

CIRCUITI IN REGIME SINUSOIDALE PERMANENTE

Trasformazione delle equazioni di Kirchhoff in forma simbolica

La trasformata di Steinmetz rappresenta uno strumento essenziale per lo studio di circuiti elettrici lineari in regime sinusoidale. Il metodo utilizzato a tal fine, detto metodo simbolico, consiste nel trasformare secondo Steinmetz il sistema di equazioni differenziali per i valori istantanei delle tensioni e delle correnti in un sistema algebrico di più agevole soluzione.

Nell'ipotesi che tutte le correnti e le tensioni del circuito oggetto di studio siano sinusoidali ed isofrequenziali, in virtù delle proprietà di linearità della trasformata di Steinmetz, è infatti possibile trasformare le leggi di Kirchhoff ai valori istantanei in altrettante equazioni algebriche complesse ove compaiono i fasori associati alle tensioni ed alle correnti. Data infatti una qualsiasi sequenza chiusa di nodi, ed essendo v_i la tensione dell' i -esimo degli m tratti costituenti il percorso chiuso individuato da tale sequenza, la trasformazione secondo Steinmetz della legge di Kirchhoff per le tensioni fornisce:

$$\sum_{i=1}^m v_i(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^m V_i = 0 \quad (1.a)$$

Quindi, la somma algebrica dei fasori associati alle tensioni dei tratti del percorso chiuso individuato da una qualsiasi sequenza chiusa di nodi è nulla.

Data inoltre una qualsiasi superficie chiusa, che intersechi il circuito solo in corrispondenza delle connessioni, ed essendo i_i la corrente dell' i -esimo degli n rami che intersecano tale superficie, applicando la trasformata di Steinmetz alla legge di Kirchhoff per le correnti si ottiene:

$$\sum_{i=1}^n i(t)_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n I_i = 0 \quad (1.b)$$

Per la (1.b), la somma algebrica dei fasori associati alle correnti uscenti da una qualsiasi superficie chiusa, che intersechi il circuito solo in corrispondenza delle connessioni, è nulla. Esplicitando la parte reale ed immaginaria dell'equazione complessa (1.b) ($\Im[L]$: parte immaginaria di L):

$$\sum_{i=1}^n \Re[L_i] + j \sum_{i=1}^n \Im[L_i] = 0$$

o anche:

$$\sum_{i=1}^n \Re[L_i] = 0, \quad \sum_{i=1}^n \Im[L_i] = 0.$$

Introducendo i complessi coniugati $I_i^* = \Re[L_i] - \Im[L_i]$ dei fasori associati alle correnti, si ottiene quindi:

$$\sum_{i=1}^n \Re[L_i] - j \sum_{i=1}^n \Im[L_i] = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n I_i^* = 0 \quad (1.c)$$

La LKC vale quindi anche per i complessi coniugati dei fasori associati alle correnti: la somma algebrica dei complessi coniugati dei fasori associati alle correnti uscenti da una qualsiasi superficie chiusa, che intersechi il circuito solo in corrispondenza delle connessioni, è nulla.

Trasformazione in forma simbolica delle Leggi Costitutive dei Bipoli lineari

E' inoltre possibile trasformare le leggi costitutive dei componenti, ottenendo dalle equazioni ai valori istantanei altrettante equazioni algebriche complesse. Adottando le consuete convenzioni per i versi positivi di tensione e di corrente, le leggi costitutive dei componenti visti finora diventano:

Resistore:

$$v(t) = R i(t) \quad \Rightarrow \quad \underline{V} = R \underline{I} \quad (2.a)$$

Induttore:

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \underline{V} = j\omega L \underline{I}; \quad \underline{I} = -\frac{j}{\omega L} \underline{V} \quad (2.b)$$

Condensatore:

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \underline{I} = j\omega C \underline{V}; \quad \underline{V} = -\frac{j}{\omega C} \underline{I} \quad (2.c)$$

Generatore di tensione (indipendente):

$$v(t) = e(t), \quad e(t) = \sqrt{2}E \cos(\omega t + \alpha_v) \quad \Rightarrow \quad \underline{V} = \underline{E}, \quad \underline{E} = E e^{j\alpha_v} \quad (2.d)$$

Generatore di corrente (indipendente):

$$i(t) = I_g(t), \quad I_g(t) = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \alpha_i) \quad \Rightarrow \quad \underline{I} = \underline{I}_g, \quad \underline{I}_g = I e^{j\alpha_i} \quad (2.e)$$

Le equazioni (1) e (2), ottenute mediante la trasformazione secondo Steinmetz, vengono dette equazioni simboliche, poiché vi compaiono i fasori, grandezze simboliche delle tensioni e delle correnti.

Le leggi costitutive in forma simbolica sono sempre di natura algebrica, anche se, nel caso dei componenti con memoria, sono state ottenute trasformando equazioni differenziali. Ne segue che, per i componenti passivi, è possibile definire l'impedenza \underline{Z} come un operatore complesso uguale al rapporto fra i fasori tensione e corrente:

$$\underline{Z} = \underline{V}/\underline{I} \quad (3)$$

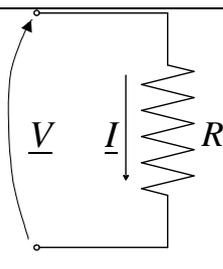
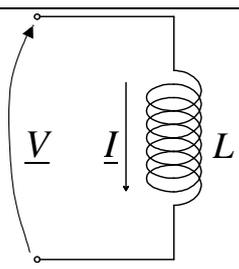
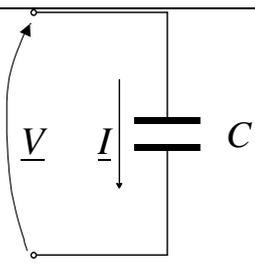
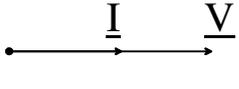
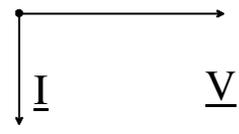
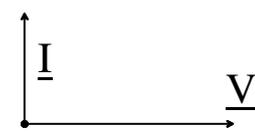
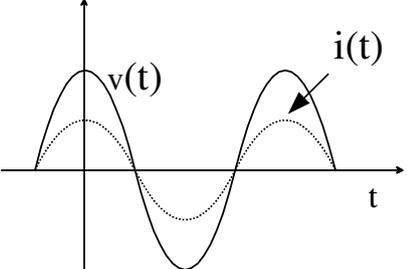
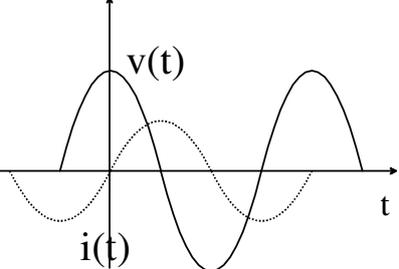
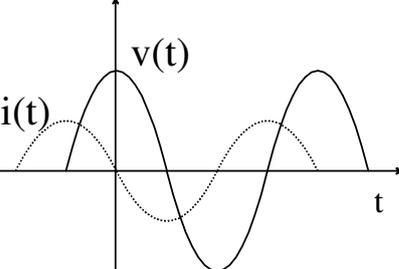
Dato quindi un generico componente, siano $\underline{V} = V e^{j\alpha_v}$ e $\underline{I} = I e^{j\alpha_i}$ i fasori associati alla tensione ed alla corrente, dalla definizione (3) si ricava:

$$\underline{Z} = \frac{V e^{j\alpha_v}}{I e^{j\alpha_i}} = \frac{V}{I} e^{j(\alpha_v - \alpha_i)} = \frac{V}{I} e^{j\varphi} \quad (4)$$

