

MAGNETOSTATICA

Introduzione

Nell'ambito della magnetostatica, viene studiato il campo magnetico ed il campo di induzione magnetica nell'ipotesi di stazionarietà. La trattazione può inoltre essere estesa allo studio di problemi in cui possa ritenersi trascurabile la densità di corrente di spostamento $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$. Nelle ipotesi

fatte, il problema magnetostatico è definito dalle seguenti relazioni:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = i_c \quad (1)$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (2)$$

dove \mathbf{J} è la densità di corrente ed i_c la corrente concatenata alla curva chiusa Γ , definita come flusso di \mathbf{J} attraverso una qualsiasi superficie S_{Γ} che abbia come contorno la curva Γ :

$$i_c = \int_{S_{\Gamma}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS .$$

Alle (1), (2) va aggiunta la relazione di legame materiale tra campo di induzione magnetica \mathbf{B} e il campo magnetico \mathbf{H} , che si scrive usualmente tramite la permeabilità magnetica μ nel seguente modo:

$$\mathbf{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}, \quad (3.a)$$

dove χ_m , adimensionale, è detta *suscettività magnetica*. Tale relazione descrive mezzi isotropi lineari (se μ è al più funzione del punto e del tempo) o non lineari (se μ è anche funzione del campo magnetico). Se il mezzo è anisotropo la permeabilità magnetica μ diventa un tensore (rappresentabile mediante una matrice 3×3):

$$\mathbf{B} = [\mu] \mathbf{H} \quad (3.b)$$

Proprietà magnetiche dei materiali

Nei sistemi magnetici stazionari il comportamento della materia magnetizzata viene caratterizzato formalmente dalla funzione vettoriale \mathbf{M} e dal suo legame (il cosiddetto legame costitutivo) con uno dei vettori magnetici; in particolare con il campo magnetico \mathbf{H} . Osserviamo subito, però, che tale analogia vale soltanto a livello macroscopico. Infatti, se si intende approfondire la connessione tra il comportamento macroscopico della materia e quello dei suoi costituenti elementari a livello atomico, è necessario considerare il momento magnetico dei singoli atomi (si ricordi la definizione di \mathbf{M} dal rapporto $\Delta \mathbf{m} / \Delta V$). Il momento magnetico del singolo atomo è dato dalla sovrapposizione dei moti orbitali degli elettroni attorno al nucleo e dei loro momenti intrinseci.

Diamagnetismo

Si consideri un mezzo nel quale, in assenza di campo magnetico applicato dall'esterno, si abbia una perfetta compensazione tra i momenti magnetici degli elettroni di ogni singolo atomo (ciò accade ad esempio per i gas nobili). L'esperienza mostra che in tal caso l'applicazione di un campo magnetico esterno anche molto intenso dà luogo ad una magnetizzazione indotta ad esso proporzionale molto debole a carattere smagnetizzante. Il comportamento è detto diamagnetico e la suscettività corrispondente χ_m è negativa (si ricordi che $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$). Si tratta di suscettività molto piccole e, in

generale, indipendenti dalla temperatura (dell'ordine di -10^{-5} nella maggior parte dei casi, es. $-0.9 \cdot 10^{-5}$ per il rame; fa eccezione il bismuto per il quale $\chi_m = -1.6 \cdot 10^{-4}$).

Paramagnetismo

Quando gli atomi, gli ioni o le molecole possiedono un momento magnetico proprio, l'azione di un campo esterno produce un allineamento parziale dei momenti secondo il verso del campo. Tale effetto magnetizzante è il risultato dell'equilibrio statistico tra l'azione ordinatrice del campo e quella dell'agitazione termica. Se l'interazione magnetica tra atomi adiacenti è trascurabile, non si ha magnetizzazione spontanea a livello macroscopico: la suscettività magnetica χ_m è positiva ed ha valori molto modesti alla temperatura ambiente (dell'ordine di 10^{-3}). Essa decresce con la temperatura secondo la Legge di Curie: $\chi_m = C/T$. I materiali che così si comportano sono detti paramagnetici. Essi hanno un comportamento lineare ed isotropo caratterizzato da una permeabilità relativa poco discosta dall'unità. Essi pertanto, come i materiali diamagnetici, modificano in modo inessenziale i campi prodotti "nel vuoto".

Ferromagnetismo

Quando gli atomi, gli ioni o le molecole possiedono un momento magnetico proprio e sono fortemente interagenti tra loro, gli aggregati risultanti sono ferromagnetici. L'esperienza mostra che in tal caso con campi esterni facilmente realizzabili si raggiunge la saturazione (cioè il parallelismo di tutti i dipoli magnetici) a temperatura ambiente. Per quanto riguarda la dipendenza dalla temperatura, al di sopra di un valore critico T_c della temperatura (**temperatura di Curie**) questi materiali perdono le loro caratteristiche ferromagnetiche. Essi assumono un comportamento paramagnetico con una suscettività magnetica che segue la Legge di Curie - Weiss: $\chi_m = C/(T - T_c)$. Questo insieme di proprietà, ma particolarmente quella di poter dar luogo ad intense magnetizzazioni con deboli campi applicati in materiali di ottimo comportamento meccanico - strutturale, rende il ferromagnetismo di fondamentale importanza per le applicazioni elettrotecniche.

Dal punto di vista microscopico, i materiali ferromagnetici sono formati dall'aggregazione di innumerevoli "domini magnetici" o "domini di Weiss" delle dimensioni di $10^{-3} \div 10^{-6}$ m che sono composti da molecole o atomi che possiedono un momento magnetico proprio e sono allineati fra loro (vedi figura 2).

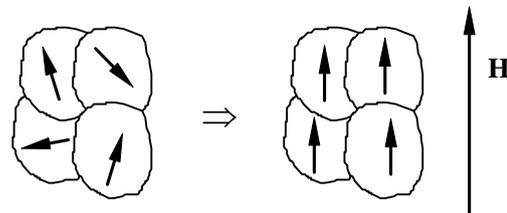


Figura 2. - Domini di Weiss prima e dopo l'allineamento con il campo magnetico esterno

Se il materiale è allo stato nativo i momenti magnetici dei domini di Weiss sono orientati casualmente, producendo quindi una magnetizzazione macroscopicamente nulla. In presenza di un campo magnetico esterno, tuttavia, i momenti magnetici tendono ad allinearsi. Tale allineamento permane anche se il campo magnetico esterno è rimosso, dando origine ad una magnetizzazione residua. Tale effetto magnetizzante è il risultato dell'equilibrio statistico tra l'azione ordinatrice del campo e quella dell'agitazione termica. Aumentando la temperatura l'effetto dell'agitazione diventa sempre più sensibile, causando la completa smagnetizzazione quando si raggiunge la temperatura di Curie.

Per studiare i materiali ferromagnetici ci si basa, in concreto, sulle **caratteristiche di magnetizzazione**, cioè sui diagrammi che forniscono il valore in modulo e verso dell'induzione magnetica **B** in funzione del campo magnetico **H** per provini omogenei.

In figura 3 è rappresentato un tipico processo di magnetizzazione. Il materiale sia allo stato nativo (smagnetizzato). Si distinguono una curva di prima magnetizzazione, (tratto OA) e, a partire da A, un processo ciclico che non si richiude esattamente. Se il campo magnetico viene invertito ripetutamente tra i valori $\pm H_M$, l'evoluzione si assesta su cicli simmetrici detti di **isteresi**. Al variare di H_M varia l'ampiezza dei cicli.

