

## METODI PER L'ANALISI DEI CIRCUITI

Nel seguito vengono illustrati, mediante esempi, alcuni tra i metodi più utilizzati per l'analisi dei circuiti elettrici. Il problema che si vuole risolvere è il seguente: assegnato il circuito elettrico e le grandezze impresse dai generatori indipendenti presenti, in generale funzioni qualunque del tempo, si vuole calcolare l'andamento temporale delle correnti e delle tensioni in tutti i rami del circuito. Si suppone per semplicità che tutti i componenti siano dei bipoli, potendosi ricondurre a questa ipotesi mediante l'introduzione di circuiti equivalenti dei componenti a più di due terminali. Gli esempi illustrativi si riferiscono, per semplicità, a circuiti in regime stazionario (o regime di corrente continua o DC), definito dalla condizione  $d/dt \equiv 0$ . In tal caso, ogni grandezza nel circuito si suppone tempo-invariante.

### 1. DAI CIRCUITI AI GRAFI

Dato un circuito con  $N$  nodi ed  $R$  rami su cui siano assegnati i versi delle correnti, si dice **grafo** (o, più precisamente, **grafo orientato**) associato al circuito un oggetto costituito dagli stessi nodi e dagli stessi rami del circuito, orientati con il versi delle correnti (i rami sono solitamente rappresentati omettendo il componente, quindi con una linea continua che connette i due terminali). Notiamo che si è così evidenziata la struttura topologica del circuito, cioè il modo in cui sono connessi i componenti tra loro, senza preoccuparsi delle caratteristiche dei componenti stessi. Ad ogni ramo sono associati una corrente di ramo ed una tensione di ramo. È possibile associare ad ogni nodo un potenziale (tensione di nodo) definita come tensione esistente tra il nodo in esame e il nodo di riferimento, il cui simbolo è  $\phi$ , scelto arbitrariamente. Una proprietà del circuito che si trasferisce al corrispondente grafo è la **proprietà di connessione**, secondo la quale un circuito è connesso se per ogni nodo del circuito è possibile trovare un percorso attraverso i rami che connetta tale nodo al nodo di riferimento (nel caso in cui il circuito non sia connesso vedremo che è sempre possibile connetterlo interponendo un collegamento tra ogni coppia di circuiti non connessi). Ogni ramo del grafo è orientato come la corrente in quel ramo, ma l'orientazione della tensione del ramo può essere fatta indipendentemente da quella della corrente. Tuttavia, usualmente la tensione sarà orientata secondo la convenzione degli utilizzatori in modo che la corrente scorra dal terminale positivo a quello negativo. Con questa convenzione, la potenza  $p(t) = v(t) i(t)$  è assorbita se positiva, erogata se negativa. Se la tensione è orientata in senso opposto (convenzione dei generatori), allora la potenza è assorbita se negativa, erogata se positiva.

Le Leggi di Kirchhoff (equazioni topologiche) permettono di scrivere delle equazioni che descrivono la topologia del circuito, ovvero il modo in cui i componenti sono connessi tra loro:

- Legge di Kirchhoff delle Correnti per un nodo ( $LKC_n$ ): la somma algebrica delle correnti su tutti i rami in un nodo è nulla. 
$$\sum_{r(RAMI)} i_r = 0 \quad (1.a)$$

- Legge di Kirchhoff delle Tensioni per una maglia ( $LKT_m$ ): per ogni maglia la somma algebrica delle tensioni di ramo è nulla. 
$$\sum_{r(RAMI)} v_r = 0 \quad (1.b)$$

- Legge di Kirchhoff delle Tensioni per un ramo ( $LKT_r$ ): ogni tensione di ramo è pari alla differenza tra le tensioni di nodo dei suoi terminali positivo e negativo. 
$$v_{AB} = e_A - e_B \quad (1.c)$$

A titolo di esempio si consideri il circuito illustrato nella figura 1.a ( $N = 4$  nodi,  $R = 6$  rami), dove non sono stati indicati i versi positivi delle tensioni di ramo, perché si suppone di considerare comunque versi di riferimento associati per tensioni e correnti di ramo mediante la scelta dell'utilizzatore. Il grafo orientato corrispondente è illustrato in figura 1.b.

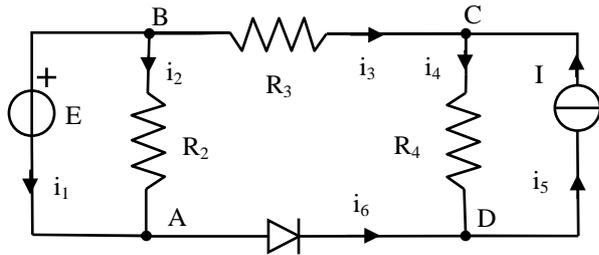


Figura 1.a

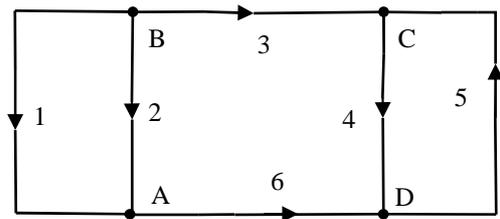


Figura 1.b

Scriviamo le equazioni *LKC* e *LKT* utilizzando il grafo associato al circuito. Supponiamo che il grafo abbia  $N$  nodi e  $R$  rami orientati. Con riferimento al grafo di figura 1.b,  $N = 4$  (A, B, C, D) e  $R = 6$ . Si scelga ad esempio il nodo D come nodo di riferimento per le tensioni e si indichino con  $e_A$ ,  $e_B$  ed  $e_C$  le tensioni dei nodi A, B e C rispetto al nodo di riferimento ( $e_D = 0$ ). Le equazioni *LKT<sub>r</sub>* e *LKC<sub>n</sub>* assumono allora la forma rispettivamente delle (2.i) e (2.ii):

$$\text{LKT}_r: \begin{cases} \text{ramo 1} & v_1 = e_B - e_A \\ \text{ramo 2} & v_2 = e_B - e_A \\ \text{ramo 3} & v_3 = e_B - e_C \\ \text{ramo 4} & v_4 = e_C \\ \text{ramo 5} & v_5 = -e_C \\ \text{ramo 6} & v_6 = e_A \end{cases} \quad (2.i)$$

(una equazione per ogni ramo, quindi in generale  $R$  equazioni in cui compaiono  $R$  tensioni di ramo ed  $N - 1$  tensioni di nodo; nell'esempio in oggetto possiamo quindi scrivere 6 *LKT<sub>r</sub>* in cui compaiono 6 tensioni di ramo ed 3 tensioni di nodo)

$$\text{LKC}_n: \begin{cases} \text{nodo A} & -i_1 - i_2 + i_6 = 0 \\ \text{nodo B} & i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\ \text{nodo C} & -i_3 + i_4 - i_5 = 0 \end{cases} \quad (2.ii)$$

(una equazione per ogni nodo, meno quello di riferimento, quindi in generale  $N - 1$  equazioni in cui compaiono  $R$  correnti di ramo; nell'esempio in oggetto possiamo quindi scrivere 3 *LKC<sub>n</sub>* in cui compaiono 6 correnti di ramo). È ovviamente possibile scrivere una ulteriore *LKC<sub>n</sub>* applicata al nodo di riferimento ( $-i_6 - i_4 + i_5 = 0$ ), ma è facile mostrare che è una combinazione lineare delle precedenti  $N - 1$ . Infatti, tale equazione si ottiene sommando le (2.ii) cambiate segno.

Si noti che le (2.i) e le (2.ii) sono  $R + N - 1$  equazioni in  $2R + N - 1$  incognite (tensioni di ramo, tensioni di nodo e correnti di ramo): per risolvere il circuito dobbiamo aggiungere ancora  $R$  equazioni, e precisamente i modelli dei componenti.

Le (2.ii) sono state scritte considerando positive le correnti uscenti nei nodi e negative quelle entranti. La matrice dei coefficienti del sistema (2.ii) prende il nome di matrice di incidenza ridotta. Indicata con  $\mathbf{A}$ , essa ha dimensioni  $(N - 1) \times R$ ; nell'esempio in oggetto possiamo quindi scrivere la seguente matrice  $3 \times 6$ :

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

che ci permette di rappresentare il sistema (2.ii) nella forma  $\mathbf{A} \mathbf{i} = \mathbf{0}$ , avendo indicato con  $\mathbf{i}$  il vettore colonna delle  $R$  correnti di ramo ordinate secondo la numerazione dei rami. Con le convenzioni

utilizzate ed avendo scritto le equazioni nell'ordine specificato dalla numerazione dei rami (1, 2, 3, 4, 5, 6,...) e dall'indicizzazione dei nodi (A, B, C, D,...) anche il sistema (2.i) può essere rappresentato tramite la matrice di incidenza ridotta come  $\mathbf{v} = \mathbf{A}^T \mathbf{e}$ , dove T indica l'operazione di trasposizione,  $\mathbf{v}$  il vettore colonna delle R tensioni di ramo ordinate secondo la dalla numerazione dei rami ed  $\mathbf{e}$  il vettore colonna delle N - 1 tensioni di nodo ordinate secondo l'indicizzazione dei nodi. Nell'esempio in oggetto possiamo quindi scrivere

$$\mathbf{A} \mathbf{i} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i_1 - i_2 + i_6 \\ i_1 + i_2 + i_3 \\ -i_3 + i_4 - i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^T \mathbf{e} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_A \\ e_B \\ e_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_B - e_A \\ e_B - e_A \\ e_B - e_C \\ e_C \\ -e_C \\ e_A \end{bmatrix}$$

Se si utilizzano convenzioni diverse nella scrittura delle  $LKC_n$  e delle  $LKT_r$ , o non si rispetta l'ordine predefinito di rami e nodi, la matrice di incidenza  $\mathbf{A}$  è comunque definibile e le  $LKC_n$  rappresentabili nella forma  $\mathbf{A} \mathbf{i} = \mathbf{0}$ . Tuttavia le  $LKT_r$  divengono  $\mathbf{v} = \mathbf{M} \mathbf{e}$ , dove  $\mathbf{M}$  è una matrice costante di dimensioni  $R \times (N - 1)$  la cui relazione con  $\mathbf{A}^T$  è comunque definibile, ma più complicata.

La LKT può essere enunciata considerando le maglie del circuito (secondo la formulazione 1.b). Per questo, introduciamo il concetto di *albero T* associato ad un grafo  $G$ :

1.  $T$  è un sottografo di  $G$  con tutti i nodi e una parte dei rami; ogni ramo conserva la sua orientazione;
2.  $T$  è connesso;
3.  $T$  è privo di maglie: c'è un solo percorso che collega ogni coppia di nodi.

Ovviamente, ad ogni grafo è associato più di un albero. Comunque, ogni albero  $T$  ha  $N - 1$  rami. I rami di  $G$  appartenenti a  $T$  sono chiamati *rami dell'albero*, mentre i rimanenti sono chiamati *rami del coalbero* (e sono  $R - N + 1$ ). Se aggiungiamo un ramo del coalbero a  $T$ , creiamo una maglia che è formata da rami dell'albero e da quell'unico ramo del coalbero (*maglia fondamentale*). Per ogni ramo del coalbero, possiamo ripetere l'operazione formando ogni volta una maglia diversa, indipendente da tutte le altre<sup>(\*)</sup>. Si può allora dimostrare che il numero di maglie indipendenti di un circuito (cioè l'insieme delle maglie fondamentali) è pari ai rami del coalbero, e precisamente  $R - (N - 1) = R - N + 1$ .

<sup>(\*)</sup>  $m$  maglie si dicono indipendenti se le  $m$  equazioni ottenute applicando la LKT ad ognuna di esse sono linearmente indipendenti (cioè la matrice dei coefficienti è di rango massimo). Pertanto, una maglia è indipendente da altre se la relativa equazione LKT è indipendente dalle equazioni LKT delle altre.

A titolo di esempio si consideri il grafo illustrato nella figura 1.b; uno dei possibili alberi è illustrato con le linee continue (rami 2, 3 e 4). I rami tratteggiati sono quelli di coalbero (rami 1, 5 e 6). Le maglie indipendenti sono quindi  $R - N + 1 = 3$  e, in particolare,  $a = (1,2)$ ,  $b = (5,4)$ ,  $c = (6,4,3,2)$ .<sup>(\*\*)</sup>

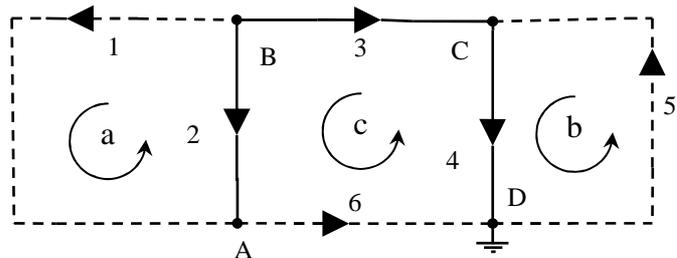


Figura 1.b

Applicando la  $LKT_m$  alle maglie fondamentali così definite (nell'ordine specificato dalla numerazione dei rami di coalbero che definiscono le maglie e orientando le maglie secondo la corrente dei rami di coalbero che definiscono le maglie) si ottiene il seguente sistema di equazioni lineari in cui compaiono solo le tensioni di ramo:

$$LKT_m: \begin{cases} mf(1,2) & \left\{ \begin{array}{l} v_1 - v_2 = 0 \\ v_5 + v_4 = 0 \\ v_6 - v_4 - v_3 + v_2 = 0 \end{array} \right. \end{cases} \quad (2.iii)$$

(una equazione per ogni maglia indipendente quindi in generale  $R - N + 1$  equazioni in cui compaiono  $R$  tensioni di ramo; nell'esempio in oggetto possiamo quindi scrivere 3  $LKT_m$  in cui compaiono 6 tensioni di ramo) Si noti che le (2.iii) e le (2.ii) sono  $R$  equazioni in  $2R$  incognite (tensioni di ramo e correnti di ramo): per risolvere il circuito dobbiamo aggiungere ancora  $R$  equazioni, e precisamente i modelli dei componenti.

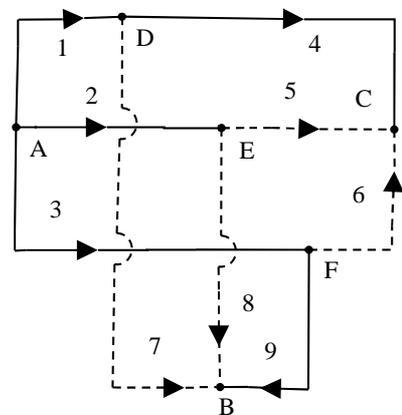
Le (2.iii) sono state scritte considerando i versi di riferimento associati con la convenzione da utilizzatore e scegliendo come verso di percorrenza della maglia fondamentale quello del ramo di coalbero che la definisce. La matrice dei coefficienti del sistema (2.iii) prende il nome di matrice delle maglie fondamentali. Indicata con  $\mathbf{B}$ , essa ha dimensioni  $(R - N + 1) \times R$ ; nell'esempio in oggetto possiamo quindi scrivere la seguente matrice  $3 \times 6$ :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

che ci permette di rappresentare il sistema (2.iii) nella forma  $\mathbf{B} \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , avendo indicato con  $\mathbf{v}$  il vettore colonna delle  $R$  tensioni di ramo ordinate secondo la numerazione dei rami<sup>(o)</sup>. Nell'esempio in oggetto possiamo quindi scrivere

<sup>(\*\*)</sup> Questa costruzione delle maglie fondamentali può sembrare complicata. In effetti, per i circuiti planari, cioè senza rami sovrapposti, la determinazione delle maglie fondamentali è intuitivamente legata al bordo delle regioni di piano racchiuse dai rami del circuito. La situazione è decisamente diversa per i circuiti non planari come quello in figura. Si noti che il ramo 7 si sovrappone ai rami 2 e 3 ma non ha nodi in comune con essi. Analogamente per il ramo 8. Il grafo presenta  $N = 6$  nodi e  $R = 9$  rami. Le maglie fondamentali sono quindi  $R - N + 1 = 4$ . Per determinarle definiamo un albero, ad esempio (1,2,3,4,9), e di conseguenza il coalbero (5,6,7,8). Le maglie fondamentali, individuate aggiungendo un ramo di coalbero alla volta all'albero, sono quindi:

$$(5,4,1,2), (6,4,1,3), (7,9,3,1), (8,9,3,2)$$



<sup>(o)</sup> Si noti che le colonne di  $\mathbf{B}$  corrispondenti agli indici di ramo dei rami di coalbero (in questo caso 1, 5, 6) formano, per costruzione, una matrice identità il cui determinante (unitario) garantisce che  $\mathbf{B}$  è a rango massimo, ovvero che le  $LKT_m$  scritte in questa forma sono indipendenti.

$$\mathbf{B} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 - v_2 \\ v_4 + v_5 \\ v_2 - v_3 - v_4 + v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Con le convenzioni utilizzate ed avendo scritto le equazioni nell'ordine specificato dalla numerazione dei rami (1, 2, 3, 4, 5, 6,...) e dall'indicizzazione dei nodi (A, B, C, D,...) anche le LKC possono essere rappresentate tramite la matrice delle maglie fondamentali come  $\mathbf{i} = \mathbf{B}^T \mathbf{i}_c$ , dove T indica l'operazione di trasposizione,  $\mathbf{i}$  il vettore colonna delle R correnti di ramo ordinate secondo la numerazione dei rami ed  $\mathbf{i}_c$  il vettore colonna delle R - N + 1 correnti sui rami di coalbero ordinate corrispondentemente alle maglie fondamentali. Per la loro scrittura diretta è tuttavia necessario definire i tagli fondamentali, che saranno introdotti nel seguito. Se si utilizzano convenzioni diverse nella scrittura delle LK, o non si rispetta l'ordine predefinito, la matrice delle maglie fondamentali  $\mathbf{B}$  è comunque definibile e le  $\text{LKT}_m$  sono rappresentabili nella forma  $\mathbf{B} \mathbf{v} = \mathbf{0}$ . Tuttavia le LKC divengono  $\mathbf{i} = \mathbf{Q} \mathbf{i}_c$ , dove  $\mathbf{Q}$  è una matrice costante di dimensioni  $R \times (R - N + 1)$  la cui relazione con  $\mathbf{B}^T$  è comunque definibile, ma più complicata.

