

METODI PER L'ANALISI DEI CIRCUITI

Nel seguito vengono illustrati, mediante esempi, alcuni tra i metodi più utilizzati per l'analisi dei circuiti elettrici. Il problema che si vuole risolvere è il seguente: assegnato il circuito elettrico e le grandezze impresse dei generatori indipendenti presenti, in generale funzioni qualunque del tempo, si vuole calcolare l'andamento temporale delle correnti di ramo e delle tensioni di ramo. Come già detto, si suppone per semplicità che tutti i componenti siano dei bipoli, potendosi ricondurre alla ipotesi mediante l'introduzione di circuiti equivalenti dei componenti a più di due terminali.

CIRCUITI PRIVI DI MEMORIA.

I circuiti privi di memoria sono quelli in cui tutti i componenti del circuito sono privi di memoria; in tal caso il sistema risolvibile del circuito stesso è costituito da un sistema di equazioni algebriche ed il valore di tutte le grandezze incognite in un generico istante può essere calcolato dalla conoscenza del valore delle grandezze impresse del circuito in quello stesso istante.

Metodo delle equazioni di Kirchhoff

Come si è visto, dato un circuito con R rami ed N nodi, è possibile ottenere $R-N+1$ equazioni linearmente indipendenti applicando la LKT, ed $N-1$ equazioni linearmente indipendenti applicando la LKC. Le LKT vanno applicate a maglie tra loro indipendenti, le LKC a superfici chiuse che possono essere le superfici di taglio associate al particolare albero scelto o, più semplicemente, superfici che racchiudono un solo nodo. In quest'ultimo caso la LKC afferma che la somma algebrica delle correnti entranti in un nodo è nulla.

Le LKT, le LKC e le relazioni costitutive costituiscono un sistema di $2R$ equazioni che, risolto, fornisce le $2R$ incognite tensioni e correnti di ramo.

In fig 1 è illustrato un circuito con 6 rami e 4 nodi. Le incognite del problema sono 6 correnti ed altrettante tensioni di ramo. Le tre maglie indipendenti sono state scelte facendo riferimento all'albero in fig. 2.

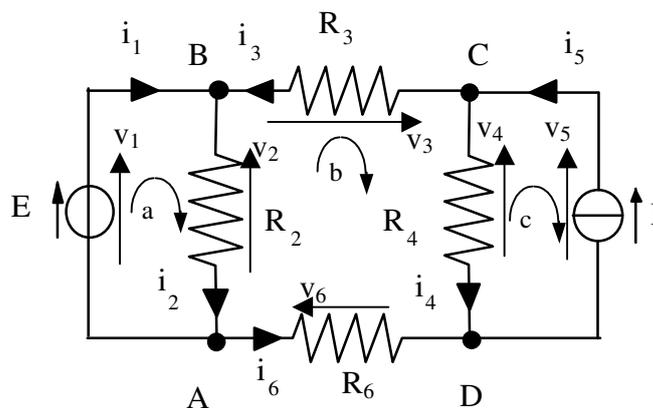


Figura 1

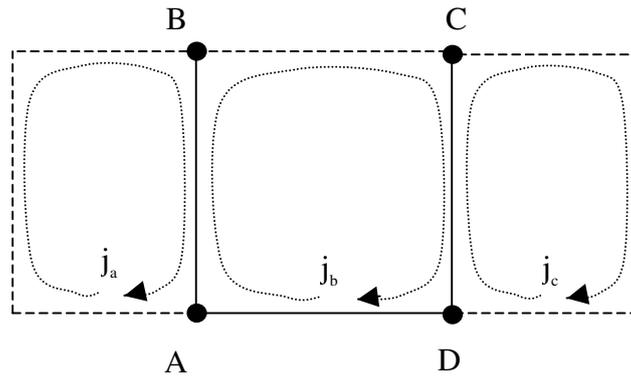


Figura 2

Applicando la LKT alle maglie così definite si ottengono le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} v_1 - v_2 &= 0 \\ v_2 + v_3 - v_4 + v_6 &= 0 \\ v_4 - v_5 &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Applicando la LKC ai nodi A, B e C si può scrivere:

$$\begin{aligned} i_1 - i_2 + i_6 &= 0 \\ -i_1 + i_2 - i_3 &= 0 \\ i_3 + i_4 - i_5 &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Il sistema viene quindi chiuso dalle seguenti equazioni costitutive dei componenti:

$$\begin{aligned} v_1 &= E \\ v_2 &= R_2 i_2 \\ v_3 &= R_3 i_3 \\ v_4 &= R_4 i_4 \\ i_5 &= I \\ v_6 &= R_6 i_6 \end{aligned} \quad (3)$$

Le LKT (1), (2) e (3) costituiscono un sistema di 12 equazioni, risolvendo il quale è possibile calcolare le 2R incognite tensioni e correnti di ramo.

Metodo delle correnti di maglia

Una semplificazione del sistema risolvente si può ottenere osservando innanzitutto che tramite le leggi costitutive dei componenti è possibile eliminare le tensioni di ramo dei componenti controllati in tensione dalle LKT. Ad esempio, utilizzando le (3), le (1) diventano:

$$\begin{aligned} E - R_2 i_2 &= 0 \\ R_2 i_2 + R_3 i_3 - R_4 i_4 + R_6 i_6 &= 0 \\ R_4 i_4 - v_5 &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

le equazioni di taglio permettono inoltre di esprimere la corrente in ciascun ramo di albero come una combinazione lineare delle correnti dei rami di coalbero, che sono state definite correnti di maglia. Le equazioni di taglio possono quindi essere utilizzate per eliminare le correnti dei rami di

albero. Per il circuito in fig. 3, le equazioni di taglio associate all'albero in fig. 2 forniscono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} i_2 &= j_a - j_b & j_a &= i_1 \\ i_6 &= -j_b & \text{dove si è posto } j_b &= -i_3, \\ i_4 &= j_b - j_c & j_c &= -i_5 \end{aligned} \quad (5)$$

