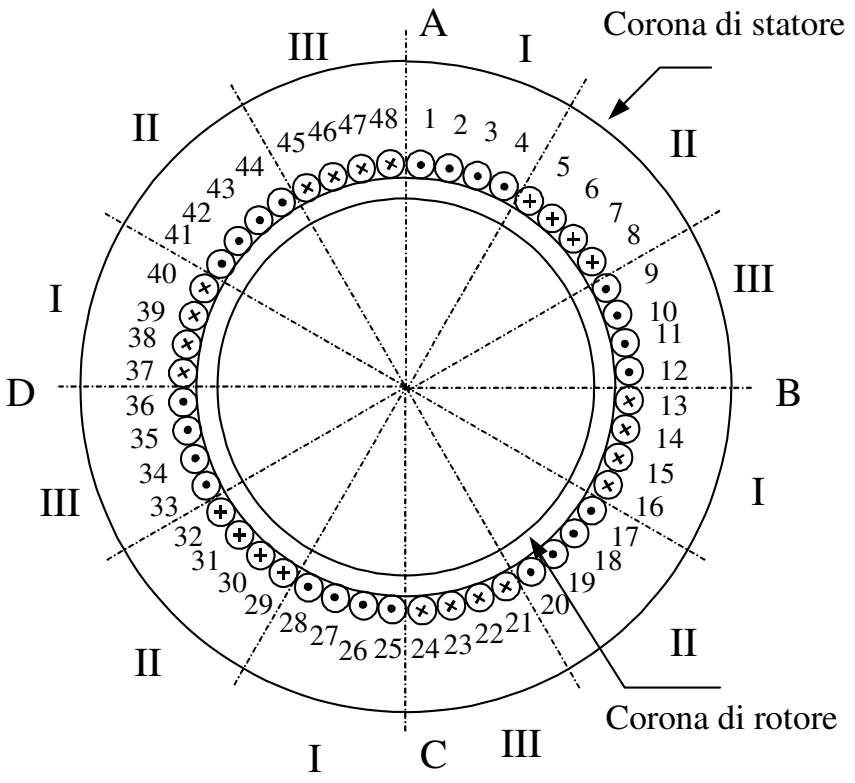
CAMPO MAGNETICO ROTANTE

La teoria del campo magnetico rotante verrà utilizzata nel seguito per lo studio delle macchine asincrone e sincrone. Essa richiede la preliminare conoscenza di qualche nozione costruttiva che ora esporremo relativamente alle macchine asincrone, facendo riferimento alla figura.