Si noti infine che poiché  $\mathbf{B} \mathbf{v} = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{v} = \mathbf{A}^T \mathbf{e}$ , data l'arbitrarietà delle tensioni di nodo  $\mathbf{e}$ , il prodotto  $\mathbf{B} \mathbf{A}^T$  deve essere la matrice nulla di dimensioni  $(R - N + 1) \times (N - 1) = 3 \times 3$ . Infatti:

$$\mathbf{B} \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## 2. CIRCUITI PRIVI DI MEMORIA

I circuiti privi di memoria (o circuiti adinamici) sono quelli in cui tutti i componenti del circuito sono privi di memoria ossia le loro caratteristiche tensione-corrente stabiliscono un legame istantaneo tra le due grandezze che non dipende dai valori da esse assunte in precedenza<sup>(o)</sup>. In tal caso il sistema risolvibile del circuito stesso è costituito da un sistema di equazioni algebriche ed il valore di tutte le grandezze incognite in un generico istante può essere calcolato dalla conoscenza del valore delle grandezze impresse del circuito in quello stesso istante.

### 2.1 ANALISI BASATE SUI NODI

Il metodo più semplice da applicare, per l'analisi di un circuito qualunque (R = numero di rami del circuito, N = numero di nodi del circuito), è il **metodo di Tableau**, in cui si considerano come incognite del sistema le R correnti di ramo, le R tensioni di ramo e le (N - 1) tensioni di nodo rispetto ad un nodo arbitrariamente scelto come nodo di riferimento. Il sistema risolvibile viene quindi ottenuto da R equazioni  $\text{LKT}_r$  (una per ogni ramo), da N - 1 equazioni  $\text{LKC}_n$  (una per ogni nodo, tranne quello di riferimento) e da R caratteristiche dei componenti.

<sup>(o)</sup> Questo tipo di circuiti comprende anche i circuiti in regime DC, infatti induttori e condensatori sono equivalenti in DC a cortocircuiti e circuiti aperti, rispettivamente

Ad esempio si consideri il circuito illustrato nella figura 1, dove non sono stati indicati i versi positivi delle tensioni di ramo, perché si suppone di considerare comunque versi di riferimento associati con la regola dell'utilizzatore per tensioni e correnti di ramo. Si scelga il nodo D come nodo di riferimento e si indichino con  $e_A$ ,  $e_B$  ed  $e_C$  le tensioni dei nodi A, B e C rispetto al riferimento.

Le equazioni LKT<sub>r</sub> e LKC<sub>n</sub> assumono allora la forma rispettivamente delle (2.i) e (2.ii):

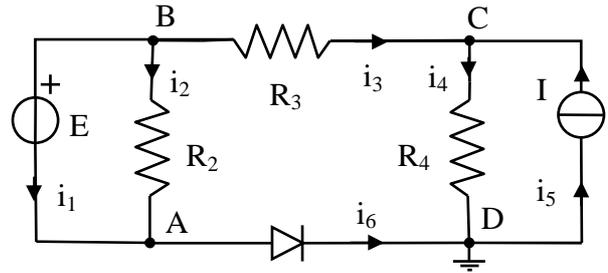


Figura 1

(R = 6 equazioni LKT<sub>r</sub> in cui compaiono come incognite R = 6 tensioni di ramo ed N - 1 = 3 tensioni di nodo)

(N - 1 = 3 equazioni LKC<sub>n</sub> in cui compaiono come incognite R = 6 correnti di ramo)

$$\begin{aligned} v_1 &= e_B - e_A \\ v_2 &= e_B - e_A \\ v_3 &= e_B - e_C \\ v_4 &= e_C \\ v_5 &= -e_C \\ v_6 &= e_A \\ -i_1 - i_2 + i_6 &= 0 \\ i_1 + i_2 + i_3 &= 0 \\ -i_3 + i_4 - i_5 &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} (2.i) \\ (2.ii) \end{aligned}$$

Il sistema viene quindi chiuso dalle seguenti caratteristiche dei componenti<sup>(\*)</sup>:

(R = 6 caratteristiche dei componenti in cui compaiono come incognite R = 6 tensioni di ramo ed R = 6 correnti di ramo)

$$\begin{aligned} v_1 &= E \\ v_2 &= R_2 i_2 \\ v_3 &= R_3 i_3 \\ v_4 &= R_4 i_4 \\ i_5 &= I \\ v_6 i_6 &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Il sistema costituito dalle equazioni (2.i), (2.ii) e (3), dove sono note le grandezze E, I, R<sub>2</sub>, R<sub>3</sub>, ed R<sub>4</sub>, costituisce un sistema di 15 equazioni nelle 15 incognite del problema che sono rispettivamente  $e_A$ ,  $e_B$ ,  $e_C$ ,  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$ ,  $v_4$ ,  $v_5$ ,  $v_6$ ,  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$ ,  $i_4$ ,  $i_5$ ,  $i_6$ . Il sistema di equazioni risolvente è non lineare per la presenza del diodo che è un componente non lineare (ultima delle (3)). Il procedimento illustrato è completamente trasferibile su un computer e la soluzione (o le soluzioni, poiché in generale, essendo il sistema non lineare, può esistere più di una soluzione) può essere ottenuta numericamente. In questo caso la soluzione può essere ottenuta eliminando la non linearità del sistema, considerando separatamente i due casi possibili: diodo in conduzione ( $i_6 \geq 0$ ,  $v_6 = 0$ ) oppure diodo interdetto ( $i_6 = 0$ ,  $v_6 \leq 0$ ).

Diodo in conduzione. Ponendo  $v_6 = 0$  nelle (2.i) ed eliminando contemporaneamente l'ultima equazione delle (3) che è diventata una identità, si ottiene un sistema di 14 equazioni lineari nelle 14 incognite  $e_A$ ,  $e_B$ ,  $e_C$ ,  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$ ,  $v_4$ ,  $v_5$ ,  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$ ,  $i_4$ ,  $i_5$ ,  $i_6$ , la cui soluzione è la seguente:

$$\begin{aligned} e_A &= 0, \quad e_B = E, \quad e_C = R_4 \frac{E + R_3 I}{R_3 + R_4} \\ v_1 &= E, \quad v_2 = E, \quad v_3 = R_3 \frac{E - R_4 I}{R_3 + R_4}, \quad v_4 = R_4 \frac{E + R_3 I}{R_3 + R_4}, \quad v_5 = -R_4 \frac{E + R_3 I}{R_3 + R_4}, \quad v_6 = 0 \\ i_1 &= -\frac{E - R_4 I}{R_3 + R_4} - \frac{E}{R_2}, \quad i_2 = \frac{E}{R_2}, \quad i_3 = \frac{E - R_4 I}{R_3 + R_4}, \quad i_4 = \frac{E + R_3 I}{R_3 + R_4}, \quad i_5 = I, \quad i_6 = -\frac{E - R_4 I}{R_3 + R_4} \end{aligned} \quad (4)$$

Affinché la soluzione trovata non contraddica l'ipotesi di diodo in conduzione deve essere  $i_6 \geq 0$  e quindi deve essere:

$$E \leq R_4 I \quad (5)$$

<sup>(\*)</sup> Come caratteristica del diodo si è indicato, per semplicità di scrittura,  $v_i = 0$ , invece del più corretto  $\begin{cases} v = 0, i \geq 0 \\ i = 0, v \leq 0 \end{cases}$

Diodo interdetto. Ponendo  $i_6 = 0$  nelle (2.ii) ed eliminando contemporaneamente l'ultima equazione delle (3) che è diventata una identità, si ottiene un sistema di 14 equazioni lineari nelle 14 incognite  $e_A, e_B, e_C, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, i_1, i_2, i_3, i_4, i_5$ , la cui soluzione è la seguente:

$$\begin{aligned} e_A &= -E + R_4 I, & e_B &= R_4 I, & e_C &= R_4 I \\ v_1 &= E, & v_2 &= E, & v_3 &= 0, & v_4 &= R_4 I, & v_5 &= -R_4 I, & v_6 &= -E + R_4 I \\ i_1 &= -\frac{E}{R_2}, & i_2 &= \frac{E}{R_2}, & i_3 &= 0, & i_4 &= I, & i_5 &= I, & i_6 &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Affinché la soluzione trovata non contraddica l'ipotesi di diodo interdetto deve essere  $v_6 \leq 0$  e quindi deve essere:

$$E \geq R_4 I \quad (7)$$

Dal confronto della (5) con la (7) si vede che, una volta assegnati i valori di  $E, I$  ed  $R_4$ , una sola delle due soluzioni è accettabile.

Riassumendo, per applicare il <b>metodo di Tableau</b> ad un circuito connesso qualunque ( $R =$ numero di rami, $N =$ numero di nodi), si prende arbitrariamente un nodo come nodo di riferimento del circuito, si applica la $LKT_r$ ad ogni ramo del circuito, si applica la $LKC_n$ a tutti i nodi tranne quello di riferimento e si chiude il sistema con le caratteristiche dei componenti:	R equazioni $LKT_r$	$\mathbf{v} = \mathbf{M} \mathbf{e}$
	$N - 1$ equazioni $LKC_n$	$\mathbf{A} \mathbf{i} = \mathbf{0}$
	R equazioni caratteristiche	$\mathbf{f}(\mathbf{i}, \mathbf{v}) = \mathbf{0}$

dove  $\mathbf{v}$  è il vettore delle tensioni di ramo (dimensione  $R$ ),  $\mathbf{i}$  è il vettore delle correnti di ramo (dimensione  $R$ ),  $\mathbf{e}$  è il vettore delle tensioni di nodo (dimensione  $N - 1$ ),  $\mathbf{M}$  è una matrice costante  $R \times (N - 1)$  ed  $\mathbf{A}$  è una matrice costante  $(N - 1) \times R$  [Come si è già visto, risulta che  $\mathbf{M}$  è la trasposta di  $\mathbf{A}$ , cioè:  $\mathbf{M} = \mathbf{A}^T$ ]. In generale la funzione  $\mathbf{f}$  può dipendere anche dalla variabile temporale  $t$ , ma tale dipendenza, per semplicità di notazione, non è esplicitamente indicata. Il sistema risolvete contiene dunque  $2R + N - 1$  equazioni in  $2R + N - 1$  incognite. Nel caso particolare in cui tutti i componenti siano lineari o generatori indipendenti il sistema risolvete è lineare e la matrice dei coefficienti prende il nome di matrice Tableau.

Quando il numero dei nodi  $N$  del circuito è piccolo, è possibile e conveniente utilizzare il **metodo delle tensioni di nodo** per scrivere un sistema risolvete contenente le tensioni di nodo incognite del circuito. A tale scopo si considerino nuovamente le (2.i), (2.ii) e (3):

(R = 6 equazioni $LKT_r$ , in cui compaiono come incognite R = 6 tensioni di ramo ed $N - 1 = 3$ tensioni di nodo)	$v_1 = e_B - e_A$	(2.i)
	$v_2 = e_B - e_A$	
	$v_3 = e_B - e_C$	
	$v_4 = e_C$	
	$v_5 = -e_C$	
	$v_6 = e_A$	

(N - 1 = 3 equazioni $LKC_n$ in cui compaiono come incognite R = 6 correnti di ramo)	$-i_1 - i_2 + i_6 = 0$	(2.ii)
	$i_1 + i_2 + i_3 = 0$	
	$-i_3 + i_4 - i_5 = 0$	

(R = 6 caratteristiche dei componenti in cui compaiono come incognite R = 6 tensioni di ramo ed R = 6 correnti di ramo)	$v_1 = E$	(3)
	$v_2 = R_2 i_2$	
	$v_3 = R_3 i_3$	
	$v_4 = R_4 i_4$	
	$i_5 = I$	
	$v_6 i_6 = 0$	

Per ogni ramo è possibile sostituire le relazioni (2.i) nelle caratteristiche dei componenti (3). Tale sostituzione porta ad un sistema contenente un numero di equazioni pari a  $R + N - 1$ , in altrettante variabili (tensioni di nodo e correnti di ramo). Nell'esempio in oggetto otterremo quindi il seguente sistema di 9 equazioni nelle incognite  $e_A, e_B, e_C, i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6$ :

$$\begin{aligned}
 & (N - 1 = 3 \text{ equazioni LKC}_n \text{ in cui compaiono} \\
 & \quad \text{come incognite } R = 6 \text{ correnti di ramo)} \\
 & \quad \quad \quad -i_1 - i_2 + i_6 = 0 \\
 & \quad \quad \quad i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\
 & \quad \quad \quad -i_3 + i_4 - i_5 = 0 \\
 & \quad \quad \quad e_B - e_A = E \\
 & \quad \quad \quad e_B - e_A = R_2 i_2 \\
 & \quad \quad \quad e_B - e_C = R_3 i_3 \\
 & \quad \quad \quad e_C = R_4 i_4 \\
 & \quad \quad \quad i_5 = I \\
 & \quad \quad \quad e_A i_6 = 0 \\
 & (R = 6 \text{ caratteristiche dei componenti in cui} \\
 & \text{compaiono come incognite } R = 6 \text{ correnti di} \\
 & \text{ramo ed } N - 1 = 3 \text{ tensioni di nodo)}
 \end{aligned} \tag{8.i}$$

Infine, per tutti i componenti controllati in tensione (in questo esempio i rami 2, 3, 4 e 5), è possibile esplicitare le correnti e sostituire le caratteristiche nelle LKC [ $i_2 = (e_B - e_A)/R_2, i_3 = (e_B - e_C)/R_3, i_4 = e_C/R_4, i_5 = I$ ]. Tale sostituzione porta ad un sistema contenente un numero di equazioni pari a  $N - 1 + (\text{Numero di componenti non controllati in tensione})$ , in altrettante variabili (correnti di ramo o tensioni di nodo). Nell'esempio in oggetto otterremo quindi (dato che il diodo ed il generatore di tensione non sono controllati in tensione) il seguente sistema di 5 equazioni nelle incognite  $e_A, e_B, e_C, i_1, i_6$ :

$$\begin{aligned}
 & (N - 1 = 3 \text{ equazioni LKC}_n) \\
 & \quad \quad \quad -i_1 - \frac{e_B - e_A}{R_2} + i_6 = 0 \\
 & \quad \quad \quad i_1 + \frac{e_B - e_A}{R_2} + \frac{e_B - e_C}{R_3} = 0 \\
 & \quad \quad \quad -\frac{e_B - e_C}{R_3} + \frac{e_C}{R_4} - I = 0 \\
 & \quad \quad \quad e_B - e_A = E \\
 & \quad \quad \quad e_A i_6 = 0 \\
 & (\text{caratteristiche dei componenti non} \\
 & \quad \text{controllati in tensione)}
 \end{aligned} \tag{8.ii}$$

Riassumendo, per applicare il metodo delle tensioni di nodo ad un circuito connesso ( $R = \text{numero di rami}, N = \text{numero di nodi}$ ), si prende arbitrariamente un nodo come riferimento, si applica la  $LKT_r$  ad ogni ramo, si applica la  $LKC_n$  a tutti i nodi tranne quello di riferimento e si chiude il sistema con le caratteristiche dei componenti:

$$\begin{aligned}
 & R \text{ equazioni LKT}_r & \mathbf{v} = \mathbf{M} \mathbf{e} \\
 & N - 1 \text{ equazioni LKC}_n & \mathbf{A} \mathbf{i} = \mathbf{0} \\
 & R \text{ equazioni caratteristiche} & \mathbf{f}(\mathbf{i}, \mathbf{v}) = \mathbf{0}
 \end{aligned}$$

dove  $\mathbf{v}$  è il vettore delle tensioni di ramo (dimensione  $R$ ),  $\mathbf{i}$  è il vettore delle correnti di ramo (dimensione  $R$ ),  $\mathbf{e}$  è il vettore delle tensioni di nodo (dimensione  $N - 1$ ),  $\mathbf{M}$  è una matrice costante  $R \times (N - 1)$  ed  $\mathbf{A}$  è una matrice costante  $(N - 1) \times R$ .

