TEORIA DEI CIRCUITI

Introduzione

Si consideri un sistema elettrico costituito da un certo numero di “componenti” (vedi figura 1).

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0$$

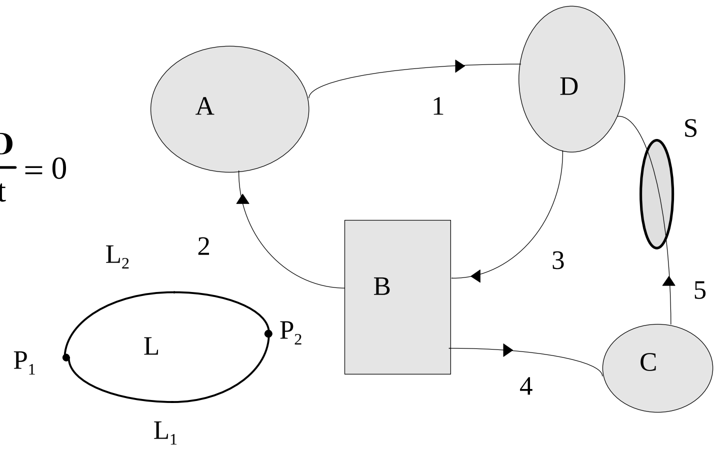


Figura 1

Ciascun componente (A, B, C, D) è racchiuso all’interno di un contenitore da cui escono dei terminali collegati elettricamente tra di loro mediante dei fili metallici (1, 2, 3, 4, 5). Tutto il sistema è immerso nell’aria che è un mezzo isolante. La regione costituita da tutto lo spazio meno quello occupato dai componenti (spazio esterno ai componenti) è una **regione a connessione lineare semplice** : presa una qualsiasi linea chiusa che giace in tale regione, esiste almeno una superficie che si appoggia a tale linea che giace anch’essa tutta all’interno della regione considerata. Si supponga che nello spazio esterno ai componenti sia possibile considerare nulla la derivata temporale della induzione magnetica e dello spostamento elettrico. Si consideri quindi la circuitazione del campo elettrico relativa ad una qualsiasi linea chiusa L che giace nello spazio esterno ai componenti. Risulta :

$$\oint_L \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = 0 \qquad (1)$$

Dalla (1) segue che la circuitazione del campo elettrico lungo una linea che congiunge due punti qualsiasi P_1 e P_2, rimanendo sempre nello spazio esterno ai componenti, non dipende dalla particolare linea scelta ma unicamente dai punti P_1 e P_2 (si dice che **il campo elettrico è conservativo**) e viene chiamata differenza di potenziale tra il punto P_1 ed il punto P_2 :

$$\int_{P_1,L_1}^{P_2} \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl} = \int_{P_1,L_2}^{P_2} \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl} = v_{12} \qquad (2)$$

Si consideri una superficie chiusa S qualsiasi che giace nello spazio esterno ai componenti, risulta :

$$\oint_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)\mathbf{n}\, dS = 0 \Rightarrow \oint_S \mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\, dS = 0 \qquad (3)$$

La densità volumetrica di corrente elettrica, nello spazio esterno ai componenti è nulla ovunque tranne che all'interno delle connessioni metalliche. In particolare si consideri una superficie S che racchiude al suo interno solo un tratto di connessione metallica; dalla (3) segue che la corrente che circola in quella connessione, non dipende dal punto considerato della connessione, ma è una caratteristica della connessione.
Nessun sistema elettrico reale verifica esattamente le ipotesi assunte per quello sopra descritto ; tali ipotesi sono però soddisfatte con buona approssimazione per molti sistemi elettrici reali, per descrivere i quali si fa uso di un modello ideale che prende il nome di circuito elettrico a costanti concentrate. In particolare, per tali sistemi, la circuitazione del campo elettrico lungo una linea che congiunge due punti non è indipendente dalla linea scelta, ma la dipendenza è così piccola che risulta trascurabile a tutti gli effetti pratici. In tal caso, invece di parlare di differenza di potenziale, per indicare l'approssimazione fatta, si preferisce parlare di tensione tra i due punti.

Definizioni e Leggi di Kirchhoff

Un **circuito elettrico a costanti concentrate**, o rete elettrica, è un insieme di componenti elettrici ideali descritto dalle leggi di Kirchhoff. Nel seguito, per semplicità, con la parola circuito elettrico si intenderà circuito elettrico a costanti concentrate.

Un componente elettrico ideale (vedi figura 2) è caratterizzato da un numero di terminali, o morsetti.

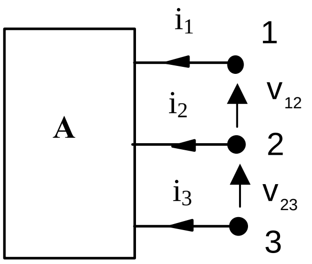


Fig. 2 Componente a tre terminali

A ciascun terminale è associata una corrente che è univocamente definita, in valore e segno, una volta che sia stato arbitrariamente scelto il suo verso positivo (indicato dalla freccia): una corrente i_1 = 2 significa che una corrente di intensità pari a 2 Ampère entra nel componente A attraverso il terminale 1, viceversa, una corrente i_1 = - 2 significa che una corrente di intensità pari a 2 Ampère esce dal componente A attraverso il terminale 1
Ad ogni coppia di terminali è associata una tensione che è univocamente definita, in valore e segno, una volta che sia stato arbitrariamente scelto il terminale di riferimento (indicato col segno -): una tensione v_{12} = 2 significa che il terminale 1 si trova ad un potenziale superiore di 2 Volt rispetto a quello del terminale 2, viceversa una tensione v_{12} = - 2 significa che il terminale 1 si trova ad un potenziale inferiore di 2 Volt rispetto a quello del terminale 2.
Un componente con 2 terminali viene chiamato bipolo. Nel seguito, per semplicità, si supporrà che i circuiti in esame siano costituiti di soli bipoli; se ciò non fosse vero, si può pensare di ricondursi alla ipotesi, sostituendo i componenti con più di due terminali con opportuni circuiti equivalenti costituiti da soli bipoli: ciò è sicuramente possibile mediante l'introduzione di generatori controllati (che verranno definiti nel seguito).
I terminali dei componenti sono collegati tramite connessioni ideali, caratterizzate dall'avere una tensione nulla ai loro capi (vedi figura 3).

