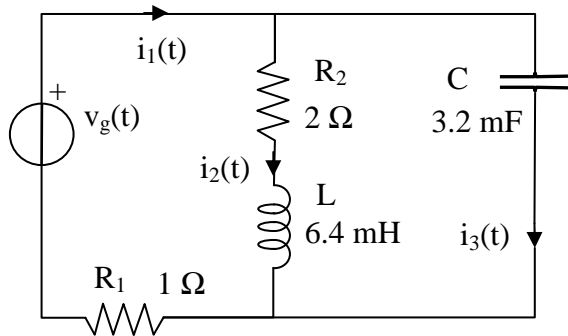


# Esercizi sulle reti elettriche in corrente alternata (parte 1)

**Esercizio 1:** Calcolare l'andamento nel tempo delle correnti  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$  del circuito in figura e verificare il bilancio delle potenze attive e reattive. Il circuito è alimentato da un generatore di tensione sinusoidale  $v_g(t)$  di frequenza  $f = 50$  Hz e valore efficace  $V_g = 100$  V. Si suppone che il circuito operi in regime sinusoidale.



$$\underline{N}_g = 4118 - j 3529$$

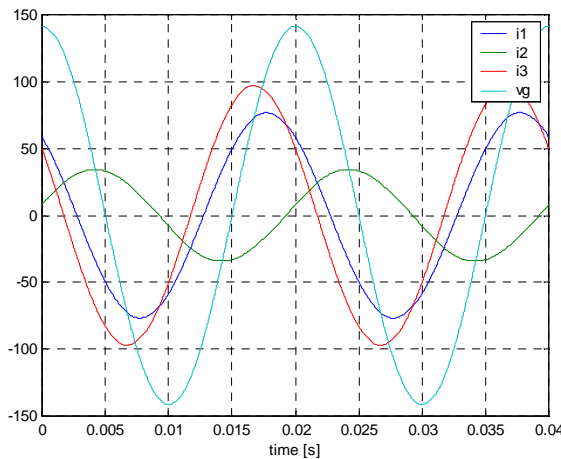
Erogata

$$\underline{N}_1 = 2941 + j 0$$

$$\underline{N}_2 = 1176 + j 1176$$

$$\underline{N}_3 = 0 - j 4706$$

Assorbite



Posto  $\angle \underline{V}_g = 0$

$$v_g(t) = \sqrt{2} 100 \cos(314.16 t)$$

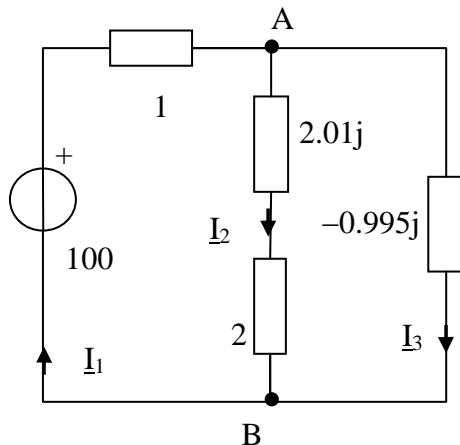
$$i_1(t) = \sqrt{2} 54.2 \cos(314.16 t + 0.71)$$

$$i_2(t) = \sqrt{2} 24.2 \cos(314.16 t - 1.32)$$

$$i_3(t) = \sqrt{2} 68.6 \cos(314.16 t + 1.03)$$

## Soluzione:

La pulsazione è  $\omega = 2\pi f = 314.16$  rad/s. Le reattanze sono quindi  $X_L = \omega L = 314.16 \times 6.4 \times 10^{-3} = 2.010 \Omega$  ed  $X_C = -1/(\omega C) = -1/(314.16 \times 3.2 \times 10^{-3}) = -0.995 \Omega$ . Il numero complesso rappresentativo della tensione impressa dal generatore è  $\underline{V}_g = V_{g,eff} \exp(j \angle \underline{V}_g)$ . Posto  $\angle \underline{V}_g = 0$ , che corrisponde a scegliere come istante iniziale quello corrispondente ad uno dei massimi della tensione impressa dal generatore, si ha quindi  $\underline{V}_g = 100 + 0j$ .



Passando dal dominio del tempo al dominio simbolico il circuito equivalente è quello rappresentato in figura (tutte le grandezze sono espresse in unità SI). Poste in serie le impedenze sul ramo centrale ( $\underline{Z}_2 = 2 + 2.01j$ ), la tensione tra i nodi A e B si determina immediatamente applicando il teorema di Millman:

$$\underline{V}_{AB} = \frac{100}{1 + \frac{1}{2 + 2.01j} + \frac{1}{-0.995j}} = 58.64 - 35.46j$$

Le correnti sui tre rami si possono dedurre dalle caratteristiche dei componenti:

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= (100 - \underline{V}_{AB})/1 = 41.36 + 35.46j \Rightarrow |\underline{I}_1| = 54.48 \text{ A}, \angle \underline{I}_1 = 0.709 \text{ rad} \cong 40.6^\circ \\ \underline{I}_2 &= \underline{V}_{AB}/(2+2.01j) = 5.723 - 23.48j \Rightarrow |\underline{I}_2| = 24.17 \text{ A}, \angle \underline{I}_2 = -1.33 \text{ rad} \cong -76.3^\circ \\ \underline{I}_3 &= \underline{V}_{AB}/(-0.995j) = 35.63 + 58.94j \Rightarrow |\underline{I}_3| = 68.87 \text{ A}, \angle \underline{I}_3 = 1.03 \text{ rad} \cong 58.8^\circ \end{aligned}$$

L'andamento nel tempo delle tre correnti è quindi deducibile dai moduli (uguali ai valori efficaci) e dalle fasi tramite la relazione di definizione della trasformata di Steinmetz. Per quanto riguarda le potenze, utilizzando le potenze complesse si ha:

Potenze assorbite dalle impedenze

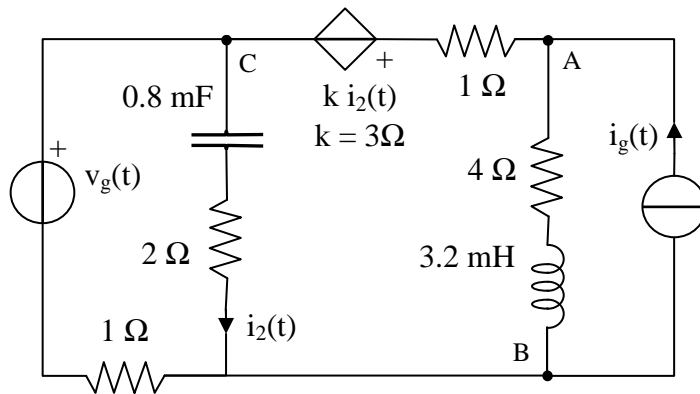
Potenza complessa	Potenza Attiva	Potenza Reattiva
$\underline{N}_1 = 1 \times  \underline{I}_1 ^2 = 2968 + 0j$	2.9 kW	0 kVAr
$\underline{N}_2 = (2 + 2.01j) \times  \underline{I}_2 ^2 = 1168 + 1174j$	1.2 kW	1.2 kVAr
$\underline{N}_3 = (-0.995j) \times  \underline{I}_3 ^2 = 0 - 4719j$	0 kW	-4.7 kVAr

Potenza erogata dal generatore

Potenza complessa	Potenza Attiva	Potenza Reattiva
$\underline{N}_g = \underline{V}_g (\underline{I}_1)^* = 4136 - 3545j$	4.1 kW	-3.5 kVAr

Il bilancio delle potenze per le potenze attive e reattive (e complesse) quindi è soddisfatto. (si noti che approssimando inizialmente le reattanze come  $X_L \cong 2 \Omega$  ed  $X_C \cong -1 \Omega$ , si ottengono risultati simili, con un errore sulla terza cifra significativa, purché si effettuino le operazioni di calcolo almeno a tre cifre)

**Esercizio 2:** Calcolare il valore massimo e la fase (in gradi) della tensione tra i nodi B e C del circuito in figura, in regime sinusoidale a frequenza 50 Hz. La tensione  $v_g(t)$  impressa dal generatore indipendente ha valore efficace 100 V e fase zero; la corrente  $i_g(t)$  impressa dal generatore di corrente ha valore efficace 50 A e fase  $\pi/3$ . Calcolare inoltre la potenza attiva e reattiva erogata dal generatore di corrente.

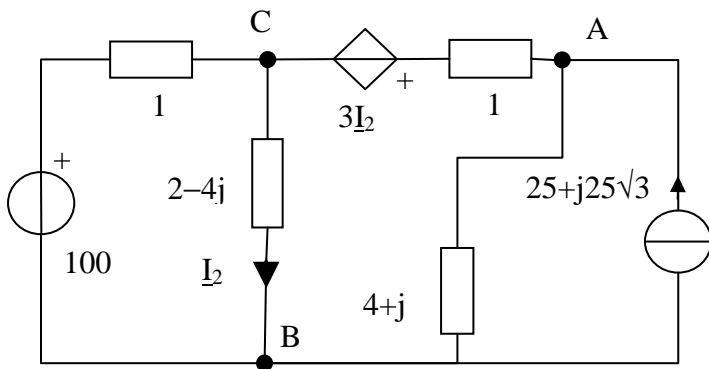


Soluzione:

$$\begin{aligned} V_{BCmax} &= 125 \text{ V} \\ \angle \underline{V}_{BC} &= -174^\circ \\ P_{gc(e)} &= 6.6 \text{ kW} \\ Q_{gc(e)} &= -2.2 \text{ kVAR} \end{aligned}$$

**Soluzione:**

La pulsazione è  $\omega = 2\pi f = 314.16 \text{ rad/s}$ . Le reattanze sono quindi  $X_L = \omega L = 314.16 \times 3.2 \times 10^{-3} = 1.005 \Omega \cong 1 \Omega$  ed  $X_C = -1/(\omega C) = -1/(314.16 \times 3.2 \times 10^{-3}) = -3.978 \Omega \cong -4 \Omega$ . Il numero complesso rappresentativo della tensione impressa è  $\underline{V}_g = V_{g,eff} \exp(j \angle \underline{V}_g)$ . Dato che  $\angle \underline{V}_g = 0$ , si ha quindi  $\underline{V}_g = 100$ . Il numero complesso rappresentativo della corrente impressa è  $\underline{I}_g = I_{g,eff} \exp(j \angle \underline{I}_g)$ . Dato che  $\angle \underline{I}_g = \pi/3$ , si ha quindi  $\underline{I}_g = 50 \exp(j \pi/3) = 50 [\cos(\pi/3) + j \sin(\pi/3)] = 50 [1/2 + j \sqrt{3}/2] = 25 + j 25 \sqrt{3}$ . Passando dal dominio del tempo al dominio simbolico il circuito si rappresenta quindi come segue (tutte le grandezze sono espresse in unità SI):



È possibile semplificare il circuito sostituendo il bipolo di Norton a destra (parallelo di una impedenza e di un generatore di corrente) con il suo equivalente di Thevenin:  $Z_{eq} = 4+j$