L'impedenza è quindi un numero complesso di modulo pari al rapporto tra i moduli dei fasori tensione e corrente, ed argomento $\varphi = \alpha_v - \alpha_i$. L'angolo φ viene detto sfasamento ed esprime la differenza di fase che viene indotta dal componente tra tensione e corrente. Lo sfasamento φ è positivo quando $\alpha_v > \alpha_i$, cioè quando la tensione è in anticipo rispetto alla corrente. L'inverso dell'impedenza viene definito ammettenza:

$$\underline{Y} = 1/\underline{Z} \quad (5)$$

La tabella riassume i risultati ottenuti. La tensione è stata scelta come riferimento di fase, cosicché $\alpha_v = 0$ e $\underline{V} = V$; lo sfasamento è quindi $\varphi = -\alpha_i$. Gli sfasamenti tra fasori sono illustrati in figura 2. L'andamento delle corrispondenti grandezze sinusoidali è mostrato in figura 3.

 <p style="text-align: center;">Figura 1.a</p>	 <p style="text-align: center;">Figura 1.b</p>	 <p style="text-align: center;">Figura 1.c</p>
$\underline{Z} = R$	$\underline{Z} = j\omega L$	$\underline{Z} = -j/\omega C$
$\underline{I} = \frac{\underline{V}}{R} = \frac{V}{R}$	$\underline{I} = -j \frac{1}{\omega L} \underline{V} = \frac{V}{\omega L} e^{-j\omega \frac{\pi}{2}}$	$\underline{I} = j\omega C \underline{V} = V\omega C e^{j\omega \frac{\pi}{2}}$
<p>La corrente simbolica \underline{I} è un numero reale in fase con \underline{V}:</p> $I = \frac{V}{R}, \varphi = 0$	<p>La corrente simbolica \underline{I} è un numero immaginario in quadratura in ritardo rispetto a \underline{V}:</p> $I = \frac{V}{\omega L}, \varphi = \pi/2$	<p>La corrente simbolica \underline{I} è un numero immaginario in quadratura in anticipo rispetto a \underline{V}:</p> $I = V\omega C, \varphi = -\pi/2$
 <p style="text-align: center;">Figura 2.a</p>	 <p style="text-align: center;">Figura 2.b</p>	 <p style="text-align: center;">Figura 2.c</p>
 <p style="text-align: center;">Figura 3.a</p>	 <p style="text-align: center;">Figura 3.b</p>	 <p style="text-align: center;">Figura 3.c</p>

La relazione lineare, che in base alla (3), esprime il rapporto tra i fasori \underline{V} ed \underline{I} :

$$\underline{V} = \underline{Z} \underline{I} \Leftrightarrow \underline{I} = \underline{Y} \underline{V} \quad (6)$$

viene detta equazione di Ohm simbolica.

Metodo simbolico per la soluzione di circuiti in corrente alternata

Quanto detto finora permette di affermare che, dato un qualsiasi circuito lineare in regime sinusoidale, esso può essere convenientemente risolto mediante la trasformata di Steinmetz, mediante lo schema mostrato in fig. 4.

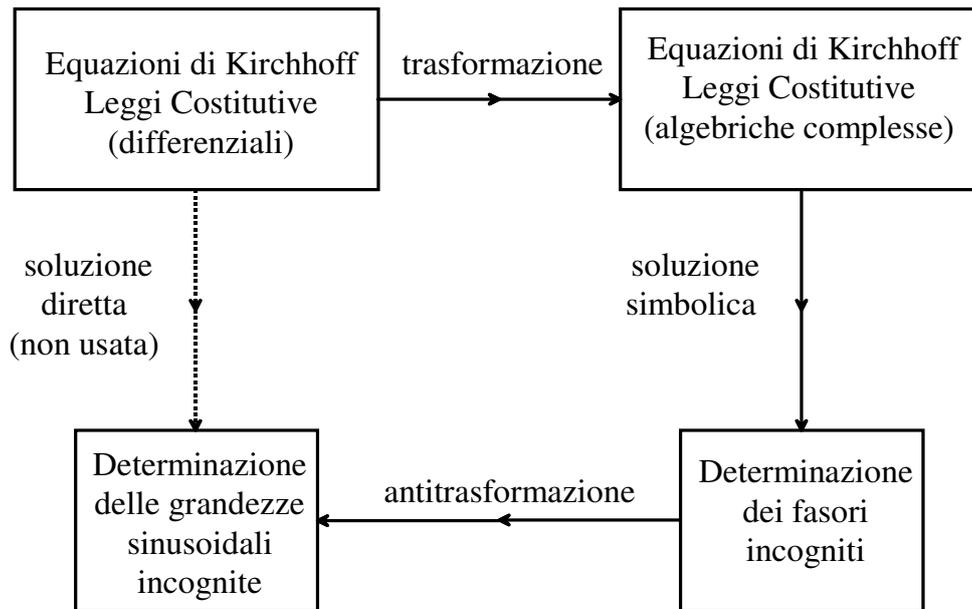


Figura 4. - Schema di risoluzione di circuiti in c.a.

Una volta scritte le equazioni di Kirchhoff ai valori istantanei, il metodo prevede tre passi:

- 1) Trasformazione delle equazioni di Kirchhoff differenziali in equazioni di Kirchhoff simboliche (algebriche)
- 2) Risoluzione delle equazioni simboliche e determinazione dei fasori rappresentativi delle varie incognite (correnti e tensioni di ramo, tensioni di nodo).
- 3) Determinazione delle correnti e delle tensioni istantanee a partire dalle grandezze simboliche che le rappresentano. Quest'ultima fase è del tutto immediata, tanto che viene normalmente sottintesa.

L'operazione di trasformazione consente di ottenere una formulazione simbolica delle equazioni topologiche e delle leggi costitutive formalmente identica a quella ai valori istantanei sulla cui base è stata sviluppata, nei capitoli precedenti, la teoria riguardante la soluzione di circuiti senza memoria, contenenti unicamente generatori di tensione e di corrente e resistori. L'analogia formale per le equazioni topologiche (1) è evidente, ed altrettanto può dirsi per quanto riguarda le leggi costitutive per i generatori indipendenti di tensione e di corrente (2d, 2.e). Le leggi costitutive per i componenti passivi vengono trasformate in relazioni del tipo (6), formalmente analoghe alla legge costitutiva ai valori istantanei del resistore. Questa constatazione permette di affermare che la tecnica risolutiva dei circuiti in regime sinusoidale resta la stessa vista per i circuiti senza memoria, salvo l'impiego di fasori. Valgono, inoltre, tutti i teoremi sulle reti in continua (Teoremi di Thevenin, di Norton, etc.).