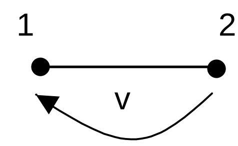


Fig. 3 Connessione ideale (v = 0)

Un nodo di un circuito elettrico è un punto a cui sono collegati 2 o più terminali, oppure è un terminale isolato. Il circuito della figura 4 è costituito da cinque bipoli; collegati a 4 nodi (A, B, C, D).

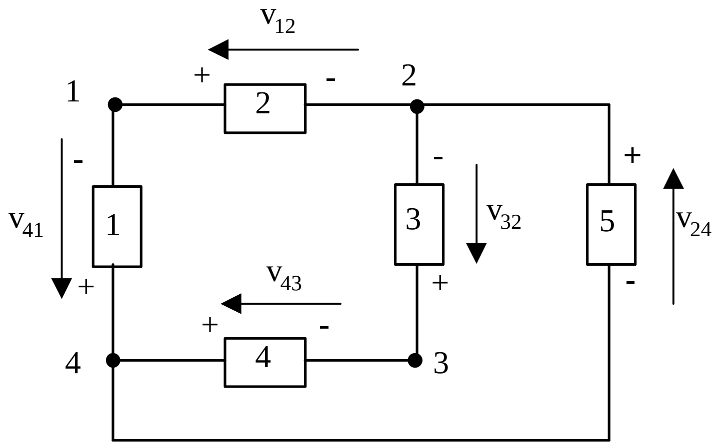


Figura 4. Circuito con 5 elementi e 4 nodi.

Si definisce ramo un tratto di circuito che unisce due nodi.
Si definisce maglia una sequenza di rami che individua un percorso chiuso.
Si definisce sequenza chiusa di nodi una successione di nodi tale che il primo nodo coincide con l'ultimo.

La Legge di Kirchhoff delle Tensioni (LKT) afferma che per una qualsiasi sequenza chiusa di nodi la somma algebrica delle tensioni (tra due nodi successivi) è nulla.
La LKT applicata ad una maglia del circuito afferma che la somma algebrica delle tensioni di ramo è nulla.

Con riferimento al circuito della figura 4, applicando la LKT alla sequenza chiusa di nodi 1234 si ottiene la seguente equazione:

$$-v_{12}+v_{32}+v_{43}-v_{41}=0 \tag{4}$$

Le tensioni di nodo di un circuito sono le tensioni dei nodi del circuito rispetto ad un nodo di riferimento, la cui scelta è arbitraria. La LKT permette di scrivere la tensione tra una qualsiasi coppia di nodi del circuito in funzione delle tensioni di nodo: con riferimento alla figura 4, supponendo di scegliere il nodo A come nodo di riferimento, ed indicando con e_B ed e_C le tensioni di nodo dei nodi B e C ($e_B=v_{BA};e_C=v_{CA}$) la equazione (4) permette di scrivere:

$$v_{BC}=e_B-e_C \tag{5}$$

La sequenza chiusa di nodi ABCDA individua un percorso chiuso attraverso i componenti del circuito: i tratti di tale percorso all'interno di ciascun componente vengono detti rami ed il percorso, maglia. Applicando la LKT alla maglia ABCDA, tenendo conto dei versi positivi scelti per le tensioni ai capi dei componenti (tensioni di ramo) si ottiene la seguente relazione:

$$v_2 - v_3 - v_4 + v_1 = 0 \tag{6}$$

La LKT applicata ad una maglia del circuito afferma che la somma algebrica delle tensioni di ramo è nulla.

La **legge di Kirchhoff delle Correnti (LKC)** afferma che per ogni superficie chiusa che interseca unicamente le connessioni tra i componenti, e non i componenti stessi, la somma algebrica delle correnti che attraversano la superficie è nulla.

Si consideri in primo luogo una superficie chiusa che racchiuda al suo interno solo un bipolo (vedi figura 5a).

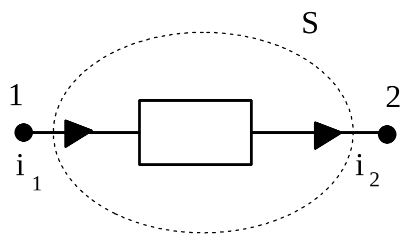


Fig. 5a. Legge di Kirchhoff delle correnti applicata ad un bipolo.

La corrente i_1 entra nella superficie indicata con la linea tratteggiata S nella figura, mentre la corrente i_2 esce da tale superficie; la LKC afferma quindi che deve essere: $i_2 = i_1$.Tenendo conto di ciò, con riferimento alla figura 5b si consideri la superficie chiusa la cui rappresentazione nel piano del disegno è la linea tratteggiata S_1.

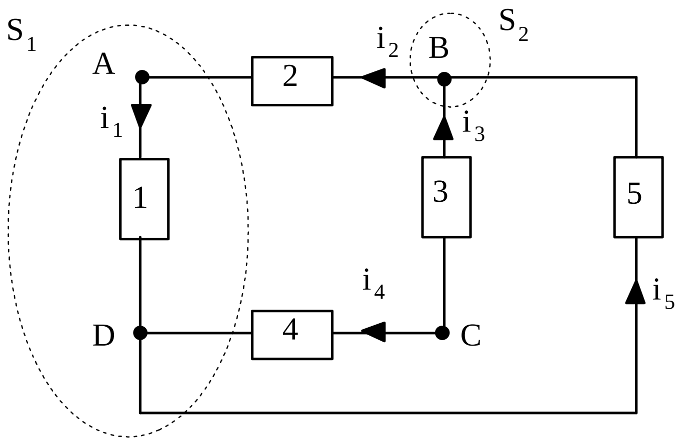


Figura 5b. Legge di Kirchhoff delle correnti.

Le correnti che attraversano tale superficie sono la corrente i_2 e la corrente i_4 che entrano nella superficie e la corrente i_5 che esce, per cui la LKC applicata a tale superficie permette di scrivere la seguente equazione:

$$-i_2 - i_4 + i_5 = 0 \tag{7}$$

Si consideri la superficie chiusa la cui rappresentazione nel piano del disegno è la linea tratteggiata S_2 : tale superficie racchiude al suo interno solo il nodo B e la LKC ad essa associata afferma che la somma algebrica delle correnti dei rami che escono dal nodo B è nulla:

$$i_2 - i_3 - i_5 = 0 \tag{8}$$

Le due leggi di Kirchhoff, delle tensioni e delle correnti, permettono di scrivere delle equazioni lineari tra le tensioni e le correnti che non dipendono dalla natura dei componenti presenti nel circuito, ma unicamente da come essi sono collegati tra di loro (topologia del circuito).