indicando convenzionalmente le correnti di maglia con la lettera j ed assegnando loro come verso positivo il verso di percorrenza della maglia. Le equazioni (5) autorizzano a pensare a ciascuna corrente di maglia come ad una corrente che percorre la propria maglia di riferimento, sovrapponendosi alle altre correnti di maglia nei rami comuni (vedi fig. 2). Le correnti del circuito elettrico risultano quindi dalla sovrapposizione delle correnti di maglia. Inserendo le (5) nelle (4), e tenendo conto della legge costitutiva del generatore di corrente si ottiene:

$$\begin{cases} E = R_2 j_a - R_2 j_b \\ 0 = (R_2 + R_3 + R_4 + R_6) j_b - R_2 j_a - R_4 j_c \\ -v_3 = R_4 j_c - R_4 j_b \\ j_c = -I \end{cases} \quad (6)$$

Si noti che la corrente di maglia j_c risulta già nota in quanto fissata dal generatore di corrente. Dalle prime due equazioni del sistema è possibile ricavare le due correnti di maglia j_a e j_b . La terza equazione fornisce la tensione del generatore di corrente una volta note le correnti di maglia.

È possibile generalizzare il risultato ottenuto e formulare un procedimento che permette, per qualsiasi circuito, di scrivere un sistema in cui compaiano unicamente le correnti di maglia e le tensioni dei componenti non controllati in corrente.

1° passo: Individuare le maglie indipendenti.

2° passo: Assegnare a ciascuna maglia un verso di percorrenza.

3° passo: Individuare le resistenze proprie e mutue per ciascuna maglia. In un circuito in cui siano presenti m maglie indipendenti, ogni maglia ha una resistenza propria e $m-1$ resistenze mutue. La resistenza propria R_{kk} della k -esima maglia è definita come la somma delle resistenze dei rami che costituiscono la maglia k . La resistenza mutua R_{kp} tra la k -esima e la p -esima maglia è definita come la somma delle resistenze dei rami che sono comuni alla maglia k ed alla maglia p . Il segno della resistenza mutua R_{kp} va preso positivo se le correnti di maglia j_k e j_p sono concordi lungo i rami comuni, negativo in caso contrario. È immediato verificare che se due maglie non hanno rami in comune la loro resistenza mutua è nulla e che, per due qualsiasi maglie k e p , vale la relazione $R_{kp} = R_{pk}$. Nel circuito di esempio, si ha che:

| | |
|----------------------------------|---|
| $R_{aa} = R_2$ | Resistenza propria della maglia associata alla corrente di maglia j_a |
| $R_{bb} = R_2 + R_3 + R_4 + R_6$ | Resistenza propria della maglia associata alla corrente di maglia j_b |
| $R_{cc} = R_4$ | Resistenza propria della maglia associata alla corrente di maglia j_c |
| $R_{ab} = R_{ba} = -R_2$ | Resistenza mutua delle maglie associate alle correnti di maglia j_a e j_b |
| $R_{ac} = R_{ca} = 0$ | Resistenza mutua delle maglie associate alle correnti di maglia j_a e j_c |
| $R_{bc} = R_{cb} = -R_4$ | Resistenza mutua delle maglie associate alle correnti di maglia j_b e j_c |

4° passo: Scrivere un'equazione per ciascuna maglia. In un circuito con m maglie indipendenti, l'equazione per la generica maglia k , costituita da r_k rami, assume la forma seguente:

$$\sum_{i=1}^{r_k} E_i + \sum_{i=1}^{r_k} v_i = \sum_{j=1}^m R_{kj} j_j \quad (7)$$

A primo membro della (7) figura la somma algebrica delle tensioni dei generatori che si incontrano percorrendo gli r_k rami della maglia, positive se concordi con il verso di percorrenza, negative in caso contrario. Le E_i sono le f.e.m. dei generatori indipendenti di tensione, e risultano pertanto note. Le v_i sono le tensioni incognite dei componenti non controllati in corrente (generatori indipendenti di corrente). A secondo membro va la somma delle tensioni ai morsetti dei componenti resistivi

percorsi dalle correnti di maglia. Tale termine è scomposto nel contributo $R_{kk} j_k$, imputabile alla corrente di maglia j_k associata alla maglia k stessa ed ai contributi $R_{kj} j_j$, dovuti alle correnti di maglia j_j associate alle maglie adiacenti a quella in questione.

4° passo: Nel caso in cui siano presenti nel circuito componenti non controllati in corrente, nelle equazioni scritte al punto 4 figurano le tensioni relative a tali componenti come incognite aggiuntive. E' quindi necessario completare il sistema con le leggi costitutive dei componenti non controllati in corrente. La legge costitutiva deve essere esplicitata in termini delle correnti di maglia, facendo ricorso, ove necessario, alle equazioni di taglio.

Metodo dei potenziali di nodo

La definizione di nodo fornita precedentemente (pag. 3 circuiti-def) fa corrispondere un nodo ad ogni morsetto. Tale definizione, pur essendo formalmente corretta, risulta a volte sconveniente dal punto di vista pratico. In questo paragrafo si farà riferimento ad una definizione più "operativa":

Nodo: punto a cui sono collegati 3 o più rami.

Ramo: tratto di circuito che unisce due nodi.

In questo modo, si eliminano i nodi comuni a due componenti in serie, ed i rami possono essere costituiti da due o più componenti in serie. Per ciascun ramo sarà necessario fornire un'equazione che metta in relazione la tensione tra i due nodi iniziale e finale con la corrente. Tale relazione sarà ottenuta utilizzando le leggi costitutive dei componenti che, disposti in serie, costituiscono il ramo considerato.