Quanto detto mostra anche come non sia necessario, ogni volta che si risolve un circuito, procedere alla trasformazione di Steinmetz delle equazioni differenziali in simboliche, potendosi scrivere direttamente queste ultime tramite le (1) e le (2). L'operazione di trasformazione è di regola eseguita mediante la trasformazione del circuito nel dominio del tempo in circuito simbolico. Tale operazione, esemplificata in fig. 5, viene effettuata sostituendo ad ogni componente passivo la relativa impedenza e ad ogni generatore il fasore associato alla grandezza impressa.

Anche l'operazione di antitrasformazione si può di solito sottintendere essendo del tutto ovvio il passaggio dai numeri complessi alle grandezze sinusoidali che essi rappresentano. Tale passaggio infatti implica semplicemente che si prendano modulo e argomento del numero complesso e si identifichino con il valore efficace e la fase della grandezza sinusoidale.

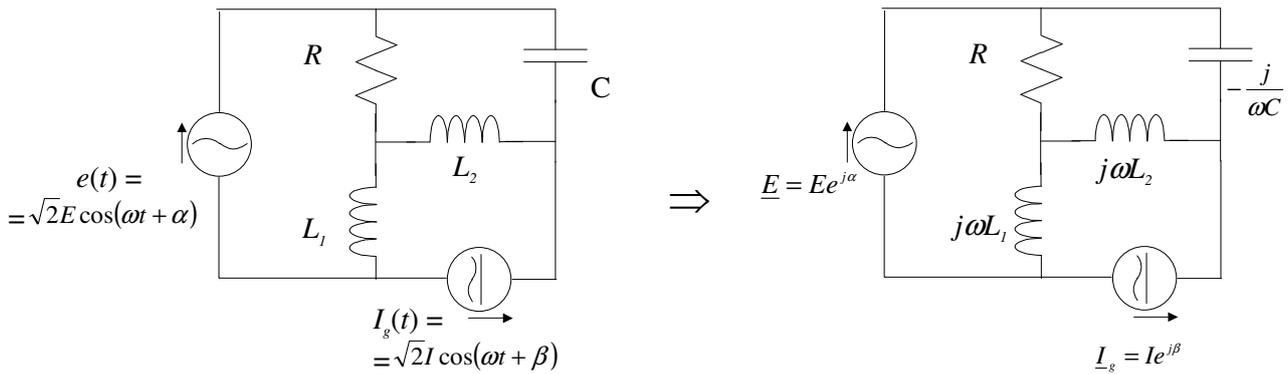


Figura 5. – Trasformazione di un circuito nel dominio del tempo in circuito simbolico

Serie e parallelo di Impedenze – Risonanza ed Antirisonanza

Quanto detto finora autorizza ad estendere le considerazioni inerenti resistori in serie ed in parallelo ad impedenze in serie ed in parallelo. In particolare, date n impedenze in serie, esse sono equivalenti ad un'unica impedenza \underline{Z}_{eq} pari alla somma delle impedenze che costituiscono la serie:

$$\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \dots, \underline{Z}_n \text{ in serie } \underline{Z}_{eq} = \sum_{i=1}^n \underline{Z}_i ; \quad (7)$$

date n impedenze in parallelo, esse sono equivalenti ad un'unica impedenza \underline{Z}_{eq} pari all'inverso della somma degli inversi delle impedenze che costituiscono il parallelo:

$$\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \dots, \underline{Z}_n \text{ in parallelo } \underline{Z}_{eq} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\underline{Z}_i} \right)^{-1} , \quad (8)$$

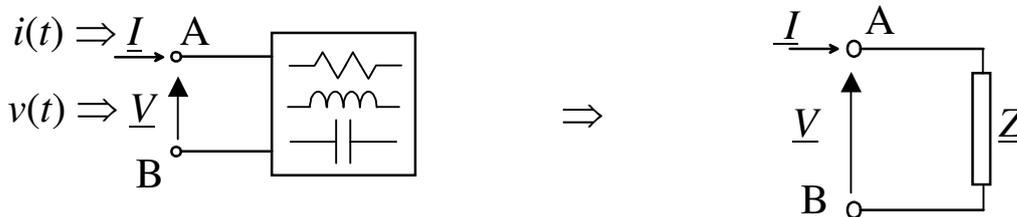


Figura 6. – Bipolo passivo

In generale, l'impedenza complessiva \underline{Z} di un bipolo formato da un certo numero di componenti passivi, soggetto ad una tensione ai morsetti \underline{V} e che assorbe una corrente \underline{I} , è un numero complesso la cui parte reale R ed immaginaria X vengono dette rispettivamente *resistenza* e *reattanza*:

$$\underline{Z} = R + jX \quad (10)$$

Il modulo dell'impedenza \underline{Z} , che in base alla (4) risulta essere uguale al rapporto tra i valori efficaci della tensione e della corrente, vale:

$$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2} = \frac{V}{I} \quad (11)$$

L'argomento di \underline{Z} , che per la (4) determina lo sfasamento φ tra il fasore della tensione ed il fasore della corrente, è uguale a:

$$\arg[\underline{Z}] = \arctan\left(\frac{X}{R}\right) = \alpha_v - \alpha_i = \varphi \quad (12)$$

Si consideri ora un generico ramo di circuito, costituito da una resistenza R , un'induttanza L e una capacità C disposte in serie. Il ramo è alimentato da una tensione $v(t)$ sinusoidale (vedi figura 7):

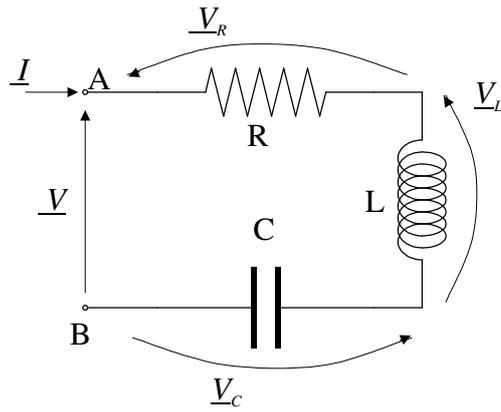


Figura 7.