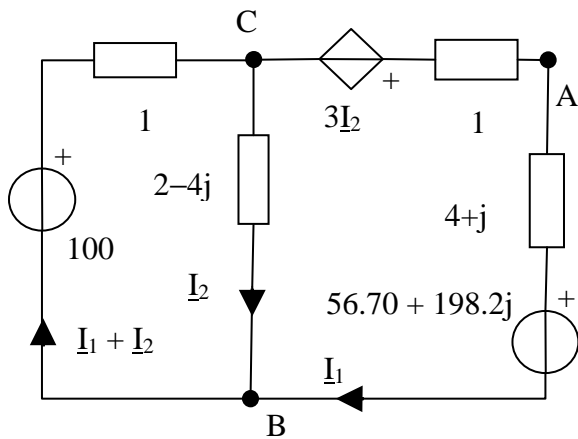
$$\underline{E}_{eq} = (4+j) \times (25+j25\sqrt{3}) = 56.70+198.2j$$

Le potenze erogate dal generatore di corrente sono calcolabili dalla potenza complessa:

$$\underline{N}_{gc(e)} = \underline{V}_{AB}(25 + j 25 \sqrt{3})^*$$

Definendo  $\underline{I}_1$  sul ramo di destra si può dedurre la corrente sul ramo di sinistra applicando la LKC al nodo B (o C). Le correnti  $\underline{I}_1$  ed  $\underline{I}_2$  sono determinabili risolvendo il sistema di due equazioni, ottenuto applicando le LKT sulle maglie definite dalle correnti stesse:

$$0 = -100 + \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + (2-4j)\underline{I}_2 \quad , \quad 0 = -3\underline{I}_2 + \underline{I}_1 + (4+j)\underline{I}_1 + 56.70 + 198.2j - 100 + \underline{I}_1 + \underline{I}_2$$



Quindi  $\underline{I}_1 = 100 - (3-4j)\underline{I}_2$

e, sostituendo nella seconda equazione:

$$0 = -2\underline{I}_2 + 100(6+j) - (6+j)(3-4j)\underline{I}_2 - 43.3 + 198.2j$$

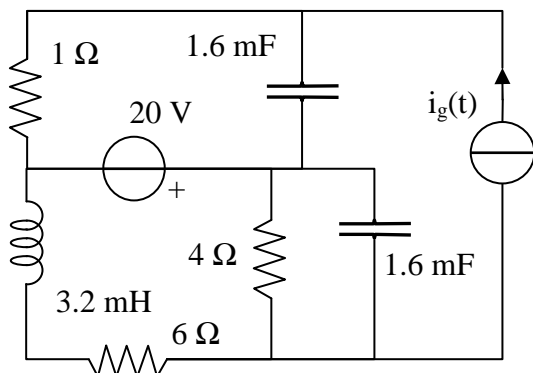
$$\Rightarrow \underline{I}_2 = 6.980 + 18.53j, \quad \underline{I}_1 = 4.93 - 27.7j,$$

Quindi  $\underline{V}_{BC} = - (2-4j)\underline{I}_2 = -88.10 - 9.145j$ . Il valore efficace coincide con il modulo, quindi  $V_{BC,eff} = \sqrt{(88.1^2 + 9.145^2)} = 88.65$  V da cui si deduce il massimo:  $V_{BC,max} = V_{BC,eff} \sqrt{2} = 125.2$  V

Per quanto riguarda la fase, il fasore è nel terzo quadrante e quindi  $\angle \underline{V}_{BC} = -\pi + \text{Arctan}(9.145/88.1) = -3.04$  rad. Il valore in gradi si ottiene moltiplicando per il fattore  $(180/\pi)$  ed è pari a  $-174^\circ$ . Infine  $\underline{V}_{AB} = (4+j)\underline{I}_1 + 56.70 + 198.2j = 104 + 92.4j$ , e quindi  $\underline{N}_{gc(e)} = \underline{V}_{AB}(25 - j 25 \sqrt{3}) = 6604 - 2197j$ . Le potenze, attiva e reattiva, erogate dal generatore di corrente sono rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria della potenza complessa erogata, quindi  $P_{gc(e)} = 6604$  W  $\cong$  6.6 kW e  $Q_{gc(e)} = -2197$  VAR  $\cong$  - 2.2 kVAR.

**Esercizio 3: determinare la potenza istantanea e media erogata dai generatori del circuito in figura ( $i_g(t)$  sinusoidale, frequenza 50 Hz, valore efficace 10 A, fase nulla).**

*Suggerimento: utilizzare il principio di sovrapposizione degli effetti.*



potenze istantanee

$$p_{vg}(t) = 40 + 20 \cdot \sqrt{2} \cdot 6.8 \cos(\omega t - 0.26)$$

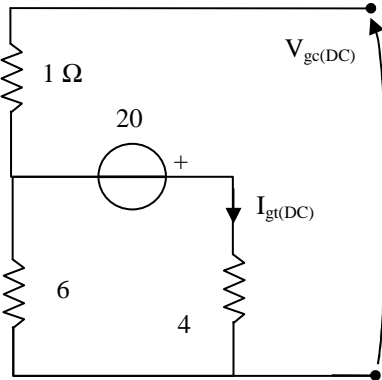
$$p_{ig}(t) = -12 \cdot \sqrt{2} \cdot 10 \cos(\omega t) + \sqrt{2} \cdot 24.4 \cos(\omega t - 0.71) \cdot \sqrt{2} \cdot 10 \cos(\omega t)$$

potenze medie

$$P_{vg} = 40$$
 W

$$P_{ig} = 10 \cdot 24.4 \cos(-0.71 - 0) = 185$$
 W

**Soluzione:** Dato che sono presenti un generatore a tensione impressa costante ed un generatore a corrente impressa sinusoidale a 50 Hz, il circuito è in regime periodico: tutte le variabile circuitali sono rappresentabili come la somma di un termine costante (DC) e di un termine sinusoidale (AC). I due termini sono calcolabili separatamente utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti. Quindi, azzerando la corrente impressa dal generatore di corrente si ottiene un circuito in regime stazionario (in cui induttori e condensatori sono equivalenti rispettivamente a cortocircuiti e circuiti aperti), come mostrato (tutte le grandezze sono espresse in unità SI).