Sia dato un circuito caratterizzato da R rami ed N nodi. Per ciascun ramo si assumano versi positivi per la tensione di ramo e la corrente di ramo secondo la convenzione dell'utilizzatore, che, una volta scelto il verso positivo della tensione, fissa commeverso positivo della corrente quello che porta da nodo con tensione maggiore a quello con tensione minore (vedi fig. 6).

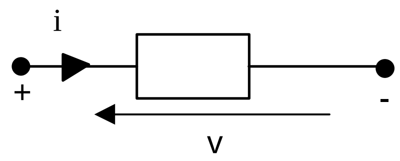


Fig. 6. Versi di riferimento per la tensione e la corrente di ramo secondo la convenzione dell'utilizzatore.

Teorema di Tellegen

Preso arbitrariamente un nodo come nodo di riferimento del circuito, la LKT permette di scrivere R relazioni del tipo (5) linearmente indipendenti che in forma matriciale assumono la forma:

$$\mathbf{v} = \mathbf{M}\,\mathbf{e} \tag{9}$$

dove **v** è il vettore delle tensioni di ramo, **e** è il vettore delle tensioni di nodo ed **M** è una matrice avente R righe ed (N-1) colonne, il cui generico elemento M_{hk} risulta nullo se il ramo h non è collegato al nodo k, uguale a +1 se la corrente del ramo h esce dal nodo k, -1 se la corrente del ramo h entra nel nodo k.

La LKC applicata a tutti i nodi tranne quello di riferimento permette di scrivere (N-1) equazioni del tipo (8) che in forma matriciale assumono la forma:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{i} = 0 \tag{10}$$

dove **i** è il vettore delle correnti di ramo ed **A** è una matrice, chiamata matrice di incidenza ridotta, avente (N-1) righe ed R colonne, il cui generico elemento A_{hk} risulta nullo se il ramo k non è collegato al nodo h, uguale a +1 se la corrente del ramo k esce dal nodo h, -1 se la corrente del ramo k entra nel nodo h. Risulta quindi:

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \tag{11}$$

Dalle equazioni (9), (10) ed (11) segue il **Teorema di Tellegen** che afferma che, per un dato circuito, preso un qualsiasi vettore di tensioni di ramo v_1, che soddisfi le LKT (9) per quel circuito, ed un vettore di correnti di ramo i_2, che soddisfi le LKC (10) per quel circuito, allora vale la seguente relazione:

$$\mathbf{v_1}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{i}_2 = 0 \qquad (12)$$

Facendo riferimento a versi associati di tensione e corrente (fig. 6), si definisce potenza elettrica assorbita da un bipolo in un generico istante t, il prodotto tra la tensione presente ai suoi terminali all'istante t e la corrente che lo attraversa in quell'istante:

$$p(t) = v(t)i(t) \qquad (13)$$

Quando la potenza così definita è positiva il bipolo assorbe potenza; quando invece è negativo il bipolo eroga potenza
Più in generale, facendo riferimento ad un generico componente con N terminali, la potenza elettrica assorbita da tale componente in un generico istante t è data dalla seguente espressione:

$$p(t) = \sum_{k=1}^{N-1} v_{kN}(t) i_k(t) \qquad (13.a)$$

dove si è preso l'ennesimo terminale come terminale di riferimento per le tensioni ed i versi positivi delle correnti sono tutti entranti nell'elemento. Si può dimostrare che la potenza elettrica assorbita espressa dalla (13.a) non dipende dalla scelta del terminale di riferimento
E' possibile introdurre una convenzione diversa da quella già menzionata dell'utilizzatore: la convenzione del generatore. Secondo tale convenzione, una volta scelto il verso positivo della tensione, viene fissato come verso positivo della corrente quello che porta da nodo con tensione minore a quello con tensione maggiore (vedi fig. 7).

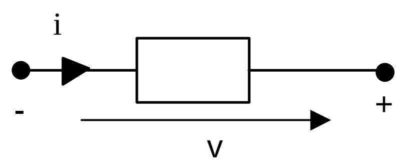


Fig. 7. Versi di riferimento per la tensione e la corrente di ramo secondo la convenzione del generatore.

Per un bipolo per il quale si sia adottata la convenzione del generatore, il prodotto :

$$p(t) = v(t)i(t) \qquad (14)$$

assume il significato di potenza erogata. Quando tale prodotto è positivo il bipolo eroga potenza; quando invece è negativo il bipolo assorbe potenza

COMPONENTI ELETTRICI

Nel seguito vengono descritte e discusse le equazioni costitutive e le proprietà fondamentali di alcuni tra i componenti di impiego più diffuso in elettrotecnica.
I componenti elettrici sono soggetti a diverse classificazioni, in base alle loro proprietà.

Un componente viene detto **passivo** quando l'energia E_a assorbita da esso, ottenuta integrando nel tempo la potenza assorbita p_a, è in qualsiasi istante maggiore o uguale a zero:

$$E_a(t) = \int_{-\infty}^{t} p_a(\tau) d\tau \geq 0 \quad \forall t \tag{15}$$

La (15) implica che un componente passivo può assorbire potenza p_a negativa (ovvero può erogare potenza) solo se può attingere ad una energia interna precedentemente immagazzinata. Un componente che non gode della proprietà (15) si dice **attivo**.
Un componente per il quale sia possibile esprimere la tensione in funzione della corrente, ovvero sia possibile scrivere la legge costitutiva nella forma:

$$v = v(i)$$

viene detto **componente controllato in corrente**.
Un componente per il quale sia possibile esprimere la corrente in funzione della tensione, ovvero sia possibile scrivere la legge costitutiva nella forma:

$$i = i(v)$$

viene detto **componente controllato in tensione**.

