

GRANDEZZE PERIODICHE

Una grandezza tempodipendente $a(t)$, che supponiamo reale, si definisce **periodica** quando ad uguali intervalli T assume valori uguali, cioè quando vale la relazione (con n intero qualsiasi):

$$a(t) = a(t + nT) \quad (1)$$

- Il tempo T si definisce **periodo**;

- La grandezza $f = 1/T$, che rappresenta il numero di periodi contenuti nell'unità di tempo, si definisce **frequenza**. La frequenza si misura in Hertz [Hz] (periodi/secondo);

- Si definisce **valore medio** la media di $a(t)$ eseguita sul periodo T :

$$\langle a \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} a(t) dt \quad (2)$$

dove t_0 può essere scelto arbitrariamente. Data la condizione di periodicità (1), il valore medio non cambia se si estende la media ad un numero intero qualsiasi di periodi. La media, intesa come operazione su una grandezza periodica che restituisce un numero reale, è lineare e dunque per il valore medio valgono le relazioni: 1) $\langle a + b \rangle = \langle a \rangle + \langle b \rangle$, 2) $\langle m a \rangle = m \langle a \rangle$, se m è costante.

- Si definisce **valore efficace** di $a(t)$ la radice quadrata della media del quadrato di $a(t)$ eseguita su un periodo T :

$$A = \sqrt{\langle a^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} a^2(t) dt} \quad (3)$$

- Una grandezza periodica si definisce **alternata** quando il suo valore medio è nullo.

1. GRANDEZZE SINUSOIDALI

Una grandezza del tipo:

$$a(t) = A_M \cos(\omega t + \alpha) \quad (4)$$

si dice **sinusoidale**.

- La grandezza A_M che compare nella (4) è detta **ampiezza**, ed è pari al valore massimo di $a(t)$;

- La grandezza ω è detta **pulsazione**, ha le dimensioni di una velocità angolare (radianti/secondo) ed è pari a $2\pi/T$; ($\omega = 2\pi/T = 2\pi f$)

- La grandezza α è detta **fase**. Dato che si può aggiungere un qualsiasi multiplo intero di 2π all'argomento del coseno nella (4) senza modificare $a(t)$, per dare un valore univoco alla fase nel seguito si suppone $-\pi < \alpha \leq \pi$.

Il valore medio della grandezza sinusoidale (4) è pari a zero (per ogni valore di A_M e α). Infatti:

$$\langle a \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T A_M \cos(\omega t + \alpha) dt = \frac{A_M}{\omega T} [\sin(\omega t + \alpha)]_{t=0}^{t=T} = \frac{A_M}{2\pi} [\sin(2\pi + \alpha) - \sin(\alpha)] = 0$$

Il valore medio del quadrato della grandezza sinusoidale (4) è pari a:

$$\langle a^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T A_M^2 \cos^2(\omega t + \alpha) dt = \frac{1}{T} \int_0^T A_M^2 \frac{1 + \cos(2\omega t + 2\alpha)}{2} dt = \left\langle \frac{A_M^2}{2} \right\rangle + \left\langle \frac{A_M^2}{2} \cos(2\omega t + 2\alpha) \right\rangle = \frac{A_M^2}{2}$$

E quindi il valore efficace di una grandezza sinusoidale è pari a:

$$A = \sqrt{\langle A_M^2 \cos^2(\omega t + \alpha) \rangle} = \frac{A_M}{\sqrt{2}} \cong 0.707 A_M \quad (5)$$

Una grandezza sinusoidale è quindi completamente definita da tre parametri:

- 1) L'ampiezza A_M , o il valore efficace A .
- 2) La pulsazione ω , o la frequenza f , o il periodo T .
- 3) La fase α , o la differenza di fase con un'altra grandezza sinusoidale nota di uguale pulsazione.