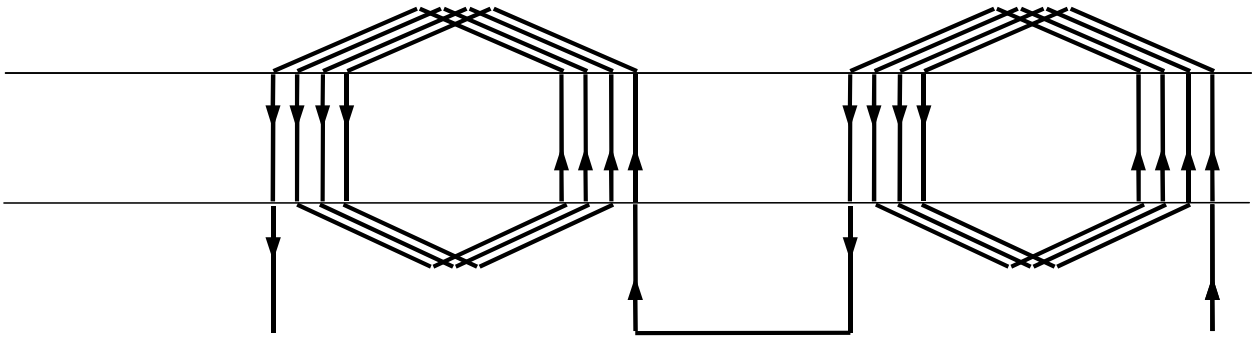


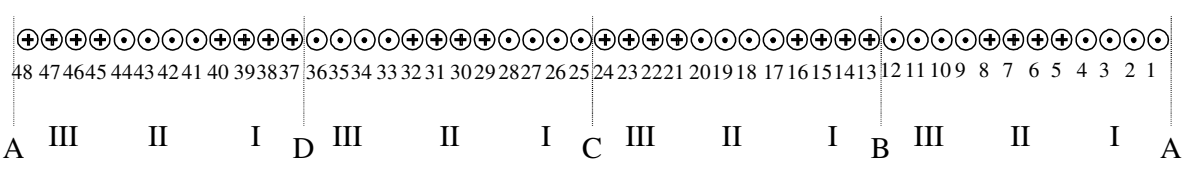
In tale figura si considera una macchina a quattro "poli" [i settori AB-BC-CD-DA] ma la generalizzazione ad un numero qualsiasi di poli è immediata.

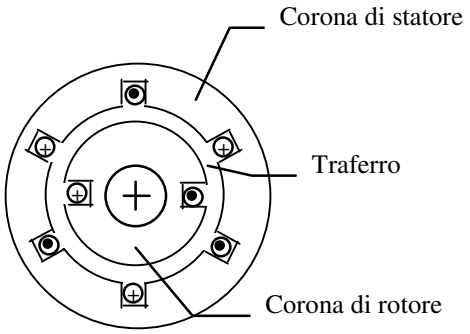
Statore e rotore sono costituiti da un cilindro cavo ed un cilindro pieno laminati (parallelamente al piano del foglio), coassiali e distanziati da un intervallo anulare d'aria [traferro]. Statore e rotore presentano delle "cave" affacciate al traferro, nelle quali hanno sede i conduttori attivi [disposti nelle cave parallelamente all'asse di rotazione] che opportunamente collegati fra loro [tramite "testate"] costituiscono gli avvolgimenti di statore e rotore.

Considerando macchine trifase, ciascun polo è diviso in tre settori uguali (vedi figura) riservati a ciascuna fase. Nell'esempio di figura ogni fase occupa quattro cave sotto ogni polo [in figura è indicato solo l'avvolgimento della prima fase, le rimanenti sono identiche alla prima e si intendono alloggiate nei settori ed esse riservati].

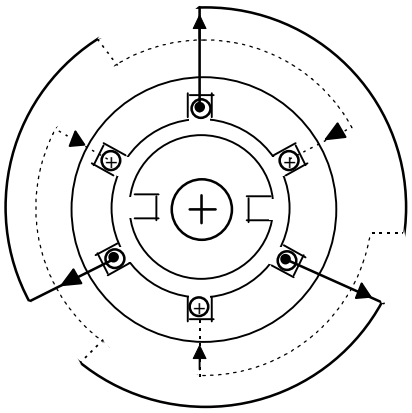
La figura in basso mostra lo sviluppo in piano della superficie di statore affacciata al traferro. In essa è riportato lo schema dell'avvolgimento di una fase. Nell'esempio considerato tale avvolgimento risulta composto da due gruppi di matasse, ognuno costituito da quattro matasse.







Schema di principio della sezione mediana di una macchina elettrica a traferro costante



Collegamenti dei lati attivi dell'avvolgimento sulla testata della macchina

Lo studio del campo magnetico al traferro della macchina rappresentata nella figura, richiede la soluzione delle equazioni della elettrodinamica quasi-stazionaria, in presenza di un mezzo non uniforme e non lineare, in una geometria complessa. Tale studio viene notevolmente semplificato, mediante l'introduzione delle seguenti **ipotesi di campo**:

1. la permeabilità del ferro si suppone infinita;
2. l'andamento delle linee del campo magnetico al traferro si suppone radiale [superfici affacciate al traferro perfettamente lisce];
3. la distribuzione del campo magnetico si ritiene identica in tutti i piani perpendicolari all'asse della macchina;
4. traferro δ di piccolo spessore e circa costante

