Elettrostatica

Si parla di elettrostatica quando, in ogni punto dello spazio ed in ogni istante risultano nulle tutte le derivate temporali che compaiono nelle equazioni generali dell'elettromagnetismo, e la densità di corrente **J** è pure identicamente nulla. Sotto queste ipotesi, le equazioni per il campo elettrico possono essere riscritte come segue:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0\,, \qquad 1.$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \qquad 2.$$

a cui possono essere associate, in caso di mezzo isotropo e lineare, le equazioni di legame materiale:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}\,, \qquad 3.$$

$$\sigma \mathbf{E} = 0\,. \qquad 4.$$

La 1 e la 2 possono, come è già stato visto, essere espresse in forma integrale:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = 0\,, \qquad 5.$$

$$\int_{S} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}S = Q\,. \qquad 6.$$

La 2 e 6 sono la formulazione della ben nota legge di Gauss, rispettivamente in forma locale ed integrale. La 1 e la 5 esprimono l'irrotazionalità del vettore **E**, che definisce quindi un campo conservativo. In virtù di quanto visto sui campi conservativi, il campo elettrico può essere espresso come gradiente di un opportuno potenziale scalare:

$$\mathbf{E} = -\nabla v \qquad 7.$$

La funzione scalare v viene detta potenziale elettrico, ed è definito a meno di una costante. Tale indeterminazione viene eliminata fissando il valore del potenziale di un punto del dominio. Normalmente viene posto uguale a zero il potenziale all'infinito.
L'integrale di **E** lungo una linea qualsiasi contenuta nel dominio non dipende dalla linea stessa, ma unicamente dal valore che il potenziale elettrico assume agli estremi di integrazione:

$$\int_{A}^{B} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = v_A - v_B\,. \qquad 8.$$

Per la definizione di campo elettrico, il primo membro della 8 è il lavoro fatto dalle forze elettriche su una carica unitaria. Imponendo che il potenziale all'infinito sia nullo, la quantità:

$$v_A = \int_{A}^{\infty} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl}$$

rappresenta il lavoro che il campo elettrico compirebbe portando una carica unitaria dalla posizione A all'infinito.

Calcolo del campo elettrostatico

Sia data una regione dello spazio τ, delimitata dalla superficie S . Dalle 1, 2 è immediato ricavare l'equazione che permette di calcolare il potenziale elettrico una volta note le distribuzioni di carica, che costituiscono, nel caso elettrostatico, le "sorgenti" del campo elettrico:

$$\nabla^2 v = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \qquad 9.$$

La 9 è l'equazione di Poisson per il potenziale elettrico. Nelle regioni in cui la densità di carica è nulla, dalla 2 segue che il campo elettrico è solenoidale, ed obbedisce quindi all'equazione di Laplace:

$$\nabla^2 v = 0. \qquad 10.$$

Per quanto detto riguardo alle funzione armoniche, affinché sia definita la soluzione dell'equazione 9 è necessario assegnare le opportune condizioni al contorno su tutta la superficie S che racchiude il dominio di calcolo: si parla quindi di

- Condizioni al contorno di Dirichlet, quando è assegnato il potenziale su tutto il contorno. Un problema così formulato viene detto problema di Dirichlet;
- Condizioni al contorno di Neumann, quando è assegnata la derivata normale del potenziale su tutta la superficie di contorno del dominio.

Nel caso in cui il dominio sia l'intero spazio ed il potenziale elettrico soddisfi le condizioni di normalità all'infinito, quanto detto in relazione alle formule di Green consente di esprimere la soluzione della 9 come:

$$v(\mathbf{P}_0) = -\frac{1}{4\pi}\int_\tau \frac{\nabla^2 v}{r} d\tau = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_\tau \frac{\rho}{r} d\tau. \qquad 11.$$

Le condizioni di normalità all'infinito sono soddisfatte quando la densità di carica è nulla all'infinito e non nulla su un volume V finito (o un insieme di volumi finiti) contenuto in τ. In tal caso la 11 può essere riscritta come segue :

$$v(\mathbf{P}_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho}{r} d\tau. \qquad 12.$$

L'equazione 12 può essere ricavata anche per altra via, che ne chiarisce il significato fisico: si calcoli dunque il campo elettrico dovuto ad una carica puntiforme dq, immersa in un mezzo infinito, lineare ed isotropo (fig. 1). In virtù della completa simmetria sferica che il problema presenta, è possibile supporre che il potenziale sia costante su superfici sferiche aventi come centro il punto P_{dq} in cui la carica dq è situata. In altre parole il potenziale, e quindi il campo elettrico, sono unicamente funzione della variabile r, definita come distanza del generico punto dalla carica stessa. Il campo elettrico $\mathbf{E}$ è esprimibile come gradiente del potenziale elettrico, che in coordinate sferiche porta a scrivere:

$$\mathbf{E} = -\left(\frac{\partial v}{\partial r}\mathbf{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\mathbf{i}_\theta + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\mathbf{i}_\varphi\right).$$

Ma, poiché il potenziale elettrico è unicamente funzione di r:

$$\mathbf{E}(r) = -\frac{\partial v}{\partial r}\mathbf{i}_r. \qquad 13.$$

Il campo elettrico ha quindi unicamente direzione radiale. Dalla legge di Gauss in forma integrale di ottiene, utilizzando come superficie di integrazione S una sfera avente il centro nel punto P_{dq}:

$$4\pi r^2 \mathbf{E}(r) = \frac{dq}{\varepsilon}\mathbf{i}_r ,$$

che tenendo conto della 13 fornisce l'equazione differenziale:

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{dq}{4\pi\varepsilon r^2} . \qquad 14.$$