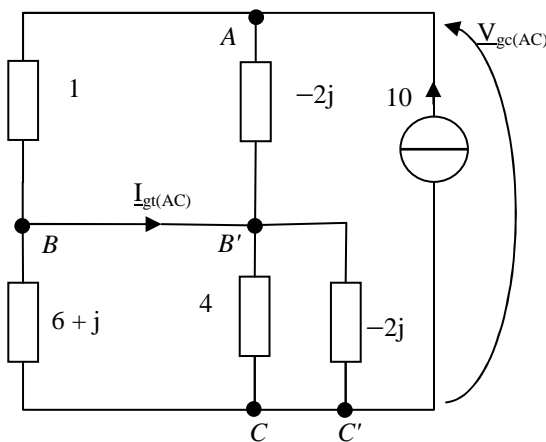


La corrente circolante sul resistore da 1  $\Omega$  è nulla, dato che è in serie ad un circuito aperto. La corrente circolante sul generatore di tensione si ottiene applicando la LKT all'unica maglia presente. Pertanto

$$0 = -20 + 4 I_{gt(DC)} + 6 I_{gt(DC)}$$

ottenendo  $I_{gt(DC)} = 2$  A. La tensione sul generatore di corrente è ottenibile dalla caratteristica del resistore da 6  $\Omega$ :  $V_{gc(DC)} = -6 I_{gt(DC)} = -12$  V

Analogamente, le componenti AC si ottengono azzerando il generatore di tensione. Si ottiene pertanto un circuito in regime sinusoidale alla frequenza di 50 Hz. La pulsazione è  $\omega = 314.16$  rad/s. Le reattanze sono quindi  $X_L = \omega L = 314.16 \times 3.2 \times 10^{-3} \cong 1.00 \Omega$  ed  $X_C = -1/(\omega C) = -1/(314.16 \times 1.6 \times 10^{-3}) \cong -2 \Omega$ . Il numero complesso rappresentativo della corrente impressa dal generatore è  $\underline{I}_{gc(AC)} = 10 \exp(0j)$ . Si ha quindi  $\underline{I}_{gc(AC)} = 10 + 0j$ . Passando dal dominio del tempo al dominio simbolico il circuito si rappresenta quindi come segue (unità SI).



Le due impedenze tra i nodi A e B (o B', che è alla stessa tensione di B) sono in parallelo. La loro impedenza equivalente è pari a:

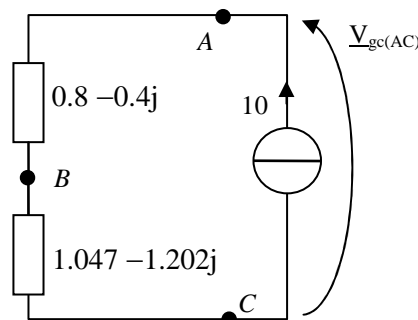
$$\begin{aligned} \underline{Z}_{eq,1} &= (-2j \times 1) / (-2j + 1) = -2j (2j + 1) / 5 = \\ &= (4 - 2j) / 5 = 0.8 - 0.4j \end{aligned}$$

Analogamente le tre impedenze tra i nodi B (o B') e C (o C') sono in parallelo. La loro ammettenza equivalente è pari a:

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{eq,2} &= 1 / (6 + j) + 1/4 + 1/(-2j) = \\ &= (6 - j) / 37 + 1/4 + j/2 = 0.4122 + 0.4730j \end{aligned}$$

Quindi la loro impedenza equivalente è pari a:

$$\underline{Z}_{eq,2} = 1.047 - 1.202j$$



Il circuito ottenuto sostituendo le impedenze equivalenti è rappresentato a lato. La sua soluzione è ovvia dato che la corrente circolante nella maglia è definita dal generatore di corrente. Pertanto:

$$\underline{V}_{gc(AC)} = 18.47 - 16.02j = 24.44 \exp(-0.7144j)$$

Per quanto riguarda la corrente  $\underline{I}_{gt(AC)}$ , essa si determina utilizzando la LKC applicata al nodo B dello schema precedente:

$$\begin{aligned} \underline{I}_{gt(AC)} &= \underline{V}_{AB} / 1 - \underline{V}_{BC} / (6 + j) = \\ &= (0.8 - 0.4j) 10 - (1.047 - 1.202j) 10 / (6 + j) = \\ &= 6.627 - 1.768j = 6.859 \exp(-0.2607j) \end{aligned}$$

Nel dominio del tempo si ottiene quindi, anti trasformando i fasori e sommando la componente DC:

$$v_{gc}(t) = v_{gc(DC)} + \sqrt{2} |V_{gc(AC)}| \cos(\omega t - \angle V_{gc(AC)}) = -12 + \sqrt{2} 24.44 \cos(\omega t - 0.7144) \text{ [V]}$$

$$i_{gt}(t) = i_{gt(DC)} + \sqrt{2} |I_{gt(AC)}| \cos(\omega t - \angle I_{gt(AC)}) = 2 + \sqrt{2} 6.859 \cos(\omega t - 0.2607) \text{ [A]}$$

Le potenze istantanee erogate dai generatori sono immediatamente determinabili come:

$$p_{gc}(t) = v_{gc}(t) i_{gc}(t) = -12 \cdot \sqrt{2} 10 \cos(\omega t) + \sqrt{2} 24.4 \cos(\omega t - 0.714) \cdot \sqrt{2} 10 \cos(\omega t) \text{ [W]}$$