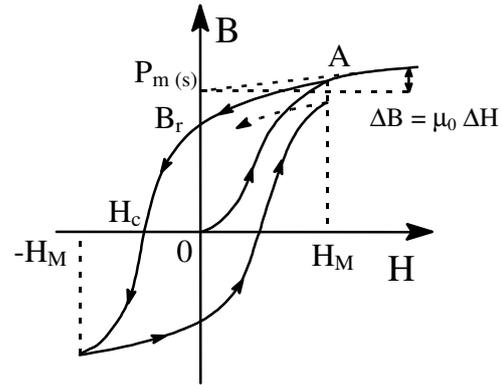


Figura 3.

Il raggiungimento della saturazione è evidenziato dal fatto che, per campi maggiori di H_M , l'incremento ΔB corrispondente ad un incremento ΔH è lo stesso che si avrebbe nel vuoto, cioè $\mu_0 \Delta H$. Il ciclo di isteresi che viene assunto come termine di paragone è quello descritto a partire dalla saturazione.

I principali parametri usualmente considerati per la caratterizzazione dei legami B-H sono:

- le permeabilità relative differenziali valutate lungo la curva di prima magnetizzazione secondo la formula $\mu_{r(d)} = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{dB}{dH} \right)_{dH>0}$, in particolare quella iniziale ($B=0, H=0$) e quella massima;
- il valore della magnetizzazione di saturazione $P_m(s)$;
- l'induzione residua B_r che si ha quando il campo esterno viene portato a zero;
- il campo coercitivo H_c che è necessario applicare in verso opposto a B_r per ridurre a zero l'induzione;
- alcuni valori di energie specifiche del ciclo, quali l'area W_{ist} del ciclo oppure il valore del massimo del prodotto $|BH|$ lungo il ciclo.

L'area W_{ist} del ciclo di isteresi ha un significato particolare: come si vedrà più diffusamente nel seguito, la variazione di densità di energia magnetica immagazzinata in seguito ad una variazione $d\mathbf{B}$ del campo di induzione è $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}$. Tale energia magnetica viene convertita in parte in energia conservativa ed in parte in energia dissipata (calore), secondo la relazione:

$$\int_{V_m} (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}) d\tau = dE_c + \delta E_d \quad (4)$$

Integrando la (4) su un ciclo di isteresi, si ottiene:

$$\int_{V_m} \oint (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}) d\tau = \oint dE_c + \oint \delta E_d = E_d \quad (5)$$

Se si considera la densità di energia dissipata (misurata in joule /ciclo·m³), la (5) diventa:

$$P_d = \oint (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}) = W_{ist} \propto B_M^{1.6} \quad (6)$$

La relazione di proporzionalità dell'area del ciclo di isteresi W_{ist} con una potenza del campo di induzione massimo B_M è specificata dalle Norme. L'esponente è solitamente compreso tra 1.6 e 2. Per una trattazione più completa delle perdite nel ferro vedi capitolo sulle Norme.

Materiali ferromagnetici dolci

Un importante sottogruppo dei materiali ferromagnetici è costituito dai **materiali ferromagnetici dolci** che sono caratterizzati da elevati valori della permeabilità e basso valore del campo coercitivo ($H_c < 10^3$ A/m) cui si collega il basso valore dell'area del ciclo di isteresi (vedi figura 4).

I materiali di questo gruppo vengono impiegati laddove interessa limitare al massimo le correnti necessarie per produrre e controllare i flussi di induzione (nuclei di elettromagneti, nuclei di trasformatori, rotor e statori di macchine rotanti), limitando nel contempo le perdite dovute al fenomeno dell'isteresi nel caso di flussi variabili nel tempo con legge oraria periodica. I materiali di questo gruppo principalmente utilizzati sono il ferro e le sue leghe con nickel, cobalto e silicio, gli acciai a basso tenore di carbonio e le ferriti dolci. Le caratteristiche di magnetizzazione di alcuni materiali dolci sono mostrate in figura 5.

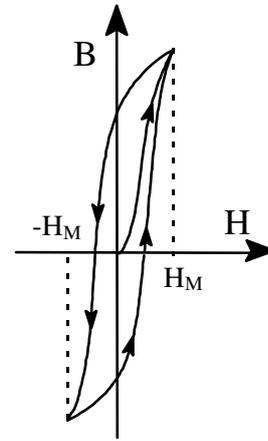


Figura 4. - Ciclo di isteresi per materiali ferromagnetici dolci

Il ferro commercialmente puro (ferro dolce) viene utilizzato nelle applicazioni in continua (nuclei di elettromagneti). Per applicazioni in alternata, ad esempio lamierini per motori, vengono utilizzati preferibilmente acciai a basso tenore di carbonio (Low Carbon) e acciai al silicio a grani non orientati (isotropo) a causa della loro minore conducibilità. Questi due materiali sono in assoluto i materiali più utilizzati nel mondo (1÷2 Mton/anno). Le ferriti (dolci), a causa della loro conducibilità estremamente bassa, sono utilizzate per i nuclei di trasformatori ed induttori funzionanti a frequenza oltre 100 kHz. Le ferriti sono ossidi metallici sinterizzati (facilmente lavorabili) con la formula generale XFe_2O_4 . Nelle ferriti manganese - zinco X è una combinazione di Mn, Zn e Fe, mentre nelle ferriti nickel - zinco Mn è sostituito da Ni. Le ferriti MnZn hanno un campo di induzione di saturazione piuttosto elevato, ma anche una alta conducibilità, per cui sono utilizzate per applicazioni fino ad 1 MHz. Oltre 1 MHz si utilizzano solitamente le ferriti NiZn che hanno una conducibilità notevolmente più bassa.

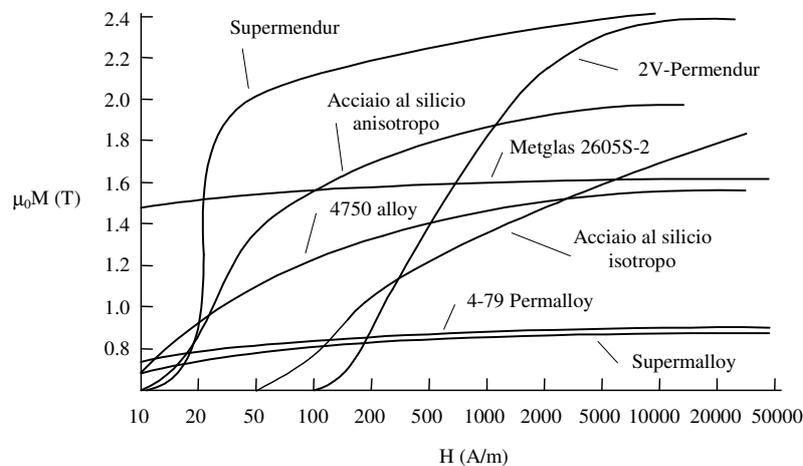


Figura 5. - Caratteristiche di magnetizzazione di alcuni materiali dolci.

Materiali ferromagnetici duri

Un altro importante sottogruppo dei materiali ferromagnetici è dato dai **materiali ferromagnetici duri** che sono caratterizzati da elevati valori della induzione residua e del campo coercitivo ($H_c > 10^4$ A/m) cui si collega l'elevato valore del prodotto $|BH|$ ottenuto nel 2° quadrante, come si osserva in figura 6. La importanza del massimo di tale valore $|BH|_{\max}$ sarà illustrata nel paragrafo relativo ai *circuiti magnetici con magneti permanenti*. Il fatto che la area del ciclo di isteresi di tali materiali sia di valore elevato implica l'insorgere di notevoli perdite per isteresi in presenza di un campo magnetico variabile nel tempo.