Resistore lineare

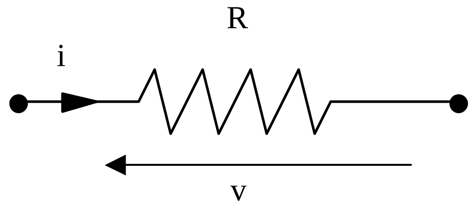


Figura 8 Resistore lineare

Il simbolo del resistore lineare è indicato nella figura 8. Con riferimento a versi associati di tensione e corrente, la legge costitutiva del resistore è la seguente:

$$v = Ri \tag{16}$$

dove R è una costante chiamata resistenza del resistore (misurata in ê). L'espressione della potenza elettrica assorbita segue dalla (13) e risulta:

$$p = Ri^2 \tag{17}$$

Se la resistenza R è positiva, la potenza elettrica assorbita risulta essere sempre positiva od al più nulla, quando la corrente è nulla; in base alla (15) il resistore è quindi un componente passivo. Un filo di rame di lunghezza L e sezione S può essere modellato per mezzo di un resistore di resistenza R pari a ρ L / S, in cui la potenza elettrica assorbita viene trasformata in energia interna del sistema e ceduta interamente all'ambiente circostante sotto forma di calore, se la temperatura del filo viene mantenuta costante.
Dalla (16) segue che se è nota la corrente che circola sul resistore lineare è nota anche la tensione ai capi del resistore; il resistore lineare è quindi un componente controllato in corrente. Dalla (16) segue inoltre che se R è diversa da zero, quando è nota la tensioni ai capi del resistore, è anche nota la corrente che lo attraversa, pari a v/R; il resistore lineare è anche controllato in tensione. Il resistore lineare è quindi un componente controllato sia in tensione che in corrente.
La connessione ideale, illustrata nella figura 3 ed anche chiamata corto circuito, può essere considerata un resistore lineare di resistenza nulla, come tale risulta essere un componente

controllato in corrente, ma non in tensione; infatti ad un unico valore di tensione corrispondono infiniti valori possibili della corrente. Viceversa, un circuito aperto, il cui simbolo è rappresentato nella figura 9, può essere considerato come un resistore di resistenza infinita e come tale è un componente controllato in tensione, ma non in corrente: infatti all'unico valore possibile della corrente (0) corrisponde una infinità di valori possibili della tensione ai capi del circuito aperto.

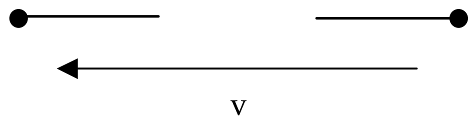


Figura 9   Circuito aperto

Due o più resistori si dicono collegati in serie quando sono percorsi dalla stessa corrente. Facendo riferimento alla fig. 10, è possibile scrivere la legge costitutiva dei tre resistori R_1, R_2, R_3, percorsi dalla stessa corrente corrente i:

$$v_{AB} = R_1 i\,, \quad v_{BC} = R_2 i\,, \quad v_{CD} = R_3 i\,.$$

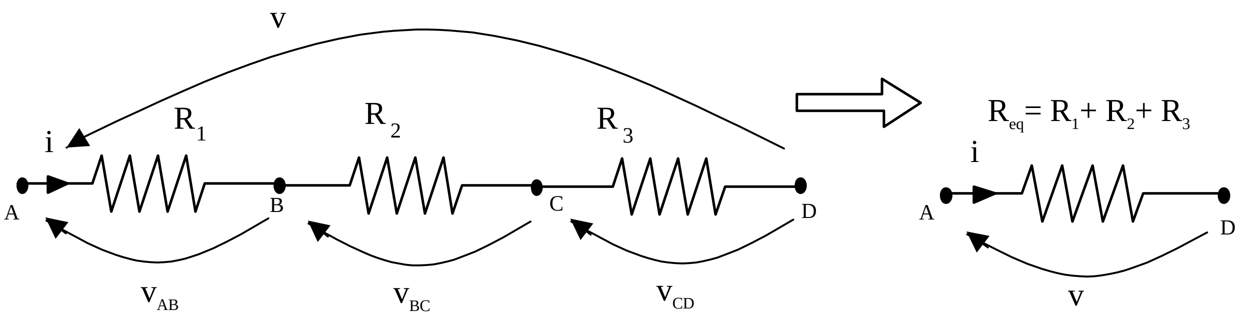


Figura 10   Resistori collegati in serie

Tenuto conto che, per la LKT, la tensione v tra i morsetti iniziali e finali della serie A e D vale:

$$v = v_{AB} + v_{BC} + v_{CD}\,,$$

risulta anche che:

$$v = (R_1 + R_2 + R_3)i = R_{eq} i\,,$$

dove la resistenza $R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$ viene definita resistenza equivalente della serie. I tre resistori in serie si comportano quindi come un unico resistore con resistenza pari ad R_{eq}. Il ragionamento può essere generalizzato al caso di n resistori in serie, che hanno una resistenza equivalente R_{eq} pari alla somma delle resistenze che costituiscono la serie:

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^{n} R_i\,. \qquad (18)$$

Due o più resistori si dicono collegati in parallelo quando la tensione ai loro capi è la stessa (fig. 11). Le leggi costitutive dei tre resistori R_1, R_2, R_3, in fig.11 soggetti alla stessa tensione v possono essere scritte nella forma:

$$i_1 = v/R_1\,, \quad i_2 = v/R_2\,, \quad i_3 = v/R_3\,.$$

Per la LKC applicata alla superficie chiusa S in fig. 11 vale inoltre:

$$i = i_1 + i_2 + i_3\,.$$

Si ricava quindi:

$$i = (1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3)v = \frac{v}{R_{eq}}\,,$$

dove $R_{eq} = (1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3)^{-1}$ viene definita resistenza equivalente del parallelo.