Siano $a(t)$ e $b(t)$ due grandezze sinusoidali isofrequenziali (cioè alla stessa frequenza):

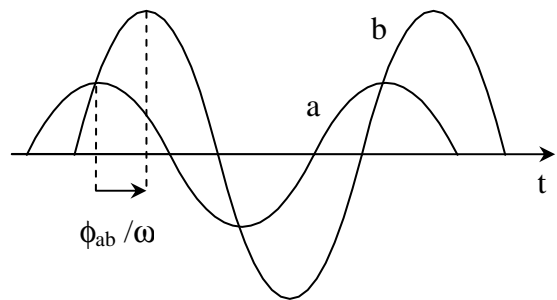
$$a(t) = A_M \cos(\omega t + \alpha_a)$$

$$b(t) = B_M \cos(\omega t + \alpha_b)$$

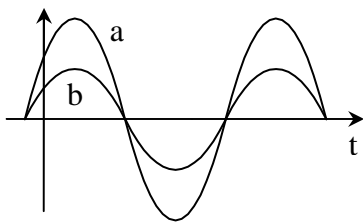
Si definisce **differenza di fase** (o sfasamento) tra a e b l'angolo: $\phi_{ab} = \alpha_a - \alpha_b$

L'angolo ϕ_{ab} è indipendente dall'istante iniziale di riferimento.

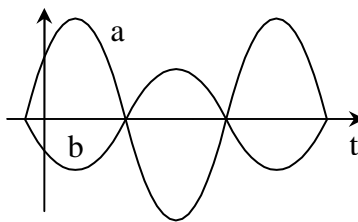
- Se $\phi_{ab} = 0$, $a(t)$ e $b(t)$ si dicono in **fase**;
- Se $\phi_{ab} > 0$, $a(t)$ è in **anticipo di fase** rispetto a $b(t)$;
- Se $\phi_{ab} < 0$, $a(t)$ è in **ritardo di fase** rispetto a $b(t)$;
- Se $\phi_{ab} = \pm \pi$, $a(t)$ e $b(t)$ si dicono in **opposizione**;
- Se $\phi_{ab} = \pm \pi/2$, $a(t)$ e $b(t)$ si dicono in **quadratura**.



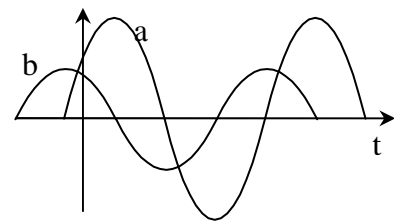
$a(t)$ è in anticipo rispetto a $b(t)$.



$a(t)$ e $b(t)$ sono in fase



$a(t)$ e $b(t)$ sono in opposizione



$a(t)$ e $b(t)$ sono in quadratura

Scelta dell'origine dei tempi

Si supponga cambiare l'istante iniziale di riferimento della scala temporale, ad esempio $t = t' + t_0$. Le due grandezze sinusoidali isofrequenziali $a(t)$ e $b(t)$ si trasformano quindi in:

$$a(t') = A_M \cos(\omega t' + \alpha_{a'})$$

$$b(t') = B_M \cos(\omega t' + \alpha_{b'})$$

In cui le fasi sono date da $\alpha_{a'} = \omega t_0 + \alpha_a$ ed $\alpha_{b'} = \omega t_0 + \alpha_b$. Lo sfasamento tra a e b nel nuovo sistema di riferimento è:

$$\phi_{ab}' = \alpha_{a'} - \alpha_{b'} = (\omega t_0 + \alpha_a) - (\omega t_0 + \alpha_b) = \alpha_a - \alpha_b = \phi_{ab}$$

Lo sfasamento ϕ_{ab} è quindi chiaramente indipendente dall'istante iniziale di riferimento (origine dei tempi). Dato un insieme di grandezze sinusoidali isofrequenziali, l'arbitrarietà nella scelta dell'origine può essere utilizzata per annullare la fase di una di esse. Ad esempio, posto $t_0 = -\alpha_a/\omega$, si ha $\alpha_{a'} = 0$ ed $\alpha_{b'} = -\alpha_a + \alpha_b = -\phi_{ab}$ e dunque, in questo sistema di riferimento si ha:

$$a(t') = A_M \cos(\omega t')$$

$$b(t') = B_M \cos(\omega t' - \phi_{ab})$$

2. TRASFORMATA DI STEINMETZ

(RAPPRESENTAZIONE DI GRANDEZZE SINUSOIDALI CON I NUMERI COMPLESSI)

A partire dall'identità di Eulero: $e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x)$ (6)

si deduce: $\cos(x) = \Re[e^{jx}]$ (7)

dove con \Re si indica l'operatore "parte reale". La grandezza sinusoidale $a(t)$:

$$a(t) = A_M \cos(\omega t + \alpha) = \Re[A_M e^{j(\omega t + \alpha)}] = \Re[\sqrt{2} A e^{j\omega t} e^{j\alpha}] = \Re[\sqrt{2} \underline{A} e^{j\omega t}] \quad (8)$$

può essere quindi interpretata come parte reale di un opportuno numero complesso. Ponendo:

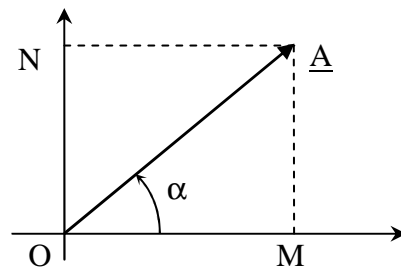
$$\underline{A} = A e^{j\alpha} = \frac{A_M}{\sqrt{2}} e^{j\alpha} \quad (9)$$

Il numero complesso \underline{A} , detto **fasore**, individua univocamente la grandezza sinusoidale $a(t)$. Il primo e l'ultimo termine della (8) definiscono quindi una corrispondenza biunivoca tra grandezze sinusoidali e numeri complessi (trasformata di Steinmetz). Il numero complesso \underline{A} può essere rappresentato anche in forma cartesiana: $\underline{A} = M + j N$, dove $M = \Re[\underline{A}] = A \cos(\alpha)$ ed $N = \Im[\underline{A}] = A \sin(\alpha)$ sono la parte reale ed immaginaria di \underline{A} .

Le formule inverse per modulo e fase sono:

$$|\underline{A}| = \sqrt{M^2 + N^2}$$

$$\alpha = \angle \underline{A} = \begin{cases} \arctg\left(\frac{N}{M}\right), & \text{se } M > 0 \\ \pi + \arctg\left(\frac{N}{M}\right), & \text{se } M < 0 \end{cases}$$



Ad esempio, se è data $v(t) = 100 \cos(\omega t + \pi/3)$, è immediato dedurre che la fase è $\alpha = \pi/3$ e l'ampiezza è $V_M = 100$ (quindi il valore efficace è $V = 70.71$). Il fasore di v è quindi $\underline{V} = 70.71 e^{j\pi/3}$ (in forma polare). Il fasore in forma cartesiana si determina utilizzando l'identità di Eulero: $\underline{V} = 70.71 \cos(\pi/3) + j 70.71 \sin(\pi/3) = 35.35 + j 61.23$.

Viceversa, se è dato $\underline{I} = 3 + j 4$, si determina il modulo $I = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ (che coincide con il valore efficace della corrispondente grandezza sinusoidale) e la fase $\alpha_I = \text{Arctan}(4/3) = 0.9273$ rad. Il fasore in forma polare è quindi $\underline{I} = 5 e^{j0.9273}$ e la grandezza sinusoidale è: $i(t) = 5\sqrt{2} \cos(\omega t + 0.9273)$.

OPERAZIONI COMPATIBILI CON LA TRASFORMATA DI STEINMETZ

Dato che anche il risultato dell'operazione deve essere una grandezza sinusoidale isofrequenziale, le operazioni possibili su grandezze sinusoidali isofrequenziali sono limitate alle seguenti tre:

- **SOMMA:** Date due grandezze sinusoidali isofrequenziali $a(t)$ e $b(t)$ rappresentate dai fasori \underline{A} e \underline{B} è facile verificare la grandezza sinusoidale $a(t) + b(t)$ è rappresentata dal fasore $\underline{A} + \underline{B}$. Infatti:

$$a(t) + b(t) = \Re[\sqrt{2} \underline{A} e^{j\omega t}] + \Re[\sqrt{2} \underline{B} e^{j\omega t}] = \Re[\sqrt{2} \underline{A} e^{j\omega t} + \sqrt{2} \underline{B} e^{j\omega t}] = \Re[\sqrt{2} (\underline{A} + \underline{B}) e^{j\omega t}]$$

- **PRODOTTO PER UN NUMERO REALE:** Data una grandezza sinusoidale $a(t)$, rappresentata dal numero complesso \underline{A} ed un numero reale m , si verifica immediatamente che la grandezza sinusoidale $m \cdot a(t)$ è rappresentata dal fasore $m \underline{A}$. Infatti:

$$m a(t) = m \Re[\sqrt{2} \underline{A} e^{j\omega t}] = \Re[m \sqrt{2} \underline{A} e^{j\omega t}] = \Re[\sqrt{2} (m \underline{A}) e^{j\omega t}]$$