Le impedenze dei tre componenti che costituiscono la serie sono:

$$\underline{Z}_R = R, \quad \underline{Z}_L = j\omega L, \quad \underline{Z}_C = -\frac{j}{\omega C}.$$

L'impedenza \underline{Z} complessiva del ramo AB, pari alla somma delle impedenze \underline{Z}_R , \underline{Z}_L e \underline{Z}_C assume in questo caso l'espressione:

$$\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right). \quad (13)$$

La reattanza del ramo AB vale:

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C}, \quad (14)$$

e dipende dalla capacità e dall'induttanza del ramo, e dalla pulsazione ω di alimentazione. La reattanza viene distinta in reattanza induttiva X_L e capacitiva X_C secondo il seguente schema:

$$X_L = \omega L \qquad X_C = -\frac{1}{\omega C}$$

$$X = X_L + X_C.$$

Dalla (11) si ricava che \underline{I} è un numero complesso di modulo:

$$I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (15)$$

Dalla (12) deriva inoltre che lo sfasamento φ tra i fasori della tensione e della corrente, pari all'argomento di \underline{Z} vale:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{X}{R}\right) = \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) \quad (16)$$

Si riconosce che, per R, L, C e V fissate, esiste una pulsazione ω_0 per cui la reattanza si annulla:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (17)$$

La pulsazione ω_0 è detta pulsazione di risonanza. Ad essa corrisponde la corrente massima in modulo e con sfasamento nullo. In condizioni di risonanza il comportamento del circuito è resistivo, poiché le cadute reattive si compensano a vicenda (vedi diagramma vettoriale in fig. 11).

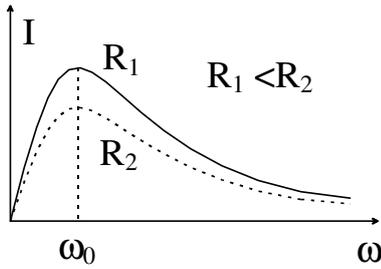


Figura 8.

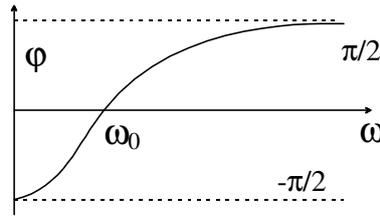


Figura 9.

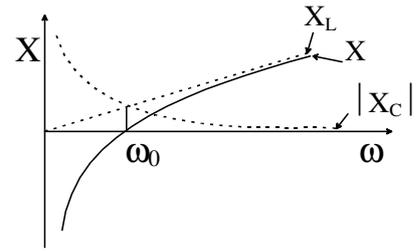


Figura 10.

In figura 8 è rappresentato l'andamento del modulo della corrente in funzione della pulsazione per due diversi valori della resistenza. Nell'ipotetico caso in cui la resistenza del ramo fosse nulla, il modulo della corrente avrebbe un asintoto per $\omega = \omega_0$. Per $\omega \rightarrow 0$, la reattanza capacitiva $X_C \rightarrow \infty$: la corrente continua è bloccata dal condensatore. Per $\omega \rightarrow \infty$, la reattanza induttiva $X_L \rightarrow \infty$: gli effetti induttivi tendono a bloccare la corrente ad alte frequenze. Nelle figure 9 e 10 sono rappresentati rispettivamente lo sfasamento e la reattanza in funzione della pulsazione. Per $\omega < \omega_0$, la reattanza capacitiva prevale su quella induttiva, e lo sfasamento $\varphi < 0$; viceversa, per $\omega > \omega_0$ la reattanza induttiva prevale su quella capacitiva e $\varphi > 0$ (vedi diagrammi vettoriali). In figura 11 sono illustrati i diagrammi delle tensioni sul piano di Gauss. Nel caso considerato, si può scrivere:

$$\underline{V} = \underline{V}_R + \underline{V}_L + \underline{V}_C = R\underline{I} + jX_L\underline{I} + jX_C\underline{I}$$

dove sono state evidenziate le tensioni \underline{V}_R , \underline{V}_L e \underline{V}_C ai capi della resistenza, dell'induttore e del condensatore rispettivamente.

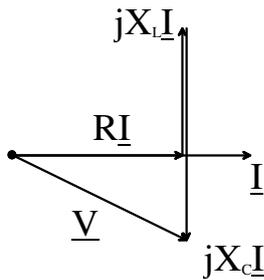


Figura 11.a - Per $\omega < \omega_0$ la reattanza capacitiva prevale su quella induttiva.

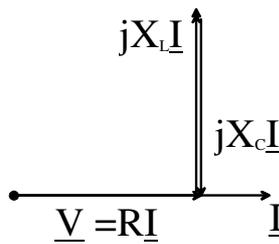


Figura 11.b. - Per $\omega = \omega_0$, la reattanza capacitiva e quella induttiva si compensano.

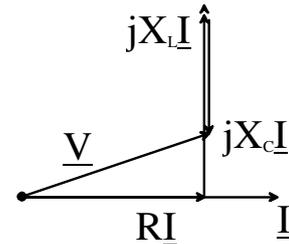


Figura 11.c. - Per $\omega > \omega_0$, la reattanza induttiva prevale su quella capacitiva.

Si consideri ora il circuito mostrato in figura 12, in cui figurano un'induttanza ed una capacità in parallelo. L'impedenza \underline{Z}_{LC} equivalente al parallelo tra le due impedenze \underline{Z}_L e \underline{Z}_C vale, in base alla (8):

$$\underline{Z}_{LC} = \frac{\underline{Z}_L \underline{Z}_C}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_C} = j \frac{L/C}{\frac{1}{\omega C} - \omega L} = jX \quad (18)$$

La corrente che passa attraverso la resistenza R è quindi pari a:

$$\underline{I} = \frac{\underline{V}}{R + \underline{Z}_{LC}} \quad (19)$$

mentre le correnti del ramo induttivo e capacitivo sono pari a:

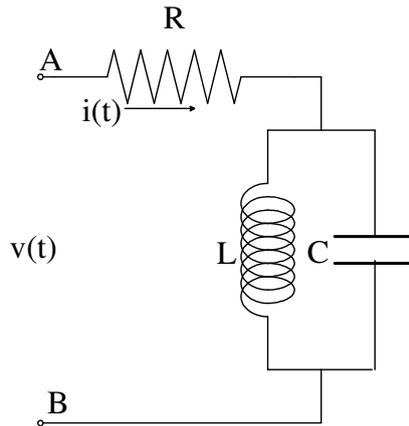


Figura 12.

$$\underline{I}_L = \frac{\underline{V} - R\underline{I}}{j\omega L} \quad (20)$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{V} - R\underline{I}}{-j/\omega C} \quad (21)$$

Esiste una pulsazione ω_0 che rende infinita l'impedenza equivalente \underline{Z}_{LC} e, conseguentemente, annulla la corrente \underline{I} :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (22)$$

Mentre la corrente di alimentazione \underline{I} è nulla le correnti \underline{I}_L e \underline{I}_C risultano diverse da zero:

$$\underline{I}_L = -j\sqrt{\frac{C}{L}}\underline{V} = -\underline{I}_C$$

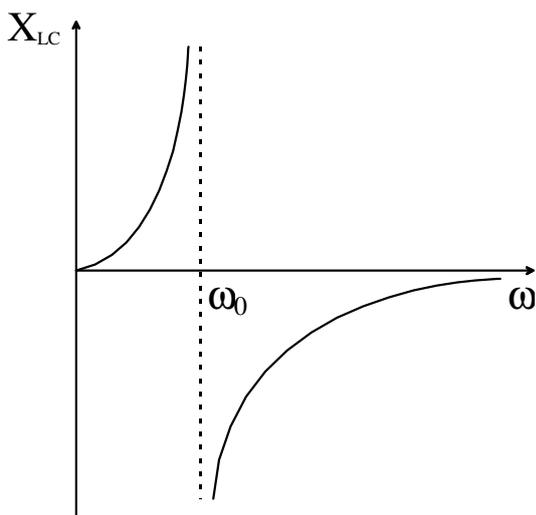


Figura 13.