La 14, integrata tenendo conto della condizione di annullamento del potenziale all'infinito, fornisce la soluzione:

$$v(r) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon r} . \qquad 15.$$

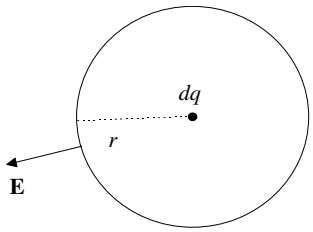

fig. 1

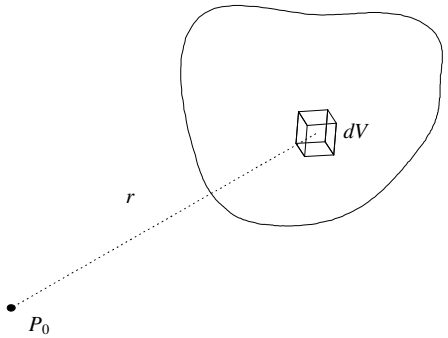

fig. 2

Nel caso in cui una carica Q sia distribuita su un volume, con una densità di carica ρ, il potenziale elettrico in un generico punto P_0 dello spazio si ottiene integrando i contributi delle cariche infinitesime $dq = \rho\, d\tau$ (Vedi fig. 2). Si può quindi scrivere:

$$v(\mathbf{P}_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_Q \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho}{r} d\tau ,$$

riottenendo la 12. Il potenziale elettrico generato nel caso in cui la carica sia distribuita su una superficie S con densità superficiale ρ_S tale che $dq = \rho_S\, dS$ è esprimibile, in maniera del tutto analoga, come:

$$v(\mathbf{P}_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_Q \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_S \frac{\rho_S dS}{r} \qquad 16.$$

Si considerino ora due superfici parallele, separate da una distanza *d*, piccola rispetto alle dimensioni delle superfici, cariche con densità superficiale σ e $-\sigma$, uguali a meno del segno. Due generici elementini di superficie *dS* mostrati in fig. 3 costituiscono un dipolo caratterizzato da un di momento di modulo $s\ \rho_S\ dS$, direzione coincidente con la normale alla superficie e verso dalla superficie negativa a quella positiva. Il potenziale generato dalle due distribuzioni superficiali é:

$$v(\mathbf{P}_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\int_{S_1} \frac{\rho_S}{r_1}\, dS - \int_{S_2} \frac{\rho_S}{r_2}\, dS\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_S s\,\rho_S \left(\frac{1/r_1 - 1/r_2}{s}\right) dS .$$

Facendo tendere la distanza *d* a zero si ottiene:

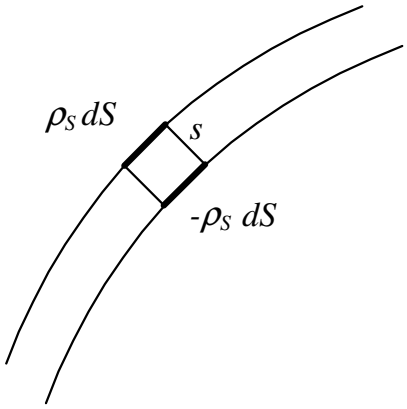

Fig. 3

$$v(\mathbf{P}_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_S p\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}dS\,, \qquad 17.$$

dove si è posto $p = s\ \rho_S$. Il potenziale di doppio strato può essere considerato come il limite a cui tende il potenziale di strato semplice relativo a due superfici cariche infinitamente vicine. La grandezza p viene definita potenza del doppio strato.
In accordo con quanto detto nel capitolo Campi, il potenziale elettrico in un dominio infinito è somma di tre contributi. Si ha infatti:

- potenziale di volume:
  $v(\mathbf{P}_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho}{r}d\tau\,,$ avendo posto $\nabla^2 v = -\frac{\rho}{\varepsilon}$
- potenziale di strato o di superficie:
  $v(\mathbf{P}_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_S \frac{\rho_S dS}{r}\,,$ avendo posto $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_1 - \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon}$
- potenziale di doppio strato:
  $v(\mathbf{P}_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_S p\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}dS\,,$ avendo posto $\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{p}{\varepsilon}$

E' immediato verificare che, in presenza di una distribuzione di carica su una superficie, la derivata normale a tale superficie del potenziale elettrico, e quindi la componente normale del campo elettrico, presenta una discontinuità. In presenza di un doppio strato la derivata normale è invece continua, ma è discontinuo il potenziale.

Elettrostatica dei conduttori e dei dielettrici

Come si è detto, affinché si possa parlare di elettrostatica deve essere verificata l'assenza di correnti elettriche in tutto lo spazio. Dalla 4. si deduce che deve essere verificata una delle due seguenti condizioni :

- $\sigma = 0,\ \mathbf{E} \neq 0;$ 18.a
- $\sigma \neq 0,\ \mathbf{E} = 0.$ 18.b

La prima delle due condizioni si verifica nei conduttori, mentre la seconda nei materiali isolanti.
Nei conduttori quindi, essendo nullo il campo elettrico, è anche costante il potenziale elettrico. Le superfici esterne dei conduttori sono dunque superfici equipotenziali, e la componente di campo elettrico tangenziale è nulla.