Quando tutti i rami del circuito sono controllati in tensione, cioè quando, per tutti i rami, la corrente è esprimibile in funzione della tensione tra i due nodi iniziale e finale, è possibile utilizzare il metodo dell'analisi dei nodi per scrivere un sistema risolvibile di $(N-1)$ equazioni nelle $(N-1)$ tensioni di nodo incognite del circuito. Si consideri il generico nodo O (figura 9), al quale fanno capo l rami contenenti resistenze, eventualmente in serie a generatori di tensione, e k rami contenenti generatori di corrente, non necessariamente in serie a delle resistenze.

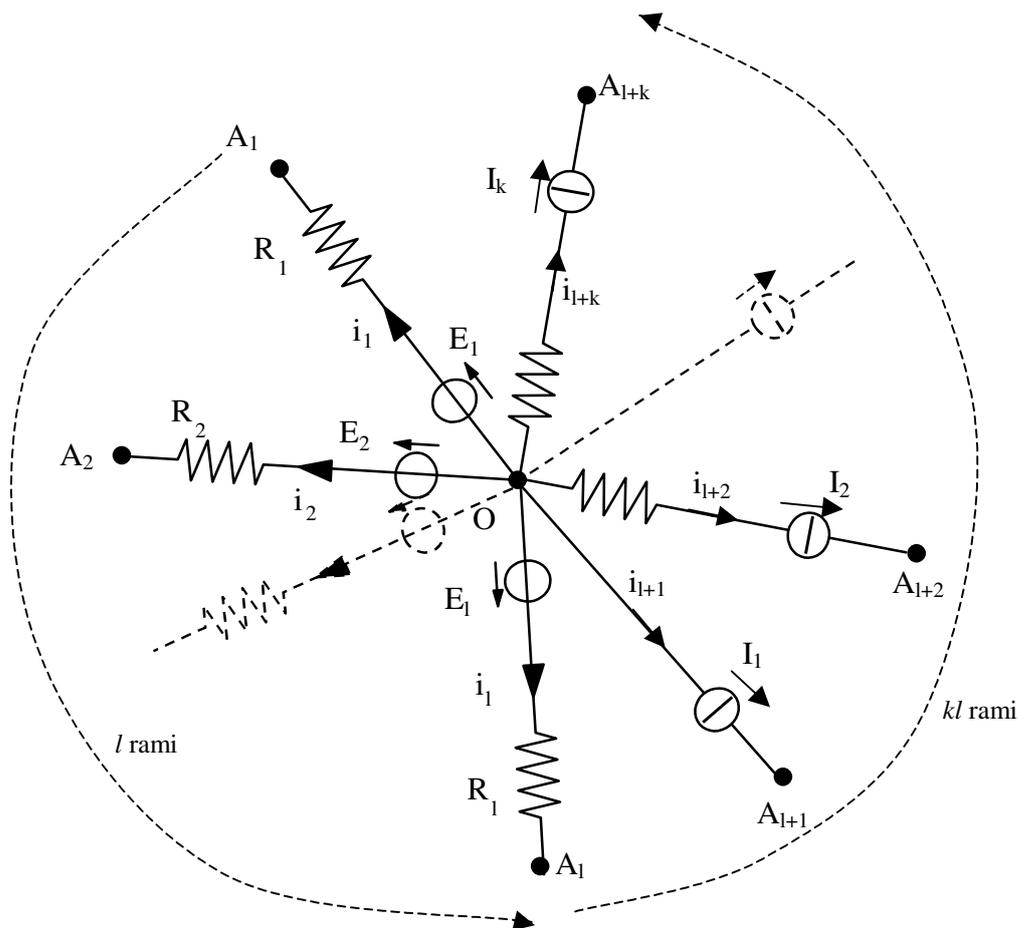


Figura 3

Per ciascun ramo non contenente un generatore di corrente, assumendo i versi di riferimento per tensioni e correnti indicati in fig. 3, è possibile scrivere:

$$v_o - v_{A_j} = -E_j + R_j i_j \Rightarrow i_j = \frac{E_j + (v_o - v_{A_j})}{R_j}, \quad j=1,2,\dots,l \quad (8)$$

La tensione ai capi di ciascun ramo, dalle leggi di Kirchhoff può essere espressa come differenza delle tensioni di nodo dei nodi cui il ramo è collegato. Il sistema risolvibile si ottiene scrivendo la LKC per ogni nodo del circuito, escluso quello di riferimento, e risulta quindi costituito da (N-1) equazioni nelle (N-1) tensioni di nodo incognite. Nei rami in cui è presente un generatore di corrente, la corrente di ramo è fissata dalla presenza di tale generatore:

$$i_j = I_j, \quad j = l+1, l+2, \dots, l+k \quad (9)$$

In virtù della LKC applicata al nodo O è possibile scrivere:

$$\sum_{j=1}^{l+k} i_j = 0 \quad (10)$$

Tenendo conto delle (8) e (9), la (10) può essere riscritta come:

$$\sum_{j=1}^l (E_j/R_j) + v_o \sum_{j=1}^l (1/R_j) - \sum_{j=1}^l (v_{A_j}/R_j) + \sum_{j=l+1}^{l+k} I_j = 0 \quad (11)$$

Si noti che le prime tre sommatorie a primo membro della (11) sono estese ai rami che non contengono generatori di corrente, mentre l'ultima sommatoria è estesa solo a tali rami. È possibile scrivere un sistema di (N-1) equazioni linearmente indipendenti applicando la (11) ad altrettanti nodi. Le incognite del problema così formulato risultano essere le tensioni di (N-1) nodi, mentre la tensione del nodo rimanente è assunta come riferimento.