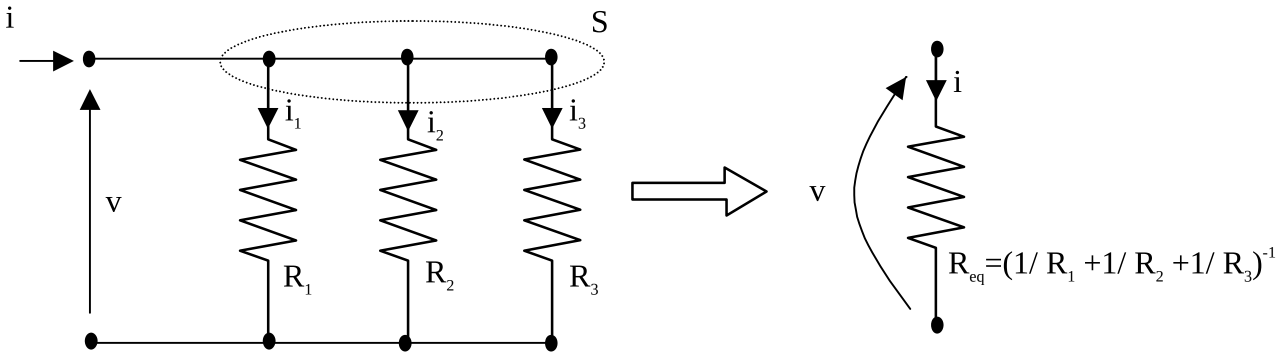


Figura 11 Resistori collegati in parallelo

E’ possibile generalizzare al caso di un parallelo di *n* resistori: in tal caso, la resistenza equivalente R_{eq} è pari all’inverso della somma degli inversi delle resistenze che costituiscono il parallelo:

$$R_{eq} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} \right)^{-1}. \tag{19}$$

Induttore lineare

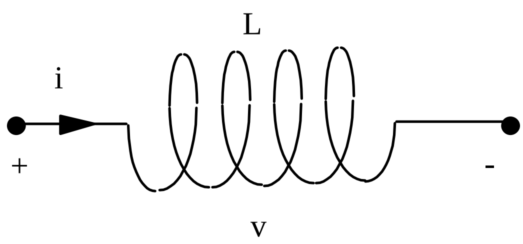


Figura 12 Induttore

Il simbolo dell'induttore lineare è indicato nella figura 12, la sua legge costitutiva è la seguente:

$$v = L\frac{di}{dt} \tag{20}$$

dove L è una costante chiamata induttanza dell'induttore (misurata in H). L'espressione della potenza elettrica assorbita segue dalla (13) e risulta:

$$p = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) \tag{21}$$

La (21) mostra che l’energia elettrica assorbita dall'induttore vale $E_m = \frac{1}{2}Li^2$; tale energia è univocamente determinata dal valore della corrente *i* che attraversa l’induttore, ed è per tale motivo conservativa. L’energia assorbita E_m viene quindi immagazzinata come di energia elettromagnetica

nell'induttore e, una volta immagazzinata, può essere interamente restituita ai componenti del circuito cui è collegato l'induttore durante un transitorio successivo. L’energia assorbita E_m è sempre positiva, e in base alla (15) l’induttore risulta essere un componente passivo. La potenza elettrica assorbita dall'induttore può invece assumere valori sia positivi che negativi.
Un avvolgimento costituito da N spire finemente avvolte sopra un nucleo toroidale di materiale ferromagnetico dolce, qualora l'intensità della corrente che lo percorre non sia troppo elevata, in modo da poter trascurare la saturazione del materiale ferromagnetico, può essere modellato come un resistore ed un induttore collegati in serie (vedi fig. 13).
Il campo magnetico prodotto dalla corrente *i*, a causa dell'elevato valore della permeabilità magnetica (μ) del materiale di cui è costituito il nucleo toroidale dell'avvolgimento, tende a concentrarsi in tale regione. La potenza elettrica assorbita dall'induttore reale, viene in parte trasformata in energia interna per effetto Joule (e quindi ceduta all'ambiente sotto forma di calore, se la temperatura del sistema viene mantenuta costante) ed in parte immagazzinata nel campo magnetico presente all'interno del nucleo toroidale.

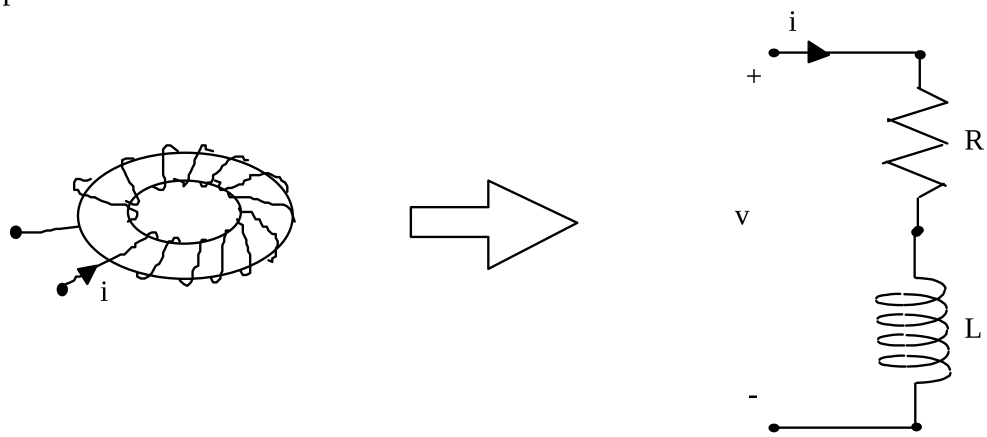


Figura 13 Induttore reale

E’ possibile dimostrare chel’energia elettromagnetica immagazzinata dall'induttore vale:

$$\frac{1}{2}Li^2 = \int_{V_{toro}} \frac{1}{2}\mu H^2 dV \qquad (22)$$

Per sottolineare il fatto che alla energia elettromagnetica E_m è associato un campo magnetico, tale energia viene più specificatamente chiamata energia magnetica immagazzinata nell'induttore.
L'equazione costitutiva dell'induttore (19) permette in ogni istante, se è noto il valore della tensione ai suoi capi, di calcolare la derivata temporale della corrente che lo attraversa lasciandone però completamente indeterminato il valore. Il valore della corrente individua univocamente l'energia magnetica immagazzinata nell'induttore e dipende dal transitorio subìto dall'induttore nel periodo precedente all'istante di tempo che si considera. Infatti, integrando nel tempo la (19), supponendo che all'istante -∞, quando è stato assemblato il circuito ed è iniziato il transitorio, la corrente sull'induttore fosse nulla, si ottiene:

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(\tau)d\tau \qquad (23)$$

La (23) mostra che il valore della corrente all'istante t dipende dal valore della tensione in tutti gli istanti precedenti. Per indicare ciò si dice che l'induttore ha memoria. Il valore della corrente che attraversa l'induttore individua univocamente l'energia magnetica immagazzinata al suo interno e perciò costituisce la sua variabile di stato.

