

# CAMPI E LORO PROPRIETÀ

## 1.1 Introduzione

Sia  $S$  una regione nello spazio in cui, in ogni suo punto, sia definita una grandezza  $g$ . La regione  $S$  si dice allora soggetta ad un campo. Un campo può essere scalare, vettoriale o tensoriale, a seconda che la grandezza  $g$  sia scalare, vettoriale o tensoriale.

Generalmente il dominio di definizione di un campo è **connesso**. Un dominio si dice connesso quando, dati due punti qualsiasi ad esso appartenenti, esiste almeno una curva interamente contenuta nel dominio stesso che unisce i due punti.

Un dominio connesso può essere:

- # **linearmente connesso** quando, data una qualsiasi curva chiusa appartenente al dominio, esiste sempre almeno una superficie avente come contorno tale curva che sia interamente contenuta nel dominio stesso. Un dominio siffatto si dice anche **a connessione lineare semplice**.
- # **superficialmente connesso** quando qualsiasi superficie chiusa appartenente al dominio racchiude un volume interamente appartenente al dominio. Un dominio siffatto si dice anche **a connessione superficiale semplice**
- # **a connessione lineare multipla** quando non è a connessione lineare semplice
- # **a connessione superficiale multipla** quando non è a connessione superficiale semplice

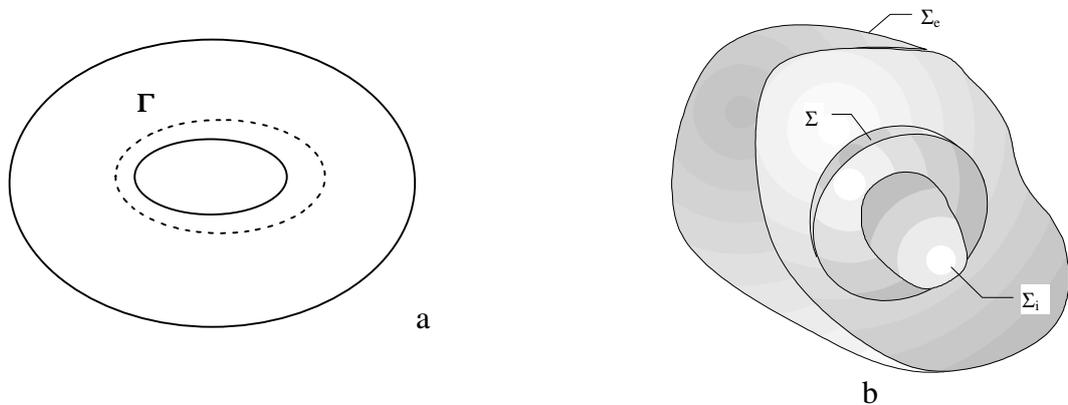


Fig. 1: il dominio toroidale rappresentato in fig. 1.a è un dominio a connessione lineare multipla, poiché nessuna delle superfici che hanno come contorno la curva  $\Gamma$  è contenuta interamente nel dominio. Il dominio è anche superficialmente connesso. Il dominio in fig. 2.b compreso tra le due superfici chiuse  $\Sigma_e$  e  $\Sigma_i$  (quest'ultima è sezionata per maggior chiarezza) è invece a connessione superficiale multipla: infatti il volume contenuto all'interno della superficie  $\Sigma$  non appartiene interamente al dominio.

## 1.2 Operatori

**Gradiente:** è un operatore differenziale del primo ordine che si applica ad una generica grandezza scalare  $\varphi$ , e genera un vettore  $\nabla\varphi$  tale che:

$$\nabla\varphi \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial\varphi}{\partial n} \quad 1.$$

Il gradiente di  $\varphi$  è quindi un vettore diretto secondo la massima variazione di  $\varphi$  e perpendicolare alle superfici su cui  $\varphi$  è costante. In coordinate cartesiane si ha:

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k} \quad 2.$$

Sia  $\mathbf{u} = \nabla\varphi$ . L'integrale di  $\mathbf{u}$  lungo una generica linea dipende unicamente dai valori che  $\varphi$  assume agli estremi di integrazione. Si ha infatti:

$$\int_A^B \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \nabla\varphi \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \frac{\partial\varphi}{\partial l} dl = \int_A^B d\varphi = \varphi_B - \varphi_A \quad 3.$$

Si ha anche:

$$\oint \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad 4.$$

Un campo vettoriale che goda di tale proprietà si dice **conservativo**. In un dominio linearmente connesso un campo conservativo può sempre essere espresso come gradiente di un opportuno potenziale scalare, definito a meno di una funzione a gradiente nullo (quindi una costante).

**Divergenza:** La divergenza di un vettore  $\mathbf{u}$  in un punto  $p$  può quindi essere intesa come limite del rapporto tra flusso di  $\mathbf{u}$  attraverso la superficie  $S$  che racchiude un intorno di  $p$  ed il volume  $\tau$  dell'intorno al tendere di  $\tau$  a zero. si può quindi scrivere:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS}{\tau}$$

La divergenza è un operatore differenziale del primo ordine, che in coordinate cartesiane è definito come segue:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad 5.$$

Sia  $\tau$  un dominio delimitato dalla superficie chiusa  $S$  in cui la grandezza vettoriale  $\mathbf{u}$  è continua assieme alle derivate delle sue componenti. Vale allora il **teorema della divergenza** (o **di Gauss**), che si esprime come segue: *il flusso del vettore  $\mathbf{u}$  attraverso la superficie chiusa  $S$  è pari all'integrale della divergenza di  $\mathbf{u}$  sul volume  $\tau$  racchiuso in  $S$ . Ovvero:*

$$\int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \int_\tau \nabla \cdot \mathbf{u} d\tau \quad 6.$$

Un vettore  $\mathbf{u}$  si dice **solenoidale** su un dominio  $\mathbf{S}$  quando il flusso di  $\mathbf{u}$  è attraverso qualsiasi superficie chiusa in  $\mathbf{S}$  è nullo, ovvero quando  $\nabla \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$  ovunque in  $\mathbf{S}$ .