Nel caso in cui siano presenti nel circuito rami non controllati in tensione (come nel caso in cui due nodi sono connessi da un generatore di tensione indipendente), le correnti di tali rami non sono più esprimibili in termini di tensione. Sia quindi dato un generico ramo r_k non controllato in tensione, che connette due nodi O_1 e O_2 . Nell'applicare il metodo dei potenziali di nodo, la corrente i_k che percorre il ramo r_k deve essere considerata come un'incognita. L'incognita i_k va aggiunta o sottratta al primo membro dell'equazione di tipo (11) relativo ai nodi O_1 e O_2 , a seconda che il verso positivo scelto per i_k sia uscente o entrante. Avendo aggiunto una incognita, sarà necessario aggiungere un'equazione per completare il sistema. Tale equazione è rappresentata dalla legge costitutiva del ramo r_k .

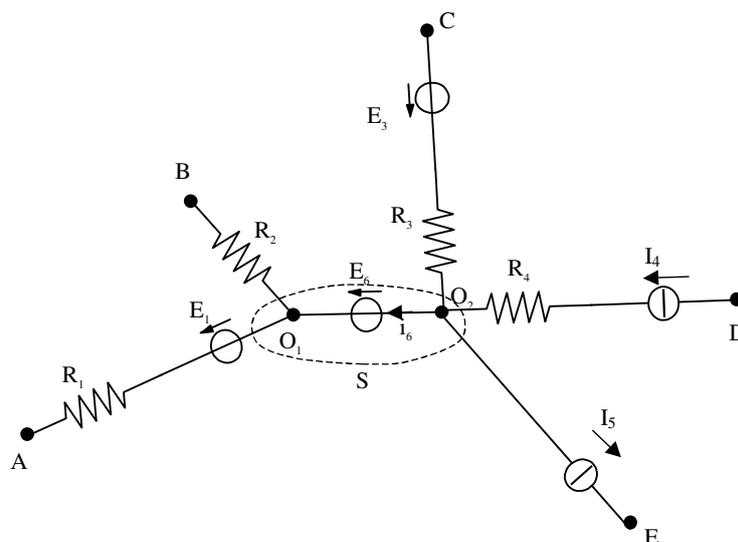


Figura 4

Esempio:

In fig. 4 sono raffigurati i nodi O_1 e O_2 di un circuito elettrico, ed i rami ad essi connessi. Gli altri rami del circuito non sono raffigurati per maggiore chiarezza. I nodi O_1 e O_2 sono tra loro connessi dal generatore indipendente di tensione E_6 . Le equazioni di nodo, scritte utilizzando la (11), per i nodi O_1 e O_2 sono:

$$\begin{aligned} E_1/R_1 + v_{o_1}(1/R_1 + 1/R_2) - v_A/R_1 - v_B/R_2 - i_6 &= 0; \\ -E_3/R_3 + v_{o_2}/R_3 - v_C/R_3 - I_4 + I_5 + i_6 &= 0. \end{aligned}$$

Alle due equazioni appena scritte va aggiunta la legge costitutiva del generatore di tensione E_6 :

$$v_{o_1} - v_{o_2} = E_6.$$

Le tre equazioni appena scritte, unite alle rimanenti equazioni di nodo, forniranno la soluzione del circuito. E' interessante notare che la variabile i_6 può essere facilmente eliminata sommando membro a membro le due equazioni per i nodi O_1 e O_2 :

$$E_1/R_1 - E_3/R_3 + v_{o_1}(1/R_1 + 1/R_2) + v_{o_2}/R_3 - v_A/R_1 - v_B/R_2 - v_C/R_3 - I_4 + I_5 = 0.$$

L'equazione appena scritta è quella che si otterrebbe applicando la LKC alla superficie S in fig. 4, ed esprimendo le correnti che attraversano tale superficie tramite relazioni del tipo (8) o (9).

Teorema di Thevenin

Ipotesi. Sono dati due bipoli, L ed N collegati come illustrato nella figura 4. Il bipolo L è lineare e controllato in corrente, mentre il bipolo N può essere qualsiasi, anche non lineare.

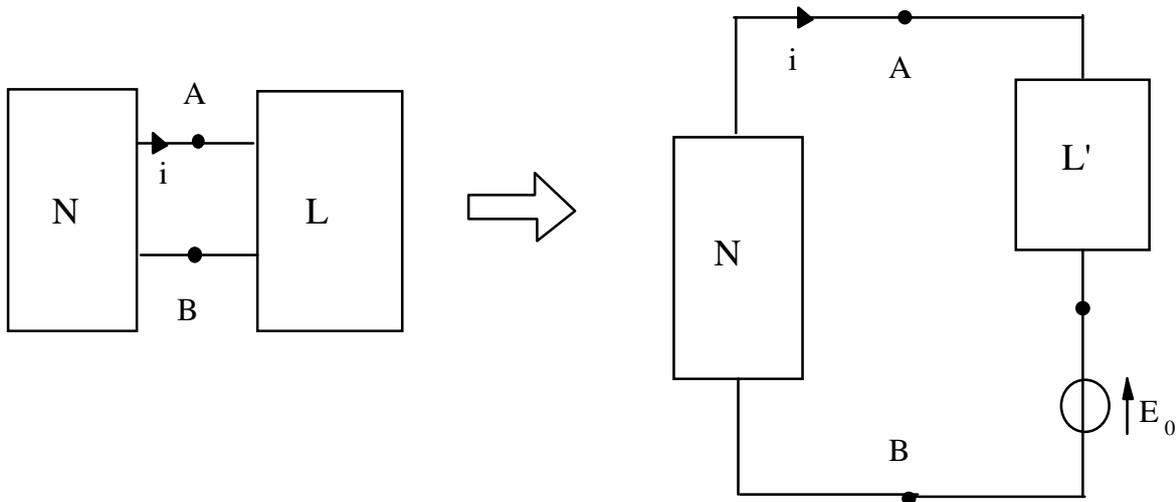


Figura 5 Teorema di Thevenin

Tesi. Limitatamente alla corrente i ed alla tensione v_{AB} alla porta, il circuito che si ottiene sostituendo il bipolo L con un generatore di tensione ed un bipolo L' collegati in serie, è equivalente in ogni istante al circuito originale. Il bipolo L' si ottiene dal bipolo L annullando le grandezze impresse dei generatori indipendenti di tensione e di corrente eventualmente presenti (i generatori indipendenti di tensione vengono quindi sostituiti con dei corto-circuiti ed i generatori indipendenti di corrente vengono sostituiti con dei circuiti aperti). La tensione impressa E_0 del generatore di tensione di Thevenin è pari al valore della tensione v_{AB} alla porta del bipolo L quando la corrente i è nulla (E' da notare che il verso positivo di E_0 è arbitrario: una volta scelto il verso positivo, il valore

di E_0 è pari alla tensione v_{AB} se la punta della freccia punta verso il terminale A, è pari invece a $-v_{AB}$ se la punta della freccia punta verso il terminale B)

