GRANDEZZE PERIODICHE

Principali definizioni

Una grandezza variabile nel tempo *a(t)* si definisce **periodica** quando ad uguali intervalli T assume valori uguali, cioè quando vale la relazione (con n intero qualsiasi):

$$a(t) = a(t + nT) \tag{1}$$

- Il tempo *T* si definisce **periodo**;

- La grandezza $f = 1/T$, che rappresenta il numero di periodi contenuti nell'unità di tempo, si definisce **frequenza**. La frequenza si misura in Hertz [Hz] (periodi/secondo);

- Si definisce **valore medio** di *a(t)* la media integrale di *a(t)* eseguita sul periodo T:

$$A_m = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} a(t)dt \tag{2}$$

- Si definisce **valore efficace** di *a(t)* la radice quadrata della media integrale dei quadrati dei valori istantanei di *a(t)* eseguita su un periodo *T:*

$$A = \sqrt{\frac{1}{T}\int_t^{t+T} a^2(t)\mathrm{d}t} \tag{3}$$

- Una grandezza periodica si definisce **alternata** quando il suo valore medio è nullo;

- Per le grandezze alternate a valore medio nullo è definibile il **valore medio in una semionda**:

$$A^*_m = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} a(t)\mathrm{d}t \tag{4}$$

dove t_1, t_2 sono due punti successivi in cui la funzione si annulla. I valori medi della semionda positiva e di quella negativa non sono necessariamente uguali (a meno del segno);

- Si definisce **fattore di forma** il rapporto tra valore efficace e valore medio in una semionda:

$$k_f = \frac{A}{A^*_m} \tag{5}$$

Grandezze sinusoidali

Una grandezza alternata del tipo:

$$a(t) = A_M \cos(\omega t + \alpha) \tag{6}$$

si dice **sinusoidale.**

- La grandezza A_M che compare nella (6) è detta **ampiezza**, ed è pari al valore massimo di *a(t)*;

- La grandezza ω è detta **pulsazione**, ha le dimensioni di una velocità angolare (radianti/secondo) ed è pari a $2\pi/T$;

- La grandezza α è detta **fase**. La fase dipende dal valore che *a(t)* assume all'istante $t = 0$.

Il valore efficace di una grandezza sinusoidale è pari a:

$$A = \sqrt{\frac{A_M{}^2}{T}\int_t^{t+T}\cos^2(\omega t)\,\mathrm{d}t} = \frac{A_M}{\sqrt{2}} \cong 0.707 A_M \tag{7}$$

Il valore medio della semionda positiva è pari a:

$$A^*{}_m = \frac{2A_M}{T}\int_{-T/4}^{T/4}\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}A_M \cong 0{,}636 A_M \tag{8}$$

Il fattore di forma vale:

$$k_f = \frac{A}{A^*{}_m} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cong 1{,}11 \tag{9}$$

Una grandezza sinusoidale è quindi completamente definita da tre parametri:

1) L'ampiezza A_M , o il valore efficace, A o il valore medio della semionda $A^*{}_m$.
2) La pulsazione ω, o la frequenza f, o il periodo T.
3) La fase α, o la differenza di fase con un'altra grandezza sinusoidale nota di uguale pulsazione.

Siano *a(t)* e *b(t)* due grandezze sinusoidali isofrequenziali (vedi figura 1):

$$a(t) = A_M\cos(\omega t + \alpha) \qquad\qquad b(t) = B_M\cos(\omega t + \beta)$$

Si definisce **differenza di fase** l'angolo

$$\varphi = \alpha - \beta$$

L'angolo φ è chiaramente indipendente dall'istante iniziale di riferimento.

Se $\varphi = 0$, *a(t)* e *b(t)* si dicono in **fase** (vedi figura 2.a);

Se $\varphi > 0$, *a(t)* è in **anticipo di fase** rispetto a *b(t)*, che è a sua volta in **ritardo di fase** rispetto ad *a(t)*. Se $\varphi < 0$ la situazione si inverte;

Se $\varphi = \pm\pi$, *a(t)* e *b(t)* si dicono in **opposizione** (vedi figura 2.b);

Se $\varphi = \pm\pi/2$, *a(t)* e *b(t)* si dicono in **quadratura** (vedi figura 2.c).