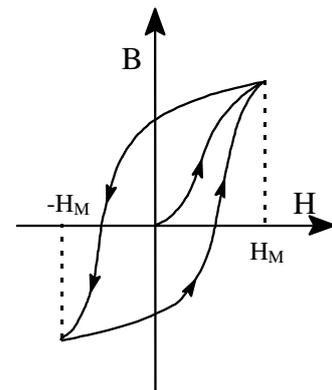


Figura 6. - Ciclo di isteresi per materiali ferromagnetici duri

I materiali di questo gruppo vengono quindi impiegati laddove interessa realizzare flussi magnetici costanti nel tempo. Si ricorre così al magnetismo permanente invece che a circuiti percorsi da corrente, ai quali è inevitabilmente legata una dissipazione di potenza per effetto Joule.

I materiali magnetici duri commercialmente più importanti sono le ferriti (dure), le leghe ed i sinterizzati comprendenti terre rare e gli Alnico.

Alnico. Gli Alnico (Fe - Al - Ni - Co - Cu) sono divisi in due sottogruppi: gli alnico isotropi (1-4) che contengono fino al 20% di cobalto e gli alnico anisotropi che contengono dal 20% al 40% di cobalto. L'anisotropia viene ottenuta per raffreddamento controllato del materiale fuso in presenza di un campo magnetico esterno. I provini sono successivamente ricotti a 600° per alcune ore per aumentare le dimensioni dei domini di Weiss. Questi materiali hanno un elevato prodotto $|B H|_{\max}$ ($40 \div 70$ kJ/m³), una elevata induzione residua ($0.7 \div 1.35$ T) e modesto campo coercitivo ($40 \div 160$ kA/m). Gli Alnico sono fragili e quindi sono solitamente prodotti per fusione o sinterizzazione. L'Alnico 5 è il materiale più diffuso di questa famiglia.

Ferriti. Le ferriti (dure) sono ossidi metallici sinterizzati (facilmente lavorabili) con la formula generale $XFe_{12}O_{19}$ dove X è solitamente Ba o Sr. A differenza degli Alnico, le ferriti hanno elevato campo coercitivo ($200 \div 300$ kA/m) ma bassa induzione residua ($0.4 \div 0.5$ T). Le ferriti di stronzio sono meno diffuse delle ferriti di bario a causa del loro costo più elevato, anche se il loro campo coercitivo è circa doppio.

Terre rare. I magneti permanenti contenenti samario sono diventati commercialmente disponibili negli anni 70. I magneti $SmCo_5$ (a fase singola) hanno ottenuto in laboratorio ottime prestazioni ($B_r = 1$ T, $H_c = 3200$ kA/m, $|B H|_{\max} = 200$ kJ/m³), ma le prestazioni commerciali sono leggermente più basse ($|B H|_{\max} = 130 \div 160$ kJ/m³). I magneti $Sm_2(Co, Fe, Cu, Zr)_{17}$ hanno prestazioni commerciali anche migliori ($B_r = 1.1$ T, $H_c = 520$ kA/m, $|B H|_{\max} = 240$ kJ/m³).

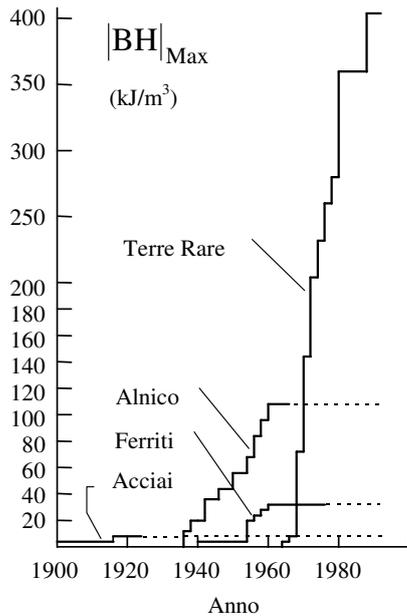


Figura 7.

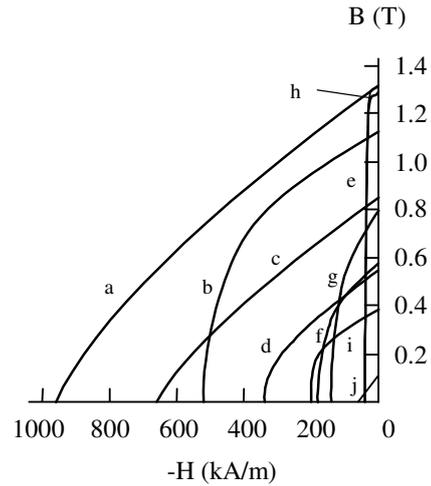


Figura 8. - Curve di demagnetizzazione per materiali ferromagnetici duri: a) $Nd_2Fe_{14}B$, b) $Sm(Co, Cu, Fe, Zr)_{7.4}$, c) $SmCo_5$, d) $SmCo_5$ legato, e) Alnico 5, f) Mn - Al - C, g) Alnico 9, h) Cr - Co - Fe, i) ferrite, j) ferrite legata.

I magneti permanenti sono principalmente utilizzati per motori ed altoparlanti. La figura 7 mostra il progresso avvenuto in questo secolo nel campo dei materiali magnetici. Per definire le proprietà dei magneti si utilizza solitamente il prodotto $|B H|_{max}$. In particolare è evidente la crescita spettacolare avvenuta negli anni 70 nel campo dei sinterizzati comprendenti terre rare. La figura 8 mostra le curve di demagnetizzazione per alcuni materiali ferromagnetici duri.

Circuiti magnetici

La determinazione di un campo magnetico richiede, in generale, la soluzione delle equazioni di Maxwell insieme alle relazioni di legame materiale per i materiali presenti. Anche nell'ipotesi stazionaria, il calcolo dei campi H e B risulta complesso e, salvo alcuni problemi semplici, non offre soluzione analitica in forma chiusa. Esistono d'altra parte casi in cui è lecita l'applicazione di alcune semplificazioni, al fine di ottenere soluzioni approssimate utili dal punto di vista ingegneristico. In generale, un circuito magnetico viene definito come un tubo di flusso o un insieme di tubi di flusso del campo di induzione magnetica B . Qualora sia identificabile il percorso dei tubi di flusso del vettore di induzione magnetica, a causa di una particolare configurazione di materiali ad elevata permeabilità magnetica o di una distribuzione spaziale dei conduttori percorsi da corrente, il problema magnetostatico può essere notevolmente semplificato.

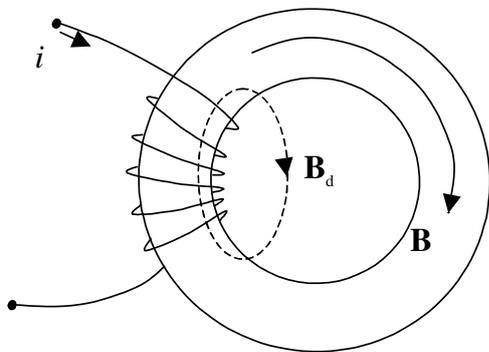


Figura 8.

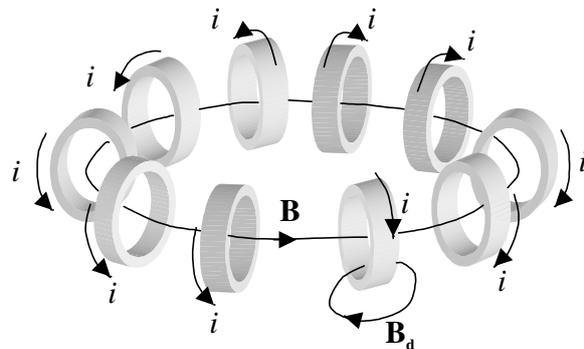


Figura 9.