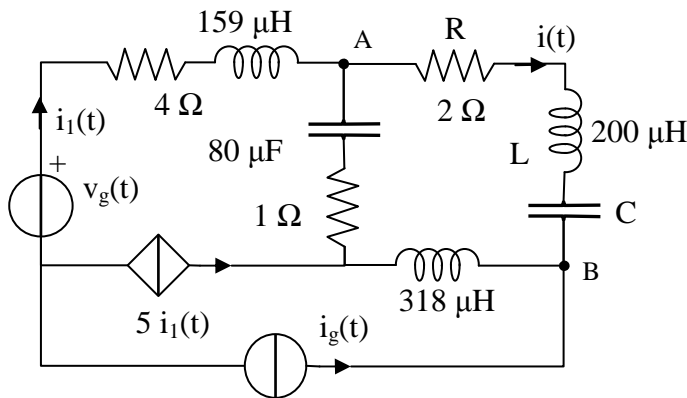
$$p_{gt}(t) = v_{gt}(t) i_{gt}(t) = 40 + 20 \cdot \sqrt{2} 6.86 \cos(\omega t - 0.261) \text{ [W]}$$

Per quanto riguarda le potenze medie erogate dai generatori si ha:

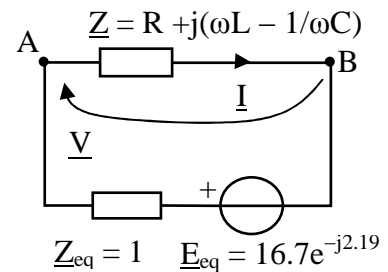
$$\langle p_{gc} \rangle = - \underbrace{\langle 12\sqrt{2} 10 \cos(\omega t) \rangle}_{=0 \text{ (alternata)}} + \underbrace{\langle \sqrt{2} 24.4 \cos(\omega t - 0.714) \cdot \sqrt{2} 10 \cos(\omega t) \rangle}_{= 24.4 \cdot 10 \cos(-0.714 - 0) = 185 \text{ (definizione di potenza attiva)}} = 185 \text{ W}$$

$$\langle p_{gt} \rangle = \underbrace{\langle 40 \rangle}_{=40 \text{ (costante)}} + \underbrace{\langle 20\sqrt{2} 6.86 \cos(\omega t - 0.261) \rangle}_{=0 \text{ (alternata)}} = 40 \text{ W}$$

**Esercizio 4: Il circuito di figura è alimentato da un generatore di corrente sinusoidale di valore efficace  $I_g = 10 \text{ A}$  e frequenza  $1 \text{ kHz}$  e da un generatore di tensione operante alla stessa frequenza e avente valore efficace  $V_g = 20 \text{ V}$ . La tensione impressa è in anticipo di  $\pi/6$  rispetto alla corrente impressa. Determinare l'andamento nel tempo della corrente  $i(t)$  e della tensione  $v(t)$  a regime ai terminali del bipolo RLC nei tre casi descritti di seguito, supponendo  $\angle v_g = 0$ . Determinare inoltre le potenze attiva e reattiva assorbite dal ramo RLC. (Caso 1.  $C = 70.5 \mu\text{F}$ ; Caso 2.  $C = 126.6 \mu\text{F}$ ; Caso 3.  $C = 620.2 \mu\text{F}$ )**



Soluzione (Thevenin)



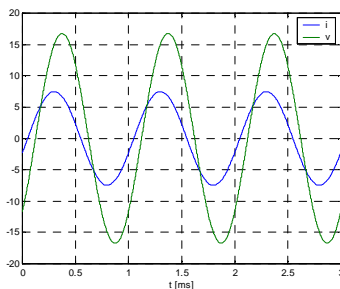
**Caso 1**

$$i(t) = \sqrt{2} 5.3 \cos(\omega t - 1.87)$$

$$v(t) = \sqrt{2} 11.8 \cos(\omega t - 2.34)$$

$$P = 56.2 \text{ W}$$

$$Q = -28.1 \text{ VAR}$$



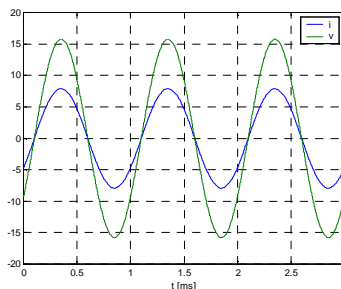
**Caso 2**

$$i(t) = \sqrt{2} 5.6 \cos(\omega t - 2.19)$$

$$v(t) = \sqrt{2} 11.2 \cos(\omega t - 2.19)$$

$$P = 62.3 \text{ W}$$

$$Q = 0 \text{ VAR}$$



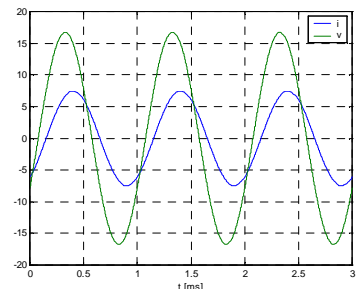
**Caso 3**

$$i(t) = \sqrt{2} 5.3 \cos(\omega t - 2.52)$$

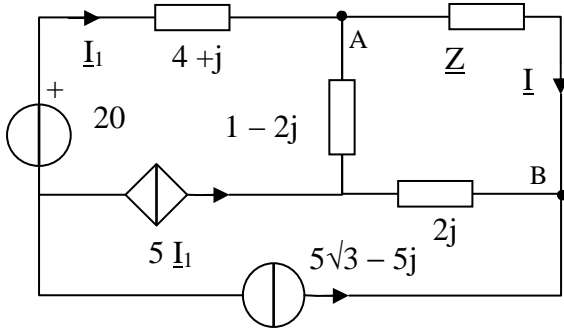
$$v(t) = \sqrt{2} 11.8 \cos(\omega t - 2.05)$$