**Rotore:** data una curva chiusa  $\Gamma$  ed una superficie  $S$  ad essa appoggiata, si può definire rotore del vettore  $\mathbf{u}$  come limite del rapporto tra la circuitazione di  $\mathbf{u}$  lungo  $\Gamma$  e la superficie  $S$  al tendere di  $S$  a zero. Si ha cioè:

$$(\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}}{S}$$

Il rotore è quindi un un operatore differenziale del primo ordine, e, in coordinate cartesiane è definito come segue:

$$\nabla \times \mathbf{u} = \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad 7.$$

Vale inoltre il **teorema di Stokes:** il flusso del vettore  $\nabla \times \mathbf{u}$  attraverso la superficie  $S$  è pari alla circuitazione di  $\mathbf{u}$  lungo la curva  $\Gamma$ . Cioè:

$$\int_s \nabla \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} \quad 8.$$

Da ciò si deduce subito che:

- i flussi di  $\nabla \times \mathbf{u}$  attraverso due superfici qualsiasi che abbiano lo stesso contorno  $\Gamma$  è uguale. Il rotore è quindi un vettore solenoidale. Vale cioè l'identità:

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{u} = 0; \quad 9.$$

- se in un dominio linearmente connesso  $\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$  ovunque, il vettore  $\mathbf{u}$  è conservativo. Viceversa, se  $\mathbf{u}$  è conservativo,  $\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$  ovunque. Vale cioè l'identità:

$$\nabla \times \nabla \phi = 0; \quad 10.$$

- si dimostra che se  $\mathbf{u}$  è solenoidale in un dominio a connessione superficiale semplice, può sempre essere espresso come rotore di un opportuno potenziale vettoriale, definito a meno di una funzione irrotazionale (e quindi conservativa).

### 1.3 Campi conservativi e campi solenoidali.

#### Campi conservativi

$$\nabla \times \mathbf{u} = 0$$

L'integrale di  $\mathbf{u}$  lungo una curva aperta dipende solo dagli estremi di integrazione. L'integrale di  $\mathbf{u}$  lungo una curva chiusa è nullo.

$$\mathbf{u} = \nabla \phi$$

La funzione  $f$  è un potenziale scalare definito a meno di una costante:

$$\phi = \phi^* + cost$$

#### Campi solenoidali

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Il flusso di  $\mathbf{u}$  attraverso una superficie aperta dipende solo dal contorno della superficie. Il flusso di  $\mathbf{u}$  attraverso una superficie chiusa è nullo.

$$\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{A}$$

La funzione  $\mathbf{A}$  è un potenziale scalare definito a meno di un gradiente.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^* + \nabla \phi$$

•**Campi conservativi:** si consideri un campo conservativo, descritto dalla funzione vettoriale  $\mathbf{u}$  che soddisfa il seguente sistema:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{u} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = f(\mathbf{P}). \end{cases} \quad 11.$$

Ricordando le proprietà dei campi conservativi, il sistema (11.) sarà riscrivibile come segue:

$$\nabla \cdot \nabla \phi = f(\mathbf{P}), \quad 12.$$

Introducendo l'operatore differenziale del secondo ordine **nabla**, definito come segue:

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad 13.$$

la (13) si riscrive:

$$\nabla^2 \phi = f(\mathbf{P}). \quad 14.$$

La (14.), nota come **equazione di Poisson**, consente di calcolare il potenziale  $\phi$  e, conseguentemente, il campo  $\mathbf{u}$ , una volta assegnata la funzione  $f(\mathbf{P})$ .

•**Campi solenoidali**: sia dato ora un campo solenoidale, descritto dalla funzione vettoriale  $\mathbf{u}$  che soddisfa il seguente sistema:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{F}(\mathbf{P}). \end{cases} \quad 15.$$

Tenendo presente che un campo solenoidale può essere ricavato da un potenziale vettore, il sistema (15.) potrà essere riscritto come segue:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{F}(\mathbf{P}) \Rightarrow \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{F}(\mathbf{P}). \quad 16.$$

La (16.) costituisce la definizione dell'operatore  $\nabla^2 \mathbf{A}$ . In coordinate cartesiane tale operatore assume la seguente forma:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = (\nabla^2 A_x) \mathbf{i} + (\nabla^2 A_y) \mathbf{j} + (\nabla^2 A_z) \mathbf{k}. \quad 17.$$

Il potenziale vettore è determinato a meno di una funzione irrotazionale. L'indeterminazione viene eliminata imponendo che  $\mathbf{A}$  sia solenoidale. La (11.16.) si potrà quindi riscrivere:

$$-\nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{F}(\mathbf{P}). \quad 18.$$

La (18.) è un'equazione di Poisson vettoriale, che si può scomporre in tre equazioni scalari:

$$\begin{cases} \nabla^2 A_x = -F_x(\mathbf{P}) \\ \nabla^2 A_y = -F_y(\mathbf{P}) \\ \nabla^2 A_z = -F_z(\mathbf{P}). \end{cases} \quad 19.$$

Quando un campo è sia conservativo che solenoidale in un certo dominio, dalla (15.14.) e dalla (18.) si ottiene:

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi = 0 \\ \nabla^2 \mathbf{A} = 0. \end{cases} \quad 20.$$

Le (20.) si dicono **equazioni di Laplace**, rispettivamente scalare e vettoriale. Una funzione che soddisfi l'equazione di Laplace si dice **armonica**.