In fig. 8 e 9 sono riportati due esempi in cui le condizioni appena descritte sono verificate: in fig. 8, il conduttore, percorso da una corrente i , è avvolto attorno ad un nucleo di materiale ferromagnetico. A causa dell'elevata permeabilità magnetica il flusso di induzione magnetica rimane prevalentemente confinato all'interno della struttura, nello stesso modo in cui i materiali ad elevata conducibilità elettrica confinano la densità di corrente nei circuiti elettrici. In questo caso, trascurando linee di flusso che si chiudono nel mezzo in cui il nucleo ferromagnetico è immerso (\mathbf{B}_d in fig. 8), il circuito magnetico è identificabile con tale struttura. In fig. 9 viene invece illustrata schematicamente una particolare disposizione di avvolgimenti in aria che realizza un circuito magnetico con percorso noto a priori. Si ipotizzi infatti che gli avvolgimenti, tutti percorsi da una corrente i , siano sufficientemente vicini da poter trascurare le linee di campo di induzione magnetica che si concatenano solo ad un avvolgimento (\mathbf{B}_d in fig. 9). In questo caso, il campo di induzione \mathbf{B} è forzato a chiudersi prevalentemente su linee che si concatenano a tutti gli avvolgimenti. Il circuito magnetico può quindi essere identificato con il volume toroidale d'aria (materiale a bassa permeabilità magnetica) contenuto all'interno dei conduttori.

Si consideri ora un generico circuito magnetico. Senza compromettere la generalità del ragionamento, si faccia riferimento alla fig. 10, in cui viene rappresentato il circuito magnetico costituito da una struttura con sezione S , realizzato con un materiale con permeabilità magnetica molto maggiore di quella dell'aria circostante ($\mu \gg \mu_0$), interrotto da alcuni interstizi, che si suppongono piccoli rispetto alla dimensione lineare caratteristica della sezione S , e sono denominati traferri.

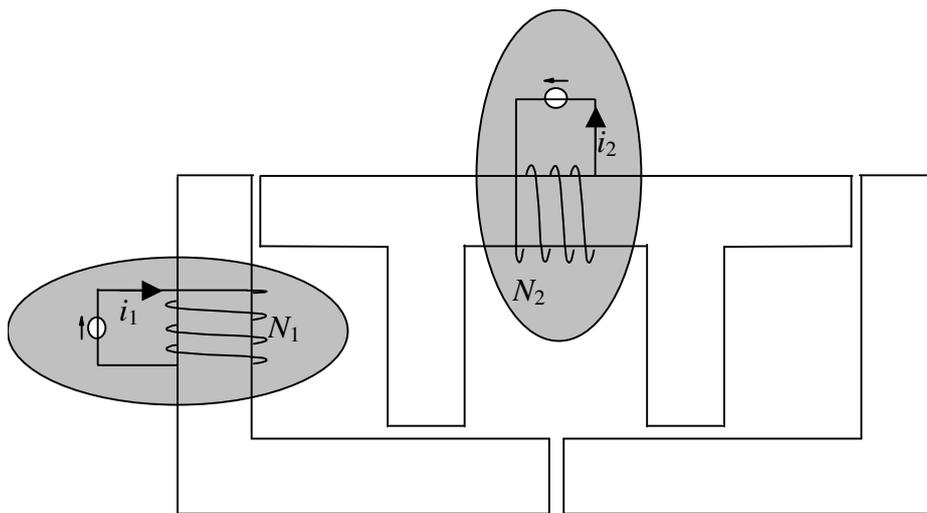


Figura 10

Gli avvolgimenti percorsi da corrente costituiscono le eccitazioni del circuito. Per il generico avvolgimento i -esimo si individui una superficie chiusa S_i che lo contenga interamente. Si consideri ora il dominio R_3' ottenuto escludendo dallo spazio R_3 i volumi contenuti nelle superfici chiuse S_i appena definite. E' immediato verificare che, nel dominio R_3' , il campo magnetico \mathbf{H} è ovunque irrotazionale, dato che in R_3' non sono presenti correnti:

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad \text{per qualsiasi curva } \Gamma \text{ contenuta in } R_3' \quad (7)$$

E' quindi possibile definire in R_3' un potenziale scalare magnetico ψ :

$$\mathbf{H} = -\nabla \psi \quad (8)$$

ed una tensione magnetica ψ_{AB} tra due punti A e B in R_3' :

$$\psi_{AB} = \int_A^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \psi_A - \psi_B, \quad (9)$$

che, per l'irrotazionalità di \mathbf{H} non dipende dal particolare percorso che porta da A a B, ma solo dal valore che il potenziale scalare magnetico assume in corrispondenza degli estremi di integrazione. In base all'equazione (7) ed alla definizione (9), è dunque possibile formulare la legge di Kirchhoff per le tensioni magnetiche: per una qualsiasi sequenza chiusa di punti la somma algebrica delle tensioni (tra due punti successivi) è nulla:

$$\sum_{i=1}^r \psi_i = 0, \quad (10)$$

dove r è il numero di tratti costituenti il percorso chiuso individuato dalla sequenza di punti.

Per il generico ramo i -esimo del circuito magnetico, è definibile il flusso di induzione magnetica ϕ_i come:

$$\phi_i = \int_{S_i} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS,$$

dove S_i è una qualsiasi sezione del ramo i -esimo. In virtù della solenoidalità di \mathbf{B} , il flusso magnetico ϕ_i sarà costante attraverso una qualsiasi sezione del ramo i -esimo del circuito. Ipotizzando che il campo di induzione magnetica rimanga, fatta esclusione per i traferri, interamente confinato all'interno del materiale ferromagnetico, e quindi considerando che il circuito magnetico coincida con la struttura ad alta permeabilità, è possibile associare a ciascun tratto i -esimo di tale struttura un flusso di induzione ϕ_i .

Applicando la (2), che esprime la solenoidalità del campo di induzione magnetica, si ricava quindi la legge di Kirchhoff per i flussi di induzione: per ogni superficie chiusa S che interseca il circuito magnetico, la somma algebrica dei flussi uscenti dalla superficie è nulla:

$$\sum_{i=1}^n \phi_i = 0, \quad (11)$$

dove n è il numero di rami del circuito magnetico che attraversano la superficie S .

La (10) e la (11) esprimono l'analogia formale tra le equazioni topologiche per i circuiti elettrici e per i circuiti magnetici.

Modello circuitale a parametri concentrati

Per completare lo studio del circuito magnetico, è necessario fornire una legge costitutiva per ogni componente. E' cioè necessario, per ogni parte del circuito, formulare un'equazione che ne descriva il comportamento mettendo in relazione la tensione magnetica al flusso di induzione.

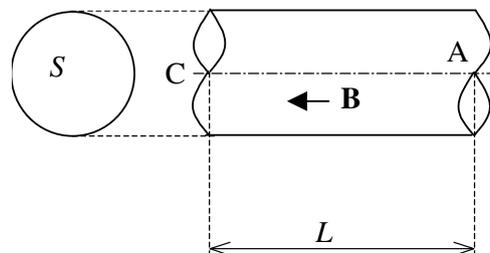


Figura 11.