Applicando il <b>metodo delle tensioni di nodo</b> è dunque sempre possibile sostituire le LKT nelle caratteristiche ottenendo il sistema ridotto:	$N - 1$ equazioni LKC <sub>n</sub>	$\mathbf{A} \mathbf{i} = \mathbf{0}$
	$R$ equazioni caratteristiche	$\mathbf{f}(\mathbf{i}, \mathbf{M} \mathbf{e}) = \mathbf{0}$

Il sistema risolvete contiene dunque  $R + N - 1$  equazioni in  $R + N - 1$  incognite. Tuttavia, se tutti i componenti sono controllati in tensione, cioè se  $\mathbf{f}(\mathbf{i}, \mathbf{v}) = \mathbf{i} - \mathbf{g}(\mathbf{v})$ , è possibile sostituire le caratteristiche nelle LKC, giungendo ad un sistema risolvete di  $N - 1$  equazioni nelle  $N - 1$  incognite "tensioni di nodo".

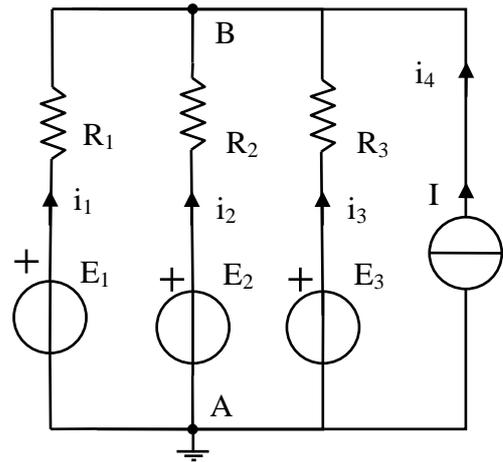
$$\begin{aligned}
 & N - 1 \text{ equazioni LKC}_n & \mathbf{A} \mathbf{g}(\mathbf{M} \mathbf{e}) = \mathbf{0}
 \end{aligned}$$

Il metodo delle tensioni di nodo è particolarmente utile quando  $N$  è piccolo e tutti i componenti sono controllati in tensione. Come esempio limite si consideri il circuito illustrato nella figura, che contiene due soli nodi ( $N - 1 = 1$ ). Tre generatori di tensione reali sono collegati in parallelo a un generatore di corrente. Prendendo il nodo A come riferimento, è presente una sola tensione di nodo  $v_{BA} = v_{BA}$  incognita.

Ogni componente è controllato in tensione. Infatti, dalla caratteristica di ogni componente si può dedurre la corrente di ramo in funzione della tensione ai suoi terminali:

$$v_{BA} = E_k - R_k i_k \Rightarrow i_k = G_k (E_k - v_{BA}), k = 1, 2, 3$$

$$i_4 = I \quad (9)$$



La tensione di ciascun ramo può essere espressa come differenza delle tensioni di nodo dei terminali cui il ramo è collegato ( $LKT_r$ ). Il sistema risolvete si ottiene scrivendo la  $LKC_n$  per ogni nodo del circuito, escluso quello di riferimento, e risulta quindi costituito da  $(N - 1) = 1$  equazioni nelle  $(N - 1) = 1$  tensioni di nodo incognite. Con riferimento all'esempio di figura risulta:

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^3 G_k (E_k - v_{BA}) + I = 0 \Rightarrow v_{BA} = \frac{\sum_{k=1}^3 G_k E_k + I}{\sum_{k=1}^3 G_k} = \frac{\sum_{k=1}^3 \frac{E_k}{R_k} + I}{\sum_{k=1}^3 \frac{1}{R_k}} \quad (10)$$

La (13), che mostra la relazione tra la tensione  $v_{BA}$ , le tensioni e la corrente impresse dei generatori e le resistenze dei rami stessi; viene anche indicata col nome di **Teorema di Millman**, e può essere estesa ad un numero qualsiasi di generatori reali in parallelo.

Se i dati del problema sono  $E_1 = 110$  V,  $E_2 = 105$  V,  $E_3 = 0$  V,  $R_1 = 0.5$   $\Omega$ ,  $R_2 = 0.5$   $\Omega$ ,  $R_3 = 5$   $\Omega$ ,  $I = 3$  A dalla (10) si ottiene  $v_{BA} = 103.1$  V e sostituendo nelle (9)  $i_1 = 13.8$  A,  $i_2 = 3.8$  A,  $i_3 = -20.6$  A.

## 2.2 ANALISI BASATE SULLE MAGLIE

Le soluzioni (4) e (6) sono state ottenute risolvendo un sistema di 14 equazioni lineari in 14 incognite. Tale soluzione, anche se la matrice del sistema è sparsa, può risultare complessa. L'ordine del sistema risolvete può essere ridotto osservando che è possibile ottenere un sistema di  $2R$  equazioni indipendenti nelle sole tensioni e correnti di ramo incognite (**metodo fondamentale**).

Si consideri infatti la figura 2.a in cui sono indicate 3 ( $R - N + 1$  risulta in questo caso uguale a 3) maglie fondamentali del circuito individuate in figura 1.b. Applicando la  $LKT_m$  alle maglie così definite si ottiene il seguente sistema di equazioni lineari in cui compaiono solo le tensioni di ramo (versi di riferimento associati):

$$(R - N + 1 = 3 \text{ equazioni } LKT_m \text{ in cui come incognite compaiono } R = 6 \text{ tensioni di ramo})$$

$$\begin{aligned} v_1 - v_2 &= 0 \\ v_5 + v_4 &= 0 \\ v_6 - v_4 - v_3 + v_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.iii)$$

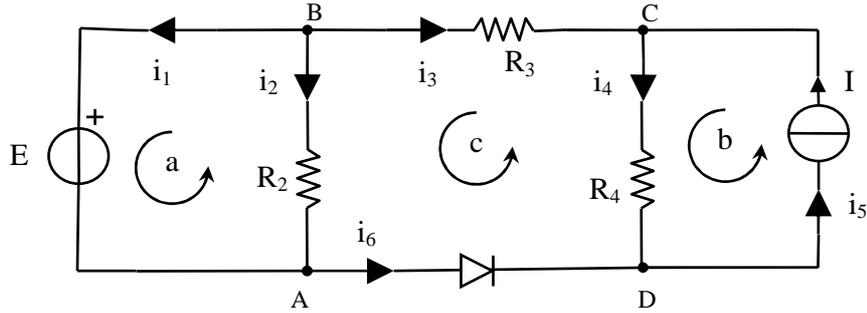


Figura 2.a

Le LKT<sub>m</sub> (2.iii), le LKC<sub>n</sub> (2.ii) e le caratteristiche (3) costituiscono un sistema di 2R equazioni, risolvendo il quale è possibile calcolare le 2R incognite tensioni e correnti di ramo.

(N - 1 = 3 equazioni LKC<sub>n</sub> in cui compaiono come incognite R = 6 correnti di ramo)

(R = 6 caratteristiche dei componenti in cui compaiono come incognite R = 6 tensioni di ramo ed R = 6 correnti di ramo)

$$\begin{aligned}
 -i_1 - i_2 + i_6 &= 0 \\
 i_1 + i_2 + i_3 &= 0 \\
 -i_3 + i_4 - i_5 &= 0 \\
 v_1 &= E \\
 v_2 &= R_2 i_2 \\
 v_3 &= R_3 i_3 \\
 v_4 &= R_4 i_4 \\
 i_5 &= I \\
 v_6 i_6 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.ii}$$

Infine, per tutti i componenti controllati in tensione (in questo esempio il ramo 5) o in corrente (in questo esempio i rami 1, 2, 3, e 4), è possibile sostituire le caratteristiche nelle LKT<sub>m</sub> ed LKC<sub>n</sub>. Tale sostituzione porta ad un sistema contenente un numero di equazioni pari a R + (Numero di componenti non controllati né in tensione né in corrente), in altrettante variabili (tensioni o correnti di ramo). Nell'esempio in oggetto otterremo quindi (dato che il diodo è l'unico componente presente non controllato né in tensione né in corrente) il seguente sistema di 7 equazioni nelle incognite v<sub>5</sub>, v<sub>6</sub>, i<sub>1</sub>, i<sub>2</sub>, i<sub>3</sub>, i<sub>4</sub>, i<sub>6</sub>:

$$\begin{aligned}
 (R - N + 1 = 3 \text{ equazioni LKT}_m) \quad & -E + R_2 i_2 = 0 \\
 & -R_2 i_2 + R_3 i_3 + R_4 i_4 - v_6 = 0 \\
 & -R_4 i_4 - v_5 = 0 \\
 (N - 1 = 3 \text{ equazioni LKC}_n) \quad & -i_1 - i_2 + i_6 = 0 \\
 & i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\
 & -i_3 + i_4 - I = 0 \\
 (\text{caratteristiche dei componenti non controllati né in tensione né in corrente}) \quad & v_6 i_6 = 0
 \end{aligned}
 \tag{3.i}$$

$$\begin{aligned}
 & -i_1 - i_2 + i_6 = 0 \\
 & i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\
 & -i_3 + i_4 - I = 0
 \end{aligned}
 \tag{3.ii}$$

$$v_6 i_6 = 0 \tag{3.iii}$$

Riassumendo, per applicare il **metodo fondamentale** ad un circuito connesso (R = numero di rami, N = numero di nodi), si applica la LKT<sub>m</sub> ad ogni maglia fondamentale del circuito, si applica la LKC<sub>n</sub> a tutti i nodi tranne uno e si chiude il sistema con le caratteristiche dei componenti:

$$\begin{aligned}
 R - N + 1 \text{ equazioni LKT}_m \quad & \mathbf{B} \mathbf{v} = \mathbf{0} \\
 N - 1 \text{ equazioni LKC}_n \quad & \mathbf{A} \mathbf{i} = \mathbf{0} \\
 R \text{ equazioni caratteristiche} \quad & \mathbf{f}(\mathbf{i}, \mathbf{v}) = \mathbf{0}
 \end{aligned}$$

dove **v** è il vettore delle tensioni di ramo (dimensione R), **i** è il vettore delle correnti di ramo (dimensione R), **B** è una matrice costante (R - N + 1) × R ed **A** è una matrice costante (N - 1) × R. Il sistema risolvete contiene dunque 2R equazioni in 2R incognite. Tuttavia, se tutti i componenti sono controllati in tensione o in corrente è possibile sostituire le caratteristiche nelle LKT ed LKC, giungendo ad un sistema risolvete di R equazioni in R incognite.



$$\mathbf{B}^T \mathbf{i}_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_5 \\ i_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 \\ -i_1 + i_6 \\ -i_6 \\ i_5 - i_6 \\ i_5 \\ i_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{pmatrix} = \mathbf{i}$$

Dato che le (11) sono state ottenute applicando la Legge di Kirchhoff delle Correnti, esse risultano equivalenti alle (2.ii) (infatti sostituendo le (12.i) nelle (2.ii) si ottengono tre identità  $0 = 0$ ). Inoltre, per tutti i componenti sui rami di albero è possibile sostituire le relazioni (12.i) nelle caratteristiche dei componenti. Tale sostituzione porta ad un sistema contenente un numero di equazioni pari a  $2R - N + 1$ , in altrettante variabili (tensioni di ramo e correnti di coalbero).

Nell'esempio in oggetto otterremo quindi il seguente sistema di 9 equazioni nelle incognite  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, i_1, i_5, i_6$ :

$$\begin{aligned} & \text{(R - N + 1 = 3 equazioni LKT}_m \text{ in cui come} \\ & \text{incognite compaiono R = 6 tensioni di ramo)} \\ & \qquad v_1 - v_2 = 0 \\ & \qquad v_5 + v_4 = 0 \\ & \qquad v_6 - v_4 - v_3 + v_2 = 0 \\ & \qquad v_1 = E \\ & \qquad v_2 = R_2(-i_1 + i_6) \\ & \qquad v_3 = -R_3 i_6 \\ & \qquad v_4 = R_4(-i_6 + i_5) \\ & \qquad i_5 = I \\ & \qquad v_6 i_6 = 0 \end{aligned} \tag{2.iii}$$

(R = 6 caratteristiche dei componenti in cui compaiono come incognite R = 6 tensioni di ramo ed R - N + 1 = 3 correnti di coalbero)

$$\tag{3.iv}$$

Infine, per tutti i componenti controllati in corrente (in questo esempio i rami 1, 2, 3, e 4), è possibile sostituire le caratteristiche nelle LKT<sub>m</sub>. Tale sostituzione porta ad un sistema contenente un numero di equazioni pari a  $R - N + 1 +$  (Numero di componenti non controllati in corrente), in altrettante variabili (tensioni di ramo o correnti di coalbero). Nell'esempio in oggetto otterremo quindi (dato che il diodo ed il generatore di corrente non sono controllati in corrente) il seguente sistema di 5 equazioni nelle incognite  $v_5, v_6, i_1, i_5, i_6$ :

$$\begin{aligned} & \text{(R - N + 1 = 3 equazioni LKT}_m \text{)} \\ & \qquad E - R_2(-i_1 + i_6) = 0 \\ & \qquad v_5 + R_4(-i_6 + i_5) = 0 \\ & \qquad v_6 - R_4(-i_6 + i_5) + R_3 i_6 + R_2(-i_1 + i_6) = 0 \\ & \text{(caratteristiche dei componenti non controllati in corrente)} \\ & \qquad i_5 = I \\ & \qquad v_6 i_6 = 0 \end{aligned} \tag{12.ii}$$

$$\tag{12.iii}$$

Si noti che risulta conveniente, se possibile, scegliere i rami dell'albero escludendo quelli contenenti generatori di corrente indipendenti. In tal caso infatti, si ottengono direttamente delle equazioni del tipo  $i_5 = I$  (relazione costitutiva del generatore di corrente), che consentono di ridurre direttamente l'ordine del sistema.

Riassumendo, per applicare il metodo dei tagli fondamentali ad un circuito connesso qualunque (R = numero di rami, N = numero di nodi), si definisce un albero (ed un coalbero), si applica la LKT<sub>m</sub> ad ogni maglia fondamentale, si applica la LKC<sub>t</sub> ad ogni taglio fondamentale e si chiude il sistema con le caratteristiche dei componenti:

$$R - N + 1 \text{ equazioni LKT}_m \quad \mathbf{B} \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$N - 1 \text{ equazioni LKC}_t \quad \mathbf{i} = \mathbf{Q} \mathbf{i}_c$$

(ed R - N + 1 identità)

$$R \text{ equazioni caratteristiche} \quad \mathbf{f}(\mathbf{i}, \mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

dove  $\mathbf{v}$  è il vettore delle tensioni di ramo (dimensione R),  $\mathbf{i}$  è il vettore delle correnti di ramo (dimensione R),  $\mathbf{i}_c$  è il vettore delle correnti dei rami di coalbero (dimensione R - N + 1),  $\mathbf{B}$  è una ma-

trice costante  $(R - N + 1) \times R$  detta matrice delle maglie fondamentali e  $\mathbf{Q}$  è una matrice costante  $R \times (R - N + 1)$  detta matrice dei tagli fondamentali ( $\mathbf{Q}$  è uguale a  $\mathbf{B}^T$  se si utilizzano le convenzioni definite precedentemente ed avendo scritto le equazioni nell'ordine specificato dalla numerazione dei rami).

Applicando il <b>metodo dei tagli fondamentali</b> è dunque sempre possibile sostituire le LKC nelle caratteristiche ottenendo il sistema ridotto:	$R - N + 1$ equazioni LKT <sub>m</sub>	$\mathbf{B} \mathbf{v} = \mathbf{0}$
	$R$ equazioni caratteristiche	$f(\mathbf{Q} \mathbf{i}_c, \mathbf{v}) = \mathbf{0}$

Il sistema risolvete  $2R - N + 1$  equazioni in  $2R - N + 1$  incognite. Tuttavia, se tutti i componenti sono controllati in corrente, cioè se  $f(\mathbf{i}, \mathbf{v}) = \mathbf{v} - \mathbf{h}(\mathbf{i})$ , è possibile sostituire le caratteristiche nelle LKT, giungendo ad un sistema risolvete di  $R - N + 1$  equazioni nelle  $R - N + 1$  incognite “correnti dei rami di coalbero”.