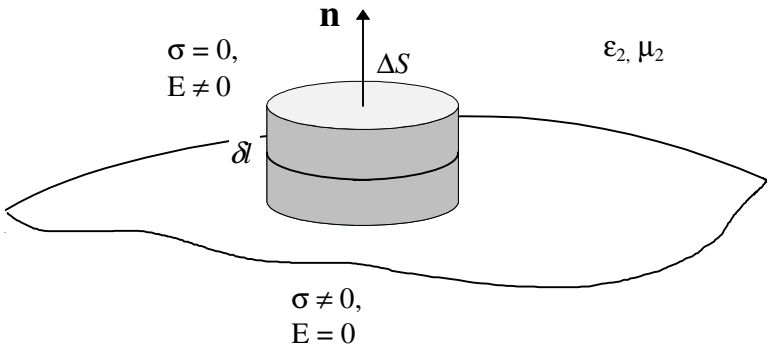

Fig. 4

Utilizzando la legge di Gauss si ottiene un'altra importante proprietà per i conduttori in regime elettrostatico: si consideri infatti una qualsiasi superficie chiusa e completamente interna al conduttore. Applicando la 6. e tenendo conto del fatto che il campo elettrico è nullo su tutta la superficie segue immediatamente che risulta nulla anche la carica contenuta all'interno della superficie. Data l'arbitrarietà della superficie, se ne deduce che le eventuali cariche libere su un corpo conduttore si dispongono sulla sua superficie esterna.
Si consideri ora una superficie chiusa cilindrica come quella mostrata in fig. 4, avente base infinitesima ΔS ed altezza δl infinitesimo di ordine superiore rispetto a ΔS. Una delle basi è contenuta nel corpo conduttore, l'altra è esterna. Poiché, data la natura infinitesimale di ΔS, campo elettrico e densità di carica possono essere considerati costanti, ed il campo elettrico all'interno del conduttore è nullo in regime elettrostatico, applicando la 6 si ottiene:

$$E_{\perp} = \frac{\rho_S}{\varepsilon}, \qquad 19.$$

dove ε è la costante dielettrica del mezzo isolante in cui il conduttore è immerso. E' possibile inoltre invertire il ragionamento: se infatti il campo elettrico è non nullo sulla superficie del conduttore, esiste su di esso una distribuzione superficiale di carica.
Schermo elettrostatico
Si consideri ora il caso di un conduttore contenente al suo interno una cavità. Poiché il potenziale è costante sul conduttore, la superficie che delimita la cavità è equipotenziale. Il potenziale all'interno della cavità è governato dall'equazione di Laplace ed è quindi armonico. Le condizioni al contorno necessarie a definire completamente il problema sono fornite dal fatto che il potenziale al contorno è costante e pari a quello del corpo conduttore. In base a quanto detto sulle funzioni armoniche, il potenziale risulta quindi costante su tutta la cavità che viene in questo modo schermata dai campi

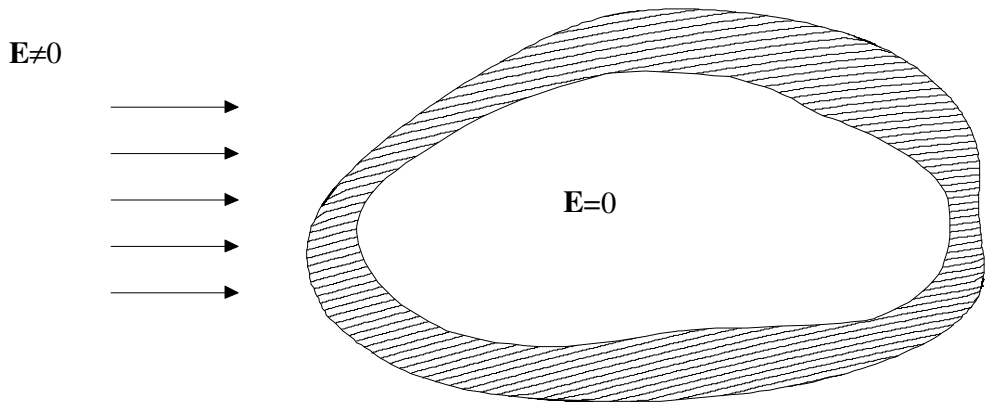

Fig.5

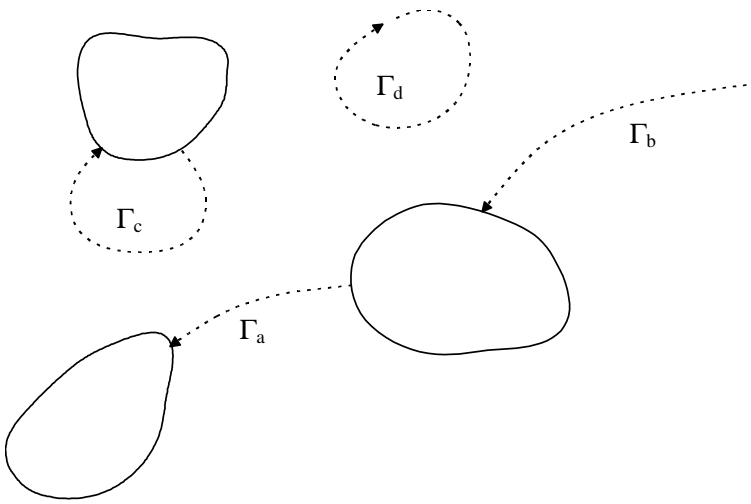

Fig. 6

elettrici esterni. Un conduttore siffatto viene quindi detto schermo elettrostatico.
Gli schermi elettrostatici sono usati in numerosi dispositivi elettrici, per evitare che campi elettrici esterni interferiscano con il loro normale funzionamento. Generalmente una gabbia di rete metallica (gabbia di Faraday) con maglie non troppo larghe costituisce già con buona approssimazione uno schermo elettrostatico.

In base alla 18.b, le regioni occupate dall'isolante sono le uniche in cui il campo elettrico può essere diverso da zero. Supponendo che in tali regioni non sia presente alcuna distribuzione di carica, è possibile affermare che il campo elettrico è ivi solenoidale ed irrotazionale, e che il potenziale elettrico è governato dall'equazione di Laplace. Poiché il campo elettrico è solenoidale, le linee di campo non possono avere né "sorgenti" né "pozzi", ma possono:

a) andare da un conduttore ad un altro;
b) andare da un conduttore all'infinito;
c) partire da un conduttore e richiudersi sullo stesso;
d) richiudersi su se stesse.