- **DERIVAZIONE:** La derivata di grandezza sinusoidale $a(t)$, rappresentata dal numero complesso \underline{A} è rappresentata dal fasore $j\omega \underline{A}$. Infatti:

$$\frac{d}{dt} a(t) = \frac{d}{dt} \Re[\sqrt{2} \underline{A} e^{j\omega t}] = \Re\left[\sqrt{2} \underline{A} \frac{d}{dt} e^{j\omega t}\right] = \Re[\sqrt{2} (j\omega \underline{A}) e^{j\omega t}]$$

Sul piano complesso quindi la derivata di $a(t)$ è rappresentata da un numero complesso di modulo pari a ωA e in anticipo di $\pi/2$ rispetto ad \underline{A} . Infatti se $\underline{A} = A e^{j\alpha}$, dato che dall'identità di Eulero si ha $j = e^{j\pi/2}$, si ottiene immediatamente $j\omega \underline{A} = \omega A e^{j(\alpha+\pi/2)}$.

RAPPRESENTAZIONE SIMBOLICA DI GRANDEZZE SINUSOIDALI ISOFREQUENZIALI

Un insieme di grandezze sinusoidali isofrequenziali:

$$a(t) = \sqrt{2} A \cos(\omega t + \alpha_a), \quad b(t) = \sqrt{2} B \cos(\omega t + \alpha_b), \dots$$

può quindi essere rappresentato dai numeri complessi:

$$\underline{A} = A e^{j\alpha_a}, \quad \underline{B} = B e^{j\alpha_b}, \dots$$

utilizzando la trasformata di Steinmetz:

$$a(t) = \Re[\sqrt{2} \underline{A} e^{j\omega t}], \quad b(t) = \Re[\sqrt{2} \underline{B} e^{j\omega t}], \dots$$

Inoltre, le operazioni di somma, prodotto per uno scalare reale e derivazione definite su grandezze sinusoidali si trasformano in operazioni sui fasori: somma, prodotto per uno scalare reale e prodotto per $j\omega$.

Scegliendo opportunamente l'origine dei tempi, si può sempre porre a zero la fase di una (sola) grandezza sinusoidale arbitraria. In tal modo, la grandezza assunta come riferimento di fase sarà rappresentata da un numero reale puro.

• Complesso coniugato

Dato un numero complesso $\underline{A} = A e^{j\alpha}$, si definisce "complesso coniugato di \underline{A} " il numero \underline{A}^* , avente modulo uguale e fase opposta:

$$\underline{A}^* = A e^{-j\alpha} \quad (10)$$

Si verifica facilmente che il prodotto di un numero complesso per il suo coniugato è pari al quadrato del modulo:

$$\underline{A} \underline{A}^* = A^2 \quad (11)$$

Quindi, per calcolare l'inverso di un numero complesso si può procedere nel seguente modo:

$$\frac{1}{\underline{A}} = \frac{\underline{A}^*}{\underline{A} \underline{A}^*} = \frac{\underline{A}^*}{A^2} \quad (12)$$

3.SERIE DI FOURIER

Una data grandezza periodica $a(t)$ reale e di periodo T si può sempre rappresentare, purché il suo valore efficace sia finito, come la sovrapposizione di un termine costante e di infinite grandezze sinusoidali a frequenze multiple intere della frequenza fondamentale $f = 1/T$, come segue:

$$a(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{M,k} \cos(k\omega t + \alpha_k)$$

dove $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$. Il primo termine della sommatoria, alla frequenza f , prende il nome di armonica fondamentale (o prima armonica o, semplicemente, fondamentale). Il k -esimo termine della somma prende il nome di k -esima armonica (a frequenza kf). Dato che il valore medio delle armoniche è chiaramente nullo, il termine costante A_0 coincide con il valore medio di $a(t)$, ovvero $\langle a \rangle = A_0$. Per calcolare ampiezza e fase delle armoniche conviene scomporle come segue:

$$a(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [p_k \cos(k\omega t) + q_k \sin(k\omega t)]$$

dove $p_k = A_{M,k} \cos(\alpha_k)$, $-q_k = A_{M,k} \sin(\alpha_k)$. Spesso è possibile semplificare il calcolo di p_k e q_k utilizzando le simmetrie presenti nella grandezza periodica $a(t)$. Infine si possono utilizzare i seguenti risultati, validi per h e k interi (le medie sono definite sul periodo T):