Analogo al teorema di Thevenin, con ipotesi simili e le stesse possibilità di applicazione è il teorema di Norton.

Teorema di Norton

Ipotesi. Sono dati due bipoli, L ed N collegati come illustrato nella figura 5. Il bipolo L è lineare e controllato in tensione, mentre il bipolo N può essere qualsiasi, anche non lineare.

Tesi. Limitatamente alla corrente i ed alla tensione v_{AB} alla porta, il circuito che si ottiene sostituendo il bipolo L con un generatore di corrente ed un bipolo L' collegati in parallelo, è equivalente in ogni istante al circuito originale. Il bipolo L' si ottiene dal bipolo L annullando le grandezze impresse dei generatori indipendenti di tensione e di corrente eventualmente presenti (il bipolo L' è lo stesso che interviene nel teorema di Thevenin). La corrente impressa I_c del generatore di corrente di Norton è pari al valore della corrente i alla porta del bipolo L quando la tensione v_{AB} è nulla. Si noti che il verso positivo di I_c è arbitrario: una volta scelto il verso positivo il valore di I_c è pari alla corrente i se la punta della freccia punta verso il terminale dove la corrente i esce da L, è pari invece a $-i$ se la punta della freccia punta verso il terminale dove la corrente i entra in L.

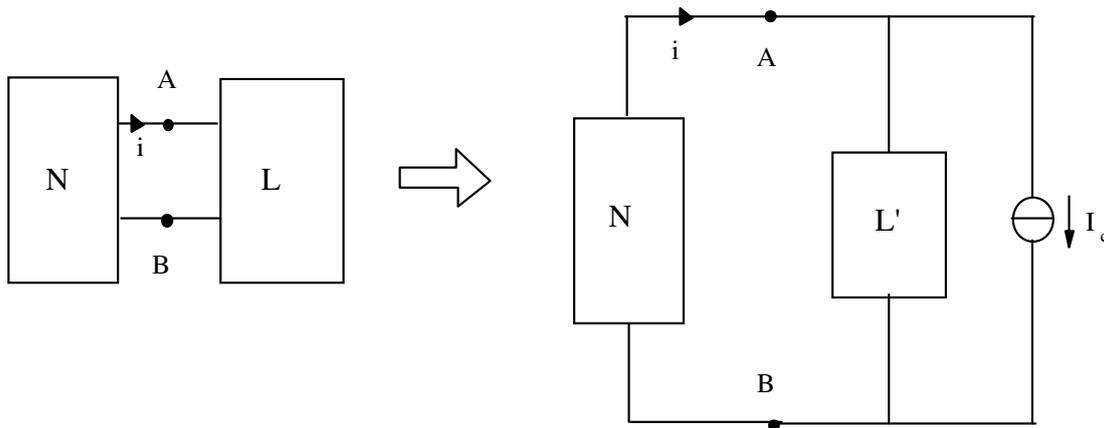


Figura 6 Teorema di Norton

Trasformazioni stella-triangolo e triangolo-stella

Nella figura 7a sono mostrati tre resistori collegati a stella; nella figura 7b sono mostrati tre resistori collegati a triangolo. Entrambi i sistemi costituiscono un tripolo che viene collegato al circuito esterno attraverso i tre terminali A, B e C. Facendo uso delle Leggi di Kirchhoff e delle relazioni costitutive dei resistori è possibile dimostrare che, per quanto riguarda le correnti ai terminali (i_A , i_B e i_C), è possibile sostituire tre resistori collegati a stella con tre resistori, di resistenza opportuna, collegati a triangolo e viceversa. La sostituzione va intesa nel senso che qualunque sia il sistema di tensioni applicate ai terminali A, B e C il sistema di correnti assorbito dai due carichi è lo stesso.

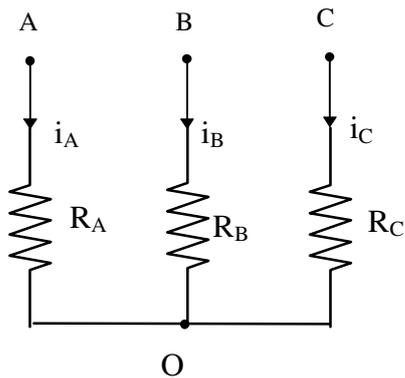


Figura 7a.

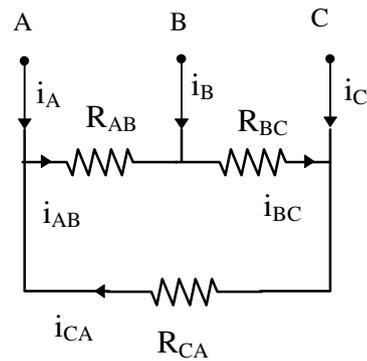


Figura 7b.

Con riferimento alle figure 7a e 7b, le espressioni delle resistenze equivalenti per le trasformazioni stella-triangolo e triangolo-stella sono le seguenti, dove con G è indicata la conduttanza, ovvero l'inverso della resistenza R .