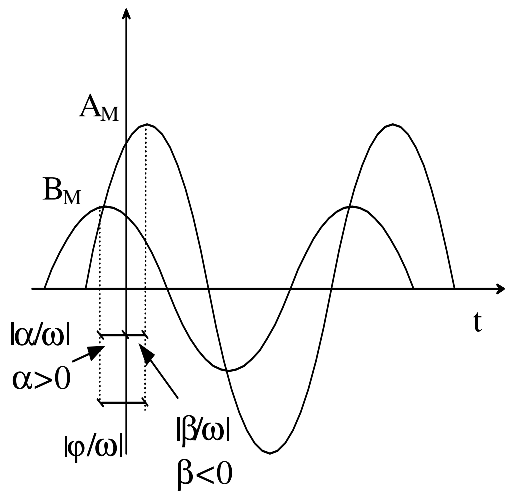

Figura 1. - b(t) è in anticipo rispetto a a(t).

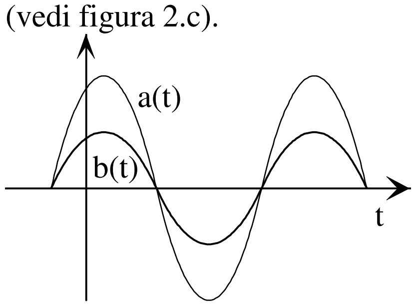

Figura 2.a - a(t) e b(t) sono in fase.

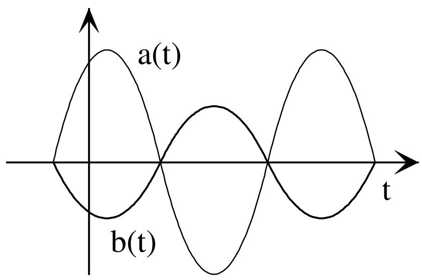

Figura 2.b - a(t) e b(t) sono in opposizione.

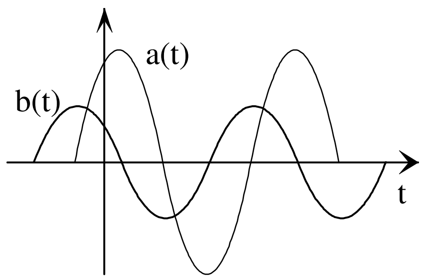

Figura 2.c - a(t) e b(t) sono in quadratura, con b(t) in anticipo su a(t).

Operazioni su grandezze sinusoidali.

Date due grandezze *a*(*t*) e *b*(*t*), sinusoidali nel tempo con la medesima pulsazione ω, e due scalari *m* e *l*, la grandezza *c*(*t*) definita come:

$$c(t) = m\,a(t) + l\,b(t) = m\,A_M \cos(\omega t + \alpha) + l\,B_M \cos(\omega t + \beta)$$

è sinusoidale ed isofrequenziale con *a*(*t*) e *b*(*t*). Infatti:

$$c(t) = m\,A_M \cos(\omega t + \alpha) + l\,B_M \cos(\omega t + \beta) =$$

$$= m\,A_M [\cos(\omega t)\cos\alpha - \mathrm{sen}(\omega t)\mathrm{sen}\,\alpha] + l\,B_M [\cos(\omega t)\cos\beta - \mathrm{sen}(\omega t)\mathrm{sen}\,\beta] =$$

$$= [m\,A_M \cos\alpha + l\,B_M \cos\beta]\cos(\omega t) - [m\,A_M \,\mathrm{sen}\,\alpha + l\,B_M \,\mathrm{sen}\,\beta]\mathrm{sen}(\omega t).$$

Facendo le seguenti posizioni:

$$C_R = m\,A_M \cos\alpha + l\,B_M \cos\beta,$$

$$C_I = m\,A_M \,\mathrm{sen}\,\alpha + l\,B_M \,\mathrm{sen}\,\beta,$$

$$C_M = \sqrt{C_R^2 + C_I^2} = \sqrt{(m\,A_M)^2 + (l\,B_M)^2 + 2ml\,A_M B_M \cos(\alpha - \beta)} \tag{10.a}$$

$$\gamma = \arctan\left(\frac{C_I}{C_R}\right) = \arctan\left(\frac{m\,A_M \,\mathrm{sen}\,\alpha + l\,B_M \,\mathrm{sen}\,\beta}{m\,A_M \cos\alpha + l\,B_M \cos\beta}\right) \tag{10.b}$$

segue anche che:

$$C_R = C_M \cos\gamma,\; C_I = C_M \,\mathrm{sen}\,\gamma,$$

per cui l'espressione di *c*(*t*) diventa:

$$c(t) = C_R \cos(\omega t) - C_I \,\mathrm{sen}(\omega t) = C_M [\cos(\omega t)\cos\gamma - \mathrm{sen}(\omega t)\mathrm{sen}\,\gamma] \Rightarrow$$

$$c(t) = C_M \cos(\omega t + \gamma). \tag{11}$$

Rimane quindi dimostrato che la grandezza *c*(*t*) è sinusoidale ed isofrequenziale con *a*(*t*) e *b*(*t*). L'ampiezza e la fase di *c*(*t*) sono fornite dalle (10.a) e (10.b) rispettivamente. In particolare, risulta che il prodotto di una grandezza sinusoidale con ampiezza A_M e fase α per uno scalare *m* è una grandezza sinusoidale con ampiezza pari a $|mA_M|$, isofrequenziale con *a*(*t*), e con fase pari a α (c(t) e a(t) in fase) se m>0, o a α+π (c(t) e a(t) in opposizione) se *m*<0.
Risulta inoltre che la somma di due grandezze sinusoidali dalla stessa pulsazione ω è ancora una grandezza sinusoidale di pulsazione ω.

Il prodotto di due grandezze sinusoidali della stessa pulsazione è pari a:

$$c(t) = A_M \cos(\omega t + \alpha) B_M \cos(\omega t + \beta) = \frac{A_M B_M}{2}\{\cos[2\omega t + (\alpha + \beta)] + \cos(\alpha - \beta)\} \tag{12}$$

Tale prodotto è quindi la somma di un termine sinusoidale con pulsazione raddoppiata, e un termine costante che rappresenta il valore medio di c(t). Il valore medio è nullo se $\alpha = \beta \pm \pi/2$.

La derivata di una grandezza sinusoidale a(t) è pari a:

$$\frac{d}{dt}[A_M \cos(\omega t + \alpha)] = -\omega A_M \,sen(\omega t + \alpha) = \omega A_M \cos\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) \tag{13}$$

La derivata di a(t) è quindi una grandezza sinusoidale di pulsazione ω con ampiezza pari a ωA_M e con un anticipo di fase pari a π/2 (quindi in quadratura in anticipo).

Rappresentazione di grandezze sinusoidali tramite numeri complessi

Viene riportata la formula di Eulero:

$$e^{jx} = \cos(x) + j \text{ sen } (x) \tag{14}$$

da cui:

$$\cos(x) = \Re\left[e^{jx}\right], \tag{15}$$

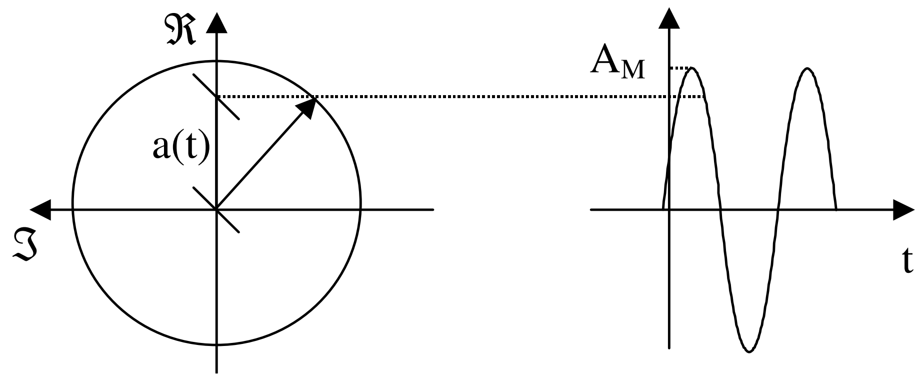

Figura 3.

dove con $\Re$ si indica l'operatore "parte reale". La grandezza sinusoidale:

$$a(t) = A_M \cos(\omega t + \alpha) = \Re\left[A_M e^{j(\omega t + \alpha)}\right] \tag{16}$$

é quindi interpretabile come la proiezione sull'asse reale di un segmento di lunghezza A_M che ruota attorno all'origine O con velocità angolare ω, e che forma all'istante t =0 un angolo α con l'asse reale. Come verso di rotazione positivo si assume per convenzione il verso antiorario (vedi figura 3). La (15) sancisce una corrispondenza biunivoca tra la generica funzione $a(t) = A_M \cos(\omega t + \alpha)$, sinusoidale nel tempo con pulsazione ω, ed il vettore nel piano complesso $A_M e^{j(\omega t + \alpha)}$, che ruota attorno all'origine con velocità angolare ω.