i) $\langle \cos(h\omega t) \sin(k\omega t) \rangle = 0, \quad \forall h, k$; ii) $\langle \cos(h\omega t) \cos(k\omega t) \rangle = \langle \sin(h\omega t) \sin(k\omega t) \rangle = 0, \quad \forall h \neq k$

iii) $\langle \cos^2(k\omega t) \rangle = \langle \sin^2(k\omega t) \rangle = 1/2, \quad \forall k \geq 1$

per ottenere: $p_k = 2\langle a(t) \cos(k\omega t) \rangle, \quad q_k = 2\langle a(t) \sin(k\omega t) \rangle, \quad \forall k \geq 1$.

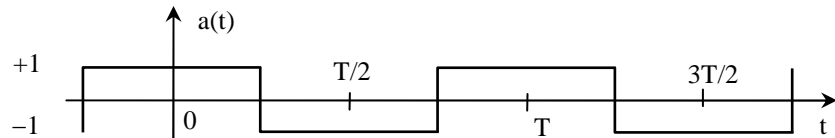
Si consideri ad esempio la grandezza periodica reale $a(t)$ di periodo T mostrata in figura, il cui valore è $+1$ per $-T/4 < t < T/4$ ed è -1 per $T/4 < t < 3T/4$ (+ multipli interi del periodo).

E' immediato verificare che:

I. $\langle a \rangle = 0$;

II. $a(-t) = a(t)$;

III. $a(t + T/2) = -a(t)$.



Quindi, per la (I), $A_0 = 0$, e per la (II), sono assenti nella serie tutti i termini di tipo seno dato che sono dispari rispetto a $t = 0$, cioè $\sin(-k\omega t) = -\sin(k\omega t)$. Sono presenti quindi solo i termini di tipo coseno. La (III) tuttavia permette di escludere le armoniche pari, che non rispettano tale simmetria (infatti se $k = 2n$, con n intero, si ha $\cos(2n\omega(t + T/2)) = \cos(2n\omega t + n\omega T) = \cos(2n\omega t + n2\pi) = \cos(2n\omega t)$). Lo sviluppo in serie di Fourier della grandezza periodica $a(t)$ è quindi rappresentabile, in questo caso, come:

$$a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{2n+1} \cos((2n+1)\omega t) = p_1 \cos(\omega t) + p_3 \cos(3\omega t) + p_5 \cos(5\omega t) + \dots$$

Per calcolare i coefficienti delle varie armoniche si può ora utilizzare la relazione $p_k = 2\langle a(t) \cos(k\omega t) \rangle$. In particolare, per quanto riguarda p_1 si ha:

$$\begin{aligned} p_1 &= 2\langle a(t) \cos(\omega t) \rangle = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} a(t) \cos(\omega t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} a(t) \cos(\omega t) dt = \\ &= \frac{4}{T} \int_0^{T/4} \cos(\omega t) dt - \frac{4}{T} \int_{T/4}^{T/2} \cos(\omega t) dt = \\ &= \frac{4}{\omega T} [\sin(\omega t)]_{t=0}^{t=T/4} - \frac{4}{\omega T} [\sin(\omega t)]_{t=T/4}^{t=T/2} = \\ &= \frac{4}{2\pi} \left[\sin\left(\frac{2\pi}{4}\right) - \sin(0) \right] - \frac{4}{2\pi} \left[\sin\left(\frac{2\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{4}\right) \right] = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] - \frac{2}{\pi} \left[-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] = \frac{4}{\pi} \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il calcolo dei termini successivi si procede analogamente. Posto $k = 2n+1$, si ha: $p_k = (4/\pi) (-1)^n/k$. Il risultato finale è quindi:

$$a(t) = \frac{4}{\pi} \cos(\omega t) - \frac{4}{3\pi} \cos(3\omega t) + \frac{4}{5\pi} \cos(5\omega t) - \frac{4}{7\pi} \cos(7\omega t) + \dots$$

La figura più in alto confronta la grandezza periodica $a(t)$ con la sua prima armonica. Le figure dall'alto verso il basso mostrano come, aggiungendo anche le armoniche 3, 5 e 7, la serie di Fourier approssimi sempre meglio $a(t)$.