Trasformazione triangolo-stella

$$R_A = \frac{R_{AB} R_{CA}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

$$R_B = \frac{R_{BC} R_{AB}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

$$R_C = \frac{R_{CA} R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

Trasformazione stella-triangolo

$$G_{AB} = \frac{G_A G_B}{G_A + G_B + G_C}$$

$$G_{BC} = \frac{G_B G_C}{G_A + G_B + G_C}$$

$$G_{CA} = \frac{G_C G_A}{G_A + G_B + G_C}$$

CIRCUITI CON MEMORIA

Vengono detti circuiti con memoria quelli in cui è presente almeno un componente dotato di memoria; in questo caso il sistema risolvibile del circuito stesso è costituito da un sistema di equazioni non più algebriche, come nel caso dei circuiti senza memoria, ma, in generale integro-differenziali ed il valore di tutte le grandezze incognite in un generico istante può essere calcolato dalla conoscenza del valore delle grandezze impresse del circuito in tutto l'intervallo temporale precedente all'istante considerato, a partire da un istante iniziale in cui sono note le variabili di stato del sistema (quelle grandezze cui è associata una energia elettromagnetica immagazzinata nel circuito: tensione ai capi dei condensatori e corrente attraverso gli induttori). Tutti i metodi precedentemente descritti per il caso dei circuiti senza memoria, sono applicabili in questo caso, con le stesse ipotesi, compresi i teoremi di Thevenin e di Norton, la cui formulazione, infatti, non fa alcun riferimento alle caratteristiche di memoria del circuito, ma portano a scrivere un sistema di equazioni integro-differenziali. In particolare, per quanto riguarda il metodo di Kirchhoff, le equazioni costituite dalle LKC e LKT rimangono un sistema di equazioni algebriche lineari che viene però chiuso dalle equazioni costitutive dei componenti in cui compaiono i termini integro-differenziali.

Metodo delle equazioni di stato

Nello studio di un circuito in cui gli unici componenti dotati di memoria siano induttori e condensatori, è possibile pervenire con un procedimento automatico ad un sistema risolvibile costituito da tante equazioni differenziali ordinarie del primo ordine, quanti sono i condensatori e gli induttori presenti nel circuito. Le incognite di tale sistema sono le variabili di stato del circuito, ovvero le tensioni ai capi dei condensatori e le correnti attraverso gli induttori. Si consideri ad esempio il circuito illustrato nella figura 8. Le equazioni costitutive del condensatore e dell'induttore portano a scrivere le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \frac{dv_c}{dt} &= \frac{i_c}{C} \\ \frac{di_L}{dt} &= \frac{v_L}{L} \end{aligned} \quad (12)$$

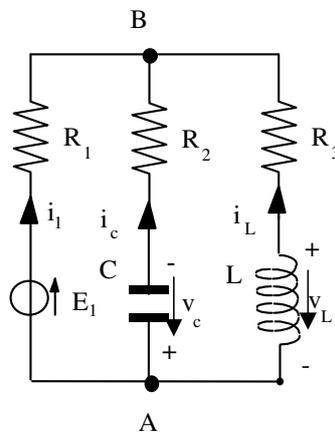


Figura 8

La corrente attraverso il condensatore i_c e la tensione ai capi dell'induttore v_L possono essere espresse in funzione delle variabili di stato v_c ed i_L risolvendo il circuito con una qualsiasi delle metodologie già viste. A tal fine, è possibile schematizzare l'induttore con un generatore di corrente con corrente impressa i_L ed il condensatore con un generatore di tensione con tensione impressa v_c , ottenendo così il circuito illustrato nella figura.

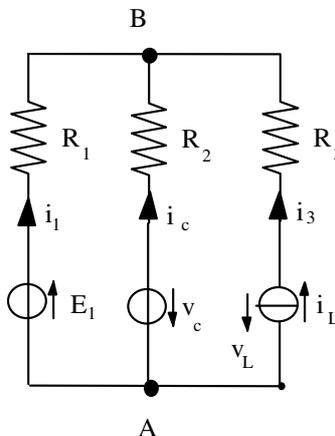


Figura 9

La soluzione del circuito di figura 9 può, ad esempio, essere ottenuta mediante il metodo dei potenziali di nodo, calcolando prima la tensione del nodo B rispetto al nodo A:

$$v_A = 0; \quad v_B = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{v_c}{R_2} + i_L}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \quad (13)$$

E' quindi possibile esprimere la corrente i_c e la tensione v_L in funzione delle variabili di stato del sistema (la (13) esprime infatti la tensione v_{BA} in funzione delle due variabili di stato):

$$\begin{aligned} i_c &= \frac{-v_c - v_B}{R_2} \\ v_L &= -v_B - R_3 i_L \end{aligned} \quad (14)$$

Infine, sostituendo le (14) nelle (12) si ottiene:

$$\begin{cases} C \frac{dv_c}{dt} = \frac{-v_c - v_B}{R_2} \\ L \frac{di_L}{dt} = -v_B - R_3 i_L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C \frac{dv_c}{dt} = \frac{-v_c - \frac{(E_1/R_1 - v_c/R_2 + i_L)}{1/R_1 + 1/R_2}}{R_2} \\ L \frac{di_L}{dt} = -\frac{(E_1/R_1 - v_c/R_2 + i_L)}{1/R_1 + 1/R_2} - R_3 i_L \end{cases} \quad (15)$$

La soluzione del sistema di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine (15) può essere ottenuta, eventualmente per via numerica, a partire dall'istante iniziale in cui sono noti i valori v_{c0} ed i_{L0} delle variabili di stato (condizioni iniziali):

$$\begin{aligned} v_c(0) &= v_{c0} \\ i_L(0) &= i_{L0} \end{aligned} \quad (16)$$

E' possibile considerare circuiti in cui sono presenti interruttori ideali che si aprono e si chiudono istantaneamente. L'interruzione o l'instaurarsi di una corrente elettrica in un interruttore "reale" è un fenomeno molto complesso che non avviene istantaneamente; avviene comunque in un tempo molto piccolo che può risultare trascurabile ai fini del transitorio che si vuole studiare. In questo caso è possibile descrivere il processo mediante l'interruttore ideale. Si consideri ad esempio il circuito RL rappresentato nella figura 10 in cui è presente l'interruttore ideale T che si chiude istantaneamente all'istante $t = 0$. Quando l'interruttore ideale è aperto (figura 10a) esso equivale ad un circuito aperto e quindi la corrente che lo attraversa è nulla. Viceversa quando l'interruttore è chiuso esso equivale ad un corto circuito e la tensione ai suoi capi è nulla.