Le ultime due ipotesi sono però da scartare per l'irrotazionalità del campo elettrico. Si supponga infatti che la linea di campo segua la curva Γ_c mostrata in fig. 6. Utilizzando la 8 si otterrebbe:

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = 0,$$

relazione assurda, dal momento il primo membro è diverso da zero perché l'integrando ha sempre lo stesso segno lungo Γ_c. Allo stesso modo è possibile dimostrare che non possono esistere linee di campo che si chiudono su se stesse, come Γ_d in fig. 6. Le uniche linee di campo possibili sono quelle del tipo a) e b). Le linee di campo come Γ_a collegano due conduttori, in cui si assume che esista una distribuzione di carica non nulla.
Si consideri ora un tubo di flusso di campo elettrico che, come illustrato in fig. 7, va dal conduttore 1 al conduttore 2. Si noti che, per la 19, l'esistenza di un tubo di flusso siffatto implica la presenza di cariche elettriche sulla superficie dei conduttori. Tale tubo individua sulla superficie esterna del conduttore 1 la curva chiusa Γ_1, e sul conduttore la curva Γ_2. Si costruisca la superficie chiusa costituita dalla superficie laterale del tubo di flusso e da due superfici S_1, interna al conduttore 1ed S_2, interna al conduttore 2, che si appoggiano rispettivamente a Γ_1 e Γ_2. Il flusso del campo elettrico attraverso la superficie chiusa così definita è nullo, perché il campo è nullo sulle superfici S_1 ed S_2, ed è parallelo alla superficie del tubo di flusso. Ne segue che, per la legge di Gauss (eq. 6), la carica

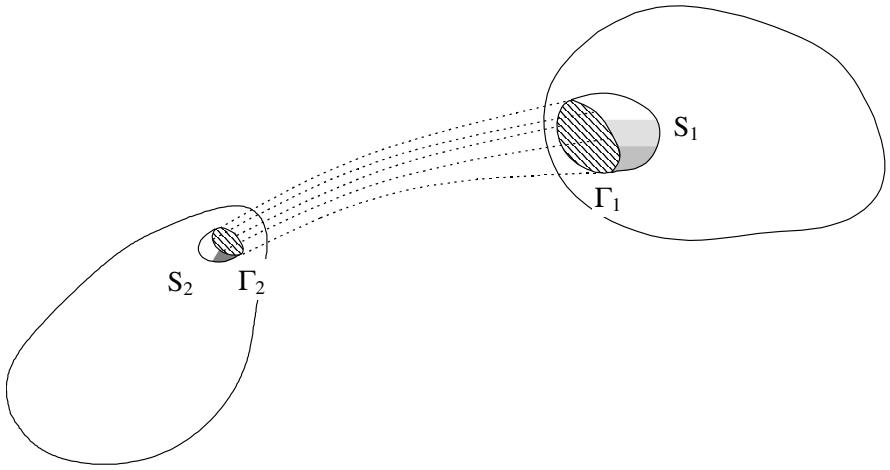

fig. 7

totale racchiusa all'interno della superficie è nulla, e che quindi se q_1 e q_2, sono rispettivamente le cariche sopra le superfici dei due conduttori delimitate dalle curve Γ_1 e Γ_2, $q_1 = -q_2$. E' quindi possibile affermare che le cariche contenute sulle superfici di corpi conduttori delimitate da un tubo di flusso sono uguali e di segno opposto.
Nel caso in cui due conduttori siano disposti in modo tale che tutte le linee di campo uscenti da uno si richiudono sull'altro e viceversa, le cariche totali sui due conduttori sono uguali e di segno opposto. L'insieme di due conduttori siffatti viene definito condensatore. I due conduttori che costituiscono il condensatore sono detti armature del condensatore.

Problema generale dell'elettrostatica

Il problema generale dell'elettrostatica consiste nel determinare il campo elettrico in tutto lo spazio quando per alcuni conduttori presenti sono fissati i rispettivi potenziali, mentre per gli altri sono fissate le cariche totali possedute.
E' possibile dimostrare che, nel caso in cui il potenziale soddisfi le condizioni di regolarità all'infinito, la soluzione del problema generale dell'elettrostatica è unica. Si supponga infatti che siano assegnati i potenziali di tutti i corpi conduttori. Nelle regioni esterne ai conduttori il potenziale obbedisce all'equazione di Laplace ed è quindi armonico. Le condizioni al contorno inoltre definiscono un problema di Dirichlet: il potenziale è infatti assegnato su tutto il contorno. Per quanto detto sulle funzioni armoniche il potenziale che soddisfa un problema così posto è unico.
Si consideri ora il caso in cui non sia noto il potenziale elettrico su alcuni dei conduttori, ma siano invece date le cariche totali su di essi. Anche in questo caso, nella regione esterna ai conduttori il potenziale scalare è armonico. La condizione al contorno sulla superficie esterna S_i dell'i-esimo conduttore che possiede la carica totale Q_i sono però del tipo:

$$Q_i = \varepsilon \int_{S_i} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dS} = -\varepsilon \int_{S_i} \nabla v \cdot \mathbf{dS} = -\varepsilon \int_{S_i} \frac{\partial v}{\partial n} dS \,. \qquad 20.$$