$R - N + 1$  equazioni LKT<sub>m</sub>

$$\mathbf{B} \mathbf{h}(\mathbf{Q} \mathbf{i}_c) = \mathbf{0}$$

### 3. I PRINCIPI DI SOVRAPPOSIZIONE E DI SOSTITUZIONE

Nel caso particolare in cui tutti i componenti siano resistori lineari, generatori indipendenti di tensione e di corrente oppure generatori pilotati con caratteristica lineare, la rete si definisce lineare<sup>(\*)</sup> e le equazioni delle caratteristiche possono essere scritte nella forma

$R$  caratteristiche lineari

$$\mathbf{H} \mathbf{i} + \mathbf{K} \mathbf{v} = \mathbf{S}$$

dove  $\mathbf{H}$  è una matrice costante  $R \times R$ ,  $\mathbf{K}$  è una matrice costante  $R \times R$  ed  $\mathbf{S}$  è il vettore di dimensione  $R$  che contiene le tensioni e le correnti impresse dai generatori indipendenti (sui rami in cui sono presenti e zero altrove). In tal caso il sistema risolvete è lineare ed è possibile esprimere ogni variabile come combinazione lineare delle sole tensioni e correnti impresse dai generatori indipendenti. Infatti LKT<sub>r</sub>, LKC<sub>n</sub>, e le caratteristiche possono essere rappresentate in un unico sistema lineare, come segue (dove la matrice identità  $R \times R$  è indicata con il simbolo  $\mathbf{1}$ ):

$$\left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{1} & -\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{K} & \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{array} \right\| \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{v} \\ \mathbf{e} \\ \mathbf{i} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{S} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{T} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{v} \\ \mathbf{e} \\ \mathbf{i} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{S} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{v} \\ \mathbf{e} \\ \mathbf{i} \end{array} \right\} = \mathbf{T}^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{S} \end{array} \right\}$$

La matrice dei coefficienti  $\mathbf{T}$  (matrice Tableau) è una matrice costante  $(2R + N - 1) \times (2R + N - 1)$  che contiene, per costruzione, tutti i parametri dei componenti presenti nel circuito, tranne le grandezze impresse dai generatori indipendenti. Ovviamente, anche la matrice  $\mathbf{T}^{-1}$  è una matrice costante. Ammesso che  $\mathbf{T}$  sia invertibile<sup>(\*)</sup>, tutte le variabili circuitali sono quindi combinazioni lineari

<sup>(\*)</sup> In generale, si dice circuito lineare un circuito che contiene solo componenti lineari (generatori pilotati compresi) e generatori indipendenti. Un circuito lineare quindi ha un sistema risolvete costituito solo da equazioni lineari.

<sup>(\*)</sup> Come noto, condizione necessaria e sufficiente per l'invertibilità di una matrice è che il suo determinante sia non nullo. Nel caso in cui  $\mathbf{T}$  non sia invertibile ( $\det \mathbf{T} = 0$ ) il circuito si dice non-univocamente solubile. Nel seguito si assumerà che tutti i circuiti trattati siano univocamente solubili. Questa situazione, che matematicamente è causata dalla non-indipendenza delle equazioni, è solitamente il risultato di un eccesso di idealizzazione nel modello del dispositivo fisico studiato. Ad esempio, è certamente possibile collegare in serie o in parallelo due generatori reali. In tal caso tuttavia è essenziale considerare le resistenze interne (spesso trascurate in prima approssimazione) per ottenere un circuito univocamente solubile. Infatti se in un circuito sono presenti due generatori indipendenti di tensione in parallelo con la stessa tensione impressa  $E$  è impossibile determinare le correnti circolanti su di essi (la LKT sulla maglia da essi formata porta alla identità:  $0 = E - E$ ). Analogamente, se in un circuito sono presenti due generatori indipendenti di corrente in serie con la stessa corrente impressa  $I$  è impossibile determinare le tensioni su di essi (la LKC sul nodo in comune porta alla identità:  $0 = I - I$ ).

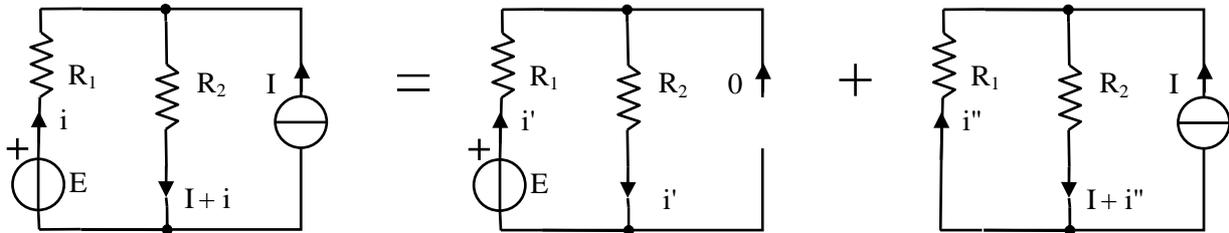
delle sole tensioni e correnti impresse dai generatori indipendenti. Pertanto, la corrente sul k-esimo ramo è rappresentabile come segue:

$$i_k = \sum_n g_{k,n} E_{s,n} + \sum_m \alpha_{k,m} I_{s,m} \quad \text{per ogni } k = 1, \dots, R$$

gen.ind.tensione
gen.ind.corrente

Tale relazione è l'enunciato del **Principio di Sovrapposizione degli effetti**: *In una rete lineare univocamente solubile la corrente in un generico ramo (effetto) è uguale alla somma algebrica delle correnti che vi sarebbero prodotte dai singoli generatori indipendenti presenti nella rete se agissero separatamente.* Lo stesso vale per le tensioni di ramo e di nodo.

Risolvere una rete lineare utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti significa scomporre la rete originaria in tante rete parziali quanti sono i generatori indipendenti, calcolare la corrente nei rami per ognuna di queste reti, e sommare algebricamente le correnti parziali. Si calcoli ad esempio la corrente  $i$  nella resistenza  $R_1$  della rete di figura (a sinistra). Indicando con  $i'$  ed  $i''$  le correnti nei due circuiti a destra, si ha  $i = i' + i''$ . La prima è la rete che si ottiene da quella originaria, annullando la corrente impressa del generatore indipendente di corrente, la seconda quella in cui è annullata la tensione impressa dal generatore indipendente di tensione. La figura illustra il concetto mostrando, nel contempo, in che modo si attua l'annullamento dei generatori: i generatori indipendenti a tensione impressa nulla sono equivalenti a cortocircuiti ( $v = 0$  per entrambi i bipoli), i generatori indipendenti a corrente impressa nulla sono equivalenti a circuiti aperti ( $i = 0$  per entrambi i bipoli).



Risolvendo si ha  $i' = E/(R_1 + R_2)$  ed  $i'' = -R_2 I / (R_1 + R_2)$  e quindi si ottiene:  $i = (E - R_2 I) / (R_1 + R_2)$ . Chiaramente questa procedura di soluzione richiede la soluzione di un numero di circuiti pari al numero di generatori indipendenti presenti nella rete iniziale. Pertanto può essere conveniente solo se tali circuiti sono più semplici da risolvere della rete iniziale. Con riferimento all'ultimo esempio si noti infatti che  $R_1$  ed  $R_2$  non sono né in serie né in parallelo nello schema iniziale; tuttavia, nel primo circuito semplificato  $R_1$  ed  $R_2$  sono in serie, mentre nel secondo sono in parallelo, ed in entrambi i casi possono essere sostituite con un solo resistore equivalente.

La maggior parte dei circuiti non-lineari che si incontrano nelle applicazioni è costituita da componenti lineari e componenti non-lineari. Ovviamente, qualunque sia il metodo di soluzione adottato, la difficoltà nella soluzione del sistema risolvete è dovuta proprio alla presenza delle caratteristiche non-lineari (le LK sono sempre lineari). Si può semplificare la soluzione di un circuito non-lineare, riducendo al minimo il numero di equazioni del sistema risolvete, utilizzando il **principio di sostituzione** (o teorema di compensazione): *per un circuito lineare o non lineare univocamente solubile, dette  $v_k$  ed  $i_k$  la tensione e la corrente effettivamente presenti sul ramo k-esimo, la sostituzione del ramo k-esimo con un generatore indipendente di tensione a tensione impressa pari a  $v_k$  (oppure la sostituzione del ramo k-esimo con un generatore indipendente di corrente a corrente impressa pari a  $i_k$ ) non modifica il funzionamento del circuito<sup>(#)</sup>.* La dimostrazione consiste semplicemente nella verifica che la soluzione del circuito iniziale soddisfa anche il circuito con il ramo sostituito. Si noti intanto che la sostituzione di un ramo con un generatore non modifica né il numero di rami  $R$ , né il numero di nodi  $N$  (e dunque nemmeno il numero di maglie fondamentali  $R - N + 1$ ). Pertanto, qualunque sia il metodo di soluzione adottato, il numero di equazioni nel sistema risolvete per il circuito iniziale e per il circuito con il ramo sostituito è lo stesso. Per fissare le idee si consideri il metodo di Tableau e si indichino con un apice le variabili (con gli stessi versi) nel circuito ottenuto sostituendo il ramo k-esimo sostituito con un generatore indipendente di tensione a

<sup>(#)</sup>Ovviamente il principio di sostituzione si può iterare, potendosi quindi sostituire anche due o più rami.

tensione impressa pari a  $v_k$ . Chiaramente le LK, dipendendo solo dalla topologia, cioè da rami e nodi, sono le stesse nei due casi. Anche le caratteristiche su tutti i rami tranne il  $k$ -esimo sono le stesse, mentre la caratteristica del  $k$ -esimo ramo è per definizione  $v_k' = v_k$ . È quindi immediato verificare che  $\mathbf{v}' = \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{e}' = \mathbf{e}$ , ed  $\mathbf{i}' = \mathbf{i}$ , soddisfa tutte le equazioni e quindi è la soluzione del sistema<sup>(##)</sup>.

Circuito iniziale

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^T \mathbf{e}$$

$$\mathbf{A} \mathbf{i} = \mathbf{0}$$

$$f_h(\mathbf{i}, \mathbf{v}) = 0 \quad (h = 1, \dots, R) \quad R \text{ equazioni caratteristiche}$$

$R$  equazioni LKT<sub>r</sub>

$N - 1$  equazioni LKC<sub>n</sub>

Circuito con il ramo  $k$ -esimo sostituito con un generatore indipendente di tensione a tensione impressa pari a  $v_k$

$$\mathbf{v}' = \mathbf{A}^T \mathbf{e}'$$

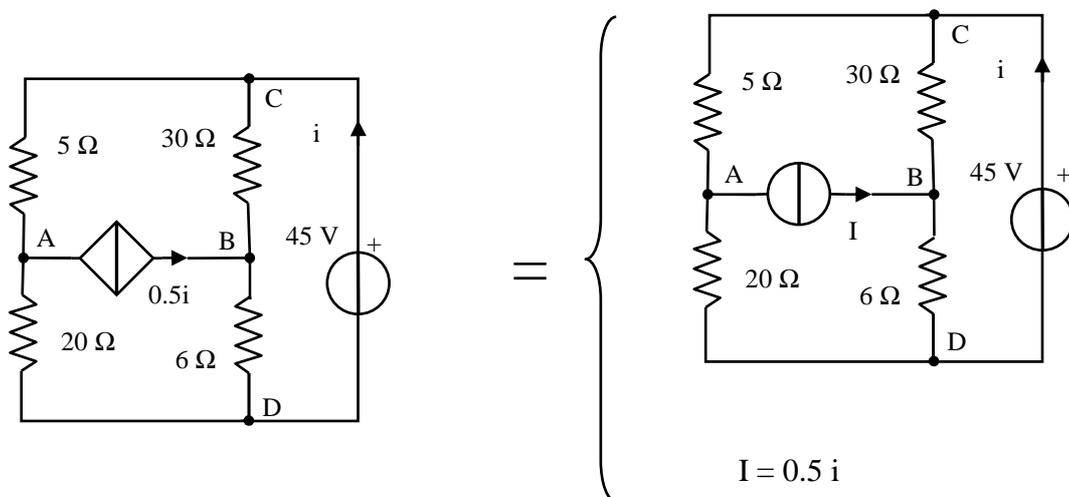
$$\mathbf{A} \mathbf{i}' = \mathbf{0}$$

$$f_h(\mathbf{i}', \mathbf{v}') = 0 \quad (h = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, R)$$

$$v_k' = v_k$$

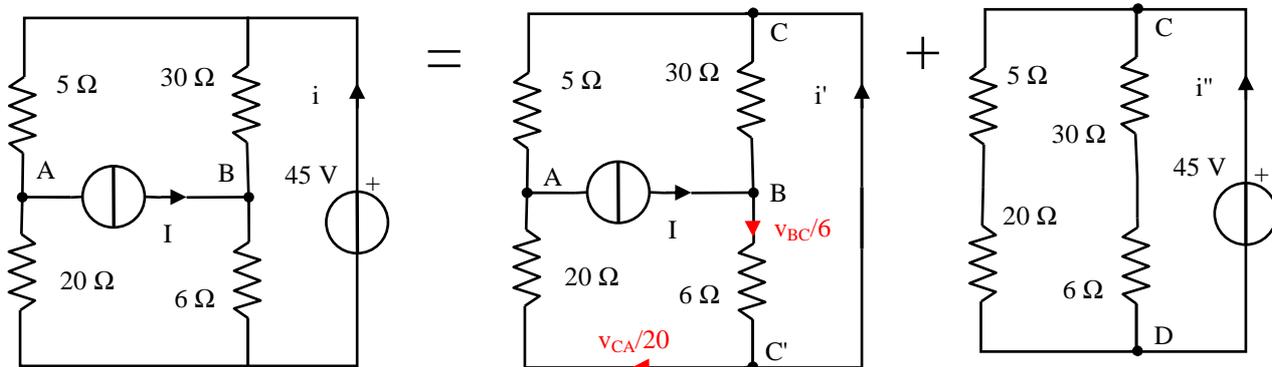
Utilizzare il principio di sostituzione è particolarmente conveniente nel caso in cui il circuito contenga pochi elementi non-lineari. Infatti, la loro sostituzione con generatori indipendenti permette di risolvere separatamente la parte lineare del circuito; l'analisi viene quindi completata inserendo tale soluzione parziale nelle caratteristiche dei componenti non-lineari e risolvendole. Ovviamente è possibile utilizzare il principio di sostituzione per sostituire anche componenti lineari se, per qualche motivo, si ritiene utile.

Si consideri ad esempio il circuito mostrato in figura, in cui si vuole determinare la potenza erogata dal generatore di tensione. Dato che  $N = 4$  nodi,  $R = 6$  rami (ed  $R - N + 1 = 3$  maglie fondamentali) e sapendo quanti bipoli sono controllati è possibile calcolare immediatamente quante variabili (ed equazioni) conterrà il sistema risolvente per ognuno dei metodi studiati. In particolare (per le variabili) si ha: 15 per Tableau ( $R = 6$  tensioni di ramo,  $R = 6$  correnti di ramo,  $N - 1 = 3$  tensioni di nodo), 7 per il metodo fondamentale ( $R = 6$  tensioni o correnti di ramo, 1 bipolo non controllato), 4 per il metodo delle correnti di maglia ( $R - N + 1 = 3$  correnti di maglia, 1 bipolo non controllato in corrente) e 5 per il metodo delle tensioni di nodo ( $N - 1 = 3$  tensioni di nodo, 2 bipoli non controllati in tensione). Come sempre è chiaramente conveniente adottare per la soluzione o il metodo dei tagli fondamentali o il metodo delle tensioni di nodo. Si noti anche che scegliendo opportunamente le variabili (o il riferimento) le equazioni possono ridursi ulteriormente. Dato che la presenza del generatore pilotato aumenta il numero di equazioni presenti nel sistema risolvente può convenire, anche se il componente è lineare, utilizzare il principio di sostituzione: nel circuito assegnato si sostituisce il generatore pilotato con un generatore indipendente di corrente (il valore della corrente impressa si suppone quindi noto e pari al valore della corrente effettivamente presente sul ramo). Poiché non si conosce tale valore è necessario vincolare la corrente impressa imponendo che la corrente sul ramo soddisfi la caratteristica del generatore pilotato.

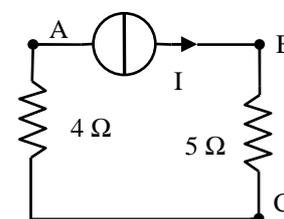


<sup>(##)</sup>Nel caso in cui si sostituisca il ramo  $k$ -esimo con un generatore indipendente di corrente a corrente impressa pari a  $i_k$ , la procedura è la stessa, tranne che la caratteristica del  $k$ -esimo ramo è per definizione  $i_k' = i_k$ .

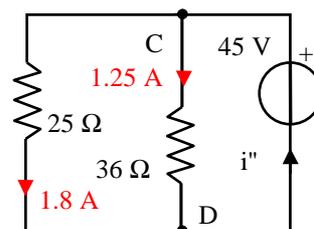
È possibile quindi procedere a risolvere il circuito privo di generatore pilotato e, una volta ottenuta la soluzione, imporre che la condizione di vincolo sia soddisfatta. In questo caso particolare, essendo il circuito privo di generatori pilotati, diventa possibile utilizzare il principio di sovrapposizione degli effetti. Con la notazione mostrata nella figura si ha:  $i = i' + i''$ .