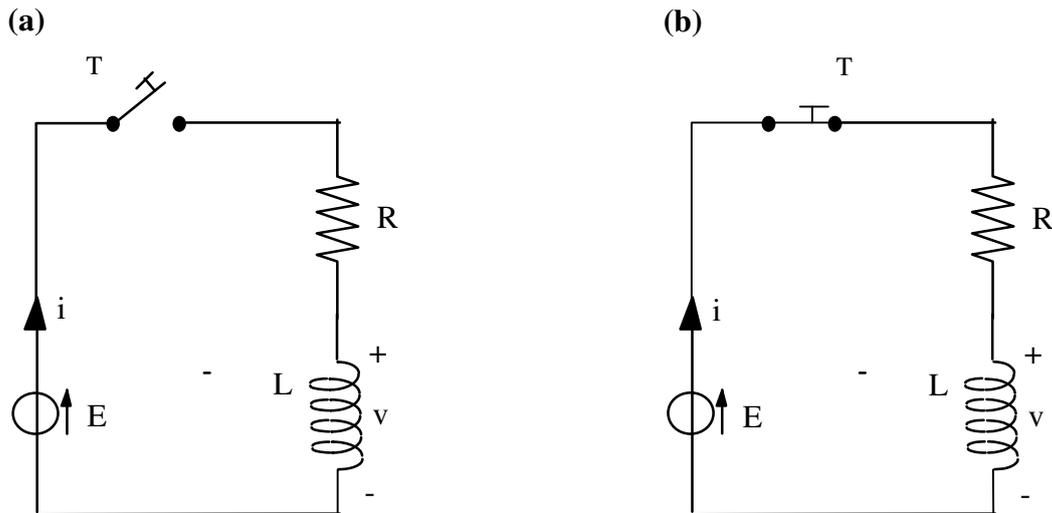


Figura 10 Circuito RL con interruttore ideale aperto (a) e chiuso (b)

All'istante $t=0^-$, cioè un istante prima che l'interruttore si chiuda, il circuito si trova in regime stazionario; la corrente è nulla e quindi è nulla anche la tensione ai capi dell'induttore e del resistore. Un istante dopo che l'interruttore si è chiuso ($t = 0^+$) le grandezze del circuito hanno in generale, essendo cambiata in maniera discontinua la topologia del circuito, valori diversi da quelli relativi all'istante $t = 0^-$. Ad esempio, la tensione ai capi della serie resistore-induttore, nulla all'istante $t = 0^-$ risulta pari ad E all'istante $t = 0^+$. Non risultano però cambiati i valori di quelle grandezze a cui è associata una energia del circuito, cioè le correnti degli induttori e le tensioni dei condensatori (le variabili di stato); nel caso specifico il valore della corrente i nullo all'istante $t=0^-$ risulta quindi nullo anche all'istante $t = 0^+$. Il **POSTULATO DI CONTINUITÀ DELLA ENERGIA** afferma che i valori delle grandezze cui è associata una energia del circuito sono delle funzioni continue del tempo e consente di risolvere il circuito a partire dalla conoscenza dei valori delle variabili di stato all'istante $t = 0^-$. Nel caso dell'esempio di figura 10 l'andamento temporale della corrente i viene calcolato, seguendo il procedimento generale sopramenzionato, dalla soluzione della equazione differenziale ordinaria con la condizione iniziale di corrente nulla.

$$\left. \begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \frac{E - Ri}{L} \\ i(0^+) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right), \quad v_L(t) = L \frac{di}{dt} = E e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (18)$$

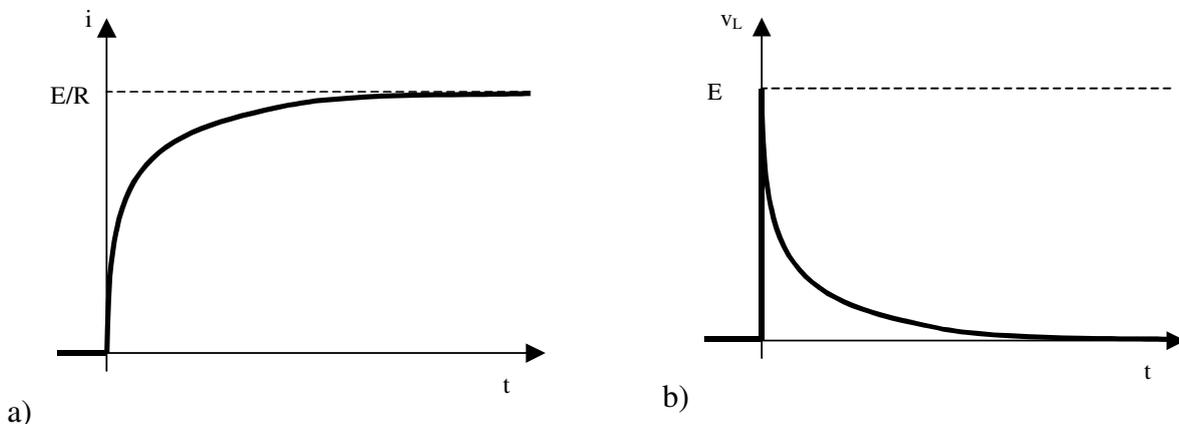


Figura 11. Andamento della corrente (11.a) e della tensione ai capi dell'induttore (11.b) in un circuito RL.