In figura 13 è mostrato l'andamento della reattanza equivalente del parallelo induttanza - condensatore.

Per $\omega < \omega_0$ la reattanza è positiva, ed il circuito ha un comportamento prevalentemente ohmico - induttivo con uno sfasamento positivo. Per basse frequenze la corrente fluisce prevalentemente nel ramo induttivo, che quindi caratterizza maggiormente il comportamento del circuito. Al limite, per $\omega=0$, la corrente \underline{I}_C e la reattanza induttiva X_L si annullano, mentre X_C va all'infinito.

Per $\omega > \omega_0$ la reattanza è negativa, ed il circuito ha prevalentemente una caratteristica ohmico - capacitiva, con sfasamento negativo. Per alte frequenze la corrente fluisce maggiormente per il ramo capacitivo. Quando $\omega \rightarrow \infty$ la corrente \underline{I}_L e la reattanza capacitiva X_C si annullano, mentre X_L tende all'infinito.

Si instaura cioè un regime periodico di scambio energetico tra il condensatore e l'induttanza. In assenza di dispersioni e di resistenze, la circolazione nella maglia costituita dall'induttanza e dal condensatore continua indefinitamente.

POTENZE IN CORRENTE ALTERNATA

Potenza istantanea

Si faccia riferimento all'utilizzatore U in figura 14, alimentato tramite la coppia di morsetti AB da una tensione sinusoidale:

$$v(t) = V_M \cos(\omega t) = \sqrt{2} V \cos(\omega t)$$

associata ad una corrente d'alimentazione:

$$i(t) = I_M \cos(\omega t - \varphi) = \sqrt{2} I \cos(\omega t - \varphi)$$

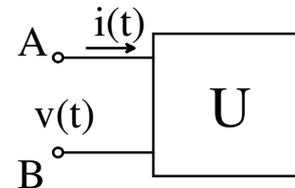


Figura 14.

Si definisce potenza istantanea il prodotto :

$$p(t) = v(t) i(t) \quad (23)$$

La corrente $i(t)$ può anche essere espressa nel modo seguente:

$$i(t) = I_M \cos(\omega t - \varphi) = I_M \cos(\omega t) \cos(\varphi) + I_M \sin(\omega t) \sin(\varphi)$$

La prima componente della corrente, in fase con la tensione, è detta corrente attiva i_a . La seconda componente della corrente, in quadratura con la tensione, è detta corrente reattiva i_r . Si può dunque scrivere:

$$i_a(t) = I_M \cos(\omega t) \cos \varphi$$

$$i_r(t) = I_M \sin(\omega t) \sin \varphi$$

$$i(t) = i_a(t) + i_r(t) \quad (24)$$

La potenza istantanea diventa quindi:

$$p(t) = v(t) i_a(t) + v(t) i_r(t) = p_a(t) + p_r(t) \quad (25)$$

dove:

$$p_a(t) = v(t) i_a(t) = V_M I_M \cos^2(\omega t) \cos \varphi$$

$$p_r(t) = v(t) i_r(t) = \frac{V_M I_M}{2} \sin(2\omega t) \sin \varphi$$

Gli andamenti delle grandezze p_a e p_r , dette rispettivamente potenza istantanea attiva e potenza istantanea reattiva, sono mostrati nelle figure 15 e 16.

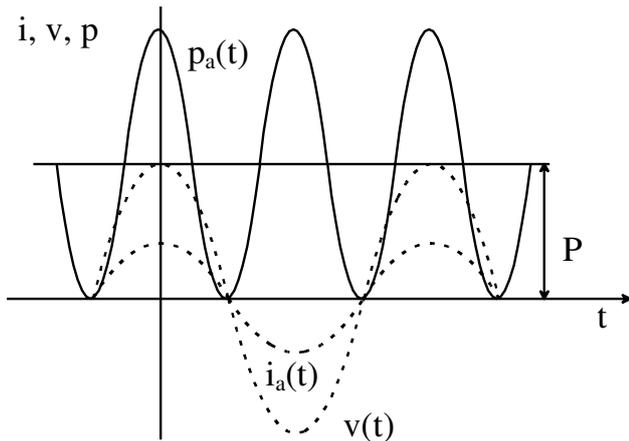


Figura 15. - Potenza istantanea attiva.

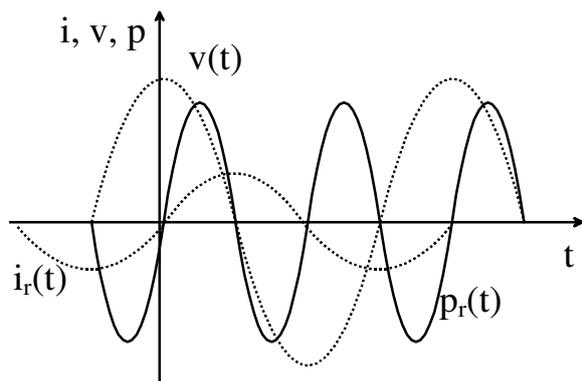


Figura 16. - Potenza istantanea reattiva.

Potenza attiva

Si riconosce che la potenza istantanea attiva non cambia mai segno, e rappresenta quindi un flusso unidirezionale di energia. Il suo integrale su un periodo T è quindi, di norma, diverso da zero. Si definisce potenza attiva P il valore medio in un periodo dalla potenza istantanea:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \quad (26)$$

E' immediato verificare che il valore medio sul periodo T della potenza istantanea coincide col valore medio della potenza attiva istantanea: infatti, la potenza reattiva istantanea è una grandezza sinusoidale con periodo pari a $T/2$ e, di conseguenza, sul periodo T , ha valore medio nullo. Si ha quindi:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p_a(t) dt = \frac{V_M I_M}{T} \cos \varphi \int_0^T \cos^2(\omega t) dt = \frac{V_M I_M}{2} \cos \varphi$$

Introducendo i valori efficaci di corrente e tensione:

$$P = VI \cos \varphi \quad (27)$$

La potenza attiva è quindi valutabile come il prodotto del valore efficace della tensione, il valore efficace della corrente e del fattore $\cos \varphi$, detto fattore di potenza.