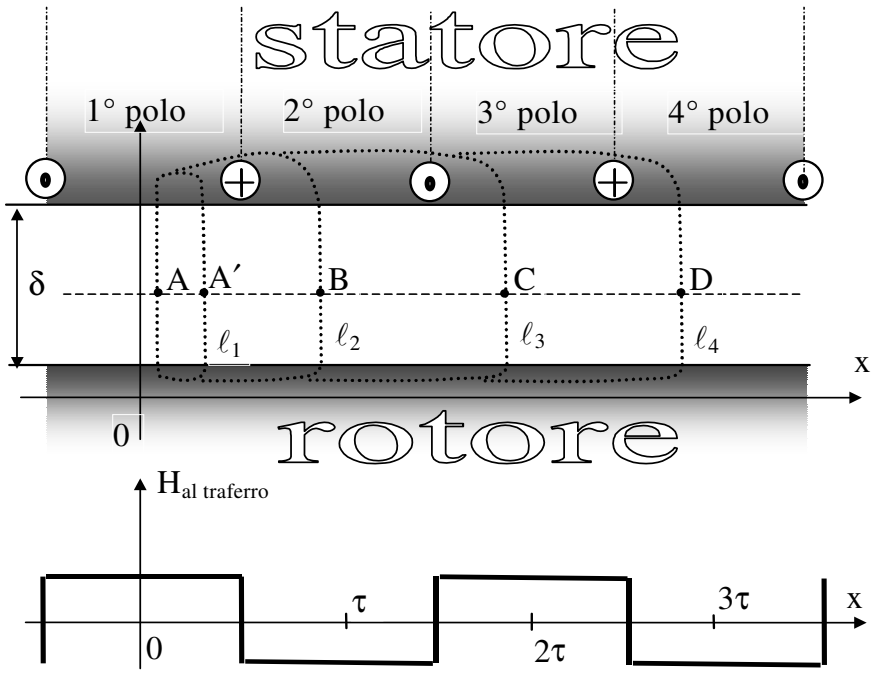
<u>Campo magnetico generato da una fase avente una sola cava per polo</u>

Supponiamo per ora che la corrente della fase sia costante nel tempo (C.C.) e che in ogni cava vi siano n conduttori.

Per la prima ipotesi di campo , che poniamo alla base del calcolo di H al traferro si ha:

$$H_{ferro} = \frac{B_{ferro}}{\mu_{ferro}} = 0 \quad (1)$$

La seconda ipotesi di campo consiste nel trascurare l'"<u>effetto di dentatura</u>" e in particolare le <u>componenti tangenziali</u> del campo magnetico al traferro.



"Lungo la periferia del traferro H è costante a tratti"

Infatti si considerino due punti qualsiasi A e A′, nell'intervallo compreso tra la prima e la seconda cava e applichiamo la legge della circuitazione magnetica alla linea chiusa ℓ_1.

$$H_A \cdot \delta - H_{A'} \cdot \delta = 0 \qquad (2) \quad \Rightarrow \qquad H_A = H_{A'} \qquad (3)$$

"Nel passaggio da un polo al polo adiacente H subisce una discontinuità pari a ni/δ"

[si chiama polo l'intervallo tra due cave di figura] Infatti applicando la legge della circuitazione magnetica a un generico percorso chiuso ℓ_2 che varca il traferro in corrispondenza dei punti A e B, risulta:

$$H_A \cdot \delta - H_B \cdot \delta = ni \qquad (4) \quad \Rightarrow \qquad H_A - H_B = \frac{ni}{\delta} \qquad (5)$$

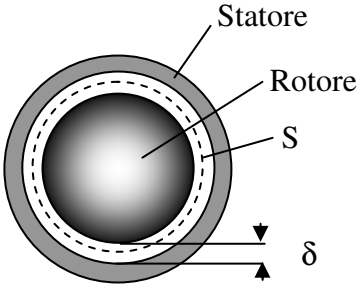
"A poli alterni il campo H riprende lo stesso valore"

Infatti applicando la legge della circuitazione magnetica lungo la linea chiusa ℓ_3 che varca il traferro in corrispondenza dei punti A e C, si ha:

$$H_A \cdot \delta - H_C \cdot \delta = 0 \qquad (6) \quad \Rightarrow \qquad H_A = H_C \qquad (7)$$

"Il valore assoluto del campo magnetico H è costante al traferro e pari a ni/2δ"