Condensatore lineare

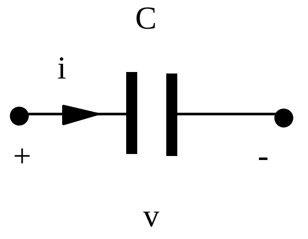


Figura 14 Condensatore

Il simbolo del condensatore è indicato nella figura 14, la sua legge costitutiva è la seguente:

$$i = C\frac{dv}{dt} \tag{24}$$

dove C è una costante chiamata capacità del condensatore (misurata in F). L'espressione della potenza elettrica assorbita segue dalla (13) e risulta:

$$p = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Cv^2\right) \tag{25}$$

La (25) mostra che l'energia elettrica assorbita dal condensatore vale $E_e = \frac{1}{2}Cv^2$; tale energia è univocamente determinata dal valore della tensione v ai morsetti del condensatore, ed è per tale motivo conservativa. L'energia assorbita E_e viene quindi immagazzinata come energia elettromagnetica nel condensatore. Una volta immagazzinata, può essere interamente restituita ai componenti del circuito cui è collegato il condensatore durante un transitorio successivo. L'energia assorbita E_e è sempre positiva, e in base alla (15) il condensatore risulta essere un componente passivo. La potenza elettrica assorbita dal condensatore può invece assumere valori sia positivi che negativi.
Un condensatore reale, costituito da due armature in materiale conduttore accoppiate elettrostaticamente e separate da un dielettrico può essere modellato con un condensatore ideale in parallelo ad una resistenza (vedi fig. 15). Tale resistenza, di valore solitamente molto elevato, serve a rappresentare gli effetti di fenomeni dissipativi e quelli della conducibilità bassa, ma non nulla, nel dielettrico.

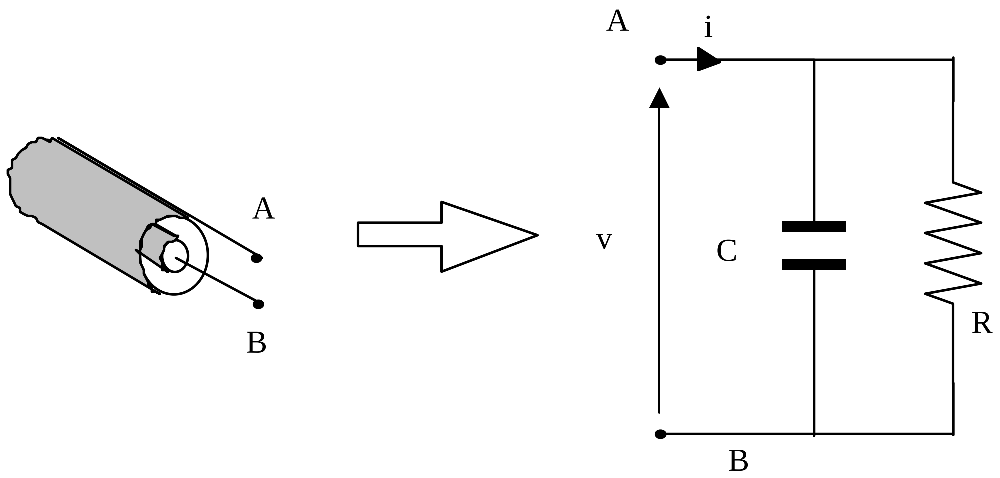


Figura 15 Condensatore cilindrico

Quando una carica q viene spostata tramite una connessione elettrica dalla armatura esterna (collegata al terminale A) a quella interna (collegata al terminale B), la regione di spazio occupata dall'isolante interposto tra le armature del condensatore è sede di un campo elettrico. E' possibile dimostrare la seguente relazione:

$$\frac{1}{2}Cv^2 = \int_{V_{isolante}} \frac{1}{2}\varepsilon E^2 dV \qquad (26)$$

dove ε è la costante dielettrica dell'isolante. La potenza elettrica assorbita dal condensatore cilindrico viene quindi immagazzinata nel campo elettrico presente nell'isolante tra le armature del condensatore. Per sottolineare il fatto che alla energia elettromagnetica E_e è associato un campo elettrico, tale energia viene più specificatamente chiamata energia elettrostatica immagazzinata nel condensatore.
Le relazioni (24, 25, 26) mostrano come esista una relazione di dualità tra il condensatore e l'induttore; infatti è possibile ottenere le relazioni caratteristiche di un componente da quelle dell'altro, scambiando tra di loro i simboli della tensione con la corrente, dell'induttanza con la capacità, del campo magnetico con il campo elettrico e della permeabilità magnetica con la costante dielettrica.
Analogamente all'induttore, anche il condensatore è un componente con memoria; integrando la (24) dall'istante -∞, in cui è stato assemblato il circuito ed in cui la tensione ai capi del condensatore si è supposta nulla, al generico istante t si ottiene:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau \qquad (27)$$

La (27) mostra che il valore della tensione in un generico istante t dipende dal valore della corrente in tutti gli istanti precedenti. Il valore della tensione ai capi del condensatore individua univocamente l'energia elettrica immagazzinata al suo interno e perciò rappresenta la sua variabile di stato.

Generatore di tensione

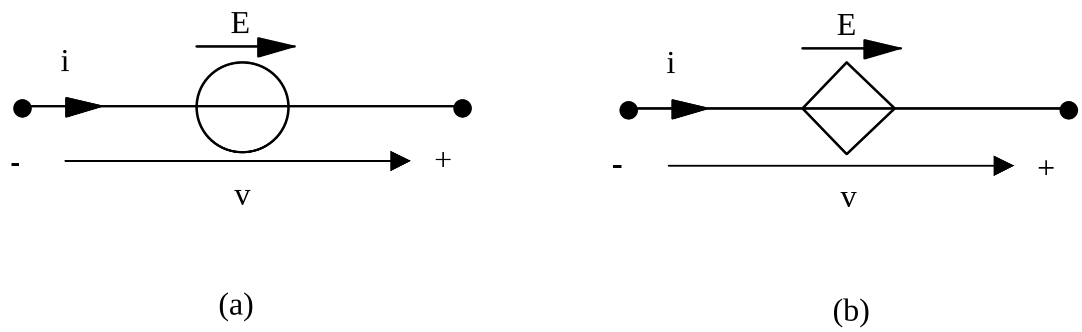


Figura 16 Generatore di tensione

Il simbolo del generatore indipendente di tensione è indicato nella figura 16a, quello del generatore dipendente di tensione nella figura 16b; nel primo caso la tensione impressa E del generatore (o forza elettro-motrice del generatore) (misurata in V) è una funzione nota del tempo, nel secondo caso dipende dal valore della tensione (generatore pilotato in tensione) o della corrente (generatore pilotato in corrente) di un altro componente del circuito. Con riferimento ai versi positivi delle grandezze indicati nella figura, l'equazione costitutiva del generatore di tensione è la seguente:

$$v=E \tag{28}$$

L'espressione della potenza elettrica erogata segue dalla (14) e risulta:

$$p=Ei \tag{29}$$

La potenza elettrica erogata risulta quindi positiva o negativa a seconda che la corrente attraversa il generatore nel verso concorde o opposto rispetto a quello della tensione impressa. Il generatore indipendente di tensione è quindi in grado di assorbire od erogare una potenza elettrica di valore qualsiasi, mantenendo comunque inalterato il valore della tensione ai suoi capi.
Una batteria può essere modellata elettricamente mediante lo schema illustrato nella figura 17, costituito da un resistore e da un generatore indipendente di tensione collegati in serie.

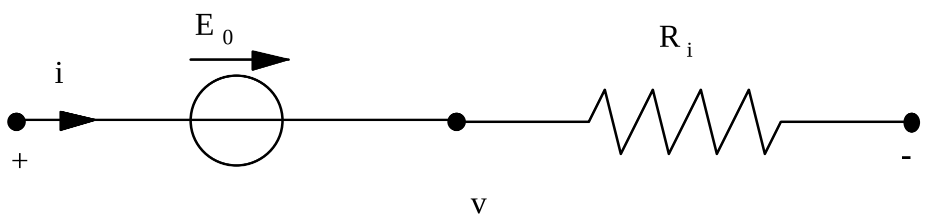
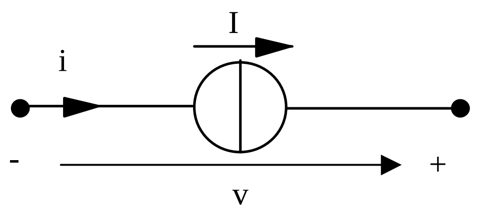


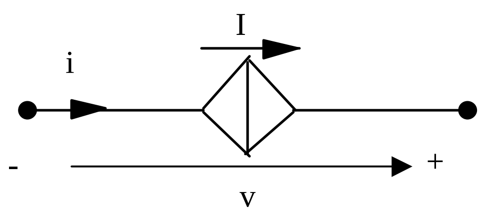
Figura 17 Modello circuitale di una batteria

Il generatore di tensione permette, ad esempio, di simulare la trasformazione di energia chimica in elettrica e viceversa che avviene all'interno della batteria; la tensione impressa E_0 è pari alla tensione ai capi della batteria durante il funzionamento a vuoto (quando non eroga corrente). La resistenza R_i del resistore, viene detta resistenza interna della batteria e permette di simulare la dissipazione di energia elettrica, per effetto Joule, in calore che viene ceduto all'ambiente circostante, che accompagna il passaggio della corrente nella batteria.

Generatore di corrente



(a)



(b)

Figura 18   Generatore di corrente

Il simbolo del generatore indipendente di corrente è indicato nella figura 18a, quello del generatore dipendente di corrente nella figura 18b; nel primo caso la corrente impressa del generatore (I) (misurata in A) è una funzione nota del tempo, mentre nel secondo dipende da un'altra grandezza che può essere la corrente (generatore pilotato in corrente) o la tensione (generatore pilotato in tensione) di un altro componente del circuito. Con riferimento ai versi positivi delle grandezze indicati nella figura, l'equazione costitutiva del generatore di corrente è la seguente:

$$i=I \qquad (30)$$

L'espressione della potenza elettrica erogata segue dalla (14) e risulta:

$$p=vI \qquad (31)$$

La potenza elettrica erogata risulta quindi positiva o negativa a seconda che la tensione ai capi del generatore abbia verso concorde o discorde rispetto a quello della corrente impressa. Il generatore indipendente di corrente è quindi in grado di assorbire od erogare una potenza elettrica di valore qualsiasi, mantenendo comunque inalterato il valore della corrente che lo attraversa.
A differenza dei componenti visti in precedenza, non esiste un componente elettrico reale che venga modellato elettricamente, con buona approssimazione, da un solo generatore di corrente. Il generatore di corrente interviene invece nel circuito elettrico equivalente dei dispositivi elettronici. Ad esempio, è possibile realizzare un circuito complesso che modella un transistore npn in cui sono presenti due generatori di corrente pilotati in corrente.

CENNI SULLA TEORIA DEI GRAFI

Il grafo di un circuito è un diagramma atto a mostrare in maniera semplificata la topologia del circuito stesso. Nel grafo ciascun ramo viene sostituito da un segmento, in modo che tutte le connessioni tra i nodi del circuito siano rispettati. Sulla base del grafo, è possibile dare le seguenti definizioni:
Albero: insieme di rami che costituiscono un percorso aperto che unisce tutti i nodi del circuito. Percorrendo i rami dell'albero è possibile ,partendo da un qualsiasi nodo, raggiungere qualsiasi altro nodo, ma non è possibile tornare al nodo iniziale se non ripercorrendo i rami del percorso di andata. In altre parole, per qualsiasi coppia di nodi n_1 ed n_2 del circuito esiste una ed una sola sequenza di rami appartenenti all'albero che unisce n_1 ad n_2. Per un dato circuito, la scelta dell'albero non è generalmente univoca (vedi Fig. 19) . Se il circuito ha N nodi, l'albero è sempre costituito da n-1 rami.

Coalbero: definito un albero, è possibile associare ad esso il coalbero, definito come insieme dei rami del circuito che non fanno parte dell'albero. Se il circuito ha R rami ed N nodi, i rami del coalbero sono sempre R – (N – 1). Ogni ramo di coalbero individua assieme ai rami dell'albero una maglia. Il ramo di coalbero viene detto ramo caratteristico della maglia che individua, e la corrente di tale ramo viene detta corrente di maglia associata alla suddetta maglia.