Potenza complessa

La potenza complessa \underline{N} è definita dalla seguente relazione:

$$\underline{N} = \underline{V} \underline{I}^* \quad (28)$$

dove \underline{I}^* è il complesso coniugato di \underline{I} . Si ha quindi:

$$\underline{N} = V e^{j\alpha_v} I e^{-j\alpha_i} = VI e^{j\varphi}$$

e, ricordando la formula di Eulero:

$$\underline{N} = VI \cos \varphi + jVI \sin \varphi \quad (29)$$

Risulta così provato, ricordando la (27), che la parte reale della potenza complessa risulta essere pari alla potenza attiva :

$$\Re(\underline{N}) = P = VI \cos \varphi \quad (30)$$

La parte immaginaria della potenza complessa viene chiamata potenza reattiva e nel caso di un bipolo ha la seguente espressione:

$$Q = \Im(N) = VI \sin \varphi \quad (31)$$

Dalla (31) si può notare che un bipolo assorbe potenza reattiva solo quando la corrente è sfasata rispetto alla tensione ($\varphi \neq 0$), ed è quindi presente una componente reattiva della corrente stessa (vedi eq. 21). Dalla espressione della potenza reattiva istantanea (25c), si osserva che la ampiezza della variazione sinusoidale di tale potenza (parte indipendente dal tempo), è pari a $VI \sin \varphi$. La potenza reattiva è quindi un indicatore di uno scambio di energia di tipo conservativo, possibile in presenza di componenti in grado di immagazzinare energia senza dissiparla, come induttori e condensatori.

Il modulo N della potenza complessa è detto potenza apparente:

$$N = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (32)$$

Si consideri ora un generico ramo di circuito caratterizzato da un'impedenza \underline{Z} . Tenendo conto della legge di Ohm simbolica (5), la (28) può essere riscritta come segue:

$$\underline{N} = \underline{Z} \underline{I} \underline{I}^* = \underline{Z} I^2 = RI^2 + jXI^2. \quad (33)$$

Confrontando la (33) con la (30) e la (31) si ottiene:

$$P = RI^2 \quad (34)$$

$$Q = XI^2 \quad (35)$$

In base alla definizione di corrente efficace I si ricava subito che la potenza attiva è pari alla media su un periodo della potenza dissipata per effetto Joule sulla resistenza R , unico componente in grado di assorbire energia senza restituirla. La potenza reattiva dipende invece esclusivamente dalla reattanza, cioè dai componenti in grado di immagazzinare energia conservativa (elettrostatica nei condensatori, magnetica nelle induttanze) e di restituirla.

Si noti che, mentre la potenza attiva assorbita dall'impedenza \underline{Z} è sempre positiva, il segno della potenza reattiva dipende dalla reattanza prevalente nel ramo. Q è quindi positiva per reattanze prevalentemente induttive ($Q = \omega LI^2$ per una reattanza puramente induttiva), e negativa per reattanze prevalentemente capacitive ($Q = -I^2/\omega C$ per una reattanza puramente capacitiva).

Additività delle potenze

Il Teorema di Tellegen, visto precedentemente (03 circuiti-def, pag. 5), afferma che, per un qualsiasi circuito, avendo assegnato i versi positivi per tensione e corrente secondo la convenzione dell'utilizzatore, preso un qualsiasi vettore di tensioni di ramo \mathbf{v}_1 , che soddisfi le LKT, ed un vettore di correnti di ramo \mathbf{i}_2 , che soddisfi le LKC, vale la seguente relazione:

$$\mathbf{v}_1^T \mathbf{i}_2 = 0 \quad (36)$$

Sia ora dato un generico circuito in regime sinusoidale, e su ciascun ramo di tale circuito siano assegnati i versi positivi per tensione e corrente soddisfacendo la convenzione dell'utilizzatore.

In virtù della (1), il vettore $\underline{\mathbf{V}}$, costituito dai fasori associati alle tensioni di ramo, soddisfa la legge di Kirchhoff per le tensioni. Per la (1.c), se il vettore $\underline{\mathbf{I}}$ soddisfa la LKC, allora anche il vettore $\underline{\mathbf{I}}^*$, costituito dai complessi coniugati dei fasori associati alle correnti di ramo, soddisfa la LKC. Applicando la (36) si ha quindi:

$$(\underline{\mathbf{V}})^T \underline{\mathbf{I}}^* = 0$$

o, in altra forma:

$$\sum_{i=1}^r \underline{V}_i \underline{I}_i^* = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^r \underline{N}_{a,i} = 0 \quad (37)$$

Per la (37), la somma estesa a tutti gli r rami costituenti il circuito dato delle potenze complesse assorbite è uguale a zero. Tenuto conto che la potenza erogata da un componente è pari alla potenza assorbita cambiata di segno ($N_{e,i} = -N_{a,i}$), supponendo che nel circuito considerato siano presenti r_e rami che erogano potenza ed r_a che la assorbono, la (37) può essere riscritta come:

$$\sum_{i=1}^{r_e} N_{e,i} = \sum_{i=1}^{r_a} N_{a,i} . \quad (38)$$

Quindi, la somma delle potenze complesse erogate nel circuito è uguale alla somma delle potenze complesse assorbite. Esplicitando in parte reale ed immaginaria:

$$\sum_{i=1}^{r_e} P_{e,i} = \sum_{i=1}^{r_a} P_{a,i} ; \quad (39.a)$$

$$\sum_{i=1}^{r_e} Q_{e,i} = \sum_{i=1}^{r_a} Q_{a,i} . \quad (39.b)$$

In base alle (39), la somma delle potenze attive erogate nel circuito è uguale alla somma delle potenze attive assorbite, e la somma delle potenze reattive erogate nel circuito è uguale alla somma delle potenze reattive assorbite.

Potenza per componenti ad n-morsetti

Si consideri ora un generico componente U ad n terminali schematizzato in figura 17. Il componente U, alimentato da un sistema di tensioni ai morsetti sinusoidali ed isofrequenziali $v_1(t), v_2(t), v_3(t), \dots, v_n(t)$, assorbe le correnti $i_1(t), i_2(t), i_3(t), \dots, i_n(t)$, sinusoidali ed isofrequenziali con le tensioni dei morsetti. Tensioni e correnti ai morsetti possono quindi essere rappresentate dai fasori $\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3, \dots, \underline{V}_n$ e $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3, \dots, \underline{I}_n$.

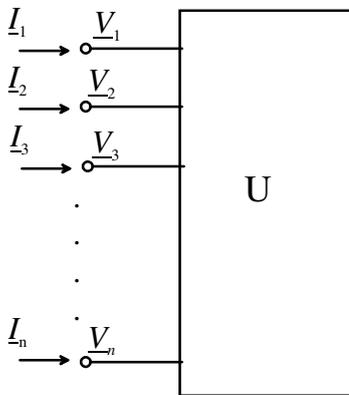


Figura 17.

