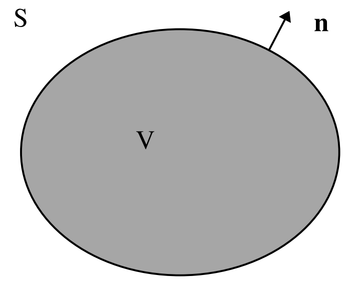

Figura 2).

La legge di conservazione della carica elettrica assume la seguente forma:

$$\oint_S \mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = -\frac{dQ}{dt} \qquad (32)$$

dove:
Q = carica elettrica totale racchiusa nel volume V:

$$Q = \int_V \rho\, dV \qquad (33)$$

Applicando il teorema della divergenza alla (32) si ottiene la legge di conservazione della carica elettrica in forma locale:

$$\nabla\cdot\mathbf{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \qquad (34)$$

Legge di Gauss

Si consideri una superficie chiusa S, che delimita il volume V; sia **n** il versore normale alla superficie in ogni punto ed uscente da essa (vedi figura 2).

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \int_V \rho\, dV = Q \qquad (35)$$

- La (35) è valida **per ogni superficie chiusa S** in ogni punto della quale risulti definito il vettore spostamento elettrico **D**.

Applicando il teorema della divergenza alla (35) si ottiene la forma locale della legge di Gauss:

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho \qquad (36)$$

Relazioni di legame materiale

Per i mezzi **lineari** risulta, come già accennato:

$$\mathbf{B} = \mu\,\mathbf{H} \qquad ; \qquad \mathbf{D} = \varepsilon\,\mathbf{E} \qquad (37)$$

dove:
μ = permeabilità magnetica del mezzo (H/m);
ε = permittività elettrica del mezzo (F/m).

Nel vuoto e, con buona approssimazione anche in aria risulta:

$\mu = \mu_0 = 1.256\ 10^{-6}$ H/m, $\varepsilon = \varepsilon_0 = 8.854\ 10^{-12}$ F/m.

Legge di Ohm Locale

$$\mathbf{J} = \sigma \left(\mathbf{E} + \mathbf{E}_\mathrm{i} \right) \tag{38}$$

dove:
σ = conducibilità elettrica (S/m). Per il rame a 20° C: $\sigma = 5.97\ 10^7$ S/m.
$\mathbf{E}_\mathrm{i}$ = campo impresso di natura non elettrica, ad esempio un gradiente di concentrazione negli elettroliti.

TABELLA RIASSUNTIVA

Si postula la validità delle equazioni di Maxwell in qualunque punto dello spazio ed in qualunque mezzo materiale purché in quiete rispetto al sistema di riferimento assunto.

FORMA LOCALE		FORMA INTEGRALE
$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\Leftrightarrow$	$\oint_C \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \iint_S \left(\mathbf{J} + \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} dS$
$\nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\Leftrightarrow$	$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\iint_S \dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS$

EQUAZIONE DI CONTINUITA' DELLA CARICA ELETTRICA

$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$	$\Leftrightarrow$	$i = \oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = -\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$

EQUAZIONI DELLA DIVERGENZA

$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	$\Leftrightarrow$	$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = Q$
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\Leftrightarrow$	$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0$

EQUAZIONI DI LEGAME MATERIALE PER MEZZI LINEARI ISOTROPI E OMOGENEI

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$$\mathbf{J} = \sigma \left(\mathbf{E} + \mathbf{E}_\mathrm{i} \right)$$