#### **Esempi di funzioni armoniche:**

-una funzione costante su un dominio è ivi armonica;

-sia  $r$  la distanza del generico punto da un punto fisso detto  $\mathbf{P}_0$ , la funzione  $1/r$  è armonica in tutto lo spazio tranne in  $\mathbf{P}_0$ .

-siano  $r_i$  le distanze del generico punto da  $n$  punti fissi  $\mathbf{P}_i$ ,  $k_i$  delle costanti, la funzione  $\sum_{i=1}^n k_i/r_i$  è armonica in tutto lo spazio tranne nei punti  $\mathbf{P}_i$ .

-allo stesso modo, la funzione  $\int_{\tau} k/r \, d\tau$  è armonica al di fuori del dominio ###.

#### 1.4 Campi qualsiasi. Teorema di Clebsh.

Si consideri ora un campo non conservativo e non solenoidale, descritto dalla funzione vettoriale  $\mathbf{u}$ ; sarà dunque:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{F}(\mathbf{P}) \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = f(\mathbf{P}) \end{cases}; \quad 21.$$

Si dimostra che  $\mathbf{u}$  è decomponibile in ogni punto in due componenti  $\mathbf{u}_s$  e  $\mathbf{u}_c$ , rispettivamente solenoidale e conservativa. Infatti supponiamo che:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_s + \mathbf{u}_c; \quad 22.$$

dove:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{u}_c = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_c = f(\mathbf{P}). \end{cases} \quad 23.$$

Allora sarà anche:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{u}_s &= \nabla \times (\mathbf{u} - \mathbf{u}_c) = \nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{F}(\mathbf{P}), \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_s &= \nabla \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_c) = 0. \end{aligned} \quad 24.$$

Esprimendo  $\mathbf{u}_c$  come gradiente di un potenziale scalare  $\phi$  e  $\mathbf{u}_s$  come rotore di un potenziale vettore  $\mathbf{A}$ , si può allora scrivere:

$$\mathbf{u} = -\nabla\phi + \nabla \times \mathbf{A}, \quad 25.$$

e i due potenziali scalare e vettoriale saranno determinati da:

$$\nabla^2 \phi = -f(\mathbf{P}) \quad 26.a$$

$$\bar{\nabla}^2 \mathbf{A} = -\mathbf{F}(\mathbf{P}) \quad 26.b$$

#### 1.5 Formule di Green.

Siano  $\phi$  e  $\psi$  due funzioni regolari definite in un dominio  $\tau$  che abbia come contorno la superficie  $S$ . Si consideri il vettore  $\phi \nabla \psi$  e si applichi il teorema di Gauss:

$$\int_S \phi \nabla \psi \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\tau} \nabla \cdot (\phi \nabla \psi) \, d\tau, \quad 27.$$

Ricordando la definizione di gradiente, ed eseguendo qualche passaggio si ottiene:

$$\int_S \phi \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \, dS = \int_{\tau} (\nabla \phi \cdot \nabla \psi + \phi \nabla^2 \psi) \, d\tau. \quad 28.$$

Ripetendo lo stesso procedimento per il vettore  $\psi \nabla \phi$ , si ottiene un analoga espressione:

$$\int_S \psi \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \, dS = \int_{\tau} (\nabla \psi \cdot \nabla \phi + \psi \nabla^2 \phi) \, d\tau. \quad 29.$$

Sottraendo membro a membro la (28.) dalla (29.) si otterrà:

$$\int_S \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS = \int_{\tau} (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) d\tau. \quad 30.$$

Le (28)-(30), note come **formule di Green**, consentono la soluzione dell'equazione di Poisson e di Laplace nello spazio.

Si consideri ora un generico dominio limitato  $\tau$  avente come contorno la superficie  $S$ . Si ponga una delle due funzioni che compaiono nella (30), ad esempio la  $\psi$ , pari ad  $1/r$ , indicando con  $r$  la distanza dal generico punto  $\mathbf{P}$  appartenente a  $\tau$  da un punto  $\mathbf{P}_0$ . Si supponga  $\mathbf{P}_0$  interno a  $\tau$ : la funzione  $1/r$  è quindi armonica su tutto il dominio tranne che in  $\mathbf{P}_0$ . Si escluda allora dal dominio  $\tau$  un intorno sferico di  $\mathbf{P}_0$  di raggio  $\varepsilon$ . La (30) potrà quindi essere riscritta:

$$\int_S \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) dS + \int_{S_0} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) dS = \int_{\tau - \tau_0} \frac{\nabla^2 \varphi}{r} d\tau, \quad 31.$$

dove  $S_0$  è la superficie dell'intorno e  $\tau_0$  il suo volume (vedi **figura a**). Tenendo presente che sulla superficie  $S_0$  si ha  $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}$  e  $\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}$ , il secondo integrale

del primo membro nella (31) diventa:

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{S_0} \frac{\partial \varphi}{\partial r} dS - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{S_0} \varphi dS. \quad 32.$$

Ponendo  $dS = \varepsilon^2 d\omega$ , dove  $d\omega$  è l'angolo solido sotteso dall'elementino di superficie  $dS$ , e tenendo presente che  $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$  è finita ovunque per le ipotesi di regolarità

fatte, il primo integrale della (32) si annulla quando  $\varepsilon$  tende a 0. Si ha infatti:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{S_0} \frac{\partial \varphi}{\partial r} dS = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_{S_0} \frac{\partial \varphi}{\partial r} d\omega = 0. \quad 33.$$

Il secondo integrale, per  $\varepsilon$  che tende a 0, tende a:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{S_0} \varphi dS = 4\pi \varphi(\mathbf{P}_0). \quad 34.$$

Quindi, al tendere di  $\varepsilon$  a 0, la (31) diventa:

$$4\pi \varphi(\mathbf{P}_0) = - \int_{\tau} \frac{\nabla^2 \varphi}{r} d\tau + \int_S \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) dS \quad 35.$$

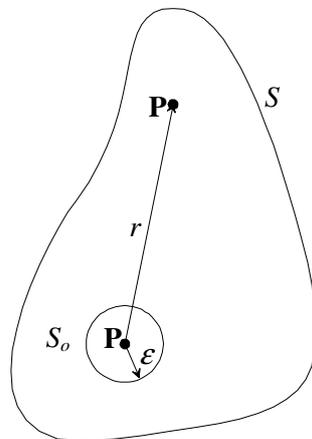


Figura A

La (35.) consente di conoscere il valore della funzione  $\varphi$  nel punto  $\mathbf{P}_0$  una volta assegnato il valore di  $\nabla^2\varphi$  su tutto il dominio e i valori di  $\varphi$  e di  $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$  sul contorno  $S$ .

Nel caso in cui il dominio  $\tau$  non sia limitato all'infinito, la superficie  $S$  che compare nella (35.) è formata da una superficie  $S'$ , contorno di eventuali domini non appartenenti a  $\tau$ , e dalla superficie sferica  $S_\infty$ , centrata in  $\mathbf{P}_0$  e di raggio  $R$  che tende all'infinito (vedi **figura b**). Il secondo integrale nella (35.) diventa:

$$\int_s \left( \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) dS = \int_{s'} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) dS + \frac{1}{R} \int_{s_\infty} \frac{\partial\varphi}{\partial R} dS + \frac{1}{R^2} \int_{s_\infty} \varphi dS \quad 36.$$

Se la funzione  $\varphi$  soddisfa le **condizioni di normalità all'infinito**, se cioè al tendere di  $R$  all'infinito  $\varphi$  tende a 0 almeno come un infinitesimo del primo ordine e  $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$  tende a 0 come un infinitesimo del secondo ordine:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{R \rightarrow \infty} R\varphi(R) = \alpha \quad \text{con } \alpha \text{ finito o nullo} \\ \lim_{R \rightarrow \infty} R^2 \frac{\partial\varphi}{\partial R} = \beta \quad \text{con } \beta \text{ finito o nullo,} \end{array} \right. \quad 37.$$

i contributi dovuti all'integrazione sulla  $S_\infty$  che compaiono nella (35.) si annullano. La (35.) è quindi valida anche per domini non limitati quando la funzione  $\varphi$  sia normale all'infinito. In questo caso, la superficie  $S$  racchiude uno o più domini non appartenenti a  $\tau$ . Se il dominio  $\tau$  è costituito dall'intero spazio, la (35.) si riduce alla:

$$\varphi(\mathbf{P}_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_\tau \frac{\nabla^2\varphi}{r} d\tau. \quad 38.$$

### 1.6 Funzioni armoniche.

Una funzione si dice armonica quando è soluzione dell'equazione di Laplace:

$$\nabla^2\varphi = 0$$

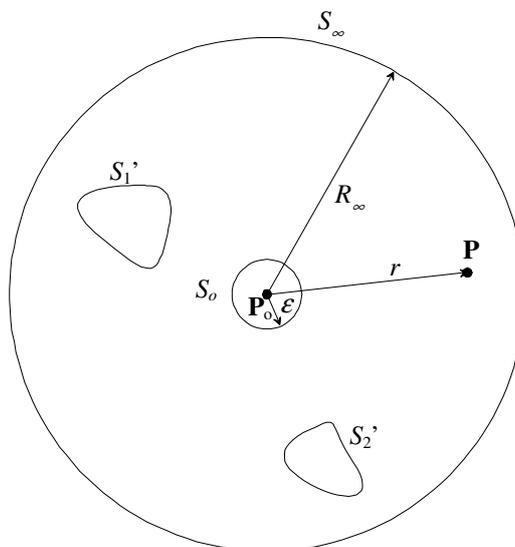


Figura B

Le formule di Green saranno ora utilizzate per analizzare le proprietà delle funzioni armoniche. Una prima proprietà si ricava subito dalla (30.): date infatti due funzioni armoniche  $\varphi$  e  $\psi$ , imponendo  $\nabla^2\varphi = \nabla^2\psi = 0$  si ottiene:

$$\int_s \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} dS = \int_s \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS. \quad 39.$$