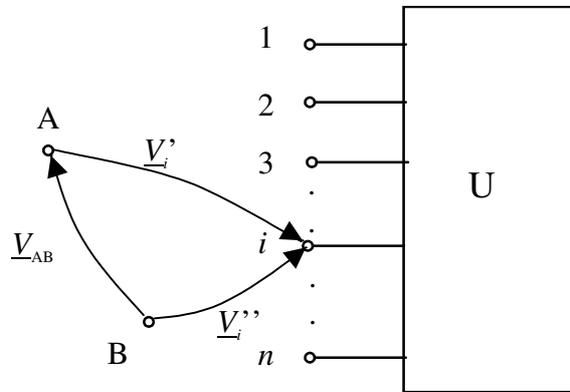


Figura 18.

La potenza istantanea assorbita dal componente vale (vedi circuiti-def. Pag. 6):

$$p_a(t) = \sum_{k=1}^n v_k(t) i_k(t) = \sum_{k=1}^{n-1} v_{kn}(t) i_k(t) . \quad (40)$$

Viene definita potenza attiva P_a assorbita da U la media sul periodo T della potenza attiva istantanea:

$$P_a = \frac{1}{T} \int_0^T p_a(\tau) d\tau . \quad (41)$$

Si definisce potenza complessa assorbita dal componente la quantità \underline{N}_a :

$$\underline{N}_a = \sum_{k=1}^n \underline{V}_{ki} \underline{I}_k^* \quad (42)$$

La potenza complessa assorbita \underline{N}_a è indipendente dal particolare riferimento utilizzato per definire le tensioni dei morsetti. Infatti, siano $\underline{V}_1', \underline{V}_2', \underline{V}_3', \dots, \underline{V}_n'$ e $\underline{V}_1'', \underline{V}_2'', \underline{V}_3'', \dots, \underline{V}_n''$ le tensioni dei terminali del componente U avendo preso come riferimento rispettivamente i generici nodo A ed B. Considerato il generico morsetto k , applicando la legge di Kirchhoff delle tensioni alla sequenza chiusa di nodi A-B-k-A (fig. 18), si ottiene:

$$\underline{V}_i'' = \underline{V}_i' + \underline{V}_{AB}$$

Utilizzando il nodo B come riferimento per le tensioni di nodo, la potenza complessa \underline{N}_a' assorbita dal componente U può essere espressa come:

$$\underline{N}_a'' = \sum_{k=1}^n \underline{V}_k'' \underline{I}_k^* = \sum_{k=1}^n \underline{V}_k' \underline{I}_k^* + \underline{V}_{AB} \sum_{k=1}^n \underline{I}_k^* \quad (43)$$

Tenuto conto che, per la legge di Kirchhoff delle correnti (1.c), la somma dei fasori \underline{I}_k associati alle correnti entranti nel componente U è nulla, e che quindi risulta nulla anche la somma dei complessi coniugati \underline{I}_k^* :

$$\sum_{i=1}^{r_c} \underline{I}_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{r_c} \underline{I}_i^* = 0,$$

la (43) diventa:

$$\underline{N}_a'' = \sum_{i=1}^n \underline{V}_i'' \underline{I}_i^* = \sum_{i=1}^n \underline{V}_i' \underline{I}_i^* = \underline{N}_a' \quad (44)$$

La (44) dimostra come la definizione di potenza complessa assorbita fornita dalla (42) sia indipendente dal riferimento per le tensioni dei morsetti. Utilizzando come riferimento il morsetto n -esimo, la (42) diventa:

$$\underline{N}_a = \sum_{k=1}^{n-1} \underline{V}_{kn} \underline{I}_k^* \quad (45)$$

Il termine $\underline{V}_{kn} \underline{I}_k^*$ che compare nella sommatoria a secondo membro della (45) può essere interpretata come la potenza complessa \underline{N}_{kn} fornita al componente U attraverso la coppia di morsetti k - n (vedi fig. 19). La parte reale del numero complesso \underline{N}_{kn} rappresenta quindi la potenza attiva fornita al componente U attraverso la coppia di morsetti k - n , ed è pari al valor medio della potenza istantanea $p_{kn}(t) = v_{in}(t)i_k(t)$:

$$\Re[\underline{V}_{kn} \underline{I}_k^*] = \Re[\underline{N}_{kn}] = P_{kn} = \frac{1}{T} \int_0^T v_{kn}(\tau) i_k(\tau) d\tau$$

la parte reale della potenza complessa \underline{N}_a assorbita da U espressa nella forma vista alla (45), è pari a:

$$\Re[\underline{N}_a] = \Re\left[\sum_{k=1}^{n-1} \underline{V}_{kn} \underline{I}_k^*\right] = \sum_{k=1}^{n-1} \Re[\underline{V}_{kn} \underline{I}_k^*] = \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{1}{T} \int_0^T v_{kn}(\tau) i_k(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\sum_{k=1}^{n-1} v_{kn}(\tau) i_k(\tau)\right] d\tau;$$

tenendo infine conto della definizione della potenza istantanea (40), risulta:

$$\Re[\underline{N}_a] = \frac{1}{T} \int_0^T p_a(\tau) d\tau = P_a \quad (46)$$

La parte reale della potenza complessa assorbita dal componente U è quindi pari alla potenza attiva assorbita. La parte immaginaria della potenza complessa \underline{N}_a si definisce potenza reattiva assorbita Q_a dal componente U.

$$Q_a = \Im[N_a]. \quad (47)$$

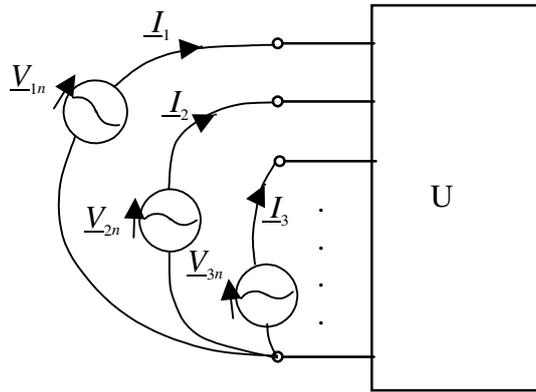


Figura 19.