Insieme di taglio: definito un albero, è possibile considerare una superficie chiusa S_a che interseca l'albero in corrispondenza di uno ed un solo ramo r_a. La superficie S_a si definisce quindi superficie di taglio associata al ramo r_a. Si definisce insieme di taglio associato al ramo r_a l'insieme dei rami di coalbero che interseca la superficie S_a. Applicando la LKC ad una superficie di taglio si ottiene l'equazione di taglio. Tale equazione che mette in relazione la corrente che passa per il ramo di albero associato alla superficie di taglio con le correnti che passano per i rami di coalbero appartenenti all'insieme di taglio. Si guardi ad esempio l'equazione di taglio associata alla superficie in fig. 20. E' possibile scrivere N -1 equazioni di taglio, una per ogni ramo di albero.

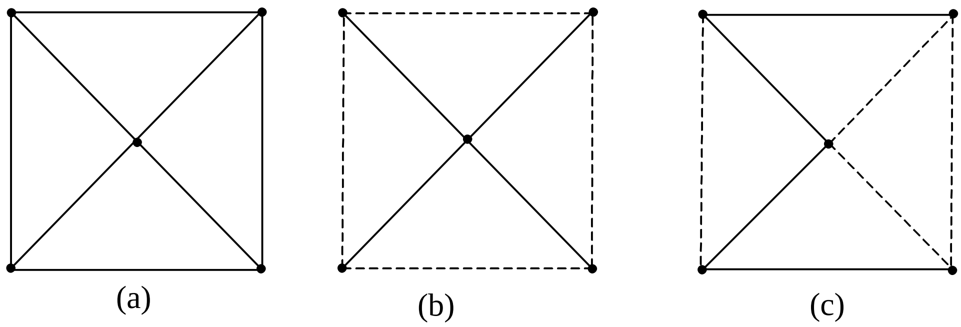
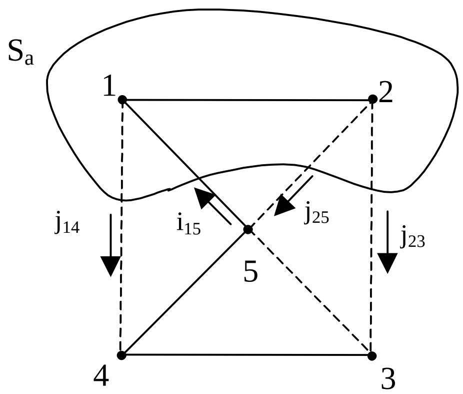


Figura 19 (a) grafo di circuito, e (b,c) due dei possibili alberi (linea continua) e coalberi (linea tratteggiata)



Equazione di taglio

$$i_{15} = j_{25} + j_{23} + j_{14}$$

Figura 20 La superficie chiusa S_a è la superficie di taglio associata al ramo 1-5. L'insieme di taglio associata al ramo 1-5 è formato dai rami di coalbero 2-5, 2-3, 1-4. Applicando la LKC alla superfice S_a si ottiene l'equazione di taglio.

Si consideri ora il grafo in fig. 21, in cui è evidenziata la scelta fatta per i rami di albero (in tratto continuo) e di coalbero (tratteggiati). Come già detto, ciascun ramo di coalbero individua una maglia. Le quattro maglie così definite sono indipendenti, poiché posseggono un ramo che non è presente in nessuna altra maglia. Tale ramo è il ramo di coalbero che chiude la maglia, detto appunto ramo caratteristico. In fig. 21 sono evidenziate le quattro maglie indipendenti individuate dalla scelta dell'albero. Inoltre, come è possibile verificare facilmente, non è possibile trovare un altra maglia che contenga rami non presenti nelle quattro maglie già definite. Ne segue che il numero massimo di maglie indipendenti è pari al numero di maglie che vengono individuate dai rami del coalbero, cioè R-(N-1). Per ogni maglia indipendente è possibile scrivere un equazione ricavata dalla LKT. Le equazioni ricavate in tale maniera risultano tra loro linearmente indipendenti. Ne segue che per ogni circuito è possibile scrivere un numero massimo di LKT linearmente indipententi pari a R-(N-1).

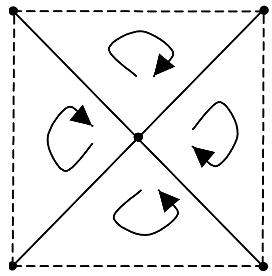


Fig. 21. Maglie indipendenti.

Si considerino ora le le N-1 equazioni di taglio. E' facile verificare che ciascuna di esse è linearmente indipendente dalle altre. Infatti, in ogni equazione è presente una corrente di ramo di albero che non figura in nessuna dele altre equazioni. Facendo riferimento al grafo in Fig. 22, è quindi possibile scrivere le seguenti quattro equazioni di taglio relative al particolare albero scelto.

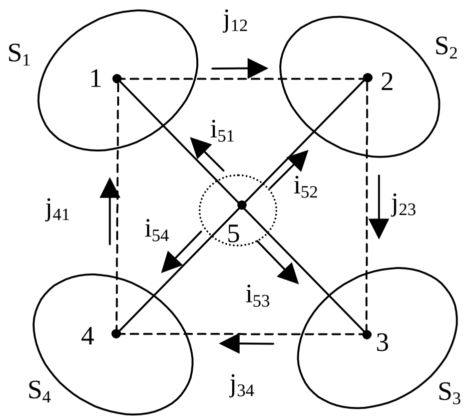


Fig. 22. Superfici di taglio.

$i_{51} = -j_{41} + j_{12}$ LKC(S_1) 29.a
$i_{52} = -j_{12} + j_{23}$ LKC(S_2) 29.b
$i_{53} = -j_{23} + j_{34}$ LKC(S_3) 29.c
$i_{54} = -j_{34} + j_{41}$ LKC(S_4) 29.d

E' inoltre possibile verificare che applicando la LKC ad una qualsiasi superficie chiusa si ottiene un'equazione linearmente dipendente dalle quattro equazioni di taglio. Ad esempio, applicando la LKC alla superficie chiusa S_5 che racchiude il nodo 5, si ottiene:

$$-i_{51} - i_{52} - i_{53} - i_{54} = 0,$$

relazione linearmente dipendente dalle equazioni di taglio dato che può essere ottenuta sommando membro a membro le 29. Quanto detto si può generalizzare dicendo che il numero massimo di LKC linearmente indipendenti è pari al numero di equazioni di taglio, cioè N-1.