Nel primo circuito il resistore da 20 Ω si trova in parallelo al resistore da 5 Ω (sono collegati agli stessi nodi): la resistenza equivalente è  $20 \times 5 / (20 + 5) = 4 \Omega$ . Analogamente per la coppia di resistori da 30 Ω e 6 Ω: la resistenza equivalente è  $30 \times 6 / (30 + 6) = 5 \Omega$ . Il circuito equivalente che si ottiene è rappresentato a lato. Dalle caratteristiche dei due resistori si ottengono quindi le tensioni:  $v_{BC} = 5I$  ed  $v_{CA} = 4I$ . Tornando allo schema precedente le correnti sui resistori da 6 Ω e 20 Ω sono quindi, con i versi associati,  $v_{BC}/6 = 5I/6$  ed  $v_{CA}/20 = 4I/20 = I/5$ . Quindi, applicando la LKC al nodo C' si ottiene:  $i' = 5I/6 - I/5 = 0.634 I$ .



Nel secondo circuito la coppia di resistori da 30 Ω e 6 Ω è in serie (stessa corrente) e analogamente per la coppia di resistori da 20 Ω e 5 Ω. Sostituendo le resistenze equivalenti da 36 Ω e 25 Ω si ottiene il circuito equivalente rappresentato a lato. Entrambe le resistenze sono soggette alla tensione impressa dal generatore indipendente. Pertanto, con i versi associati, le correnti sono date da  $45/36 = 1.25$  A ed  $45/25 = 1.8$  A. Applicando la LKC al nodo D si ottiene quindi:  $i'' = 1.25 + 1.8 = 3.05$  A.



Risulta quindi:  $i = i' + i'' = 0.634 I + 3.05$

Utilizzando ora la condizione di vincolo, si ottiene  $i = 0.634 (0.5 i) + 3.05$ , la cui soluzione è data da  $i = 4.47$  A, (e quindi  $I = 2.23$  A). La potenza erogata dal generatore indipendente è quindi  $p_{GT(e)} = 45i = 201$  W. Si noti che con questa procedura di soluzione le vere difficoltà risultano essere contenute nella condizione di vincolo. In effetti se, in questo stesso circuito, si considera un generatore pilotato non-lineare con caratteristica  $I = f(i)$ , nulla cambia nella procedura vista sopra se non l'equazione finale, ovvero la determinazione della soluzione dell'equazione  $i = 0.634 f(i) + 3.05$ .

#### 4. I TEOREMI DI THEVENIN E DI NORTON

La nozione di equivalenza tra componenti è utilizzata spesso per semplificare la soluzione dei circuiti. Nel caso migliore l'utilizzo ripetuto delle equivalenze porta ad un circuito elementare, che è immediatamente solubile. Ovviamente, se si è interessati alla soluzione del circuito iniziale, è necessario ricostruire "all'indietro" ogni sostituzione effettuata; può capitare anche che sia presente una sottorete (ovvero una parte del circuito) di cui non interessa determinare il funzionamento dettagliato. Questa procedura è semplice da utilizzare ma è limitata dalla disponibilità di equivalenze note. Infatti, le equivalenze introdotte finora (serie e parallelo di resistori, stella-triangolo di resistori, i due schemi possibili per i generatori reali, la riduzione da secondario a primario del trasformatore, ...) non esauriscono certamente tutti i casi possibili e quindi rimane il problema di determinare un circuito equivalente di una data sottorete lineare (ovvero un componente, ai cui terminali è collegata la restante parte del circuito). Nel caso più frequente la sottorete è un bipolo e in questo caso si possono utilizzare i teoremi di Thevenin e Norton per determinare il circuito equivalente. I teoremi

sono due in quanto è necessario distinguere i bipoli controllati in corrente da quelli controllati in tensione<sup>(6)</sup>.

### Teorema di Thevenin

*Ipotesi.* Sono dati due bipoli, L ed N collegati come illustrato nella figura 3. Il bipolo L è una rete lineare e controllato in corrente, mentre il bipolo N può essere qualsiasi, anche non lineare.

*Tesi.* Limitatamente alla corrente  $i$  ed alla tensione  $v_{AB}$  alla porta, il circuito che si ottiene sostituendo il bipolo L (quello lineare) con un generatore di tensione ed un bipolo L' collegati in serie, è equivalente in ogni istante al circuito originale. Il bipolo L' si ottiene dal bipolo L annullando le grandezze impresse dei generatori indipendenti di tensione e di corrente eventualmente presenti (i generatori indipendenti di tensione vengono quindi sostituiti con dei corto-circuiti ed i generatori indipendenti di corrente vengono sostituiti con dei circuiti aperti). La tensione impressa  $E_0$  del generatore di tensione di Thevenin è pari al valore della tensione  $v_{AB}$  alla porta del bipolo L quando la corrente  $i$  è nulla (si noti che il verso positivo di  $E_0$  è arbitrario: una volta scelto il verso positivo, il valore di  $E_0$  è pari alla tensione  $v_{AB}$  se il terminale positivo è A, è pari invece a  $-v_{AB}$  se il terminale positivo è B).

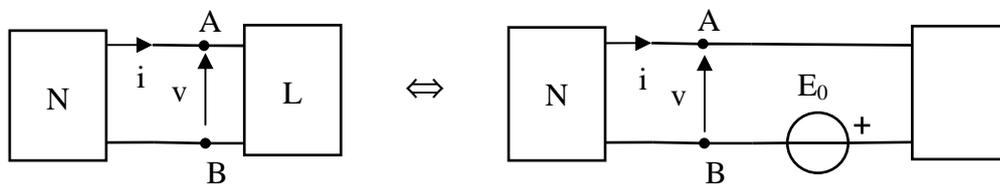
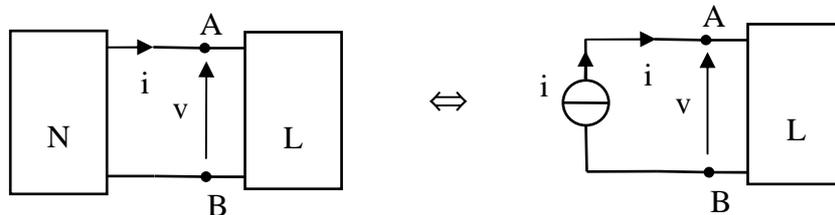


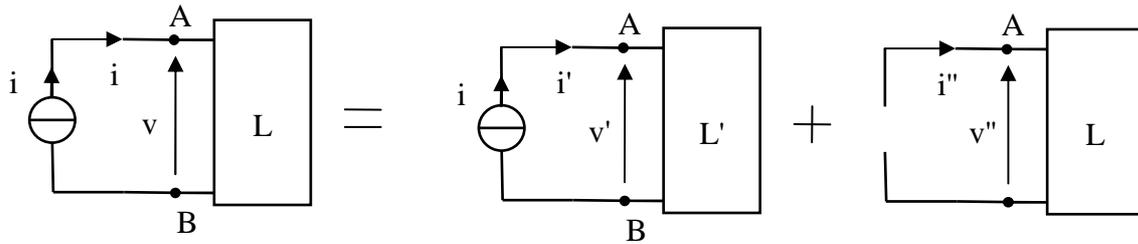
Figura 3 Teorema di Thevenin

Dimostrazione: poiché il bipolo L è controllato in corrente (data la corrente è possibile determinare la tensione ai terminali), è possibile, ai fini del calcolo della tensione  $v$ , sostituire al bipolo N un generatore di corrente indipendente la cui corrente impressa  $i$  coincide con la corrente assorbita dal bipolo L.



Dato che il bipolo L è lineare, è possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti. In particolare, consideriamo due circuiti: nel primo azzeriamo i generatori indipendenti in L (e indicheremo tale bipolo con L', nel secondo azzeriamo il generatore indipendente di corrente (come già visto, i generatori indipendenti di tensione nulla sono equivalenti a cortocircuiti, i generatori indipendenti di corrente nulla sono equivalenti a circuiti aperti.).

<sup>(6)</sup> Verificare se un bipolo lineare è controllato in tensione o in corrente richiede la determinazione della sua caratteristica. Dato che questa è, per definizione, alla base della dimostrazione dell'equivalenza, cioè l'oggetto dei teoremi di Thevenin e Norton, si procede solitamente ipotizzando che il bipolo sia controllato in corrente e quindi applicando il teorema di Thevenin. Se i parametri del circuito equivalente non esistono (sono infiniti) l'ipotesi risulta essere falsa e quindi si passa al teorema di Norton. Si noti che una delle due ipotesi è sempre corretta, se il bipolo è lineare. Infatti la caratteristica è in generale  $h i + k v = s$ , con  $h$  e  $k$  non contemporaneamente nulli (altrimenti il circuito non è univocamente solubile: la matrice Tableau contiene una riga di zeri e quindi non è invertibile)



Si ha:  $i = i' + i''$  , dove  $i'$  ed  $i''$  sono le correnti nelle due sottoreti  
 e  $v = v' + v''$  , dove  $v'$  ed  $v''$  sono le tensioni nelle due sottoreti

È evidente tuttavia che  $i' = i$  e che  $i'' = 0$ . Inoltre, applicando la LKT alle due sottoreti otteniamo (si ricordi che per ipotesi  $L$  è controllato in corrente):

$$v' = V_{L'}(i') = V_L(i) \qquad v'' = V_L(i'') = V_L(0)$$

dove  $V_{L'}( )$  ed  $V_L( )$  rappresentano le caratteristiche dei bipoli  $L'$  ed  $L$ , rispettivamente. Infine, definendo  $E_0 = V_L(0) = v_{AB}|_{L \text{ a vuoto}}$  si ottiene:

$$v = V_{L'}(i) + E_0$$

che è proprio la caratteristica del bipolo equivalente mostrato in figura 3. Il teorema di Thevenin, come enunciato, è valido in regime qualsiasi. In particolare, in regime stazionario (corrente continua) si ha che “Un circuito lineare  $L$  con due terminali controllato in corrente è equivalente a un generatore di tensione reale (bipolo di Thevenin) formato da un generatore indipendente di tensione  $E_0$  in serie con un resistore  $R_e$ , in cui  $E_0$  è la tensione a vuoto ai terminali e  $R_e$  è la resistenza vista ai terminali quando i generatori indipendenti sono spenti”. Infatti, poiché il bipolo  $L$  è lineare e controllato in corrente, la sua relazione costitutiva è esprimibile per ipotesi come  $V_{L'}(i) = R_e i$ . Questo è sufficiente a definire univocamente il valore di  $R_e$ . Risulta infatti:

$$R_e = V_{L'}(i) / i = (v_{AB} / i)_{\text{Generatori Indipendenti di } L \text{ Spenti}}$$

Si può applicare il teorema di Thevenin alla soluzione del circuito di figura 1 considerando come bipolo  $N$  il diodo e quindi come bipolo  $L$  l'insieme di tutti gli altri componenti del circuito (vedi figura 4.a). Il bipolo  $L'$  è quello indicato nella figura 4.b, mentre il valore della tensione  $E_0$  viene calcolato risolvendo il circuito riportato nella figura 4.c<sup>(\*)</sup>.

Sostituendo al bipolo  $L$  il suo equivalente di Thevenin si ottiene un circuito costituito da una sola maglia, la cui soluzione permette di determinare tensione e corrente sul diodo ( $i_6$  e  $v_6$ ). Tutte le altre variabili circuitali devono essere determinate dall'analisi del circuito iniziale in cui tuttavia  $i_6$  ora è nota. È quindi possibile sostituire al diodo un generatore indipendente di corrente (definire la corrente sul ramo significa definire la caratteristica del componente sul ramo stesso).

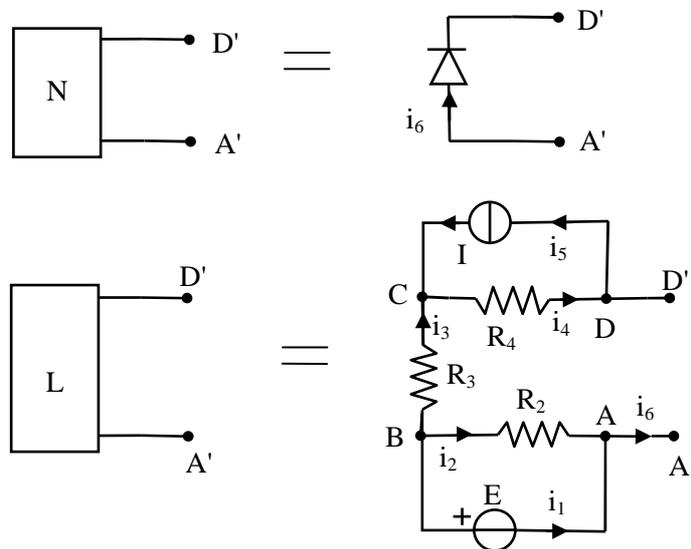


Figura 4.a

<sup>(\*)</sup> Per comodità di notazione si utilizzano (tipicamente) per le variabili circuitali gli stessi simboli già definiti. Ovviamente le correnti in figura 4.c (bipolo  $L$  a vuoto) hanno valori diversi da quelle in figura 1 (bipolo  $L$  collegato al diodo).

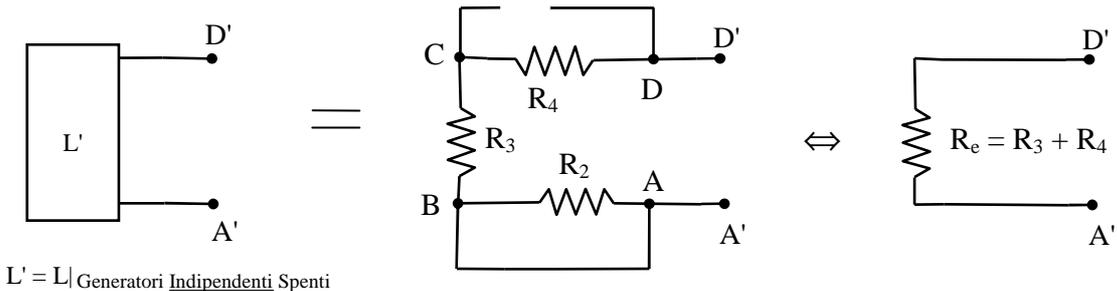
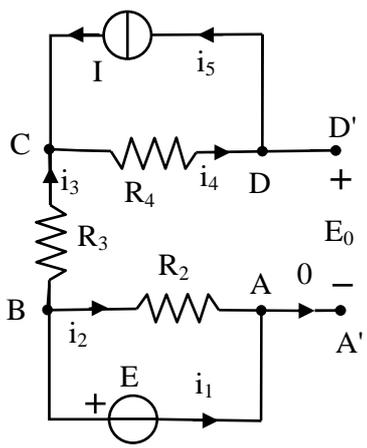


Figura 4.b



← Figura 4.c

La soluzione del circuito di figura è immediata notando che il ramo 3 costituisce un taglio fondamentale. Pertanto  $i_3 = 0$ , e dunque si ha che

$$i_4 = i_5 = I$$

ed

$$i_2 = -i_1 = E/R_2$$

Infine la valutazione di  $E_0$  si ottiene applicando la LKT alla sequenza ABCDA:

$$0 = -R_2 i_2 + R_3 i_3 + R_4 i_4 + E_0$$

ovvero

$$E_0 = E - R_4 I$$

Infine il valore della corrente  $i_6$  viene ottenuto risolvendo il circuito illustrato nella figura 5, ottenuto sostituendo il bipolo L con il suo circuito equivalente di Thevenin.

Si ritrova quindi che sono possibili due casi: diodo interdetto oppure diodo in conduzione. Se il diodo è interdetto allora la corrente  $i_6$  è nulla e la tensione  $v_{AD'}$ , che essendo nulla la tensione sulla resistenza  $R_e$  (corrente nulla) coincide con  $-E_0$ , deve essere minore od uguale a zero, da cui si ricava ancora la relazione (7). Se il diodo è in conduzione allora la corrente  $i_6$  è pari a  $-E_0/R_e$  e deve risultare maggiore od uguale a zero, da cui si ricava ancora la (5).

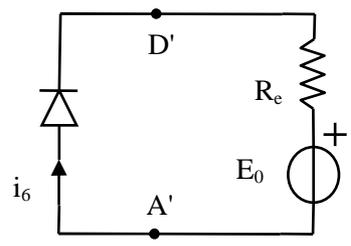


Figura 5

Se  $E = 24 \text{ V}$ ,  $I = 4 \text{ A}$ ,  $R_2 = 2 \Omega$ ,  $R_3 = 12 \Omega$ ,  $R_4 = 8 \Omega$ , risulta  $E_0 = -8 \text{ V}$  ed il diodo è in conduzione. Quindi dalla soluzione del circuito di figura 5 e dalle leggi di Kirchhoff per il circuito di figura 1 si ottiene:

$$v_6 = 0, \quad i_6 = -\frac{E - R_4 I}{R_3 + R_4} = 0.4 \text{ A}$$

$$i_4 = I - i_6 = 3.6 \text{ A}, \quad v_4 = R_4 i_4 = 28.8 \text{ V}$$

$$i_5 = I = 4 \text{ A}, \quad v_5 = -v_4 = -28.8 \text{ V}$$

$$i_3 = -i_6 = -0.4 \text{ A}, \quad v_3 = R_3 i_3 = -4.8 \text{ V}$$

$$v_2 = E = 24 \text{ V}, \quad i_2 = v_2 / R_2 = 12 \text{ A}$$

$$v_1 = E = 24 \text{ V}, \quad i_1 = i_6 - i_2 = -11.6 \text{ A}$$

### Teorema di Norton

*Ipotesi.* Sono dati due bipoli, L ed N collegati come illustrato nella figura 6. Il bipolo L è una rete lineare e controllato in tensione, mentre il bipolo N può essere qualsiasi, anche non lineare.