La (39.) esprime la proprietà di reciprocità di cui godono due funzioni armoniche: *date due funzioni armoniche  $\varphi$  e  $\psi$ , il flusso attraverso una superficie chiusa del vettore ottenuto moltiplicando  $\varphi$  per il gradiente di  $\psi$  è pari al flusso attraverso la stessa superficie del vettore ottenuto moltiplicando  $\psi$  per il gradiente di  $\varphi$ .*

Un'altra proprietà si ricava subito dalla (38.) ponendo  $\nabla^2\varphi = 0$ : *una funzione armonica su tutto lo spazio è nulla.*

Si consideri una sfera di raggio  $R$ , contenuta nel dominio di definizione di una funzione armonica  $\varphi$ . Ricordando che, per la supposta armonicità di  $\varphi$ ,  $\frac{1}{R} \int_s \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS = \frac{1}{R} \int_s \nabla\varphi \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{R} \int_s \nabla^2\varphi dV = 0$ , si applichi la (35.):

$$\varphi(\mathbf{P}_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_s \varphi dS. \quad 40.$$

La (40.) esprime il **teorema della media**: *la media dei valori che una funzione armonica assume su una superficie sferica è pari al valore che tale funzione assume al centro di tale sfera. Si dimostra facilmente che il valore che la funzione assume al centro della sfera è pari alla media della funzione eseguita sul volume di tale sfera.*

• **Corollari del teorema della media:**

- una funzione armonica non può assumere all'interno del suo dominio di definizione massimi o minimi;

- se una funzione armonica è costante sul contorno, è costante su tutto il dominio;

- in particolare, se una funzione è nulla su tutto il contorno, è nulla ovunque;

- la conoscenza del valore che una funzione armonica  $\varphi$  assume sul contorno del dominio è sufficiente per conoscere  $\varphi$  su tutto il dominio. Infatti, se assegnati i valori di  $\varphi$  al contorno esistessero due soluzioni  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ , anche la  $\varphi^* = \varphi_1 - \varphi_2$  sarebbe soluzione. La funzione  $\varphi^*$  sarebbe armonica e nulla su tutto il contorno, quindi nulla ovunque. Da ciò discende immediatamente che  $\varphi_1 = \varphi_2$ ;

- la conoscenza di  $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$  sul contorno determina la funzione  $\varphi$  ovunque a meno di una

costante additiva.. Infatti, se assegnati i valori di  $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$  al contorno esistessero due so-

luzioni  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ , anche la  $\varphi^* = \varphi_1 - \varphi_2$  sarebbe soluzione. Sarebbe inoltre  $\frac{\partial\varphi^*}{\partial n} = 0$  su

tutto il contorno. Ma dalla 1° formula di Green (28.), per  $\varphi = \psi = e$  e  $\nabla^2\varphi^* = 0$  si ha:

$$\int_s \varphi^* \frac{\partial\varphi^*}{\partial n} dS = \int_\tau (\nabla\varphi^*)^2 d\tau \Rightarrow \int_\tau (\nabla\varphi^*)^2 d\tau = 0;$$

essendo il termine  $(\nabla\varphi^*)^2$  positivo o nullo, deve necessariamente essere  $\nabla\varphi^* = 0$  su tutto il dominio. La funzione  $\varphi^*$  è quindi costante ovunque, e  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  differiscono di una costante.

Gli ultimi due punti sono facilmente estendibili alle soluzioni dell'equazione di Poisson:

- per determinare la soluzione dell'equazione di Poisson è sufficiente la conoscenza dei valori che la soluzione assume sul contorno del dominio;

- la soluzione dell'equazione di Poisson è determinata a meno di una costante quando sono noti i valori della derivata normale della soluzione sul contorno del dominio.

### 1.7 Funzione di Green.

Da quanto detto al paragrafo precedente discende che nella (35.) sono contenute delle informazioni superflue. Infatti, una volta assegnato  $\varphi$  sul contorno non è più possibile assegnare la derivata normale in maniera indipendente, essendo i valori di  $\varphi$  già determinati su tutto il dominio. Si riporta dunque la (35.) applicata alla funzione  $\varphi$  e, di seguito, la (30.) applicata alla funzioni  $\varphi$  e  $\chi$ , quest'ultima armonica:

$$4\pi\varphi(\mathbf{P}_0) = -\int_{\tau} \frac{\nabla^2\varphi}{r} d\tau + \int_s \left( \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) dS$$

$$-\int_{\tau} \chi \nabla^2\varphi d\tau + \int_s \left( \chi \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial\chi}{\partial n} \right) dS = 0.$$

Sottraendo membro a membro le due relazioni si ottiene:

$$4\pi\varphi(\mathbf{P}_0) = -\int_{\tau} \left( \frac{1}{r} - \chi \right) \nabla^2\varphi d\tau + \int_s \left[ \left( \frac{1}{r} - \chi \right) \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} - \chi \right) \right] dS. \quad 41.$$

Imponendo ora che la funzione  $G = 1/r - \chi = 0$  sul contorno  $S$  la (41.) diventa:

$$\varphi(\mathbf{P}_0) = -\frac{1}{4\pi} \left[ \int_{\tau} G \nabla^2\varphi d\tau + \int_s \varphi \frac{\partial G}{\partial n} dS \right]; \quad 42.$$

se la funzione  $\varphi$  è armonica, si ha invece:

$$\varphi(\mathbf{P}_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_s \varphi \frac{\partial G}{\partial n} dS \quad 43.$$

La soluzione dell'equazione di Poisson o di Laplace note i valori al contorno (**problema di Dirichlet**) si riconduce a trovare una funzione armonica  $\chi$  che sia pari a  $1/r$  sul contorno. La funzione ausiliaria  $G$  è nota come **funzione di Green**.