$$P = 56.2 \text{ W}$$

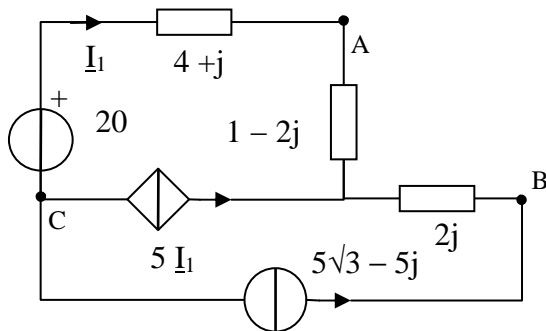
$$Q = 28.1 \text{ VAR}$$



**Soluzione:** La pulsazione è  $\omega = 2\pi f = 6283.2 \text{ rad/s}$ . Le reattanze sono quindi  $X_{L1} = \omega L_1 = 6283.2 \times 159 \times 10^{-6} \cong 1 \Omega$ ,  $X_{L1} = \omega L_1 = 6283.2 \times 318 \times 10^{-6} \cong 2 \Omega$  ed  $X_C = -1/(\omega C) = -1/(6283.2 \times 80 \times 10^{-3}) \cong -2 \Omega$ . Il numero complesso rappresentativo della tensione impressa è  $\underline{V}_g = V_{g,\text{eff}} \exp(j \angle \underline{V}_g)$ . Dato che  $\angle \underline{V}_g = 0$ , si ha quindi  $\underline{V}_g = 20$ . Il numero complesso rappresentativo della corrente impressa è  $\underline{I}_g = I_{g,\text{eff}} \exp(j \angle \underline{I}_g)$ . Dato che  $\angle \underline{V}_g - \angle \underline{I}_g = \pi/6$ , si ha  $\angle \underline{I}_g = -\pi/6$ , e dunque  $\underline{I}_g = 10 \exp(-j \pi/6) = 10 [\cos(\pi/6) - j \sin(\pi/6)] = 10 (\sqrt{3} - j)/2 = 5\sqrt{3} - 5j$ .



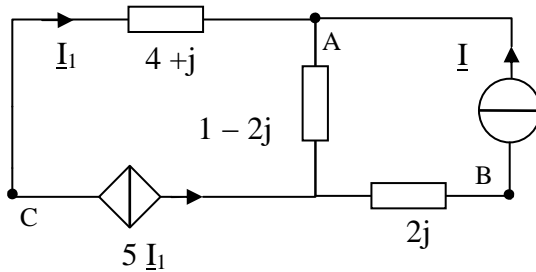
Il circuito equivalente (passando dal dominio del tempo al dominio simbolico) è rappresentato a lato (unità SI), dove  $\underline{Z} = R + j(\omega L - 1/\omega C)$  è l'impedenza del ramo RLC. Dato che  $\underline{Z}$  è differente nei tre casi descritti, conviene determinare l'equivalente (di Thevenin o di Norton) del bipolo complementare a  $\underline{Z}$ , che invece non cambia.



Determiniamo quindi i parametri del bipolo di Thevenin (se non sono determinabili, si passa l'equivalente di Norton). Si consideri il bipolo a lato. La tensione impressa dal generatore nel bipolo di Thevenin è per definizione la tensione a vuoto, in questo caso  $\underline{V}_{AB}$ . Dalla LKT si ha:  $\underline{V}_{AB} = (1 - 2j) \underline{I}_1 - 2j (5\sqrt{3} - 5j)$ . Dalla LKC applicata al nodo C si ha:  $0 = \underline{I}_1 + 5 \underline{I}_1 + (5\sqrt{3} - 5j)$ . Pertanto:  $\underline{I}_1 = (-5\sqrt{3} + 5j)/6$  e dunque:

$$\underline{E}_{\text{eq}} = \underline{V}_{AB} = -9.78 - 13.6j = 16.75 \exp(-j 2.19)$$

Per quanto riguarda l'impedenza equivalente, è necessario determinare il rapporto tra i fasori di tensione e di corrente, con i generatori indipendenti azzerati. Con riferimento allo schema a lato:  $\underline{Z}_{\text{eq}} = \underline{V}_{AB}/\underline{I}$ . Si noti che dalla LKC applicata al nodo C si ha:  $0 = \underline{I}_1 + 5 \underline{I}_1$ . Pertanto  $\underline{I}_1 = 0$  e dunque la corrente  $\underline{I}$  circola sulla maglia di destra. Quindi  $\underline{V}_{AB} = (1 - 2j)\underline{I} + 2j\underline{I} = \underline{I}$  e risulta  $\underline{Z}_{\text{eq}} = 1$ .



Infine, collegando il bipolo di Thevenin alla impedenza  $\underline{Z}$ , si ottiene il circuito a lato. La corrente circolante nella maglia è  $\underline{I} = \underline{E}_{\text{eq}}/(\underline{Z}_{\text{eq}} + \underline{Z})$ . Quindi  $\underline{V} = \underline{Z} \underline{I}$  e la potenza complessa assorbita dall'impedenza è  $\underline{N} = \underline{Z} |\underline{I}|^2 = P + j Q$ .