Si consideri un tratto del circuito magnetico, (vedi fig. 11) di sezione S e lunghezza L . Ipotizzando che \mathbf{B} ed \mathbf{H} siano legati da una legge di materiale lineare del tipo (3.a), che siano uniformi sulla

sezione ed abbiano direzione coincidente con l'asse del tratto considerato, sarà possibile esprimere la tensione magnetica ψ tra due punti A e C come:

$$\psi_{AC} = \int_A^C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^C H dl = \int_A^C \frac{B}{\mu} dl. \quad (12)$$

Considerata una sezione S con normale \mathbf{n} di verso concorde con il verso di integrazione scelto nella (12), applicando le ipotesi fatte all'espressione del flusso di induzione che percorre il tratto AC, si ottiene la relazione:

$$\phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = BS \Rightarrow B = \frac{\phi}{S}, \quad (13)$$

Sostituendo la (13) nella (12), e tenendo conto che il flusso ϕ si mantiene costante lungo il tratto AC considerato, si può scrivere:

$$\psi_{AC} = \int_A^C \frac{B}{\mu} dl = \int_A^C \frac{\phi}{\mu S} dl = \left(\int_A^C \frac{dl}{\mu S} \right) \phi. \quad (14)$$

Definendo riluttanza \mathbf{R} del tratto considerato la quantità:

$$\mathbf{R} = \int_A^C \frac{dl}{\mu S} = \frac{L}{\mu S}, \quad (15.a)$$

la (14) può essere riscritta, evidenziando una chiara analogia con la legge costitutiva del resistore:

$$\psi_{AC} = \mathbf{R} \phi. \quad (16.a)$$

E' in linea di massima possibile estendere il procedimento a materiali non lineari, caratterizzati da una permeabilità magnetica funzione del campo \mathbf{B} , ottenendo:

$$\mathbf{R}(\phi) = \int_A^C \frac{dl}{\mu(\phi/S)S} = \frac{L}{\mu(\phi/S)S}, \quad (15.b)$$

$$\psi_{AC} = \mathbf{R}(\phi) \phi. \quad (16.b)$$

La legge costitutiva del componente è in tal caso non lineare, dipendendo la riluttanza dal flusso di induzione.

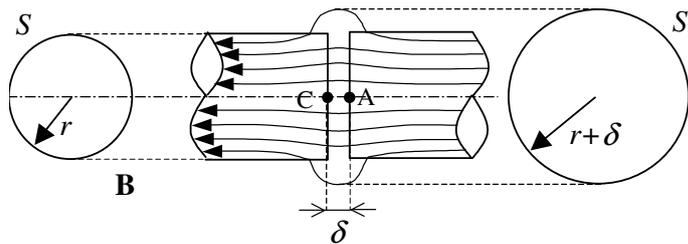


Figura 12.

Si prenda ora in esame un traferro di spessore δ , che interrompe un tratto di sezione S della struttura in materiale ferromagnetico che fa da "supporto" al circuito. L'andamento qualitativo del campo di induzione magnetica è mostrato in fig. 12, dove viene evidenziato l'allargamento delle linee di campo in corrispondenza del traferro. Nel caso in cui lo spessore del traferro sia piccolo rispetto alla dimensione lineare caratteristica della sezione del nucleo ferromagnetico, è possibile, in prima approssimazione, trascurare gli effetti di bordo. La sezione utile S_δ del circuito magnetico in corrispondenza del traferro può quindi essere ritenuta uguale alla sezione S del nucleo ferromagnetico. I campi \mathbf{B} ed \mathbf{H} , legati da una legge di materiale lineare (con permeabilità magnetica pari alla permeabilità magnetica nel vuoto μ_0 se il traferro è in aria), possono essere considerati uniformi sulla sezione e con direzione coincidente con l'asse del tratto considerato.

Nelle ipotesi fatte, la (13) può essere ancora ritenuta valida, e la tensione magnetica ψ tra due punti A e C sulle due facce opposte del traferro è esprimibile come:

$$\psi_{AC} = \int_A^C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^C H dl = \int_A^C \frac{B}{\mu_0} dl = \int_A^C \frac{\phi}{\mu_0 S_\delta} dl = \left(\int_A^C \frac{dl}{\mu_0 S_\delta} \right) \phi, \quad (17)$$

Anche in questo caso, la definizione della riluttanza R_δ associata al traferro come:

$$R_\delta = \int_A^C \frac{dl}{\mu_0 S_\delta} = \frac{\delta}{\mu_0 S_\delta}, \quad (18)$$

permette di riscrivere la (17) in forma analoga alla legge costitutiva del resistore:

$$\psi_{AC} = R_\delta \phi. \quad (19)$$

Esistono diversi modi per tener conto dell'allargamento delle linee di campo di induzione magnetica al traferro in maniera più accurata. Un approccio molto comune per la sua immediatezza è quello di ricavare la sezione utile S_δ in corrispondenza del traferro aumentando di δ la dimensione lineare caratteristica della sezione del nucleo ferromagnetico.

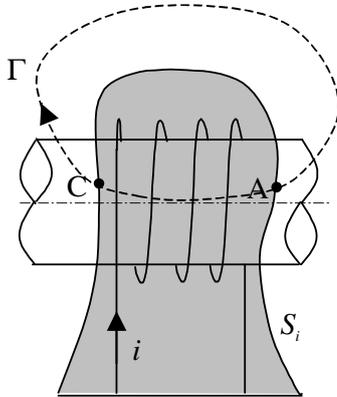


Figura 13.a.

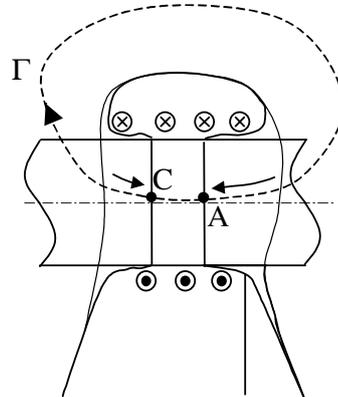


Figura 13.b.

Si consideri infine un tratto di circuito magnetico sul quale è presente un avvolgimento (vedi fig. 13.a), costituito da N spire percorse dalla corrente i . Come già detto, l'avvolgimento i -esimo può essere interamente racchiuso all'interno di un'arbitraria superficie S_i che lo esclude dal dominio su cui il campo \mathbf{H} è irrotazionale. Siano S_A ed S_C le due superfici individuate dall'intersezione tra S_i e il tratto di circuito magnetico su cui l'avvolgimento considerato è stato disposto. Sia Γ una curva chiusa che si concatena alle N spire dell'avvolgimento, che interseca S_i in corrispondenza dei due punti A e C. Mediante la regola della mano destra si associ il verso positivo di percorrenza di Γ al verso della corrente i , e si applichi la legge della circuitazione magnetica (1):

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Gamma'_{CA}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\Gamma''_{AC}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = Ni, \quad (20)$$

dove Γ'_{CA} è la porzione di Γ esterna alla superficie S_i e Γ''_{AC} la porzione interna. Il prodotto Ni rappresenta la corrente concatenata ad una qualsiasi curva chiusa Γ che si concateni alle N spire dell'avvolgimento, poiché, come è immediato verificare, è pari al flusso di densità di corrente attraverso la generica superficie aperta S_Γ avente Γ come contorno. La curva Γ'_{CA} è interamente contenuto nel dominio su cui \mathbf{H} è irrotazionale; e pertanto la tensione magnetica:

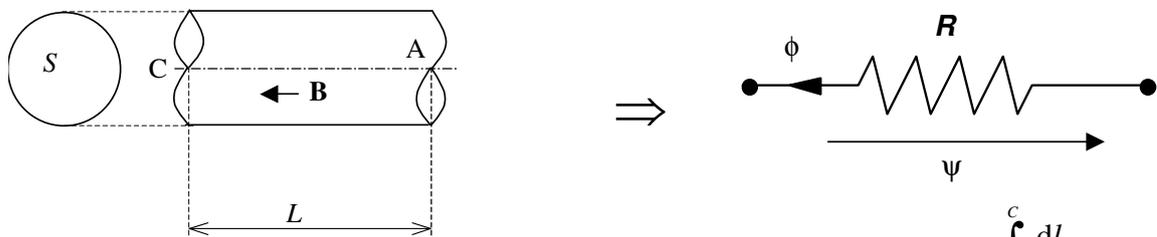
$$\psi_{CA} = \int_{\Gamma'_{CA}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$$

è indipendente dal particolare percorso di integrazione, posto che questo sia esterno ad S_i .