*Tesi.* Limitatamente alla corrente  $i$  ed alla tensione  $v_{AB}$  alla porta, il circuito che si ottiene sostituendo il bipolo L (quello lineare) con un generatore di corrente ed un bipolo L' collegati in parallelo, è equivalente in ogni istante al circuito originale. Il bipolo L' si ottiene dal bipolo L annullando le grandezze impresse dei generatori indipendenti di tensione e di corrente eventualmente presenti (il bipolo L' è lo stesso che interviene nel teorema di Thevenin). La corrente impressa  $I_c$  del generatore di corrente di Norton è pari al valore della corrente  $i$  alla porta del bipolo L quando la tensione  $v_{AB}$  è nulla (E' da notare che il verso positivo di  $I_c$  è arbitrario: una volta scelto il verso positivo il valore

di  $I_c$  è pari alla corrente  $i$  se la freccia punta verso il terminale dove la corrente  $i$  esce da  $L$ , è pari invece a  $-i$  se la freccia punta verso il terminale dove la corrente  $i$  entra in  $L$ )

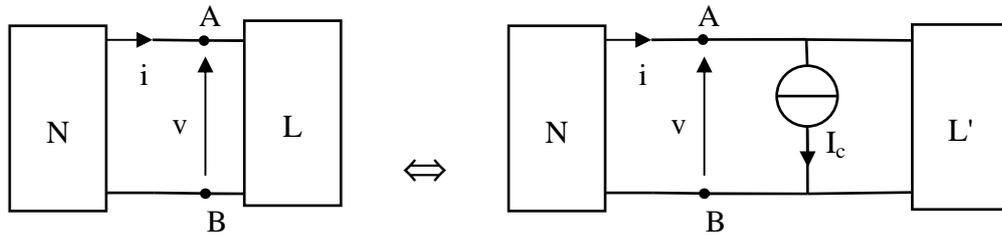
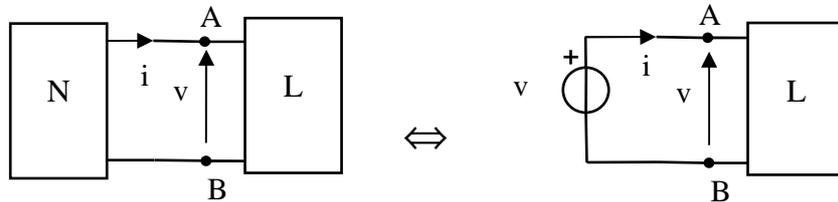
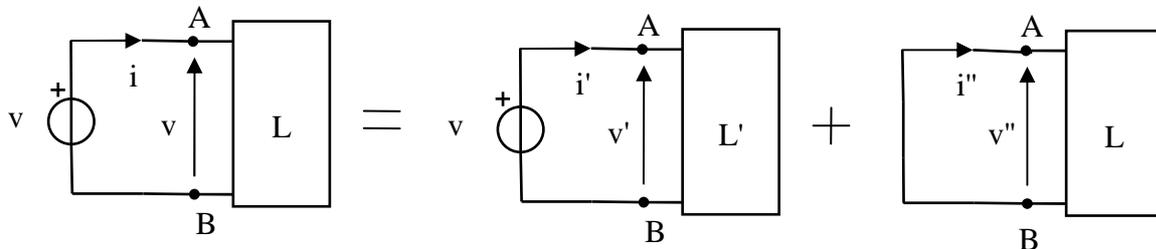


Figura 6 Teorema di Norton

Dimostrazione: poiché il bipolo  $L$  è controllato in tensione (data la tensione è possibile determinare la corrente assorbita), è possibile, ai fini del calcolo della corrente  $i$ , sostituire al bipolo  $N$  un generatore di tensione indipendente la cui tensione impressa  $v(t)$  coincide con la tensione ai terminali del bipolo  $L$ .



Dato che il bipolo  $L$  è lineare, è possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti. In particolare, consideriamo due circuiti: nel primo azzeriamo i generatori indipendenti in  $L$  (e indicheremo tale bipolo con  $L'$ , nel secondo azzeriamo il generatore indipendente di tensione (come già visto, i generatori indipendenti di tensione nulla sono equivalenti a cortocircuiti, i generatori indipendenti di corrente nulla sono equivalenti a circuiti aperti.).



Si ha:

$$i = i' + i'', \text{ dove } i' \text{ ed } i'' \text{ sono le correnti nelle due sottoreti:}$$

e

$$v = v' + v'', \text{ dove } v' \text{ ed } v'' \text{ sono le tensioni nelle due sottoreti:}$$

È evidente tuttavia che  $v' = v$  e che  $v'' = 0$ . Inoltre, applicando la LKC alle due sottoreti otteniamo (si ricordi che per ipotesi  $L$  è controllato in tensione):

$$i' = I_{L'}(v') = I_{L'}(v)$$

$$i'' = I_L(v'') = I_L(0)$$

dove  $I_{L'}(\cdot)$  ed  $I_L(\cdot)$  rappresentano le caratteristiche dei bipoli  $L'$  ed  $L$ , rispettivamente. Infine, definendo  $I_c = I_L(0) = i|_{L \text{ in cortocircuito}}$  si ottiene:

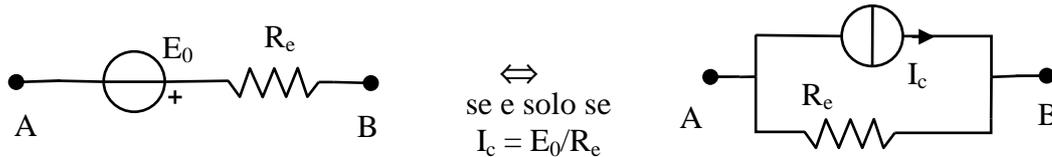
$$i = I_{L'}(v) + I_c$$

che è proprio la caratteristica del bipolo equivalente mostrato in figura 6. Il teorema di Norton, come enunciato, è valido in regime qualsiasi. In particolare, in regime stazionario (corrente continua)

si ha che “Un circuito lineare L con due terminali controllato in tensione è equivalente a un bipolo (bipolo di Norton) formato da un generatore indipendente di corrente  $I_c$  in parallelo con un resistore  $R_e$ , in cui  $I_c$  è la corrente di cortocircuito tra i terminali e  $R_e$  è la resistenza vista ai terminali quando i generatori indipendenti sono spenti”. Infatti, poiché il bipolo L è lineare e controllato in tensione, la sua relazione costitutiva è esprimibile per ipotesi come  $I_L(v) = v/R_e$ . Questo è sufficiente a definire univocamente il valore di  $R_e$ . Risulta infatti:

$$R_e = v/I_L(v) = (v_{AB}/i)_{\text{Generatori Indipendenti di L Spenti}}$$

Si noti che tale espressione coincide con quella trovata nel teorema di Thevenin. Infatti, applicando il teorema di Norton al bipolo di Thevenin in regime stazionario si ottiene l'equivalenza mostrata in figura, valida se  $I_c = E_0 / R_e$ , ovvero se  $E_0 = R_e I_c$ .



Si può applicare il teorema di Norton alla soluzione del circuito di figura 1 considerando come bipolo N il diodo ideale e quindi come bipolo L l'insieme di tutti gli altri componenti del circuito (vedi figura 7.a). Il bipolo L' è quello indicato nella figura 7.b, mentre il valore della corrente  $I_c$  viene calcolata risolvendo il circuito riportato nella figura 7.c.

Sostituendo al bipolo L il suo equivalente di Norton si ottiene un circuito semplice, la cui soluzione permette di determinare tensione e corrente sul diodo ( $i_6$  e  $v_6$ ). Tutte le altre variabili circuitali devono essere determinate dall'analisi del circuito iniziale in cui tuttavia  $v_6$  ora è nota. È quindi possibile sostituire al diodo un generatore indipendente di tensione (definire la tensione sul ramo significa definire la caratteristica del componente sul ramo stesso).

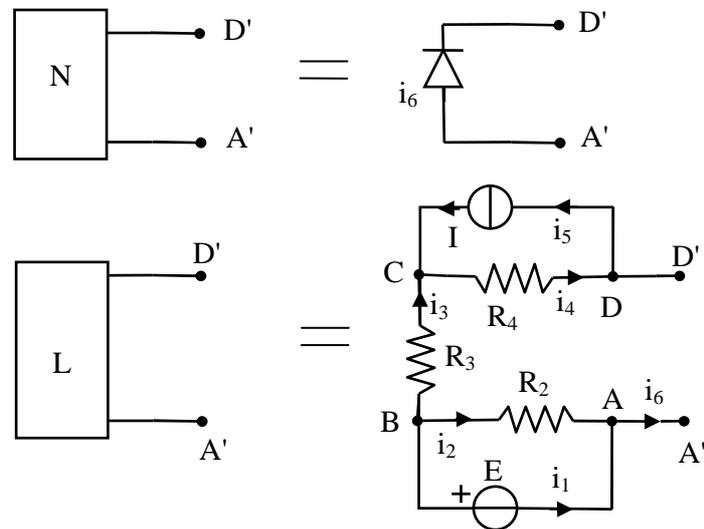


Figura 7.a

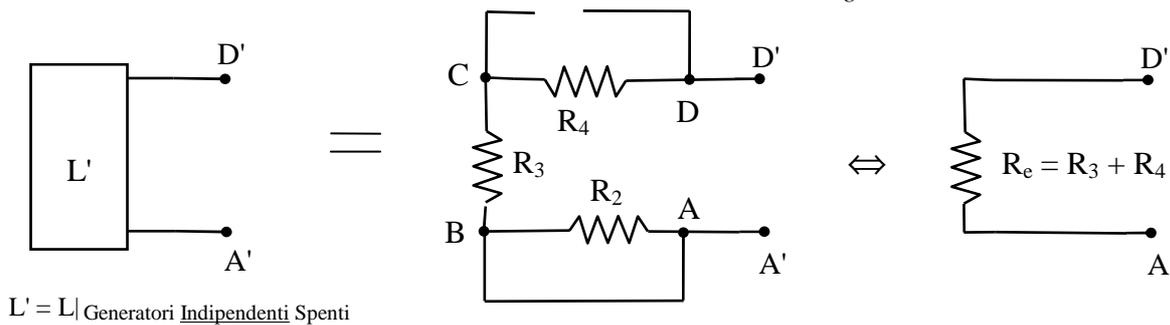
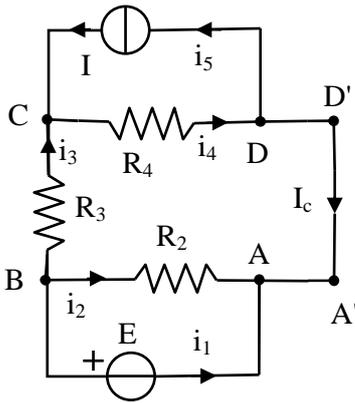


Figura 7.b

$$L' = L |_{\text{Generatori Indipendenti Spenti}}$$



← Figura 7.c

La soluzione del circuito di figura è immediata notando che:

$$\begin{aligned} i_5 &= I \\ i_4 &= I + I_c \\ i_3 &= I_c \\ i_2 &= E/R_2 \\ i_1 &= -I_c - E/R_2 \end{aligned}$$

La valutazione di  $I_c$  si ottiene applicando la LKT alla sequenza ABCDA:

$$\begin{aligned} 0 &= -R_2 i_2 + R_3 i_3 + R_4 i_4 \\ 0 &= -E + R_3 I_c + R_4 (I + I_c) \end{aligned}$$

ovvero 
$$I_c = (E - R_4 I)/(R_3 + R_4)$$

Infine il valore della corrente  $i_6$  viene ottenuto risolvendo il circuito illustrato nella figura 8, ottenuto sostituendo il bipolo L con il suo circuito equivalente di Norton.

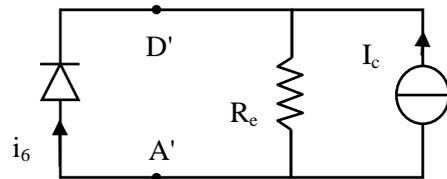


Figura 8

Si ritrova quindi che sono possibili due casi: diodo interdetto oppure diodo in conduzione. Se il diodo è interdetto allora la corrente  $i_6$  è nulla e la tensione  $v_{AD'}$ , che coincide con la tensione sulla resistenza  $R_e$ , cioè con  $-R_e I_c$ , deve essere minore od uguale a zero, da cui si ricava ancora la relazione (7). Se il diodo è in conduzione allora la corrente  $i_6$  è pari a  $-I_c$  e deve risultare maggiore od uguale a zero, da cui si ricava ancora la (5).

### 5. CIRCUITI NON CONNESSI

Tutti i circuiti visti sinora godono della *proprietà di connessione*, secondo la quale tutto il circuito è connesso elettricamente, e quindi per ogni coppia di nodi del circuito è possibile trovare un percorso che li connetta seguendo i rami del grafo. Consideriamo ora il caso in cui il circuito da studiare sia costituito da due o più sottoreti non connesse. Si consideri ad esempio il circuito di figura 9.a. Sostituendo al trasformatore ideale il suo circuito equivalente si ottiene la rete di figura 9.b. La rete non è connessa, infatti non è possibile per ogni nodo del circuito trovare un percorso che, seguendo i rami del grafo, connetta tale nodo al nodo di riferimento. Analogamente, non è possibile definire un albero per l'intero circuito. I metodi di Tableau, delle tensioni di nodo e delle correnti di coalbero non sono quindi direttamente applicabili. Possiamo però applicare il metodo fondamentale (in cui le variabili sono le tensioni e le correnti di ramo) ad ogni sottorete.

Ad esempio, per il circuito di figura 9.b, la sottorete a primario (P) ha  $R_1 = 2$  rami e  $N_1 = 2$  nodi, e la sottorete a secondario (S) ha  $R_2 = 2$  e  $N_2 = 2$ .

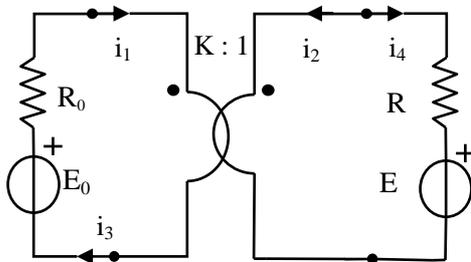


Figura 9.a

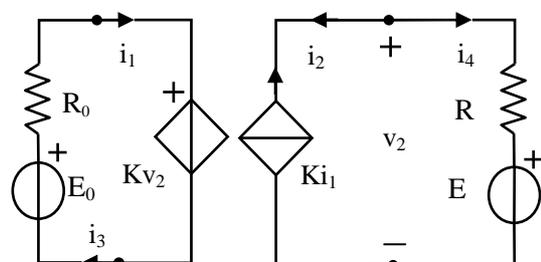


Figura 9.b

Le LKT<sub>m</sub>, le LKC<sub>n</sub> e le caratteristiche della sottorete P costituiscono un sistema di  $2 R_1$  equazioni in cui compaiono le  $2 (R_1 + R_2)$  tensioni e le correnti di ramo di tutta la rete:

$$(R_1 - N_1 + 1 = 1 \text{ equazioni LKT}_m \text{ per la sottorete P}) \qquad v_1 + v_3 = 0 \qquad (13.i)$$

$$(N_1 - 1 = 1 \text{ equazioni LKC}_n \text{ per la sottorete P}) \quad i_1 - i_3 = 0 \quad (13.ii)$$

$$(R_1 = 2 \text{ caratteristiche dei componenti della sottorete P}) \quad \begin{aligned} v_1 &= Kv_2 \\ v_3 &= -E_0 + R_0 i_3 \end{aligned} \quad (13.iii)$$

Le LKT<sub>m</sub>, le LKC<sub>n</sub> e le caratteristiche della sottorete S costituiscono un sistema di 2 R<sub>2</sub> equazioni in cui compaiono le 2 (R<sub>1</sub> + R<sub>2</sub>) tensioni e le correnti di ramo di tutta la rete:

$$(R_2 - N_2 + 1 = 1 \text{ equazioni LKT}_m \text{ per la sottorete S}) \quad v_2 - v_4 = 0 \quad (14.i)$$

$$(N_2 - 1 = 1 \text{ equazioni LKC}_n \text{ per la sottorete S}) \quad i_2 + i_4 = 0 \quad (14.ii)$$

$$(R_2 = 2 \text{ caratteristiche dei componenti della sottorete S}) \quad \begin{aligned} i_2 &= -Ki_1 \\ v_4 &= Ri_4 + E \end{aligned} \quad (14.iii)$$

Pertanto, le (13), (14), costituiscono un sistema di 2 (R<sub>1</sub> + R<sub>2</sub>) equazioni in cui compaiono le 2 (R<sub>1</sub> + R<sub>2</sub>) tensioni e le correnti di ramo di tutta la rete. Analogamente quindi ai circuiti connessi, le LKT<sub>m</sub>, le LKC<sub>n</sub> (applicate ad ogni sottorete) e le caratteristiche costituiscono un sistema di 2R equazioni, risolvendo il quale è possibile calcolare le 2R incognite tensioni e correnti di ramo.<sup>(o)</sup> La soluzione del sistema (13-14) è la seguente:

$$i_1 = i_3 = \frac{E_0 - KE}{R_0 + K^2R} \quad v_1 = -v_3 = K \frac{KRE_0 + R_0E}{R_0 + K^2R} \quad i_2 = -i_4 = -K \frac{E_0 - KE}{R_0 + K^2R} \quad v_2 = v_4 = \frac{KRE_0 + R_0E}{R_0 + K^2R}$$

Se i dati sono E<sub>0</sub> = 100 V, E = 12 V, K = 10, R<sub>0</sub> = 0.5 Ω, R = 0.1 Ω, si ottiene i<sub>1</sub> = -1.905 A, i<sub>2</sub> = 19.05 A, i<sub>3</sub> = -1.905 A, i<sub>4</sub> = -19.05 A, v<sub>1</sub> = 100.9 V, v<sub>2</sub> = 10.09 V, v<sub>3</sub> = -100.9 V, v<sub>4</sub> = 10.09 V.