### 1.8 Potenziali scalari di volume e di superficie

Si consideri un dominio infinito in cui sono presenti  $l$  sottodomini finiti  $\tau_k$  in cui  $\nabla^2\varphi \neq 0$ ,  $m$  superfici  $S_i$  sulle quali  $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$  è discontinua, e  $n$  superfici  $S_j$  sulle quali è discontinua la

funzione  $\varphi$ . Ognuna di tali superfici di discontinuità può essere immaginata come due superfici parallele e separate da uno spessore infinitesimo  $s$  (vedi **figura c**). La grandezza discontinua ( $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$  o  $\varphi$ ) assume valori diversi sulle due superfici in uno stesso

punto. Applicando la (35.), e tenendo conto che le direzioni delle normali  $n_1$  ed  $n_2$  coincidono quando  $s$  tende a 0, si ottiene:

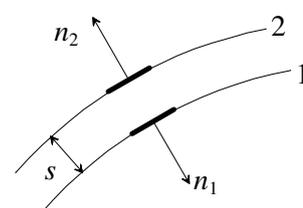


Figura C

$$4\pi\varphi(\mathbf{P}_0) = -\sum_{k=1}^l \int_{\tau_k} \frac{\nabla^2\varphi}{r} d\tau + \sum_{i=1}^m \int_{S_i} \frac{1}{r} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial n} \Big|_1 - \frac{\partial\varphi}{\partial n} \Big|_2 \right) dS - \sum_{j=1}^n \int_{S_j} (\varphi_1 - \varphi_2) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} dS \quad 44.$$

Il valore della funzione  $\varphi$  nel punto  $\mathbf{P}_0$  è pari alla somma di tre termini di sorgente:

$\varphi_v(\mathbf{P}_0) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^l \int_{\tau_k} \frac{\nabla^2\varphi}{r} d\tau$	<b>potenziale di volume:</b> è il contributo delle regioni in cui $\nabla^2\varphi \neq 0$
$\varphi_s(\mathbf{P}_0) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^m \int_{S_i} \frac{1}{r} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial n} \Big _1 - \frac{\partial\varphi}{\partial n} \Big _2 \right) dS$	<b>potenziale di strato:</b> è il contributo delle superfici su cui è discontinua la derivata normale della funzione $\varphi$ .
$\varphi_{DS}(\mathbf{P}_0) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^n \int_{S_j} (\varphi_1 - \varphi_2) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} dS$	<b>potenziale di doppio strato:</b> è il contributo delle superfici su cui è discontinua la funzione $\varphi$ .

In assenza di regioni ove  $\nabla^2\varphi \neq 0$ , o di superfici di discontinuità, la funzione  $\varphi$  è ovunque armonica e quindi nulla.

#### • Potenziali scalari nel caso elettrostatico

Supponendo per semplicità che esiste un'unica superficie su cui  $\varphi$  è discontinuo, ed una sola superficie su cui è discontinuo il campo elettrico normale, si pone:

$$\begin{aligned} \nabla^2\varphi &= -\frac{\rho}{\epsilon} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} \Big|_1 - \frac{\partial\varphi}{\partial n} \Big|_2 &= \frac{\sigma}{\epsilon} \\ \varphi_1 - \varphi_2 &= -\frac{\rho}{\epsilon} \end{aligned}$$

Le relazioni che forniscono i potenziali elettrici scalari possono essere riscritte come segue:

$$\begin{aligned} \varphi_v(\mathbf{P}_0) &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\tau} \frac{\rho}{r} d\tau \\ \varphi_s(\mathbf{P}_0) &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{S_s} \frac{\sigma}{r} dS \\ \varphi_{DS}(\mathbf{P}_0) &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{S_{DS}} \rho \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} dS \end{aligned}$$

Il potenziale di volume è quindi dovuto ad una distribuzione volumetrica di carica con densità  $\rho$ .

Il potenziale di strato è dovuto ad una distribuzione superficiale di carica caratterizzata da una densità superficiale  $\sigma$ .

Per spiegare il significato fisico del potenziale di doppio strato, si considerino due superfici parallele, separate da una distanza  $d$ , piccola rispetto alle dimensioni delle superfici, cariche con densità superficiale  $\sigma$  e  $-\sigma$ , uguali a meno del segno. Due generici elementini di superficie  $dS$  mostrati in **figura d** costituiscono un dipolo caratterizzato da un momento di modulo  $d\sigma dS$ , direzione coincidente con la normale alla superficie e verso dalla superficie negativa a quella positiva. Il potenziale generato dalle due distribuzioni superficiali è:

$$\varphi(\mathbf{P}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left( \int_{S_1} \frac{\sigma}{r_1} dS - \int_{S_2} \frac{\sigma}{r_2} dS \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S d\sigma \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) dS$$

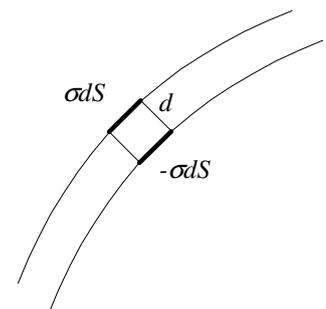


Figura D

Facendo tendere la distanza  $d$  a zero si ottiene:

$$\varphi(\mathbf{P}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_s p \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} dS,$$

dove si è posto  $p = d \sigma$ . Il potenziale di doppio strato può essere considerato come il limite a cui tende il potenziale di strato semplice relativo a due superfici cariche infinitamente vicine. La grandezza  $p$  viene definita **potenza del doppio strato**.