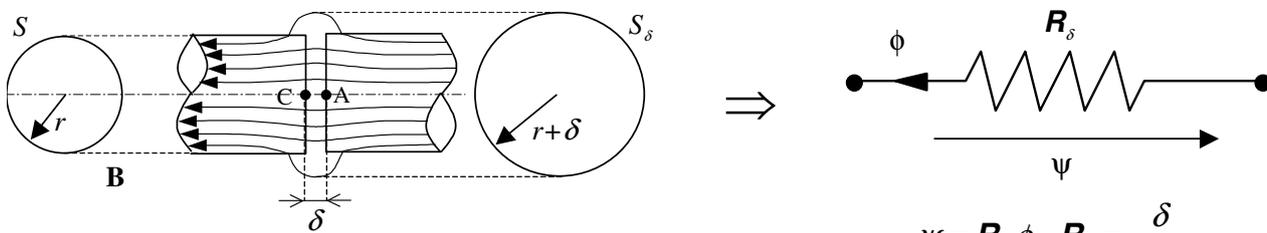
Data l'arbitrarietà della superficie chiusa S_i , è possibile operare una deformazione su di essa, in modo da portare le superfici S_A ed S_C a coincidere (vedi fig. 13.b). In tal modo, l'integrale di \mathbf{H} su Γ''_{AC} si annulla e la (20) diventa:

$$\psi_{CA} = Ni. \quad (21)$$

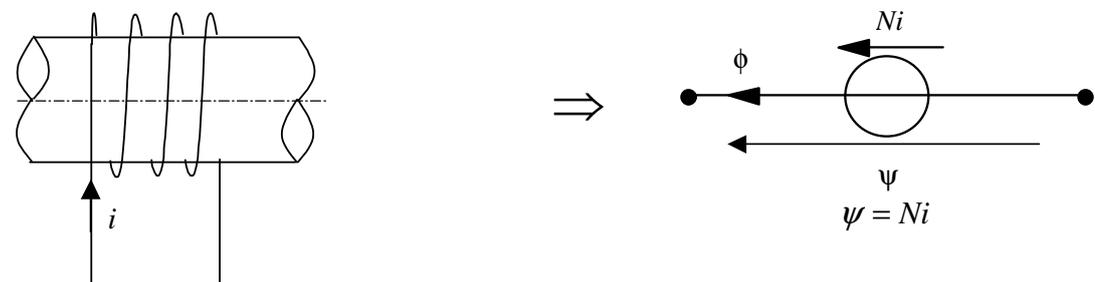
La (21) è la relazione che descrive l'effetto dell'avvolgimento nel circuito magnetico, e trova la sua analoga formale nella legge costitutiva del generatore indipendente di tensione. In analogia con tale componente elettrico, la grandezza Ni viene detta forza magnetomotrice. Il verso della forza magnetomotrice viene determinato applicando la regola della mano destra al verso della corrente i . E' quindi dimostrato come ogni componente, che fisicamente costituisce un circuito magnetico, possa essere descritto da un elemento circuitale, con legge costitutiva che mette in relazione la tensione magnetica ψ tra la sezione iniziale e quella finale del componente al flusso di induzione magnetica ϕ che attraversa il componente stesso. Il quadro è completato dalle relazioni (10) e (11), a cui devono obbedire le tensioni magnetiche e i flussi di induzione associati a ciascun ramo del circuito. I risultati ottenuti, riassunti nella tabella che segue, permettono di rappresentare un circuito magnetico con un circuito a parametri concentrati, analogamente a quanto si fa per i circuiti elettrici.



$$\psi = R\phi, \quad R = \int_A^C \frac{dl}{\mu S}$$



$$\psi = R_\delta \phi, \quad R_\delta = \frac{\delta}{\mu_0 S_\delta}$$



$$\psi = Ni$$

$$\sum_{i=1}^r \psi_i = 0$$

La sommatoria è estesa a tutti gli r rami di un qualsiasi percorso chiuso

$$\sum_{i=1}^n \phi_i = 0$$

La sommatoria è estesa a tutti gli n rami che attraversano una qualsiasi superficie chiusa

L'analogia tra un circuito magnetico ed un circuito elettrico può convenientemente essere sfruttata qualora sia possibile identificare chiaramente 'a priori' il percorso delle linee del campo di induzione magnetica. E' bene ricordare che la soluzione ottenuta tramite l'approccio descritto è una soluzione approssimata, avendo trascurato i flussi dispersi ed il comportamento non lineare dei materiali (nel caso si rappresentino, ad esempio, tratti in materiale ferromagnetico con riluttanze costanti e non dipendenti dal flusso di induzione).

Esempio 1

Si consideri il circuito magnetico in fig. 14.a, costituito da un nucleo di materiale ferromagnetico di permeabilità magnetica μ_f , con sezione S costante, interrotto da un traferro di spessore δ , ed eccitato da un avvolgimento costituito da N spire, percorse da una corrente i . Il modello circuitale a parametri concentrati del circuito magnetico in oggetto è rappresentato in fig. 14.b

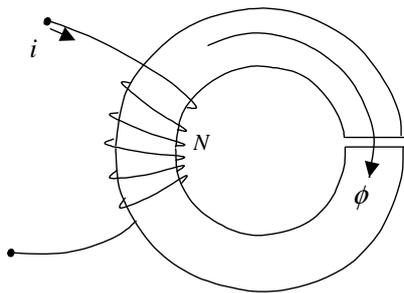


Figura 14.a

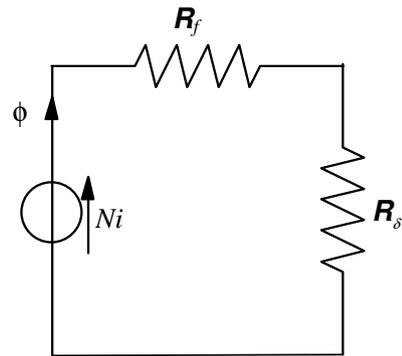


Figura 14.b.

Applicando la Legge di Kirchhoff per le tensioni magnetiche, e tenendo conto delle leggi costitutive dei componenti si ottiene la "Legge di Hopkinson" per il circuito magnetico dato:

$$Ni = (\mathbf{R}_f + \mathbf{R}_\delta) \phi,$$

dove, indicando con L la lunghezza dell'asse medio del circuito magnetico:

$$\mathbf{R}_\delta = \frac{\delta}{\mu_0 S_\delta}, \quad \mathbf{R}_f = \frac{L}{\mu_f S}$$

Esempio 2

Il circuito magnetico illustrato in fig. 15.a è costituito da un nucleo di materiale ferromagnetico di permeabilità magnetica μ_f . La sezione S della struttura è costante, ed i traferri hanno tutti spessore δ .