Ricordando che div **B** = 0, applichiamo il teorema della divergenza a una superficie cilindrica S situata tra statore e rotore e coassiale ad essi. Trascurando gli "effetti di bordo" alle estremità della macchina, risulta:



$$2[(\mu_0 H_A)(l\tau) + (\mu_0 H_B)(l\tau)] = 0 \qquad (8)$$

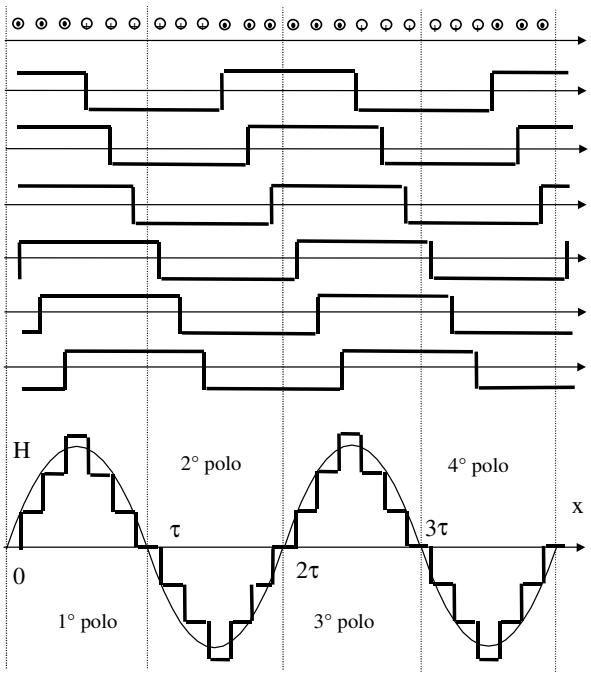
$$\Rightarrow \qquad H_A = -H_B \qquad (9)$$

ove l è la lunghezza assiale della macchina. Facendo sistema tra la (5) e la (9), si ha quindi:

$$H_A = \frac{ni}{2\delta} \qquad (10) \quad \Rightarrow \qquad H_B = -\frac{ni}{2\delta} \qquad (11)$$

A tale campo occorre sommare i contributi di tutti i conduttori giacenti sotto i vari poli; in totale si ottiene un diagramma a scalini. Preso un riferimento con l'origine nel centro della prima fase: rispetto ad esso il diagramma a scalini è una funzione periodica di periodo 2τ [τ è detto "semipasso polare"] è può scomporsi in serie di Fourier (cioè una serie di seni e coseni di frequenza crescente), di cui considereremo solo la prima armonica. Vista la scelta dell'origine, si ha dunque:

$$H(x) = H_M \cos\left(\frac{\pi x}{\tau}\right)$$



Le (10), (11) determinano completamente il campo al traferro generato da una fase avente una sola cava per polo, il cui andamento è riportato in figura in funzione dell'ascissa corrente x. A tale campo sostituiremo, d'ora in poi, la prima armonica della serie di Fourier la cui ampiezza vale

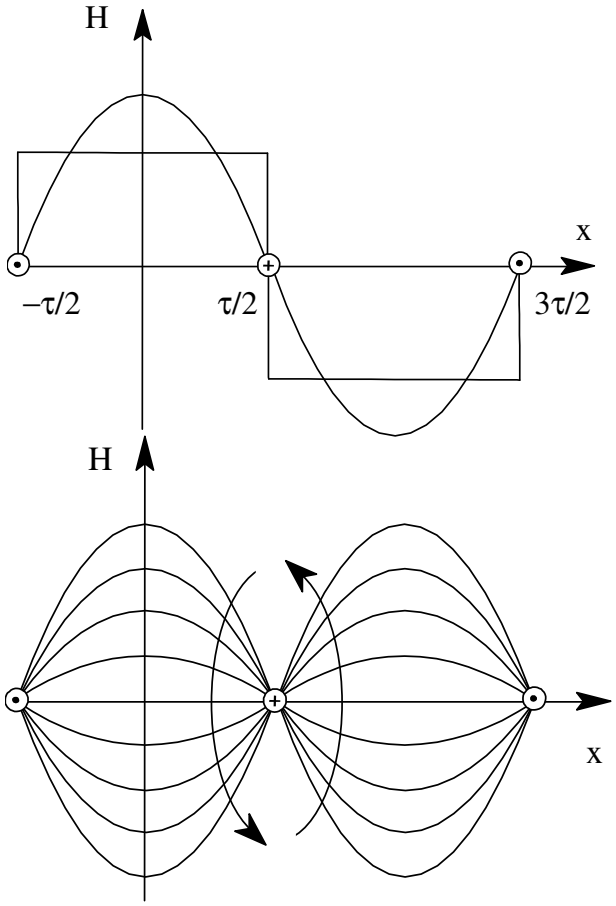
$$H_M = \frac{4}{\pi}\frac{ni}{2\delta} \qquad (12)$$