• **Potenziale scalare magnetico**

L'uso del potenziale scalare presenta l'ovvio vantaggio di descrivere un campo vettoriale mediante un'unica variabile scalare. Nel caso del campo magnetico questa trattazione non risulta sempre agevole perché il vettore  $\mathbf{H}$  generato dalle correnti non è conservativo. Per fissare le idee, si vuole descrivere il campo magnetico generato da una spira percorsa da una corrente  $i$  (**figura e**): è evidente che, mentre la circuitazione di  $\mathbf{H}$  eseguita lungo la curva chiusa composta da  $\gamma_2$  e  $\gamma_3$  è nulla, quella eseguita sulla curva  $\gamma_3$  e  $\gamma_1$  è pari alla corrente  $i$  che circola nella spira. Introducendo quindi un potenziale scalare  $\psi$  tale che  $\mathbf{H} = -\nabla\psi$ , si avrebbe che:

$$(\psi_A - \psi_B)_{\gamma_3} = (\psi_A - \psi_B)_{\gamma_2},$$

ma anche:

$$(\psi_A - \psi_B)_{\gamma_1} = (\psi_A - \psi_B)_{\gamma_2} + i,$$

In generale, si potrà dire che la differenza  $\psi_B - \psi_A$  dipende dal percorso  $\gamma^*$  su cui si è eseguita l'integrazione, e vale  $ni$ , dove  $n$  rappresenta il numero di volte con cui  $\gamma^*$  si concatena alla corrente  $i$ . Un siffatto potenziale, che può quindi assumere nello stesso punto infiniti valori, si dice **polidromo**.

La polidromia del potenziale  $\psi$  si può eliminare escludendo dal dominio di calcolo una superficie aperta  $S$  che si appoggia sulla linea della corrente  $i$ . Tale superficie agisce come un diaframma invalicabile che esclude la possibilità di avere linee di campo  $\mathbf{H}$  che si concatenano alla corrente. Per quanto detto finora, la superficie  $S$  è inoltre sede di una discontinuità pari ad  $i$ .

Il potenziale  $\psi$  è, a questo punto, perfettamente definito: soddisfa l'equazione:

$$\nabla^2\psi = 0$$

su tutto il dominio, e presenta, sul diaframma  $S$ , una discontinuità pari ad  $i$ . Dalla (44.) si ricava subito:

$$\psi(\mathbf{P}_0) = -\frac{i}{4\pi} \int_s \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} dS.$$

Tenendo conto che:

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} = \nabla \frac{1}{r} \cdot \mathbf{n} = -\frac{1}{r^2} \mathbf{i}_r,$$

si ottiene:

$$\psi(\mathbf{P}_0) = \frac{i}{4\pi} \int_s \frac{\cos\alpha}{r^2} dS = \frac{i}{4\pi} \int_\Omega d\omega$$

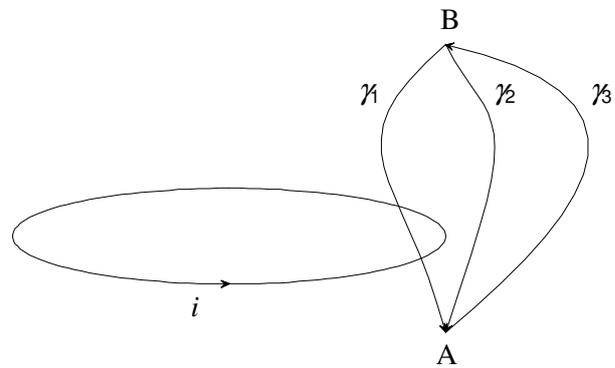


Figura E

$$\psi(\mathbf{P}_0) = \frac{i}{4\pi} \Omega,$$

45.

dove  $\Omega$  rappresenta l'angolo solido sotto il quale il punto  $\mathbf{P}_0$  vede la spira di corrente  $i$ .

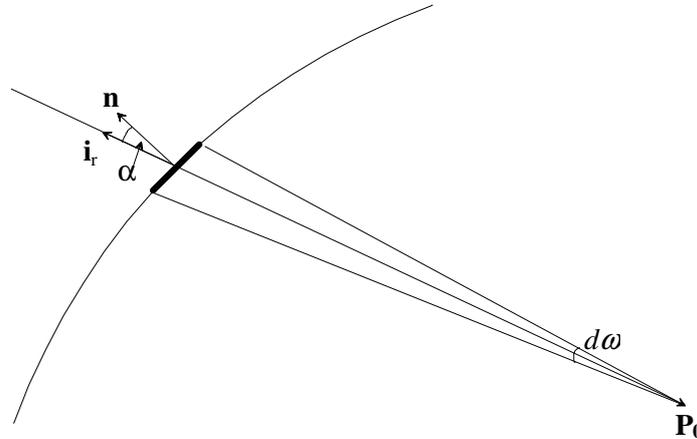


Figura F

• **Esempi ed applicazioni.**

Si calcoli il campo magnetico generato da una corrente filiforme  $i$  (vedi *figura g*), Il diaframma è costituito dal semipiano:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