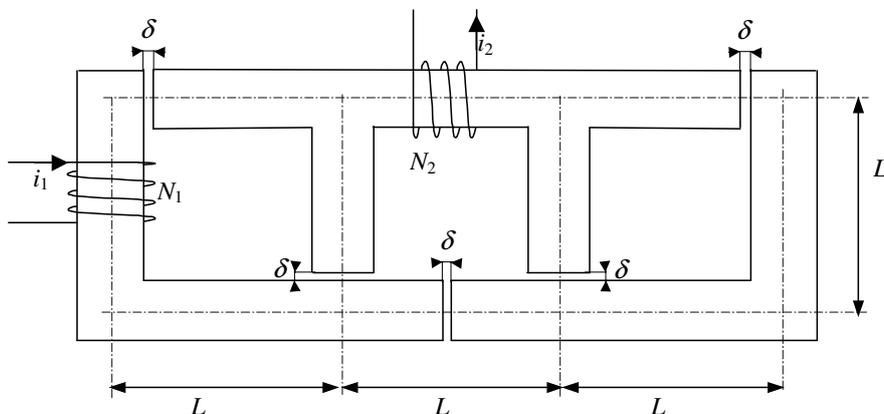


Figura 15.a

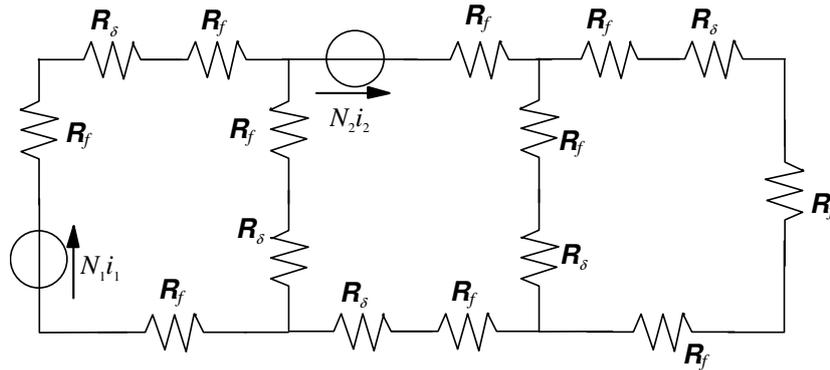


Figura 15.b

Il modello circuitale a parametri concentrati del circuito magnetico in fig.15.a è rappresentato in fig. 15.b. Le leggi che governano tale modello (LKT, LKC, equazioni costitutive dei componenti) sono quelle su cui si basa la teoria dei circuiti senza memoria. Il circuito magnetico dato può quindi essere risolto utilizzando i metodi visti per la risoluzione di circuiti elettrici senza memoria.

Circuiti magnetici con magneti permanenti

Esiste una classe di circuiti magnetici in cui la f.m.m. è nulla. In tal caso il flusso di induzione è prodotto da un magnete permanente (cioè un ferromagnete “duro”). Si consideri ad esempio la semplice struttura di figura 14. Il magnete propriamente detto (indicato con M) è di forma parallelepipedica con area di base S_m e lunghezza l_m ; il restante nucleo magnetico ha sezione S_p e lunghezza l_p ; i due traferri sono di sezione S_0 e spessore complessivo δ . Il nucleo sia costituito di materiale magnetico “dolce”.

Per la legge della circuitazione, in assenza di correnti, si ha:

$$H_m l_m + H_p l_p + H_0 \delta = 0$$

Per la solenoidalità di \mathbf{B} , trascurando le dispersioni, si può scrivere:

$$\phi = B_m S_m = \mu_p H_p S_p = \mu_0 H_0 S_0$$

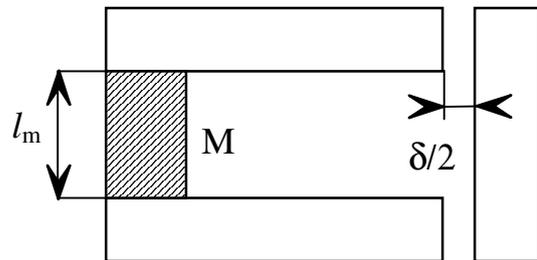


Figura 14.

dove ϕ è il flusso del circuito magnetico e μ_p la permeabilità magnetica delle espansioni polari. Poiché si ha $\mu_p \gg \mu_0$, la caduta di tensione magnetica nel materiale magnetico delle espansioni polari risulta trascurabile. Si ha dunque:

$$\begin{cases} H_m = -\frac{\delta}{l_m} H_0 \\ B_m = \mu_0 \frac{S_0}{S_m} H_0 \end{cases} \Rightarrow \frac{B_m}{H_m} = -\mu_0 \frac{S_0}{S_m} \cdot \frac{l_m}{\delta} \quad (22)$$

Sul piano (B, H) la relazione (22) individua una retta per l'origine. Il segno meno indica che a valori positivi di B corrispondono valori negativi di H. Quindi all'interno del magnete **H** e **B** hanno versi opposti. L'intersezione tra la retta di carico e la caratteristica del magnete individua il punto di lavoro del magnete.

Si consideri ora il **problema del progetto del magnete**, cioè del suo dimensionamento allo scopo di ottenere in un dato traferro di sezione S_0 e spessore δ un valore assegnato dell'induzione magnetica B_0 . Dalle equazioni (22) si ricava:

$$|B_m H_m| V_m = |B_0 H_0| V_0 \quad (23)$$

dove con V_m e V_0 si indicano i volumi, rispettivamente, del magnete e del traferro. Si vede allora che, essendo assegnata la quantità a secondo membro, il volume del magnete risulta minimo quando il punto di lavoro del magnete coincide con quello che sulla caratteristica di magnetizzazione offre il massimo valore del prodotto $|B_m H_m|$; si realizza così la massima economia di materiale nella costruzione del magnete. Nel caso in cui non sia disponibile la caratteristica magnetica del materiale, è possibile utilizzare la seguente proprietà. Per i materiali ferromagnetici "duri" lo stato (H_m^*, B_m^*) nel quale è massimo il prodotto $|B_m H_m|$ è anche caratterizzato dalla seguente relazione:

$$\frac{B_m^*}{|H_m^*|} \cong \frac{B_r}{|H_c|} \quad (3.8)$$

È possibile quindi ricavare le formule di dimensionamento del magnete dalla (22) e dalla (23):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(l_m / \delta)}{(S_m / S_0)} \cong \frac{B_r}{|\mu_0 H_c|} \\ \left(\frac{S_m}{S_0} \right) \cdot \left(\frac{l_m}{\delta} \right) = \frac{\mu_0 H_0^2}{|B_m H_m|_{\max}} \end{array} \right. \quad (24)$$

che risolte forniscono:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{l_m}{\delta} \cong H_0 \sqrt{\frac{B_r}{|H_c| \cdot |B_m H_m|_{\max}}} \\ \frac{S_m}{S_0} \cong \mu_0 H_0 \sqrt{\frac{|H_c|}{B_r \cdot |B_m H_m|_{\max}}} \end{array} \right. \quad (25)$$

Da esse risulta che i fattori numerici determinanti per stabilire l'attitudine di un materiale a fungere da magnete permanente sono $|B_m H_m|_{\max}$ e $|B_r / H_c|$.

Coefficienti di auto e mutua induzione

Siano dati n circuiti filiformi immersi in un mezzo lineare (vedi figura 16). Il generico circuito j -esimo ha come supporto la curva chiusa Γ_j ed è percorso dalla corrente i_j . Data la linearità delle equazioni che definiscono il problema magnetostatico (ipotesi valida nel caso di materiali lineari), è

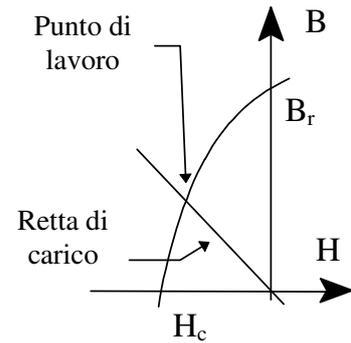


Figura 15. Caratteristica magnetica e retta di carico

possibile supporre che il campo di induzione magnetica totale \mathbf{B} generato dalle N correnti sia esprimibile come somma di n campi di induzione parziali \mathbf{B}_j :

$$\mathbf{B} = \sum_{j=1}^n \mathbf{B}_j$$

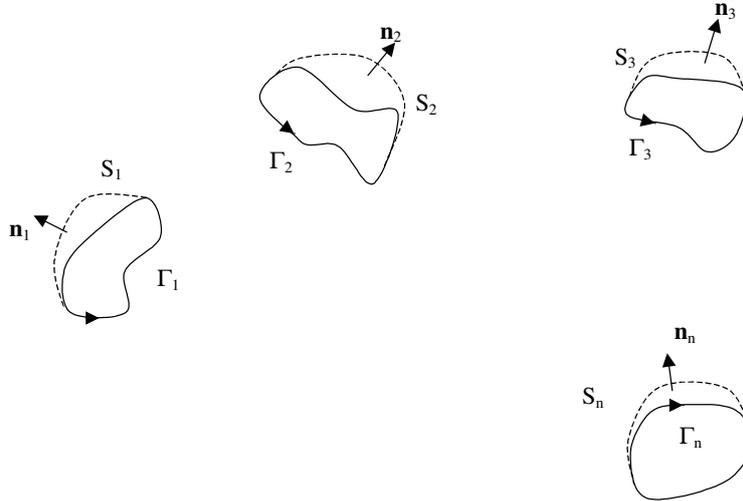


Figura 16.