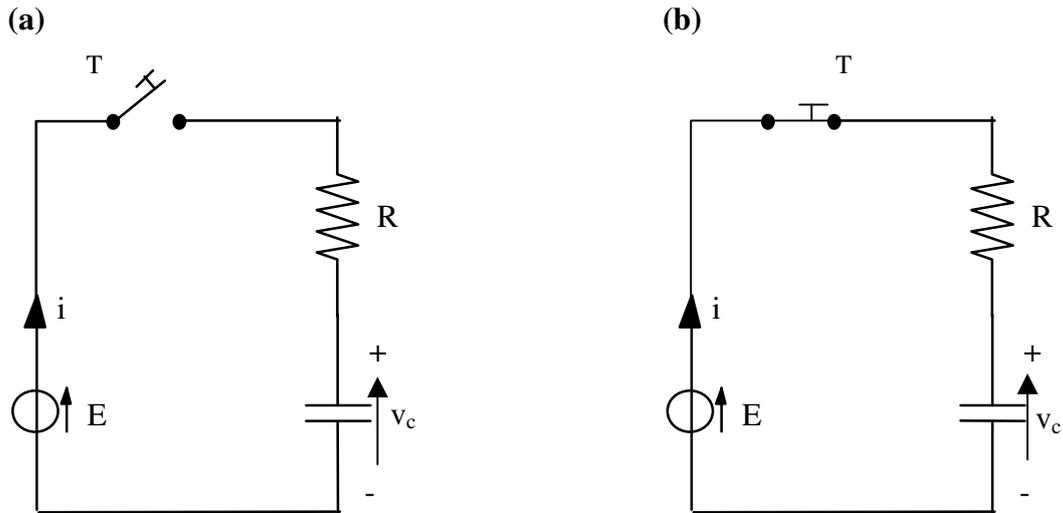


Figura 12 Circuito RC con interruttore ideale aperto (a) e chiuso (b)

Si consideri ora il circuito RC in figura 12. L'interruttore T chiude all'istante 0 il generatore di tensione E sul condensatore, che supponiamo scarico ($v_c=0$) all'istante $t=0^-$. Quanto detto riguardo al postulato di continuità dell'energia ci consente di affermare che, se $v_c=0$ all'istante $t=0^-$, sarà anche $v_c=0$ per $t=0^+$. L'equazione che descrive il transitorio è quindi:

$$\left. \begin{aligned} RC \frac{dv_c}{dt} + v_c &= E \\ v_c(0^+) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_c(t) = E (1 - e^{-t/RC}), \quad i(t) = C \frac{dv_c}{dt} = \frac{E}{R} e^{-t/RC}. \quad (18)$$

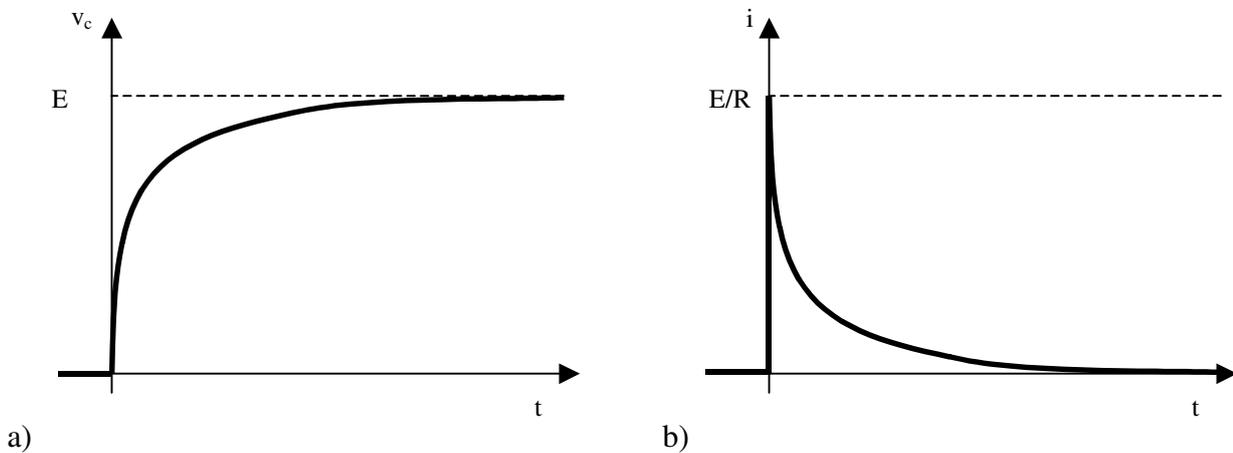


Figura 13. Andamento della tensione ai capi del condensatore (13.a) e della corrente (13.b) in un circuito RC.

Regime di corrente alternata

Si può dimostrare che sotto alcune deboli ipotesi di stabilità del circuito, se il circuito è lineare e le eccitazioni presenti sono funzioni sinusoidali isofrequenziali del tempo, dopo un transitorio di durata dipendente dai parametri del circuito stesso, si raggiunge una soluzione di regime in cui tutte le grandezze del circuito sono funzioni sinusoidali isofrequenziali, con frequenza pari a quella dei

generatori. Per calcolare la soluzione di regime, si può applicare il metodo simbolico che considera le grandezze e le equazioni del circuito trasformate mediante la trasformata di Steinmetz e perviene ad un sistema risolutivo algebrico nello spazio dei numeri complessi. Il sistema risolvibile si può ottenere sostituendo i condensatori e gli induttori con dei "resistori" con resistenza complessa (impedenza). Per la descrizione dettagliata del metodo si rimanda ai capitoli successivi. Per la soluzione del circuito simbolico sopramenzionato si applicano tutti i metodi precedentemente visti per i circuiti privi di memoria.