L'angolo solido  $\Omega$  coincide con la porzione di superficie sferica di raggio unitario e centro in  $\mathbf{P}_0$  individuata dall'angolo diedro di ampiezza  $\theta$ . Si ha quindi:

$$\Omega = -2\theta.$$

Dalla (45.) si ricava subito:

$$\psi(\mathbf{P}_0) = -i \frac{\theta}{2\pi}.$$

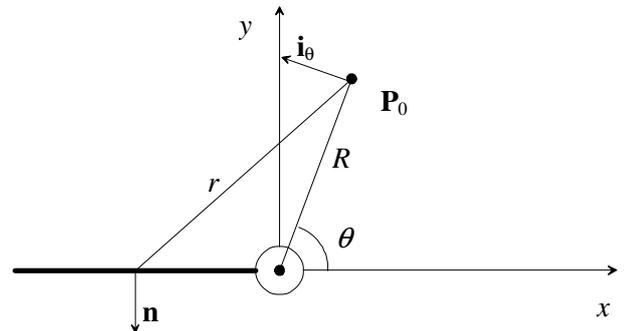


Figura G

Le superfici equipotenziali sono costituite dai semipiani che hanno come sostegno l'asse  $z$ . Il potenziale decresce dal massimo per  $-\pi$  al minimo per  $-\pi$ , e presenta, come è immediato verificare, una discontinuità pari ad  $i$  sul diaframma. Il campo magnetico può essere ricavato come segue:

$$\mathbf{H} = -\nabla\psi = -\frac{1}{R} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \mathbf{i}_\theta = \frac{i}{2\pi R} \mathbf{i}_\theta,$$

In accordo con la legge di Biot-Savart.

# IDENTITÀ VETTORIALI E PROPRIETÀ DELL'OPERATORE NABLA

## RELAZIONI DI MOLTIPLICAZIONE

(A, B, C e D sono vettori)

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \\ \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \\ \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= \mathbf{B} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) - \mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \\ (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \end{aligned}$$

## RELAZIONI DIFFERENZIALI

(A e B sono funzioni vettoriali,  $\phi$  e  $\psi$  sono funzioni scalari)

(L'operatore nabla ( $\nabla$ ) opera sulle variabili spaziali)

$$\begin{aligned} \nabla(\phi + \psi) &= \nabla\phi + \nabla\psi \\ \nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B} \\ \nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B} \\ \nabla(\phi\psi) &= \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi \\ \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} \\ \nabla \cdot (\phi\mathbf{A}) &= \phi \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla\phi \cdot \mathbf{A} \\ \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B} \\ \nabla \times (\phi\mathbf{A}) &= \phi \nabla \times \mathbf{A} + \nabla\phi \times \mathbf{A} \\ \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} \\ \\ \nabla \cdot \nabla\phi &= \nabla^2\phi \\ \nabla \times \nabla\phi &= 0 \\ \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} &= 0 \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} &= \nabla\nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A} \\ \nabla^2(\phi\psi) &= \phi\nabla^2\psi + 2\nabla\phi \cdot \nabla\psi + \psi\nabla^2\phi \\ \nabla^2(\phi\mathbf{A}) &= \phi\nabla^2\mathbf{A} + 2(\nabla\phi \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A}\nabla^2\phi \\ \nabla\nabla \cdot (\phi\mathbf{A}) &= (\nabla\phi)\nabla \cdot \mathbf{A} + \phi\nabla\nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla\phi \times \nabla \times \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\nabla\phi + (\nabla\phi \cdot \nabla)\mathbf{A} \\ \nabla \times \nabla \times (\phi\mathbf{A}) &= \nabla\phi \times \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A}\nabla^2\phi + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\nabla\phi + \phi\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} + (\nabla\phi)\nabla \cdot \mathbf{A} - (\nabla\phi \cdot \nabla)\mathbf{A} \end{aligned}$$

## TEOREMI DI CALCOLO VETTORIALE

In quel che segue  $\mathbf{A}$  è una funzione vettoriale,  $\varphi$  e  $\psi$  sono funzioni scalari,  $V$  è un volume tridimensionale il cui elemento infinitesimo è  $dV$ ,  $\partial V$  è la superficie bidimensionale chiusa che racchiude  $V$ , avente elemento di area infinitesimo  $dS$  con versore normale esterno  $\mathbf{n}$  in  $dS$ .

$$\begin{aligned}\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV &= \int_{\partial V} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS \\ \int_V \nabla \varphi \, dV &= \int_{\partial V} \varphi \mathbf{n} \, dS \\ \int_V \nabla \times \mathbf{A} \, dV &= \int_{\partial V} \mathbf{n} \times \mathbf{A} \, dS \\ \int_V (\varphi \nabla^2 \psi + \nabla \varphi \cdot \nabla \psi) \, dV &= \int_{\partial V} \varphi \mathbf{n} \cdot \nabla \psi \, dS \\ \int_V (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) \, dV &= \int_{\partial V} (\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi) \cdot \mathbf{n} \, dS\end{aligned}$$

In quel che segue  $S$  è una superficie aperta avente come contorno la linea chiusa  $C$  il cui elemento di linea infinitesimo è  $d\mathbf{l}$ . La normale  $\mathbf{n}$  a  $S$  è definita mediante la regola della vite destrorsa in relazione al verso di percorrenza di  $C$ .

$$\begin{aligned}\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \\ \int_S \mathbf{n} \times \nabla \varphi \, dS &= \oint_C \varphi \, d\mathbf{l}\end{aligned}$$