Si considerino ora n grandezze sinusoidali nel tempo con la medesima pulsazione ω. Tali grandezze vengono dette isofrequenziali, e per ciascuna di esse esiste una corrispondenza biunivoca che le associa ad un vettore complesso, che ruota attorno all'origine con velocità angolare costante ω:

$$\begin{array}{ccc}
a_1(t) = A_{M,1} \cos(\omega t + \alpha_1) & \Leftrightarrow & A_{M,1} e^{j(\omega t + \alpha_1)} = \sqrt{2} A_1 e^{j\alpha_1} e^{j\omega t} \\
a_2(t) = A_{M,2} \cos(\omega t + \alpha_2) & \Leftrightarrow & A_{M,2} e^{j(\omega t + \alpha_2)} = \sqrt{2} A_2 e^{j\alpha_2} e^{j\omega t} \\
\vdots & & \vdots \\
a_n(t) = A_{M,n} \cos(\omega t + \alpha_n) & \Leftrightarrow & A_{M,n} e^{j(\omega t + \alpha_n)} = \sqrt{2} A_n e^{j\alpha_n} e^{j\omega t}
\end{array}$$

Nell'espressione, riportata a destra delle parentesi, del vettore complesso associato alla generica grandezza sinusoidale $a_i(t)$, sono stati evidenziati tre fattori: il fattore $\sqrt{2}$, costante comune a tutti i vettori; il fattore $e^{j\omega t}$, comune a tutti i vettori, e denominato fattore rotante, in quanto responsabile della rotazione di tali vettori attorno all'origine; il fattore $A_i e^{j\alpha_i}$, caratteristico di ciascun vettore. Dato che i vettori ruotano attorno all'origine con la stessa velocità angolare, la loro posizione relativa rimane immutata, non cambia cioè l'angolo individuato da una qualsiasi coppia di tali vettori. E' quindi sufficiente conoscere la posizione dei vettori complessi ad un generico istante t', affinché sia univocamente determinata la loro posizione in qualsiasi istante t. All'istante t = 0, il fattore rotante assume valore unitario e il vettore complesso associato alla generica grandezza sinusoidale $a_i(t)$ diventa:

$$a_i(t) = A_{M,i}\cos(\omega t + \alpha_i) \qquad \Leftrightarrow \qquad \sqrt{2}A_i e^{j\alpha_i} = \sqrt{2}\underline{A_i} \,,$$

dove è stato posto:

$$\underline{A_i} = A_i e^{j\alpha_i}$$

Il numero complesso $\underline{A_i}$ viene detto fasore associato alla grandezza sinusoidale $a_i(t)$, ed ha modulo pari al valore efficace di $a_i(t)$, ed argomento pari alla fase di $a_i(t)$. Quanto detto finora giustifica la rappresentazione di grandezze sinusoidali isofrequenziali mediante fasori applicati ad un punto O.

Trasformata di Steinmetz

L'operatore *S,* applicato all'insieme delle funzioni $a(t)$ sinusoidali con pulsazione ω e periodo $T = 2\pi/\omega$, che a ciascuna grandezza associa il corrispondente fasore, viene detto trasformata di Steimetz ed è definito come segue:

$$\underline{A} = S[a(t)] = \frac{\sqrt{2}}{T}\int_{-T/2}^{T/2} a(t)\, e^{-j\omega t} dt \,. \tag{17}$$

E' infatti immediato verificare che:

$$S[a(t)] = \frac{\sqrt{2}}{T}\int_{-T/2}^{T/2} a(t)\, e^{-j\omega t} dt = \frac{\sqrt{2}}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \sqrt{2}A\cos(\omega t + \alpha)e^{-j\omega t} dt = \frac{2A}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \frac{\left[e^{j(\omega t+\alpha)} + e^{-j(\omega t+\alpha)}\right]}{2} e^{-j\omega t} dt =$$

$$= \frac{2A}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \frac{\left[e^{j(\omega t+\alpha)} + e^{-j(\omega t+\alpha)}\right]}{2} e^{-j\omega t} dt = \frac{A}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{j\alpha} dt + \frac{A}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{-j(2\omega t+\alpha)} dt =$$