Si dimostra che, anche in questo caso, la soluzione del problema è unica. Infatti si supponga, per assurdo, che esistano due soluzioni v_1 e v_2 che soddisfino il problema così formulato. Per la linearità del problema, la funzione $v_3 = v_1 - v_2$ sarà una funzione regolare all'infinito che soddisfa l'equazione di Laplace su tutto lo spazio esterno ai conduttori, con le seguenti condizioni al contorno: nulla sulle superfici dei conduttori sui quali, nel problema iniziale, è stato imposto il potenziale, e costante (ma non necessariamente nulla) sulle superfici dei conduttori sui quali è stata imposta la carica. Su tali conduttori, per come è stata definita la funzione v_3, la carica totale è nulla.
Utilizzando ora la 1° formula di Green e ponendo $\varphi = \psi = v_3$, è possibile scrivere:

$$\int_S v_3 \frac{\partial v_3}{\partial n} dS = \int_\tau \left[\left(\nabla v_3 \right)^2 + \nabla^2 v_3 \right] d\tau \,. \qquad 21.$$

Nella regione esterna ai conduttori, limitata da una superficie sferica di raggio infinito e dalle superfici esterne dei conduttori, vale l'equazione $\nabla^2 v_3 = 0$. Applicando la 21 a tale regione si ottiene :

$$\sum_{i=1}^{n} v_3 \int_{S_i} \frac{\partial v_3}{\partial n} dS = \int_\tau \left(\nabla v_3 \right)^2 d\tau \,, \qquad 22.$$

dove la sommatoria è estesa agli *n* conduttori perché, come è stato detto, v_3 è regolare all'infinito. si noti che, essendo v_3 costante su ciascuna delle superfici esterne dei conduttori, è stato portato fuori dal segno di integrazione. E' immediato verificare che tutti i termini della sommatoria a primo membro sono nulli. Infatti, sui conduttori su cui nel problema iniziale è stato imposto il potenziale, v_3 è nullo, mentre sugli altri è nullo $\int_{S_i} \frac{\partial v_3}{\partial n} dS$, perché, in base alla 20,

$$\int_{S_i} \frac{\partial v}{\partial n} dS = -\frac{Q}{\varepsilon_i} = 0 \,.$$

Il secondo membro della 22 è quindi nullo, il che può verificarsi solo se $\nabla v_3 = 0$ su tutto la spazio esterno ai conduttori. La funzione v_3, è allora ovunque uguale ad una costante e, poiché per le condizioni di regolarità essa è nulla all'infinito, tale costante è zero. Risulta pertanto $v_1 = v_2$, il che prova l'asserto.

Si consideri ora il caso di *n* conduttori con potenziale assegnato immersi nel vuoto. Sia v_i il potenziale dell'*i*-esimo conduttore. Sia inoltre φ_i una funzione armonica, regolare all'infinito e che assume valore unitario sull'*i*-esimo conduttore e sia nulla sugli altri. Tale funzione rappresenta il potenziale nello spazio quando tutti i conduttori hanno potenziale nullo tranne l'*i*-esimo, che ha potenziale pari a uno. La funzione così definita:

$$v\left(P_0\right) = v_1\varphi_1 + v_2\varphi_2 + v_3\varphi_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + v_n\varphi_n = \sum_{i=1}^{n} v_i \varphi_i \,, \qquad 23.$$

combinazione lineare delle φ_i, rappresenta la soluzione unica del problema generale dell'elettrostatica quando siano assegnati i potenziali sui conduttori. Essa infatti è: armonica su tutto il dominio e regolare all'infinito, poiché è somma di funzioni che godono di tali proprietà. Inoltre, per come sono state definite le funzioni φ_i, assume, sull'*i*-esimo conduttore, il valore v_i.

Introducendo la 23 nella 20 è possibile esprimere la carica sul *j*-esimo conduttore come segue:

$$Q_i = -\varepsilon \int_{S_i} \frac{\partial v}{\partial n} \mathrm{dS} = -\varepsilon \sum_{i=1}^{n} v_j \int_{S_i} \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} \mathrm{dS} \,. \qquad 24.$$

Ponendo:

$$c_{ij} = -\varepsilon \int_{S_i} \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} \mathrm{dS} \,,$$

la 24 può essere riscritta come:

$$Q_i = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} v_i \,. \qquad 25.$$

I coefficienti $c_{i\,j}$ dipendono unicamente dalla geometria del sistema e dalle costante dielettrica. Nel caso in cui $i \neq j$, $c_{i\,j}$ è uguale alla carica che viene indotta sul j-esimo conduttore quando l'i-esimo ha potenziale unitario e tutti gli altri potenziale nullo e viene detto coefficiente di induzione elettrostatica. Nel caso in cui $i = j$, $c_{i\,i}$ è pari alla carica che possiede l'i-esimo conduttore quando viene caricato con potenziale unitario, essendo nulli i potenziali di tutti gli altri conduttori, e viene detto capacità.
E' possibile scrivere una relazione come la 255 per ogni conduttore:

$$\begin{cases} Q_1 = c_{11}v_1 + c_{12}v_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + c_{1n}v_n \\ Q_2 = c_{21}v_1 + c_{22}v_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + c_{2n}v_n \\ . \\ . \\ Q_n = c_{n1}v_1 + c_{n2}v_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + c_{nn}v_n \end{cases} \qquad 26.$$

La 26 può essere sinteticamente espressa nella forma matriciale:

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{c}]\mathbf{v}\,, \qquad 27.$$

che mette in relazione il vettore delle cariche **Q** avente come componenti le cariche Q_i con il vettore delle tensioni **v**, avente come componenti i potenziali v_i tramite la matrice di conducibilità **[c]** formata dai coefficienti $c_{i\,j}$.
E' possibile dimostrare che:

- La matrice di conducibilità è invertibile. E' quindi possibile scrivere la relazione inversa della 27:

  $$\mathbf{v} = [\mathbf{c}]^{-1}\mathbf{Q}\,. \qquad 28.$$

  Tramite la 28 è possibile risolvere il problema elettrostatico quando sono note le cariche su ciascun conduttore, anziché i potenziali. La 28 infatti permette di calcolare i potenziali sui conduttori e di ricondursi al caso già risolto. I coefficienti $b_{i\,j}$ della matrice inversa $[\mathbf{b}] = [\mathbf{c}]^{-1}$ dipendono unicamente dalla geometria del sistema. Il generico coefficiente $b_{i\,j}$ è uguale al potenziale sul j-esimo conduttore quando l'i-esimo ha carica unitaria e tutti gli altri hanno carica nulla. Nel caso in cui $i = j$, $b_{i\,i}$ è pari al potenziale posseduto dall'i-esimo conduttore quando possiede carica unitaria, essendo nulle le cariche su tutti gli altri conduttori
- La matrice di conducibilità e la sua inversa sono simmetriche. Vale cioè:

  $$\begin{aligned} c_{i\,j} &= c_{ji} \\ b_{i\,j} &= b_{ji} \end{aligned}.$$

Condensatori
Come già visto, tra le due armature di un condensatore si verifica un perfetto accoppiamento elettrostatico, che non è turbato dalla presenza di eventuali altri conduttori. Le cariche che si formano sulle armature di un condensatore sono uguali e di segno opposto. Un'ottima approssimazione di condensatore è costituita da due conduttori posti a distanza tra loro molto piccola rispetto alla distanza da un qualsiasi altro conduttore (vedi fig. 8). In questo modo è possibile considerare il problema elettrostatico delle due armature del condensatore, trascurando l'influenza di altri conduttori. E' quindi possibile scrivere, utilizzando la 28:

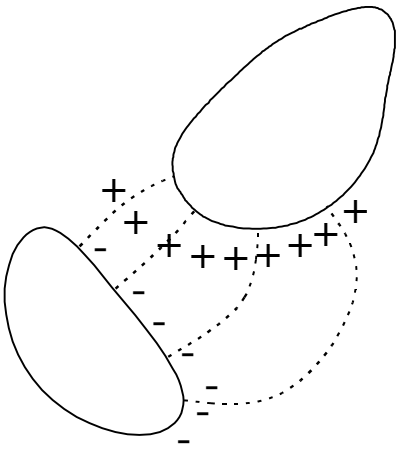

fig. 8

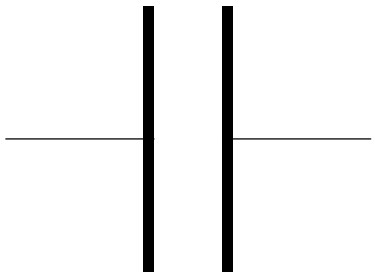

fig. 9

$$\begin{cases} v_1 = b_{11}\, Q_1 + b_{21}\, Q_2 \\ v_2 = b_{12}\, Q_1 + b_{22}\, Q_2 \end{cases} \qquad 29.$$

Ma poiché $Q_2 = -\, Q_1 = Q$, dalla 29 si ottiene:

$$\Delta v = v_1 - v_2 = \frac{Q}{C}\,. \qquad 30.$$

avendo posto $C = \left(b_{11} - b_{21} + b_{12} - b_{22}\right)^{-1}$. La grandezza C viene detta capacità del condensatore, ed è definita come rapporto tra il valore assoluto della carica posseduta da ciascuna armatura e la differenza di potenziale tra le armature stesse:

$$C = \frac{Q}{\Delta v}\,. \qquad 31.$$

La capacità di un condensatore dipende unicamente dalla sua geometria e dalla costante dielettrica del mezzo. Il condensatore viene indicato con il simbolo circuitale riportato in fig. 9.

Calcolo della capacità di un condensatore piano.

Le armature di un condensatore piano sono costituite da due conduttori piani e paralleli, di superficie S e posti tra loro a distanza d, come illustrato in fig. 10. Trascurando gli effetti di bordo, è possibile supporre che sulle due armature la carica sia distribuita con densità superficiale uniforme ρ_S e - ρ_S. Per calcolare il campo di una singola armatura, si faccia riferimento alla fig. 11. Per simmetria, il campo elettrico è diretto perpendicolarmente alla superficie carica. Si applichi allora la 6 alla superficie chiusa cilindrica S_{c1}, che contiene carica totale nulla. Il flusso di campo elettrico attraverso le superficie laterale del cilindro è nulla, perché tale superficie è parallela al campo elettrico stesso. Se ne deduce che il flusso di campo elettrico attraverso le due basi del cilindro è uguale, e che quindi il campo elettrico non è funzione della distanza dalla superficie carica. Applicando ora la 6 alla superficie S_{c2}, e ragionando in maniera analoga si ottiene:

$$E_1 = \frac{\rho_S}{2\varepsilon}.$$

Il campo generato dal condensatore è dato dalla sovrapposizione dei campi dovuti alle due armature, e vale zero nelle regioni esterne ad esse e:

$$E = \frac{\rho_S}{\varepsilon}$$

nella regione interna. Dalla 7 si ha inoltre

$$E = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

che integrata fornisce:

$$v_1 - v_2 = \frac{\rho_s d}{\varepsilon}.$$

Ricordando che $Q = S\rho_s$, applicando la definizione di capacità si ottiene:

$$C = \frac{Q}{\Delta v} = \frac{\varepsilon S}{d}. \qquad 32.$$

Calcolo della capacità di un condensatore cilindrico.