Se, come è in effetti, la corrente della fase è alternata, tutto quanto si è detto vale in ogni istante e pertanto il campo magnetico varia nel tempo, avendo la configurazione di un'onda stazionaria i cui nodi si realizzano in corrispondenza delle cave.

L'ampiezza massima del campo magnetico si realizza in un "ventre", al centro del polo, e vale

$$H_M = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\frac{nI}{\delta} \qquad (13)$$

ove I è il valore efficace della corrente della fase.



Riferendo l'onda stazionaria di campo al sistema di riferimento con origine in un ventre, la sua equazione diventa:

$$H(x,t) = H_M \cos(\omega t)\cos\left(\frac{\pi x}{\tau}\right) \qquad (14)$$

avendo supposto che $i(t) = \sqrt{2}\, I \cos(\omega t)$. La (14) è l'equazione di un campo alternativo, cioè di un campo distribuito con legge sinusoidale lungo il traferro e che ha ampiezza variabile sinusoidalmente nel tempo. La (14) può anche scriversi nella forma:

$$H(x,t) = \frac{1}{2}H_M \cos\left(\omega t - \frac{\pi x}{\tau}\right) + \frac{1}{2}H_M \cos\left(\omega t + \frac{\pi x}{\tau}\right) \qquad (15)$$

o anche

$$H(x,t) = \frac{1}{2}H_M \cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \frac{1}{2}H_M \cos\omega\left(t + \frac{x}{v}\right) \qquad (16)$$

avendo posto

$$v = \frac{\omega\tau}{\pi} \qquad (17)$$

La (17) mostra un risultato già noto dalla Fisica: "Un'onda stazionaria si può sempre decomporre in due onde traslanti, una progressiva (velocità v diretta secondo x) e una regressiva (velocità v diretta secondo −x)".[Si può cioè decomporre il campo alternativo in due campi di ampiezza costante, ma ruotanti a velocità costanti e opposte] Nel caso in esame tali onde sono indicate come campi rotanti

(diretto ed inverso). Essi sono campi di ampiezza costante rotanti al traferro con velocità angolare costante. A parte il differente verso di rotazione, i due campi hanno la stessa velocità angolare ω_c in modulo:

$$\omega_c = \frac{v}{R} = \frac{\omega\tau}{\pi R} \qquad (18)$$

Tenendo conto del fatto che $2\pi R = 2p\tau$, dove R è il raggio al traferro, p il numero di coppie polari, si ha inoltre:

$$\omega_c = \frac{\omega}{p} \qquad (19) \qquad \text{o anche} \qquad n'_c = \frac{60f}{p} \qquad (20)$$

dove n'_c il numero di giri al minuto primo. Se f è la frequenza industriale di rete, pari a 50 Hz, e supponiamo $2p = 4$, si ottiene $n'_c = 1500$. Quindi in una macchina a quattro poli, alimentata alla frequenza di 50 Hz, i campi ruotano a 1500 giri al minuto.