$$= Ae^{j\alpha} = \underline{A}$$

La trasformata di Steinmetz associa alla funzione sinusoidale $a(t)$ a cui viene applicato un numero complesso, il cui modulo ed argomento sono pari rispettivamente al valore efficace ed alla fase di $a(t)$. Come già detto, tale numero complesso viene definito fasore associato ad $a(t)$. L'operatore *S,* definito dalla (17), è lineare. Siano infatti date due grandezze $a(t)$ e b(t), entrambe sinusoidali nel tempo con la medesima pulsazione ω, e due costanti l e m; sia $c(t)$ la grandezza definita dalla relazione:

$$c(t) = m\,a(t) + l\,b(t) \,.$$

La trasformata di Steinmetz, applicata alla grandezza $c(t)$, che per la (11) risulta isofrequenziale con $a(t)$ e $b(t)$, vale:

$$\underline{C} = S[c(t)] = S[m\,a(t) + l\,b(t)] = \frac{\sqrt{2}}{T}\int_{-T/2}^{T/2} [m\,a(t) + l\,b(t)]e^{-j\omega t} dt =$$

$$= m\left[\frac{\sqrt{2}}{T}\int_{-T/2}^{T/2} a(t)e^{-j\omega t} dt\right] + l\left[\frac{\sqrt{2}}{T}\int_{-T/2}^{T/2} b(t)e^{-j\omega t} dt\right] = m\,S[a(t)] + l\,S[b(t)]$$

quindi:

$$c(t) = m\,a(t) + l\,b(t) \quad \Rightarrow \quad \underline{C} = m\underline{A} + l\underline{B} \,. \tag{18}$$

La (18) dimostra come la trasformata di Steinmetz soddisfi la definizione di operatore lineare. In particolare, la (18) comporta che:

1) la trasformata del prodotto di uno scalare m per una grandezza sinusoidale $a(t)$ è pari al prodotto dello scalare m per la trasformata di $a(t)$:

$$c(t) = m\,a(t) \quad \Rightarrow \quad \underline{C} = m\underline{A} \,, \tag{19}$$

2) la trasformata della somma di due grandezze sinusoidali $a(t)$ e $b(t)$ è pari alla somma delle trasformate di $a(t)$ e $b(t)$:

$$c(t) = a(t) + b(t) \quad \Rightarrow \quad \underline{C} = \underline{A} + \underline{B}\,, \tag{20}$$

Sia ora data una grandezza $a(t)$, sinusoidale nel tempo pulsazione ω, e sia $c(t)$ definita come la sua derivata nel tempo:

$$c(t) = \frac{d\,a}{dt}$$

La trasformata di Steinmetz, applicata alla grandezza $c(t)$, isofrequenziale con $a(t)$ in base alla (13), vale:

$$\underline{C} = S\left[c(t)\right] = S\left[\frac{d\,a}{dt}\right] = \frac{\sqrt{2}}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \frac{d\,a}{dt} e^{-j\omega t} dt$$

o, integrando per parti:

$$\underline{C} = \frac{\sqrt{2}}{T}\left[-j\omega \frac{d\,a}{dt} e^{-j\omega t}\right]_{-T/2}^{T/2} + j\omega \frac{\sqrt{2}}{T}\int_{-T/2}^{T/2} a(t) e^{-j\omega t} dt\,. \tag{21}$$

I termini $\frac{d\,a}{dt}$ e $e^{-j\omega t}$ sono, rispettivamente per la (13) e per la (14), entrambi periodiche con periodo T, e pertanto assumono il medesimo valore a $t = T/2$ ed a $t = -T/2$. Risulta quindi:

$$\left[-j\omega \frac{d\,a}{dt} e^{-j\omega t}\right]_{-T/2}^{T/2} = 0\,.$$

La (21) diventa quindi:

$$\underline{C} = j\omega \frac{\sqrt{2}}{T}\int_{-T/2}^{T/2} a(t) e^{-j\omega t} dt = j\omega S\left[a(t)\right]$$

La trasformata della derivata nel tempo di una grandezza sinusoidale $a(t)$ è pari al prodotto della costante $j\omega$ per la trasformata di $a(t)$:

$$c(t) = \frac{d\,a}{dt} \quad \Rightarrow \quad \underline{C} = j\omega \underline{A}\,. \tag{22}$$

L'operazione di antitrasformata associa a ciascun fasore $\underline{A}$ una grandezza sinusoidale con pulsazione ω, valore efficace e fase rispettivamente pari al modulo ed all'argomento di $\underline{A}$. L'antitrasformata di Steinmetz può essere formalmente definita come segue:

$$S^{-1}\left[\underline{A}\right] = \sqrt{2}\,\Re\left[\underline{A} e^{j\omega t}\right]. \tag{23}$$