Modificando la topologia del circuito risulta inoltre possibile applicare anche gli altri metodi ai circuiti non connessi. A tale scopo, si consideri il grafo di figura 10.a: in assenza di informazioni sui componenti presenti sui rami potremmo definire due riferimenti (più in generale, uno per ogni sottorete connessa). La difficoltà in tal caso è dovuta al fatto che, mentre per il primo riferimento (Ref 1) possiamo annullare la tensione del nodo corrispondente, per il secondo riferimento (Ref 2) la tensione del nodo corrispondente è incognita (rispetto al primo riferimento). Dal grafo di figura 10.a è inoltre chiaro che non c'è scambio di corrente tra le due sottoreti. Consideriamo ora il grafo di figura 10.b, in cui si è inserito il ramo 5 tra i nodi di riferimento delle due sottoreti (e dunque se ne è lasciato uno solo per tutta la rete). Il ramo 5 è un taglio fondamentale e dunque i<sub>5</sub> = 0 (e non c'è scambio di corrente tra le due sottoreti).

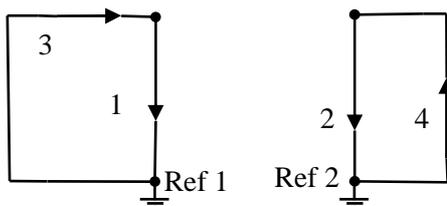


Figura 10.a

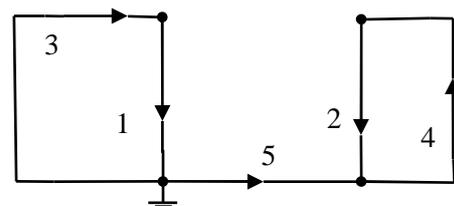


Figura 10.b

Il componente più opportuno da inserire sul ramo 5 dipende anche dalle informazioni disponibili: se si conosce (ed è un dato aggiuntivo) la tensione tra i due riferimenti (E<sub>Ref1</sub> - E<sub>Ref2</sub>), è possibile inserire un generatore di tensione indipendente (come in figura 11.a). In caso contrario la tensione tra i riferimenti è incognita e possiamo inserire un cortocircuito come in figura 11.b (equivalente a supporte E<sub>Ref2</sub> = 0) con l'avvertenza che la differenza tra tensioni di nodi appartenenti a due reti diverse non ha logicamente senso. In entrambi i casi il circuito è connesso e possiamo utilizzare ogni metodo già visto per la sua soluzione.

<sup>(o)</sup> Si noti che è fondamentale applicare le Leggi di Kirchhoff ad ogni sottorete separatamente. In caso contrario, con riferimento alla figura 19.b, detti R = 4 i rami del circuito e N = 4 i nodi, si scriverebbe sbagliando R - N + 1 = 1 equazioni LKT<sub>m</sub> ed N - 1 = 3 equazioni LKC<sub>n</sub>. Come si vede dalle (13) e (14) si sono applicate invece 2 LKT<sub>m</sub> e 2 LKC<sub>n</sub>.

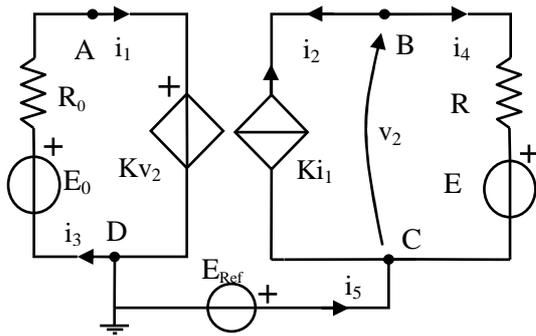


Figura 11.a

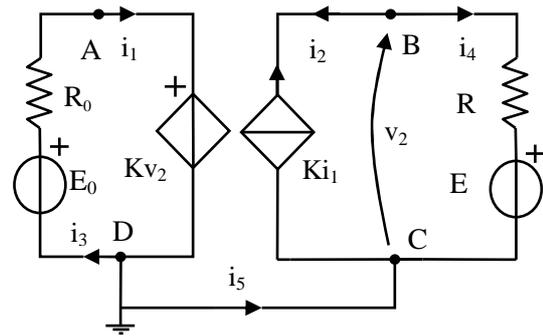


Figura 11.b

Con riferimento al circuito di figura 11.b, con  $R = 5$  rami ed  $N = 4$  nodi, si ha:

**Metodo dei tagli fondamentali** ( $R - N + 1 + (\text{Numero di componenti non controllati in corrente}) = 4$  equazioni)

$$(R - N + 1 = 2 \text{ equazioni LKT}_m) \text{ [albero = 1, 5, 2]} \quad -E_0 + R_0 i_1 + v_1 = 0, \quad -E + R i_2 + v_2 = 0 \quad (15.i)$$

$$(\text{caratteristiche dei componenti non controllati in corrente}) \quad v_1 = K v_2, \quad i_2 = -K i_1 \quad (15.ii)$$

**Metodo delle tensioni di nodo** ( $N - 1 + (\text{Numero di componenti non controllati in tensione}) = 6$  equazioni)

$$(N - 1 = 3 \text{ equazioni LKC}_n) [e_D = 0] \quad \frac{E_0 - e_A}{R_0} - i_1 = 0, \quad \frac{e_B - E}{R} + i_2 = 0, \quad -\frac{e_B - E}{R} - i_2 - i_5 = 0 \quad (16.i)$$

$$(\text{caratteristiche dei componenti non controllati in tensione}) \quad e_A = K e_B, \quad i_2 = -K i_1, \quad e_C = 0 \quad (16.ii)$$

La soluzione del sistema (16) è la seguente:

$$i_1 = \frac{E_0 - KE}{R_0 + K^2 R} \quad e_A = K \frac{KRE_0 + R_0 E}{R_0 + K^2 R} \quad i_2 = -K \frac{E_0 - KE}{R_0 + K^2 R} \quad e_B = \frac{KRE_0 + R_0 E}{R_0 + K^2 R} \quad i_5 = 0 \quad e_C = 0$$

## 6. CIRCUITI CONTENENTI A.O.

I circuiti illustrati in questo paragrafo contengono Amplificatori Operazionali che, per ipotesi, si suppone funzionino nella regione lineare. Pertanto i risultati ottenuti sono validi solo se la tensione d'uscita  $v_o$  degli A.O. soddisfa la seguente disuguaglianza di validità:

$$-E_{\text{sat}} < v_o < E_{\text{sat}}$$

per ogni istante. Se tale disuguaglianza risultasse violata, sarebbe necessario applicare il modello di A.O. in saturazione (positiva o negativa).

Si consideri ad esempio il circuito in figura 12.a, in cui si intende calcolare la potenza dissipata sul resistore  $R_5$ . Sia D il riferimento. In figura 12.b è stato sostituito il circuito equivalente dell'A.O. nella regione lineare. Si considerino versi di riferimento associati con la scelta dell'utilizzatore per tensioni e correnti di ramo. Il circuito è costituito da  $R = 7$  rami e da  $N = 4$  nodi. Uno dei possibili alberi è illustrato in figura 12.c (rami 3, 6 e 7). I rami tratteggiati sono quelli di coalbero (rami 1, 2, 4 e 5).

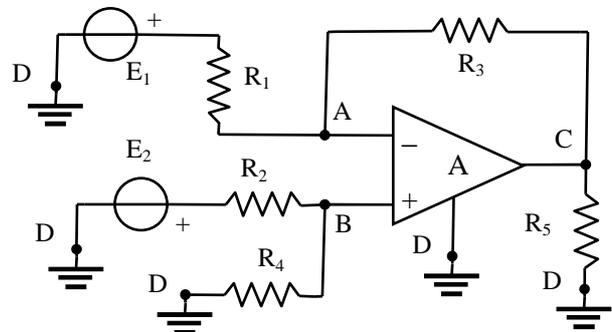


Figura 12.a.

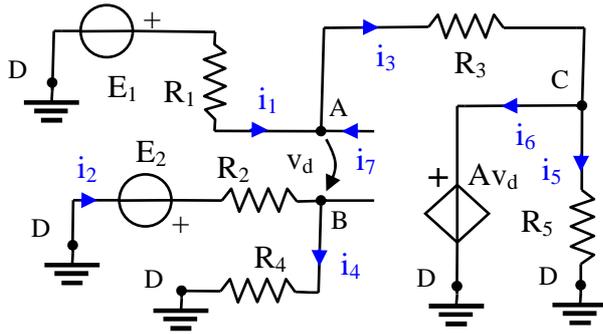


Figura 12.b.

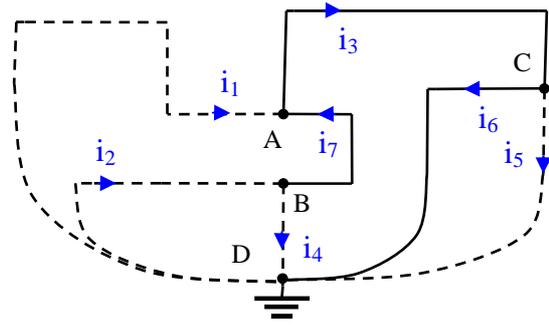


Figura 12.c.

Tutti i metodi illustrati precedentemente sono generalmente applicabili.

**Analisi di Tableau** (sistema di  $2R + N - 1 = 17$  equazioni)

( $R = 7$  equazioni LKT<sub>r</sub> in cui compaiono come incognite  $R = 7$  tensioni di ramo ed  $N - 1 = 3$  tensioni di nodo)

$$\begin{aligned} v_1 &= -e_A \\ v_2 &= -e_B \\ v_3 &= e_A - e_C \\ v_4 &= e_B \end{aligned} \quad (17.i)$$

( $N - 1 = 3$  equazioni LKC<sub>n</sub> in cui compaiono come incognite  $R = 7$  correnti di ramo)

$$\begin{aligned} v_5 &= e_C \\ v_6 &= e_C \\ v_7 &= e_B - e_A \end{aligned}$$

( $R = 7$  caratteristiche dei componenti in cui compaiono come incognite  $R = 7$  tensioni di ramo ed  $R = 7$  correnti di ramo)

$$\begin{aligned} i_1 + i_7 - i_3 &= 0 \\ i_2 - i_4 - i_7 &= 0 \\ i_3 - i_5 - i_6 &= 0 \end{aligned} \quad (17.ii)$$

$$\begin{aligned} v_1 &= -E_1 + R_1 i_1 \\ v_2 &= -E_2 + R_2 i_2 \\ v_3 &= R_3 i_3 \\ v_4 &= R_4 i_4 \\ v_5 &= R_5 i_5 \\ v_6 &= A v_7 \\ i_7 &= 0 \end{aligned} \quad (17.iii)$$

La soluzione del sistema (17) consente di determinare  $i_5$ : 
$$i_5 = \frac{1}{R_5} \frac{\frac{R_4 E_2}{R_2 + R_4} - \frac{R_3 E_1}{R_1 + R_3}}{\frac{1}{A} + \frac{R_1}{R_1 + R_3}}$$

Se i dati del problema sono  $A = 10^5$ ,  $E_{\text{sat}} = 15$  V,  $E_1 = 11$  V,  $E_2 = 10.5$  V,  $R_1 = 50$   $\Omega$ ,  $R_2 = 0.5$   $\Omega$ ,  $R_3 = 5$   $\Omega$ ,  $R_4 = 1$   $\Omega$ ,  $R_5 = 20$   $\Omega$  si ottiene  $i_5 = 0.32999$  A e quindi  $p_5 = R_5 i_5^2 = 2.1779$  W. È possibile verificare che la disuguaglianza  $v_o = R_5 i_5 = 6.5998$  V  $< E_{\text{sat}}$  e pertanto l'A.O. funziona effettivamente nella regione lineare, come ipotizzato.

**Metodo fondamentale** ( $R + (\text{Numero di componenti non controllati né in tensione né in corrente}) = 8$  equazioni)

$$\begin{aligned} (R - N + 1 = 4 \text{ equazioni LKT}_m) \quad & \begin{aligned} -E_1 + R_1 i_1 + R_3 i_3 + v_6 &= 0 \\ -E_2 + R_2 i_2 + v_7 + R_3 i_3 + v_6 &= 0 \\ -R_4 i_4 + v_7 + R_3 i_3 + v_6 &= 0 \\ -R_5 i_5 + v_6 &= 0 \end{aligned} \end{aligned} \quad (18.i)$$

$$\begin{aligned} (N - 1 = 3 \text{ equazioni LKC}_n) \quad & \begin{aligned} i_1 - i_3 &= 0 \\ i_2 - i_4 &= 0 \\ i_3 - i_5 - i_6 &= 0 \end{aligned} \end{aligned} \quad (18.ii)$$

$$\begin{aligned} (\text{caratteristiche dei componenti non controllati} \\ \text{né in tensione né in corrente}) \quad & v_6 = A v_7 \end{aligned} \quad (18.iii)$$

**Metodo dei tagli fondamentali** ( $R - N + 1 + (\text{Numero di componenti non controllati in corrente}) = 6$  equazioni)

( $R - N + 1 = 4$  equazioni LKT<sub>m</sub>)

$$\begin{aligned} -E_1 + R_1 i_1 + R_3(i_1 + i_2 - i_4) + v_6 &= 0 \\ -E_2 + R_2 i_2 + v_7 + R_3(i_1 + i_2 - i_4) + v_6 &= 0 \\ -R_4 i_4 + v_7 + R_3(i_1 + i_2 - i_4) + v_6 &= 0 \\ -R_5 i_5 + v_6 &= 0 \end{aligned} \quad (19.i)$$

(caratteristiche dei componenti non controllati in corrente)

$$\begin{aligned} i_2 - i_4 &= 0 \\ v_6 &= A v_7 \end{aligned} \quad (19.ii)$$

**Metodo delle tensioni di nodo** ( $N - 1 + (\text{Numero di componenti non controllati in tensione}) = 4$  equazioni)

( $N - 1 = 3$  equazioni LKC<sub>n</sub>)

$$\begin{aligned} \frac{E_1 - e_A}{R_1} - \frac{e_A - e_C}{R_3} &= 0 \\ \frac{E_2 - e_B}{R_2} - \frac{e_B}{R_4} &= 0 \\ \frac{e_A - e_C}{R_3} - \frac{e_C}{R_5} - i_6 &= 0 \end{aligned} \quad (20.i)$$

(caratteristiche dei componenti non controllati in tensione)

$$e_C = A(e_B - e_A) \quad (20.ii)$$

In questo caso, non essendo  $i_5$  tra le incognite del sistema, è necessario scrivere separatamente la relazione che la lega alle tensioni di nodo:  $i_5 = e_C/R_5$ .

**Teorema di Thevenin.** Si può applicare il teorema di Thevenin alla soluzione del circuito di figura 12.b considerando come bipolo N il resistore  $R_5$  e quindi come bipolo L l'insieme di tutti gli altri componenti del circuito (vedi figura 13). Il bipolo L' è quello indicato nella figura 14, mentre il valore della tensione  $E_0$  viene calcolato risolvendo il circuito riportato nella figura 15. Infine il valore della corrente  $i_5$  viene ottenuto risolvendo il circuito illustrato nella figura 16, ottenuto sostituendo il bipolo L con il suo circuito equivalente di Thevenin.