$L$  è la stessa nei tre casi, quindi  $\omega L = 6283.2 \times 200 \times 10^{-6} \cong 1.257 \Omega$ . Pertanto si ottiene:

Caso 1

$$-1/(\omega C) \cong -2.257 \Omega$$

$$\underline{Z} = R + j(\omega L - 1/\omega C) = 2 - j$$

$$\underline{I} = -1.57 - 5.06j = 5.3 e^{-j1.87}$$

$$\underline{V} = -8.21 - 8.54j = 11.8 e^{-j2.34}$$

$$\underline{N} = 56.2 - 28.1j$$

Caso 2

$$-1/(\omega C) \cong -1.257 \Omega$$

$$\underline{Z} = R + j(\omega L - 1/\omega C) = 2$$

$$\underline{I} = -3.26 - 4.53j = 5.6 e^{-j2.19}$$

$$\underline{V} = -6.52 - 9.07j = 11.2 e^{-j2.19}$$

$$\underline{N} = 62.3 + 0j$$

Caso 3

$$-1/(\omega C) \cong -0.257 \Omega$$

$$\underline{Z} = R + j(\omega L - 1/\omega C) = 2 + j$$

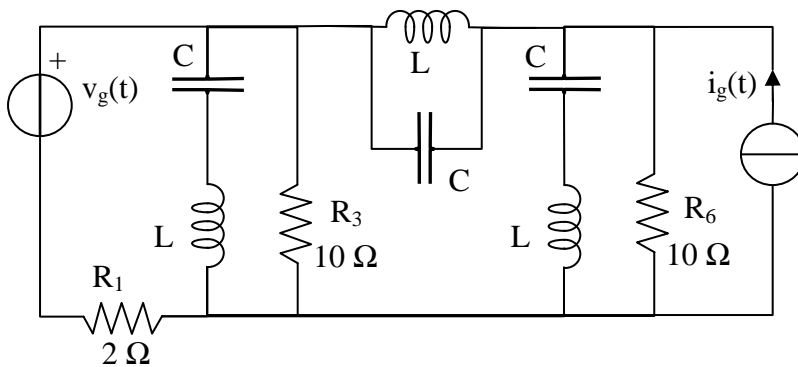
$$\underline{I} = -4.29 - 3.10j = 5.3 e^{-j2.52}$$

$$\underline{V} = -5.48 - 10.5j = 11.8 e^{-j2.05}$$

$$\underline{N} = 56.2 + 28.1j$$

**Esercizio 5: Determinare le potenze assorbite dai resistori  $R_1$ ,  $R_3$  e  $R_6$  del circuito in figura.**

Suggerimento: valutare il valore delle impedenze delle serie LC e dei paralleli LC rispetto ai valori delle resistenze.



Dati:

$$L = 250 \mu\text{H}$$

$$C = 1 \mu\text{F}$$

$$v_g(t) = \sqrt{2} 10 \cos \omega t$$

$$i_g(t) = \sqrt{2} 10 \cos \omega t$$

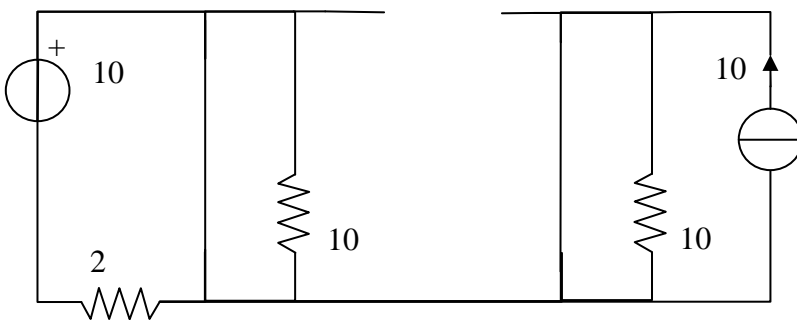
$$f = 1/(2\pi\sqrt{LC}) = 10066 \text{ Hz}$$

Soluzione

$$P_1 = 50 \text{ W}, P_3 = 0 \text{ W}, P_6 = 0 \text{ W}$$

**Soluzione:**

La frequenza a cui funziona il circuito è la frequenza di risonanza delle serie L-C e del parallelo L-C (le reattanze dei due elementi sono  $X_L = -X_C = 15.81 \Omega$ ). L'impedenza della serie e l'ammettenza del parallelo sono nulle ( $\underline{Z} = jX_L + jX_C = 0$ ,  $\underline{Y} = -j/X_L - j/X_C = 0$ ) e quindi sono rispettivamente equivalenti ad un cortocircuito ed a un circuito aperto. Passando al dominio simbolico il circuito si rappresenta come segue (tutte le grandezze sono espresse in unità SI):



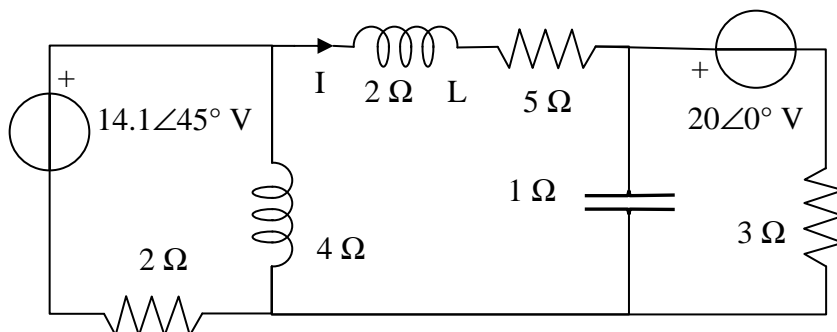
I resistori  $R_3$  ed  $R_6$  sono pertanto soggetti a tensione nulla e quindi assorbono potenza attiva nulla ( $P_3 = 0 \text{ W}$ ,  $P_6 = 0 \text{ W}$ ).

Il resistore  $R_1$  è soggetto alla tensione impressa dal Generatore di tensione e quindi assorbe la potenza attiva

$$P_1 = 10^2/2 = 50 \text{ W}$$

**Esercizio 6: Calcolare valore efficace e fase della corrente  $I$  del circuito in figura; calcolare la potenza reattiva assorbita dall'induttore  $L$ .**

Nota: sullo schema del circuito sono riportati i valori delle resistenze e delle reattanze degli induttori ( $\omega L$ ) e dei condensatori ( $1/\omega C$  in modulo) alla frequenza di funzionamento, e i numeri complessi rappresentativi (valori efficaci) delle forme d'onda prodotte dai generatori di tensione.