Operazioni con i fasori

Il fasore $\underline{A}$:

$$\underline{A} = A e^{j\alpha} \tag{24}$$

è rappresentabile nel piano complesso da un segmento applicato nella origine O che individua il punto $\underline{A}$ di coordinate (A_R, A_I), come mostrato in fig. 4, e può essere scritto nella forma:

$$\underline{A} = A_R + jA_I \tag{25}$$

dove A_R ed A_I sono le componenti reali ed immaginarie di $\underline{A}$. La (24) e la (25) vengono dette rispettivamente notazione polare e notazione cartesiana del numero complesso $\underline{A}$. Le seguenti relazioni consentono di convertire la notazione di un numero complesso da cartesiana a polare e viceversa:

Notazione cartesiana $\Rightarrow$ Notazione polare

$$A = |\underline{A}| = \sqrt{A_R^2 + A_I^2} \; ; \qquad \alpha = \arctan\left(\frac{A_I}{A_R}\right)$$

Notazione polare $\Rightarrow$ Notazione cartesiana

$$A_R = A\cos\alpha; \qquad A_I = A\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

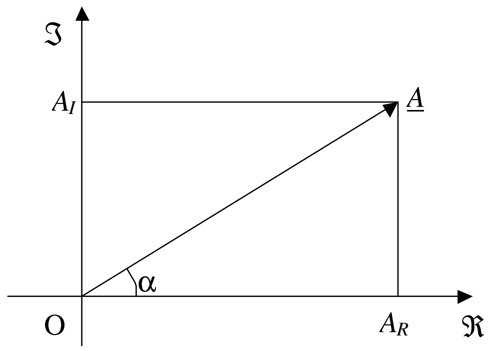

Figura 4

Il prodotto di un fasore $\underline{A}$ per una costante reale *m* è rappresentato da un fasore di modulo *mA* avente la stessa direzione di $\underline{A}$ e verso uguale se m>0, od opposto se m<0 (vedi fig. 5).

Figura 5

Il prodotto di un fasore $\underline{A}$ per il numero immaginario puro *j*, tenendo conto che $j = e^{j\pi/2}$, vale:

$$j\underline{A} = A\, e^{\,j(\alpha + \pi/2)}$$

Sul piano di Gauss, $\underline{A}$ moltiplicato per *j* viene ruotato di $\pi/2$ nel senso positivo (antiorario) di rotazione come mostrato in figura 6.

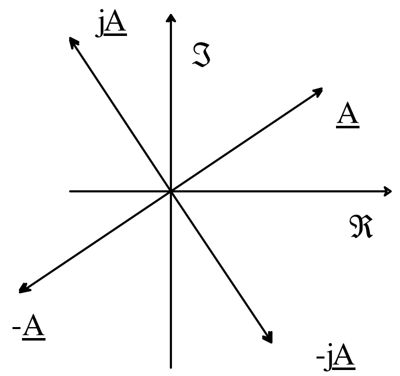

Figura 6

Il fasore $\underline{C}$ somma di $\underline{A}$ e $\underline{B}$, è la risultante vettoriale di $\underline{A}$ e $\underline{B}$ (vedi fig. 7), cioè la somma componente per componente:

$$C_R = A_R + B_R$$

$$C_I = A_I + B_I$$

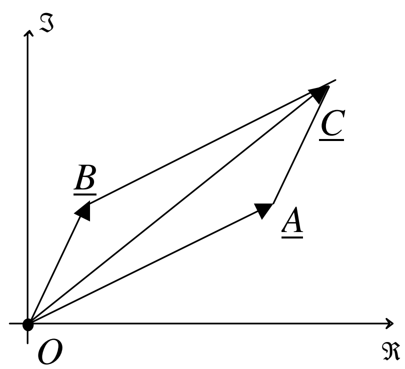

Figura 7

La derivata temporale di una grandezza sinusoidale a(t) la cui trasformata di Steinmetz è il fasore $\underline{A}$ è rappresentata da un fasore ruotato di $\pi/2$ rispetto a $\underline{A}$, di modulo ωA (vedi fig. 8).

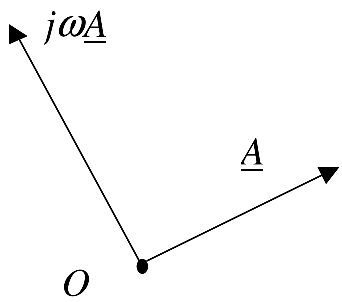

Figura 8