Le armature di questo condensatore sono due superfici cilindriche e concentriche, l'una interna all'altra (vedi fig. 12). Sia R_1 il raggio dell'armatura interna, R_2 quello dell'armatura esterna ed l la lunghezza assiale del condensatore. Supponendo di poter trascurare gli effetti di bordo, considerazioni riguardo alla simmetria del sistema suggeriscono che il campo elettrico nella regine

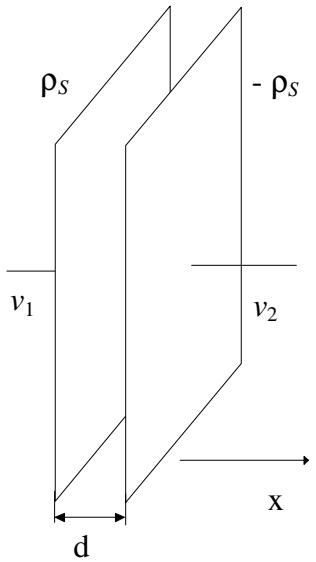

fig. 10

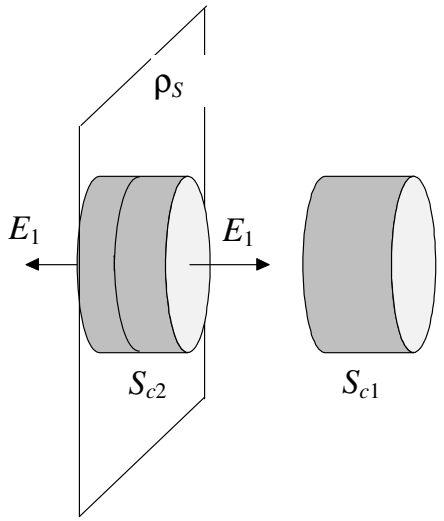

fig. 11

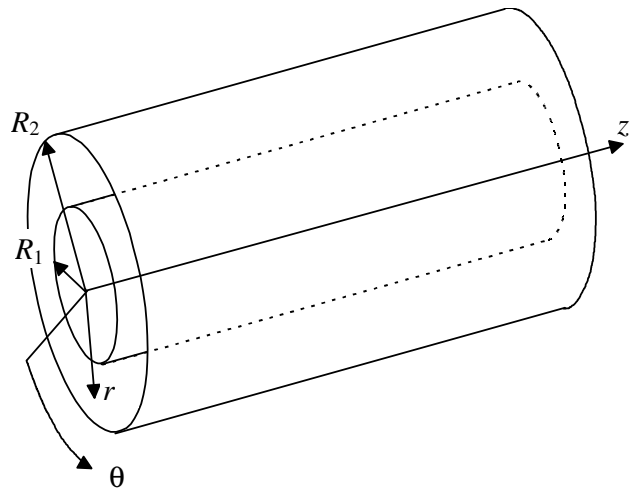

fig. 12

tra le armature è diretto radialmente ed è indipendente dalle variabili z e θ. Applicando allora la 6 utilizzando come superficie di integrazione la superficie di un cilindro coassiale con le armature del condensatore ed avente raggio r compreso tra R_1 ed R_2, si ricava:

$$E_r = \frac{Q}{2\pi r l \varepsilon}.$$

Riscrivendo la 7 nel sistema di riferimento adottato, si ottiene:

$$E_r = -\frac{\partial v}{\partial r},$$

da cui è possibile ricavare la differenza di potenziale tra le due armature:

$$v_1 - v_2 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi r l \varepsilon} dr = \frac{Q}{2\pi l \varepsilon} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$

La capacità del condensatore cilindrico vale quindi:

$$. \; C = \frac{Q}{\Delta v} = \frac{2\pi l \varepsilon}{\ln\left(R_2/R_1\right)}. \qquad 33.$$

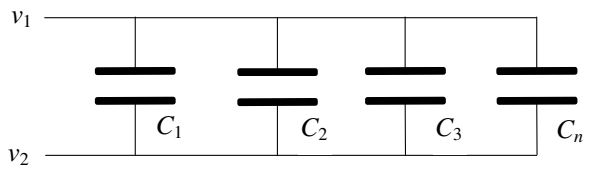

fig. 13

Reti di condensatori.

Condensatori in parallelo: i condensatori illustrati in fig. 13 sono disposti in parallelo. Due o più condensatori si dicono in parallelo quando le armature di ciascuno di essi sono collegate in modo da formare un unico condensatore. Caratteristica peculiare del collegamento in parallelo è che le armature di tutti i condensatori sono soggette alla stessa differenza di potenziale $\Delta v = v_1 - v_2$. In tale configurazione i condensatori possiedono le cariche:

$$Q_1 = C_1 \Delta v, \; Q_2 = C_2 \Delta v, \; Q_3 = C_3 \Delta v, \ldots\ldots\ldots, Q_n = C_n \Delta v,$$

dove C_1, C_2, C_3,..... C_n, sono le capacità degli n condensatori. La carica totale che si trova sulle armature positive del condensatore vale:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i = \Delta v \sum_{i=1}^{n} C_i \ .$$

La batteria di condensatori ha quindi una capacità complessiva C pari a:

$$. \ C = \sum_{i=1}^{n} C_i \ . \qquad 34.$$

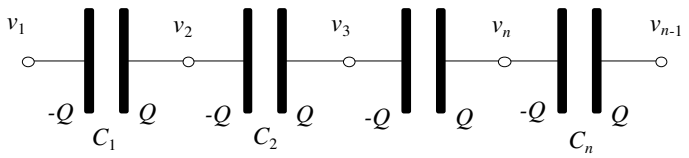

fig. 14

Condensatori in serie: i condensatori illustrati in fig. 14 sono disposti in serie. Due o più condensatori si dicono connessi in serie quando sono collegati consecutivamente, in modo che la carica su ognuna delle coppie di armature metallicamente connesse è nulla. In tal modo il valore assoluto della carica su ciascuna armatura dei condensatori che costituiscono la batteria è lo stesso ed è uguale a Q: Si ha quindi che per ogni condensatore della batteria la differenza di potenziale tra le armature è:

$$v_1 - v_2 = \frac{Q}{C_1}, \ v_2 - v_3 = \frac{Q}{C_2}, \ ....., \ v_n - v_{n+1} = \frac{Q}{C_n},$$

Sottraendo membro a membro si ottiene la differenza di potenziale Δv a cui è soggetta la batteria:

$$\Delta v = v_1 - v_{n+1} = Q \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i} \ .$$

La capacità complessiva C di una batteria di condensatori collegati in serie è quindi pari a:

$$. \ C = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}} \ . \qquad 35.$$

Se i condensatori della batteria hanno capacità uguale C_1, è immediato verificare che la capacità della batteria si riduce a C_1/n. In compenso, ogni singolo condensatore viene sollecitato da una differenza di potenziale ridotta di un fattore $1/n$ rispetto a quella a cui è sottoposta la batteria.