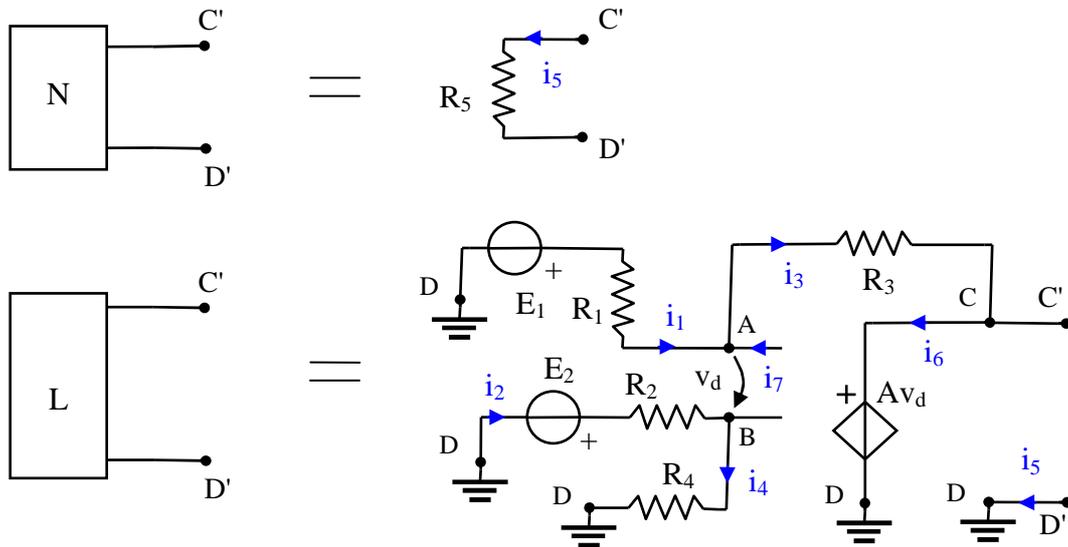


Figura 13

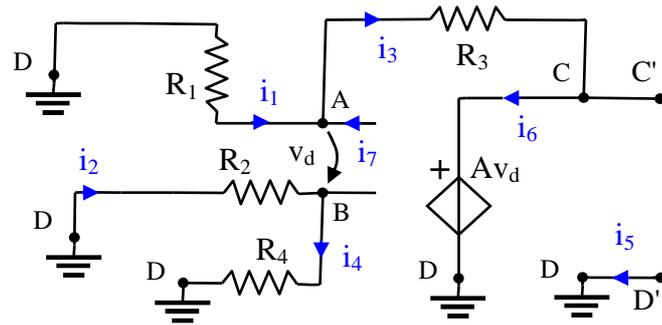
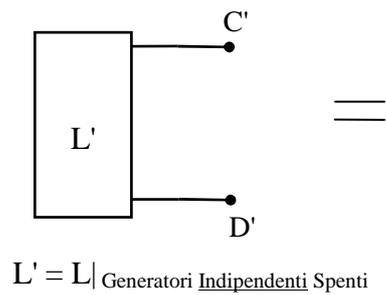


Figura 14

La soluzione del circuito di figura 14, finalizzata alla determinazione della caratteristica tensione-corrente del bipolo D'C' (cioè della tensione  $v_{DC}$  in funzione della corrente  $i_5$ ) si può effettuare con uno qualsiasi dei metodi precedentemente illustrati. Ad esempio, utilizzando il metodo delle tensioni di nodo si ottiene il seguente sistema di  $N - 1 +$  (Numero di componenti non controllati in tensione) = 4 equazioni. Supponendo nota  $i_5$ , è possibile calcolare  $e_A, e_B, e_C$  ed  $i_6$ , che risultano pari a  $e_A = 0, e_B = 0, e_C = 0$  ed  $i_6 = -i_5$ . Pertanto  $v_{DC} = -e_C = 0$  ed il circuito equivalente del bipolo L' è un cortocircuito (la resistenza equivalente del bipolo è quindi nulla).

( $N - 1 = 3$  equazioni LKC<sub>n</sub>)

$$\frac{-e_A}{R_1} - \frac{e_A - e_C}{R_3} = 0$$

$$\frac{-e_B}{R_2} - \frac{e_B}{R_4} = 0$$

$$\frac{e_A - e_C}{R_3} - i_5 - i_6 = 0$$

(21.i)

(caratteristiche dei componenti non controllati in tensione)

$$e_C = A(e_B - e_A)$$

(21.ii)

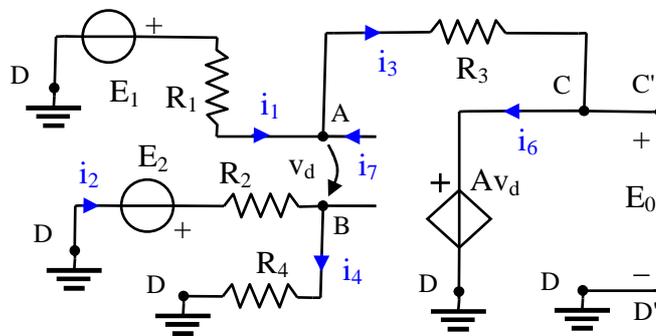


Figura 15

La soluzione del circuito di figura 15, finalizzata alla determinazione della tensione  $E_0$  tra i terminali D' e C' si può effettuare con uno qualsiasi dei metodi precedentemente illustrati. Ad esempio, utilizzando il metodo dei Tagli Fondamentali si ottiene il seguente sistema di  $R - N + 1 +$  (Numero di componenti non controllati in corrente) = 6 equazioni.

( $R - N + 1 = 4$  equazioni LKT<sub>m</sub>)

$$-E_1 + R_1 i_1 + R_3 (i_1 + i_2 - i_4) + v_6 = 0$$

$$-E_2 + R_2 i_2 + v_7 + R_3 (i_1 + i_2 - i_4) + v_6 = 0$$

$$-R_4 i_4 + v_7 + R_3 (i_1 + i_2 - i_4) + v_6 = 0$$

$$-E_0 + v_6 = 0$$

(22.i)

(caratteristiche dei componenti non controllati in corrente)

$$i_2 - i_4 = 0$$

$$v_6 = A v_7$$

(22.ii)

Risolvendo le (22) il valore della tensione  $E_0$  è:

$$E_0 = \frac{\frac{R_4 E_2}{R_2 + R_4} - \frac{R_3 E_1}{R_1 + R_3}}{\frac{1}{A} + \frac{R_1}{R_1 + R_3}} \quad (23)$$

Infine il valore della corrente  $i_5$  si ricava risolvendo il circuito illustrato nella figura 16, ottenuto sostituendo il bipolo L con il suo circuito equivalente di Thevenin. In questo caso, la corrente  $i_5$  risulta essere:  $i_5 = E_0/R_5$ .

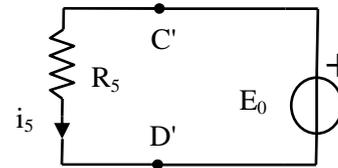


Figura 16

**Teorema di Norton:** Non si può applicare il teorema di Norton alla soluzione del circuito di figura 12.b, in quanto il bipolo L non è controllato in tensione (il suo circuito equivalente è un generatore indipendente di tensione).

In considerazione dei valori tipici di  $A$ , è spesso possibile assumere  $A \rightarrow \infty$ . Tale semplificazione conduce al *modello di A.O. ideale*. A titolo di esempio si consideri il circuito illustrato nella figura 17, in cui si intende calcolare la potenza dissipata sul resistore  $R_5$ . Tutti i metodi illustrati precedentemente sono generalmente applicabili, purché si consideri nulla la tensione d'ingresso differenziale (*cortocircuito virtuale*).

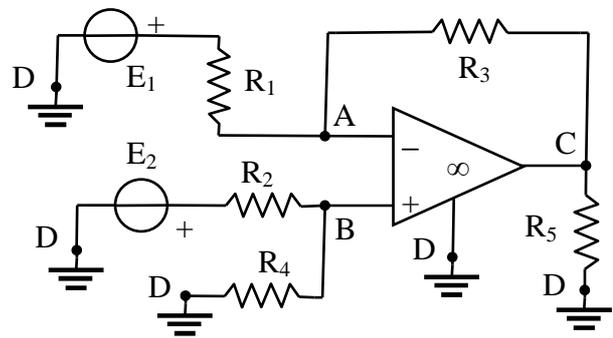


Figura 17.

Ad esempio, con l'Analisi di Tableau si ottiene il seguente sistema di  $2R + N - 1 = 17$  equazioni:

( $R = 7$  equazioni LKT<sub>i</sub> in cui compaiono come incognite  
 $R = 7$  tensioni di ramo ed  $N - 1 = 3$  tensioni di nodo)

$$\begin{aligned} v_1 &= -e_A \\ v_2 &= -e_B \\ v_3 &= e_A - e_C \\ v_4 &= e_B \\ v_5 &= e_C \\ v_6 &= e_C \\ v_7 &= e_B - e_A \end{aligned} \quad (24.i)$$

( $N - 1 = 3$  equazioni LKC<sub>n</sub> in cui compaiono come incognite  
 $R = 7$  correnti di ramo)

$$\begin{aligned} i_1 + i_7 - i_3 &= 0 \\ i_2 - i_4 - i_7 &= 0 \\ i_3 - i_5 - i_6 &= 0 \end{aligned} \quad (24.ii)$$

( $R = 7$  caratteristiche dei componenti in cui compaiono come incognite  
 $R = 7$  tensioni di ramo ed  $R = 7$  correnti di ramo)

$$\begin{aligned} v_1 &= -E_1 + R_1 i_1 \\ v_2 &= -E_2 + R_2 i_2 \\ v_3 &= R_3 i_3 \\ v_4 &= R_4 i_4 \\ v_5 &= R_5 i_5 \\ v_7 &= 0 \\ i_7 &= 0 \end{aligned} \quad (24.iii)$$

La soluzione del sistema (24) consente di determinare  $i_5$ :  $i_5 = \frac{1}{R_5} \left( 1 + \frac{R_3}{R_1} \right) \left( \frac{R_4 E_2}{R_2 + R_4} - \frac{R_3 E_1}{R_1 + R_3} \right)$

Se i dati del problema sono:  $E_1 = 11 \text{ V}$ ,  $E_2 = 10.5 \text{ V}$ ,  $R_1 = 50 \Omega$ ,  $R_2 = 0.5 \Omega$ ,  $R_3 = 5 \Omega$ ,  $R_4 = 1 \Omega$ ,  $R_5 = 20 \Omega$  si ottiene  $i_5 = 3.3 \text{ A}$  e quindi  $p_5 = R_5 i_5^2 = 2.178 \text{ W}$ . Si noti che passando dal modello a guadagno finito con  $A = 10^5$  al modello a guadagno infinito la perdita di precisione è trascurabile.

Una delle prime applicazioni degli amplificatori operazionali è stata la realizzazione di circuiti in grado di effettuare operazioni matematiche; è infatti da questa applicazione che l'A.O. prende il nome. Molti dei circuiti con amplificatori operazionali in grado di effettuare specifiche operazioni matematiche sono utilizzati così di frequente che è stato dato loro un nome specifico. Alcuni di tali circuiti sono mostrati in figura 18, in cui tutte le tensioni di nodo sono riferite al terminale di massa.

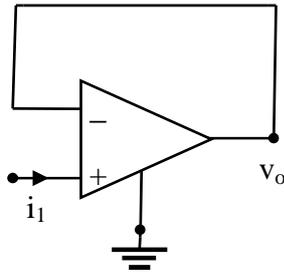


Figura 18.a - Inseguitore di tensione (buffer)  
Tripolo:  $i_1 = 0$ ,  $v_o = v_1$

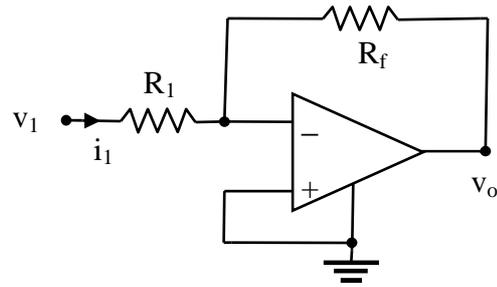


Figura 18.b - Amplificatore invertente  
Tripolo:  $i_1 = v_1/R_1$ ,  $v_o = -(R_f/R_1) v_1$

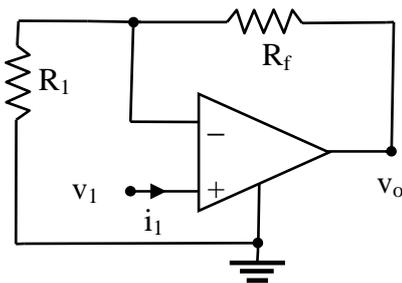


Figura 18.c - Amplificatore non invertente  
Tripolo:  $i_1 = 0$ ,  $v_o = (1 + (R_f/R_1)) v_1$

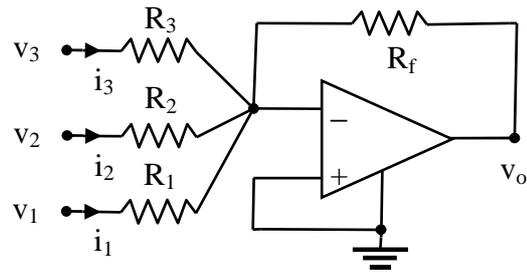


Figura 18.d - Sommatore  
(Il numero di terminali di ingresso è arbitrario)  
(n+2)-polo:  $i_1 = v_1/R_1$ ,  $i_2 = v_2/R_2$ ,  $i_3 = v_3/R_3$ , ... ,  
 $v_o = -(R_f/R_1) v_1 - (R_f/R_2) v_2 - (R_f/R_3) v_3 + \dots$

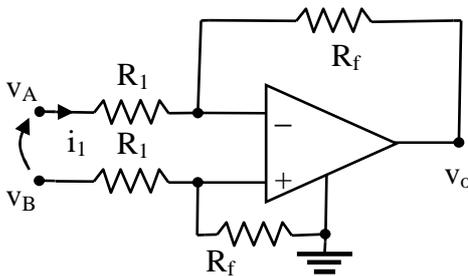


Figura 18.e - Amplificatore differenziale  
Doppio bipolo:  $i_1 = (v_A - v_B)/(2R_1)$ ,  $v_o = (R_f/R_1) (v_B - v_A)$

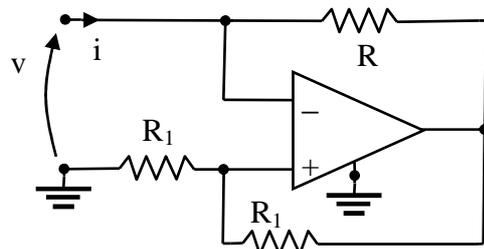


Figura 18.f - Convertitore di resistenza negativa  
Bipolo:  $v = -Ri$

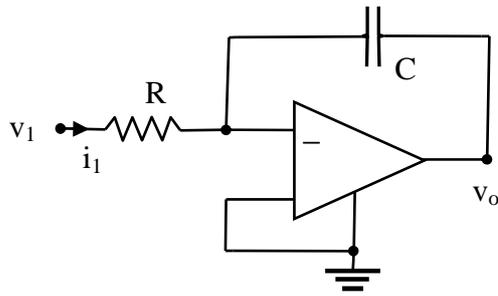


Figura 18.g - Integratore

Tripolo:  $i_1 = v_1/R$ ,  $v_o(t) = v_o(0) - \frac{1}{RC} \int_0^t v_1(\tau) d\tau$

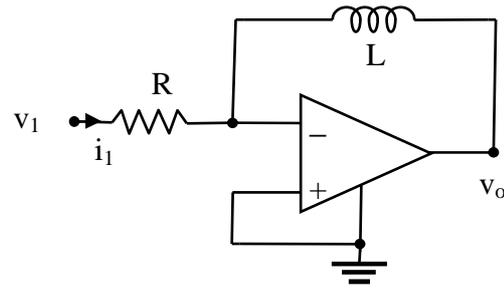


Figura 18.h - Derivatore

Tripolo:  $i_1 = v_1/R$ ,  $v_o = -\frac{L}{R} \frac{dv_1}{dt}$

Se gli A.O. possono funzionare anche nelle regioni di saturazione (+ o -), è necessario distinguere le tre regioni:

Sat -)	$v_o = -E_{sat}$ ;
Lineare)	$ v_o  < E_{sat}$ ;
Sat +)	$v_o = E_{sat}$ .

In ogni regione si usa il corrispondente circuito equivalente. A titolo di esempio si consideri il bipolo di figura 19. La sua caratteristica, illustrata in figura 19, mostra che tale bipolo è lineare a tratti e controllato in corrente.

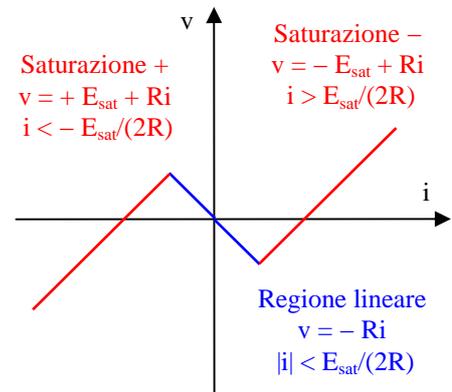


Figura 19