Campo magnetico generato da una fase avente q cave per polo

Quanto si è esposto al paragrafo precedente si generalizza a una fase avente un generico numero q di cave per polo. In tal caso infatti dovremo sommare q contributi sinusoidali "spostati di una cava" l'uno rispetto all'altro. L'ampiezza del campo risultante è in questo caso:

$$H_M = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} k_a \frac{nqI}{\delta} \qquad (21)$$

Nella (21) k_a (coefficiente di avvolgimento) è compreso tra zero e uno e tiene conto del fatto che i q contributi che si sommano sono sfasati l'uno rispetto all'altro di un "angolo elettrico α" corrispondente al passo τ_c di cava. Si può dimostrare che:

$$k_a = \frac{\operatorname{sen}\frac{q\alpha}{2}}{q \cdot \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}} \qquad (22) \qquad \text{essendo} \qquad \alpha = \pi\tau_c/\tau \qquad (23)$$

Campo al traferro generato dalle tre fasi

Le correnti delle tre fasi costituiscono un sistema equilibrato con pulsazione ω e pertanto sono esprimibili con le relazioni:

$$i_1(t) = I_M \cos(\omega t), \quad i_2(t) = I_M \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right), \quad i_3(t) = I_M \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \qquad (24)$$

Tenuto conto che le fasi sono spostate di $2\tau/3$ una rispetto all'altra, dalle (14) e (24) si deducono le espressioni dei campi parziali generati da ognuna di esse:

$$H_1(x,t) = H_M \cos(\omega t)\cos\left(\frac{\pi x}{\tau}\right) = \frac{H_M}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{\tau} - \omega t\right) + \frac{H_M}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{\tau} + \omega t\right)$$

$$H_2(x,t) = H_M \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{\tau} - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{H_M}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{\tau} - \omega t\right) + \frac{H_M}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{\tau} + \omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

$$H_3(x,t) = H_M \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{\tau} - \frac{4\pi}{3}\right) = \frac{H_M}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{\tau} - \omega t\right) + \frac{H_M}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{\tau} + \omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

Sommando membro a membro $H = \frac{3}{2} H_M \cos\left(\frac{\pi x}{\tau} - \omega t\right) + \quad 0$

In altri termini nella somma dei contributi di campo delle varie fasi, i campi inversi si elidono, quelli diretti si sommano. In definitiva le tre fasi generano un unico campo rotante diretto espresso da

$$H(x,t) = H_{Mt} \cos\left(\frac{\pi x}{\tau} - \omega t\right) \qquad (28) \qquad \text{ove} \qquad H_{Mt} = \frac{3\sqrt{2}}{\pi} k_a \frac{nqI}{\delta}$$

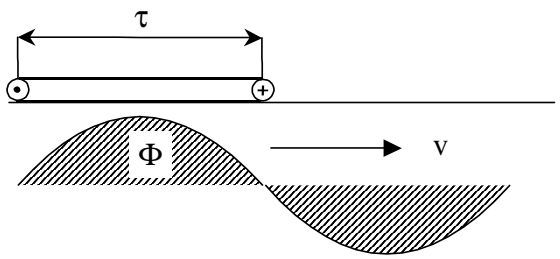
Ponendo nella (28) x = 0 (ossia, considerando un osservatore nel primo ventre dell'onda stazionaria della prima fase), risulta

$$H(0,t) = H_{Mt} \cos(\omega t) \qquad (29)$$

Dalle (24) e (29) si trae che per l'osservatore "centrale" della prima fase (analogamente per le altre) campo e corrente sono in fase. Si conclude che: il campo rotante transita con la sua ordinata massima davanti al centro di fase , quando in quella fase la corrente è massima.

f.e.m. indotta in una fase da un campo rotante

Si consideri ora un generico campo rotante che transita con velocità v di fronte ad una spira, ferma, di passo τ uguale a quello del campo stesso. Nella spira si induce una f.e.m. sinusoidale il cui valore efficace E_s vale:



$$E_s = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega \Phi \qquad (30)$$

ove ω è la pulsazione della f.e.m. indotta $\omega = \frac{\pi v}{\tau}$ (31)

e Φ è il flusso relativo ad un polo di campo rotante e rappresenta, ovviamente, il valore massimo del flusso concatenato con la spira. Se l'avvolgimento è costituito da N conduttori attivi (corrispondenti a N/2 spire), la f.e.m. sinusoidale indotta in esso dal campo rotante è:

$$E = \frac{\omega}{2\sqrt{2}} k_a N \Phi \qquad (32)$$

Ove k_a è lo stesso coefficiente che compare nella (21) ed è presente per tenere conto del fatto che le f.e.m. indotte in spire adiacenti sono uguali in modulo, ma sfasate dell'angolo α espresso dalla (23).