Energia elettrostatica. Energia in un condensatore.

La presenza nello spazio di conduttori carichi determina, come si è visto, una distribuzione di campo elettrico. A tale distribuzione è associata l'esistenza di un energia che, in caso di materiale lineare, è stata definita al capitolo ?maxwell come :

$$\mathrm{E_e} = \frac{1}{2} \int_{\tau} \varepsilon \mathbf{E}^2 \, \mathrm{dV} \ . \qquad 36.$$

e denominata energia elettrostatica. L'energia elettrostatica è di natura conservativa, vale a dire che è "immagazzinata" quando i conduttori vengono caricati, e restituita quando questi si scaricano.

Si vuole adesso calcolare un'espressione che, senza perdere in validità generale, risulti di più facile applicazione nel calcolo dell'energia immagazzinata in un condensatore. A questo scopo si considerino i due conduttori in fig. 15, che costituiscono le armature di un condensatore, e si calcoli l'energia elettrostatica tramite la 36 quando questi, posti ad una differenza di potenziale Δv possiedono una carica di valore assoluto Q. Il dominio di integrazione della 36 può essere ristretto allo spazio esterno ai conduttori poiché, come si è visto, all'interno di essi il campo è nullo. Su tutto il dominio di integrazione il campo elettrico è solenoidale. Tale dominio può allora essere considerato come l'insieme degli infiniti tubi di flusso elementari del campo elettrico $\delta\tau_i$, che partono da uno dei conduttori e si richiudono sull'altro, e l'integrale nella 36 può essere visto come la sommatoria infinita degli integrali estesi a tutti i tubi di flusso elementari. Il volume dV, una volta fatta questa premessa, è un tronco di tubo di flusso elementare, con altezza infinitesima dl tangente alla direzione del tubo stesso (e quindi tangente al campo elettrico) e base dS perpendicolare a dl:

$$E_e = \frac{1}{2}\sum_{\infty}\int_{\delta\tau_i} \varepsilon \mathbf{E}^2 dV = \frac{1}{2}\sum_{\infty}\int_{\Gamma_{12}} \varepsilon \mathbf{E}^2 dS dl \,. \qquad 37.$$

Il prodotto $\varepsilon E dS$, per come è stata definita dS (sempre perpendicolare a dl e quindi ad $\mathbf{E}$) rappresenta il flusso elementare del campo di induzione elettrica associato al tubo di flusso. Poiché tale grandezza rimane costante lungo tutto il tubo, può essere portata fuori dal segno di integrazione. Risulta quindi:

$$E_e = \frac{1}{2}\sum_{\infty} \varepsilon E dS \int_{\Gamma_{12}} E dl \,. \qquad 38.$$

Poiché $\mathbf{E}$ e dl sono sempre paralleli, inserendo la 8 nella 38 si ottiene:

$$E_e = \frac{1}{2}\sum_{\infty} \varepsilon (v_1 - v_2) E dS = \frac{1}{2}\Delta v \sum_{\infty} D dS \,. \qquad 39.$$

La sommatoria infinita che compare nella 39 rappresenta la somma dei flussi elementari di campo di induzione elettrica $\mathbf{D}$ estesa a tutti i tubi di flusso elementari. Quindi essa non è altro che il flusso complessivo del campo di induzione elettrica uscente da uno dei due conduttori, che per la legge di Gauss (6) vale Q. Questo consente si formulare l'espressione finale che esprime l'energia elettrostatica immagazzinata nel caso di due conduttori carichi:

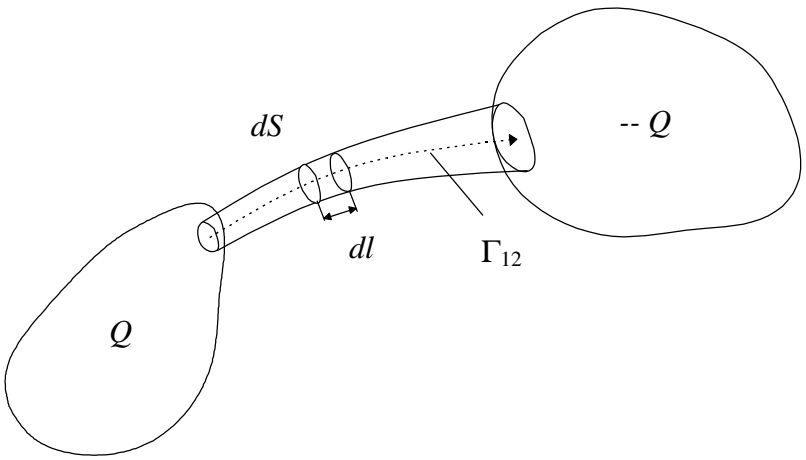

fig. 15

$$E_e = \frac{1}{2} Q \Delta v \, .$$

Ricordando la 31, è anche possibile scrivere:

$$E_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \, , \qquad 40.$$

$$E_e = \frac{1}{2} C v^2 \, , \qquad 41.$$

che sono le relazioni più comunemente utilizzate nel calcolo dell'energia di un condensatore.