Si consideri ora il circuito costruito chiudendo le $n-1$ coppie di morsetti $k-n$ con altrettanti generatori di tensione (vedi fig.19); il generatore che connette il k -esimo morsetto al morsetto di riferimento n -esimo eroga una tensione \underline{V}_{kn} . Si ipotizzi inoltre che l'interno del componente U sia costituito da una rete di r bipoli, dei quali r_a assorbono ed r_e erogano potenza. Siano $\underline{N}_{Ue,j}$ la potenza complessa erogata dal j -esimo ramo, ed $\underline{N}_{Ua,i}$ la potenza complessa assorbita dall' i -esimo. Applicando la (38), e tenuto conto che, con i versi scelti per tensione e corrente per gli $n-1$ generatori \underline{V}_{kn} , i prodotti $\underline{V}_{kn} \underline{I}_k^*$ rappresentano le potenze erogate da tali generatori, si ricava:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \underline{V}_{kn} \underline{I}_k^* + \sum_{j=1}^{r_e} \underline{N}_{Ue,j} = \sum_{i=1}^{r_a} \underline{N}_{Ua,i}. \quad (48)$$

Si riconosce immediatamente che la prima sommatoria, in base alla (45), rappresenta la potenza complessa assorbita dal componente U attraverso i morsetti. La seconda sommatoria è estesa agli r_e rami che erogano potenza, e rappresenta la potenza complessa totale che viene erogata dai componenti all'interno di U. La sommatoria a secondo membro è estesa agli r_a rami che assorbono potenza, e rappresenta la potenza complessa totale che viene assorbita dai componenti all'interno di U. La (48) può essere interpretata come segue: la potenza complessa assorbita dai morsetti sommata alle potenze complesse che vengono erogate all'interno del componente U è pari alla potenza complessa totale assorbita internamente ad U. Esplicitando l'equazione complessa (48) nelle sue componenti reale ed immaginaria si ha:

$$P_a + \sum_{j=1}^{r_e} P_{Ue,j} = \sum_{i=1}^{r_a} P_{Ua,i}. \quad (49.a)$$

$$Q_a + \sum_{j=1}^{r_e} Q_{Ue,j} = \sum_{i=1}^{r_a} Q_{Ua,i}. \quad (49.b)$$

Per la (49.a), la potenza attiva assorbita dai morsetti sommata alle potenze attive che vengono erogate all'interno del componente U è pari alla somma delle potenze attive assorbite internamente ad U. Per la (49.b), la potenza reattiva assorbita dai morsetti sommata alle potenze reattive che vengono erogate all'interno del componente U è pari alla somma delle potenze reattive assorbite internamente ad U.

Rifasamento

Nella figura 20 è rappresentato schematicamente un generatore di tensione in c.a. G che alimenta, tramite una linea di lunghezza L , un utilizzatore U .

La lunghezza della linea è tale che è possibile schematizzarla mediante una impedenza di linea \underline{Z}_L ($\underline{Z}_L = R_L + j X_L$)

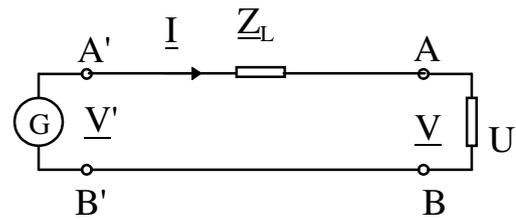


Figura 20.

Conseguentemente la tensione \underline{V} di ingresso dell'utilizzatore U è pari a:

$$\underline{V} = \underline{V}' - \underline{Z}_L \underline{I}$$

A causa della caduta di tensione $\underline{Z}_L \underline{I}$ la tensione \underline{V} non è uguale a \underline{V}' , e soprattutto varia a seconda dell'utilizzatore. Alla resistenza di linea è inoltre associata una potenza dissipata per effetto Joule:

$$P_d = R_L I^2$$

Tali effetti possono essere limitati riducendo la corrente di linea quando questo è possibile.

Esistono degli utilizzatori che, essendo caratterizzati da un fattore di potenza ($\cos\varphi$) basso necessitano di elevati valori di corrente per assorbire la potenza nominale per cui sono stati progettati. Infatti, dalla (27) si ha:

$$I = \frac{P}{V \cos \varphi}$$

Tanto più basso è il fattore di potenza, tanto maggiore è, a parità di tensione e potenza attiva assorbita, la corrente di alimentazione. Un rimedio a tale situazione si può ottenere **rifasando** l'utilizzatore, cioè disponendo in parallelo ad esso un'opportuna reattanza. Il tipo di reattanza dipende dallo sfasamento dell'utilizzatore: occorre un condensatore se $\varphi > 0$, un induttore se $\varphi < 0$.

Si faccia riferimento al caso più frequente in cui $\varphi > 0$ (vedi figura 21). Il diagramma delle correnti si ricava facilmente tenendo conto che:

$$\underline{I}_L = \underline{I} + \underline{I}_C$$

e che \underline{I}_C è in quadratura in anticipo rispetto a \underline{V} . Da tale diagramma (vedi figura 22) si vede come sia possibile ridurre in maniera considerevole la corrente di linea. La presenza del condensatore in parallelo ad U rende in teoria possibile annullare lo sfasamento φ' del blocco condensatore - utilizzatore (rifasamento completo). In realtà il rifasamento completo è raramente necessario, è sufficiente che l'angolo φ' assuma un valore prefissato convenientemente piccolo.

Dalla (30) e dalla (31) si ottiene:

$$Q = P \tan \varphi \quad (50)$$

$$Q + Q_c = P \tan \varphi' \quad (51)$$

dove P , Q , Q_c sono rispettivamente la potenza attiva assorbita dal utilizzatore, la potenza reattiva assorbita dall'utilizzatore e la potenza reattiva assorbita dalla capacità. La (51) è stata ottenuta

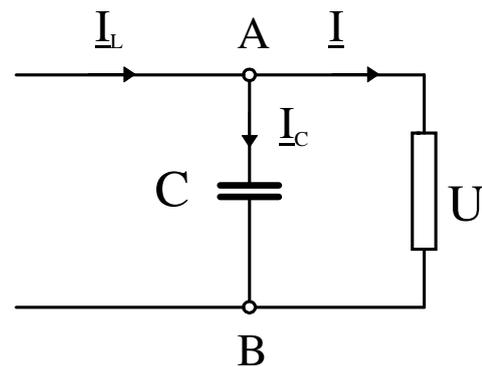


Figura 21.

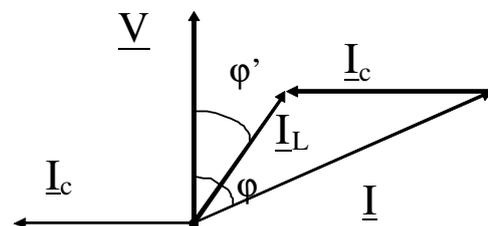


Figura 22.

tenendo conto che la potenza attiva assorbita dal condensatore è nulla. Sottraendo membro a membro la (51) dalla (50) si ottiene:

$$Q_c = P(\tan \varphi' - \tan \varphi) \quad (52)$$

Tenendo conto che:

$$Q_c = X_c I_c^2 = -\frac{1}{\omega C} I_c^2 = -\frac{1}{\omega C} (\omega C V)^2 = -\omega C V^2$$

dalla (52) si ricava:

$$C = \frac{P}{\omega V^2} (\tan \varphi - \tan \varphi') \quad (53)$$

che consente di calcolare la capacità C del condensatore fissato l'angolo φ' .

La funzione del condensatore di rifasamento può essere spiegata intuitivamente: esso rappresenta un componente in grado di scambiare alternativamente energia con l'utilizzatore. La presenza del condensatore, diminuendo la potenza reattiva vista dal generatore, riduce quindi lo scambio alternato di energia lungo la linea. Ciò si riflette in una riduzione della corrente di linea (vedi fig. 22), con una conseguente diminuzione delle perdite sulla linea stessa.