dove il generico campo \mathbf{B}_j è il campo di induzione magnetica creato dalla corrente i_j . Proponendosi di valutare il flusso magnetico che si concatena al k -esimo circuito, è quindi possibile scrivere:

$$\begin{aligned} \Phi_k &= \int_{S_k} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS = \sum_{j=1}^n \int_{S_j} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Phi_k = \sum_{j=1}^n \Phi_{k,j}, \end{aligned}$$

avendo posto:

$$\Phi_{k,j} = \int_{S_k} \mathbf{B}_j \cdot \mathbf{n} \, dS$$

Il flusso parziale $\Phi_{k,j}$ rappresenta il flusso magnetico che si concatena al circuito k -esimo e generato dalla corrente j -esima. La già rilevata linearità del problema comporta inoltre una proporzionalità tra i flussi e le correnti che li generano:

$$\Phi_{k,j} = M_{k,j} i_j \quad (26)$$

Le costanti $M_{k,j}$ dipendono unicamente dalle caratteristiche geometriche del problema e vengono detti coefficienti di auto e mutua induzione:

se $k = j$, $M_{k,j}$ è il coefficiente di auto induzione del circuito k -esimo. Si indica spesso con il simbolo L_k . E' pari al flusso che si concatena al k -esimo circuito quando questo è percorso da corrente unitaria, mentre tutti gli altri sono percorsi da corrente nulla.

se $k \neq j$, $M_{k,j}$ è il coefficiente di mutua induzione. Esso è pari al flusso magnetico che si concatena al circuito k -esimo quando la corrente j -esima è unitaria e tutte le altre sono nulle. Si dimostra che $M_{k,j} = M_{j,k}$.

È quindi possibile affermare che il flusso concatenato con il circuito i -esimo è combinazione lineare delle correnti che attraversano gli n circuiti. Il generico flusso Φ_k può quindi essere espresso come:

$$\Phi_k = \sum_{j=1}^n M_{k,j} I_j \quad (27)$$

Modello circuitale di un induttore

Si considerino n avvolgimenti, che si suppongono filiformi, ciascuno dei quali sia costituito da N_k spire avvolte su un nucleo in materiale ad elevata permeabilità magnetica, e percorso da una corrente i_k . Su ogni avvolgimento, realizzato in materiale conduttore, il campo elettrico \mathbf{E} e la densità di corrente \mathbf{J} sono legati dalla legge di legame materiale:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}.$$

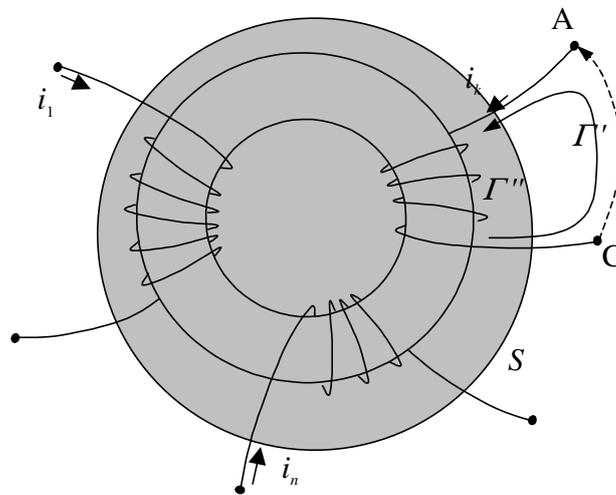


Figura 17.

Supponendo ora che, in conformità con l'ipotesi fatta di conduttore filiforme, la densità di corrente, e quindi il campo elettrico, sia uniformemente distribuita sulla sezione del conduttore, ed alla linea media di questo abbia sempre direzione tangente, è possibile scrivere:

$$i_k = \int_{S_k} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, dS = J S_k = \sigma E S_k \Rightarrow E = \frac{i_k}{\sigma S_k}, \quad (28)$$

dove con S_k si è indicata la sezione del conduttore costituente il k -esimo avvolgimento.

Ritenendo valide le ipotesi fatte per lo studio dei circuiti magnetici, è possibile supporre che il campo di induzione magnetica \mathbf{B} sia interamente confinato all'interno del nucleo, e che sia trascurabile nel mezzo a bassa permeabilità magnetica in cui tale nucleo è immerso. È quindi possibile individuare una superficie chiusa S che contiene interamente il materiale ad elevata permeabilità magnetica, in modo che sul dominio R_3' , ottenuto escludendo dallo spazio R_3 il volume contenuto nella superficie chiusa S , il campo elettrico \mathbf{E} sia irrotazionale: infatti, sul dominio R_3' , il campo magnetico \mathbf{B} è nullo, ed è di conseguenza nulla anche la sua derivata nel tempo. Ciò premesso, si consideri la curva chiusa Γ , ottenuta chiudendo la curva Γ'' , individuata dal percorso dell'avvolgimento k -esimo dal morsetto A al morsetto C, con la curva Γ' , interamente contenuta in R_3' che va dal morsetto C al morsetto A. Come verso di percorrenza positivo, si scelga il verso positivo assegnato alla corrente i_k . Applicando la legge dell'induzione elettromagnetica alla curva chiusa Γ , ed indicando con ϕ_k il flusso di induzione magnetica concatenato al k -esimo avvolgimento, si ottiene:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Gamma'_{CA}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\Gamma''_{AC}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\phi_k}{dt}, \quad (29)$$

La curva Γ'_{CA} è interamente contenuta nel dominio R_3' su cui \mathbf{E} è irrotazionale, e pertanto la tensione (elettrica):

$$v_{AC} = - \int_{\Gamma'_{CA}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

è indipendente dal particolare percorso di integrazione, posto che questo sia esterno ad S . Tenendo conto anche della (28), la (29) fornisce la relazione:

$$v_{AC} = \int_{\Gamma''_{AC}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \frac{d\phi_k}{dt} = \left(\int_{\Gamma''_{AC}} \frac{dl}{\sigma S_k} \right) i_k + \frac{d\phi_k}{dt}$$

da cui, ponendo:

$$R_k = \int_{\Gamma''_{AC}} \frac{dl}{\sigma S_k},$$

$$v_{AC} = R_k i_k + \frac{d\phi_k}{dt}. \quad (30)$$

Esprimendo infine il flusso di induzione magnetica concatenato al k -esimo avvolgimento ϕ_k tramite la (27), si ottiene:

$$v_{AC} = R_k i_k + \sum_{j=1}^n \left(M_{k,j} \frac{di_j}{dt} \right). \quad (31)$$

Le (30), (31) esprimono la tensione v_{AC} come somma di un termine dovuto alla resistenza ohmica dell'avvolgimento e di un termine induttivo pari alla derivata nel tempo del flusso di induzione concatenato all'avvolgimento stesso. Quest'ultimo termine può essere espresso, utilizzando i coefficienti di induzione, in termini di derivate nel tempo delle n correnti che percorrono gli avvolgimenti. Considerando il caso in cui sia presente un solo avvolgimento, la (31) fornisce:

$$v_{AC} = Ri + L \frac{di}{dt}, \quad (32)$$

da cui si deduce che il modello circuitale di un avvolgimento è un resistore in serie ad un induttore.