Soluzione

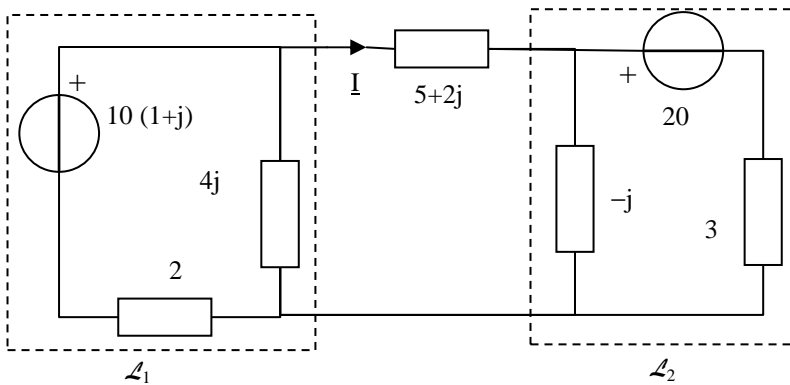
$$I_{\text{eff}} = 2.53 \text{ A}$$

$$\angle I = 1.19 \text{ rad}$$

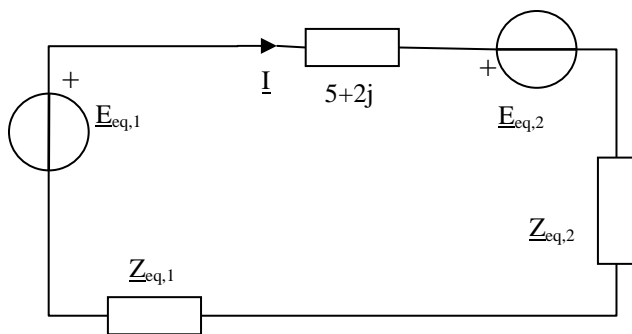
$$Q_L = 12.8 \text{ VAR}$$

**Soluzione:**

Passando al dominio simbolico il circuito si rappresenta come segue (tutte le grandezze sono espresse in unità SI):



Si noti che non viene richiesto di calcolare nulla relativamente ai componenti interni ai bipoli  $\mathcal{L}_1$  ed  $\mathcal{L}_2$ . Essi possono quindi essere sostituiti con i loro equivalenti di Thevenin per ottenere un circuito più semplice.



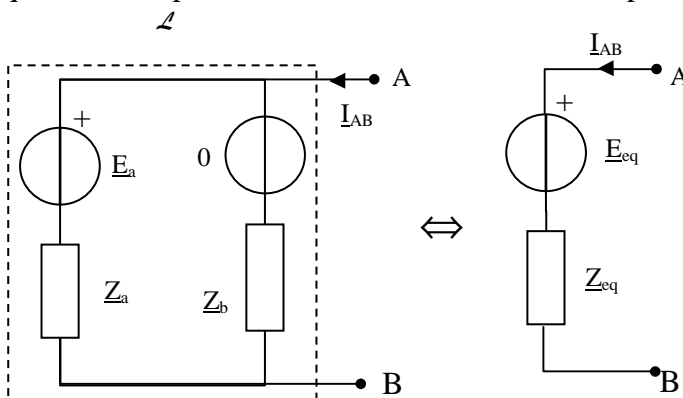
La corrente  $\underline{I}$  si deduce dunque applicando la LKT all'unica maglia presente:

$$0 = (5+2j)\underline{I} + \underline{E}_{eq,2} + \underline{Z}_{eq,2}\underline{I} + \underline{Z}_{eq,1}\underline{I} - \underline{E}_{eq,1}$$

Mentre la potenza richiesta è deducibile dalla parte immaginaria della potenza complessa assorbita dall'impedenza  $5+2j$ :

$$\underline{N} = (5+2j) |\underline{I}|^2$$

Dato che i bipoli  $\mathcal{L}_1$  ed  $\mathcal{L}_2$  hanno la stessa struttura (tipo di componenti e connessioni) il bipolo equivalente si può determinare nello stesso modo per entrambi.



Per determinare i parametri del bipolo equivalente di Thevenin è sufficiente applicare le definizioni:

$$\underline{Z}_{eq} = (\underline{V}_{AB}/\underline{I}_{AB})|_{\text{generatori indipendenti spenti}}$$

In questo caso rimangono solo le due impedenze  $\underline{Z}_a$  e  $\underline{Z}_b$  collegate in parallelo, e quindi

$$\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_a \underline{Z}_b / (\underline{Z}_a + \underline{Z}_b)$$

Per quanto riguarda la tensione impressa equivalente:  $\underline{E}_{eq} = \underline{V}_{AB}|_{\text{vuoto}}$  (ovvero con  $\underline{I}_{AB} = 0$ )

In tal caso è applicabile il Teorema di Millman:  $\underline{E}_{eq} = \underline{V}_{AB} = (\underline{E}_a / \underline{Z}_a + 0 / \underline{Z}_b) / (1 / \underline{Z}_a + 1 / \underline{Z}_b)$ .

Sostituendo i dati si ha quindi:

Sostituendo nella LKT e risolvendo per  $\underline{I}$ , si ha:

$$\underline{Z}_{eq,1} = 2 \times 4j / (2+4j) = 1.6+0.8j$$

$$\underline{Z}_{eq,2} = 3 \times (-j) / (3-j) = 0.3-0.9j$$

$$\underline{E}_{eq,1} = (10(1+j)/2) / (1/2 + 1/(4j)) = 4 + 12j$$

$$\underline{E}_{eq,2} = (20/3) / (1/3 + 1/(-j)) = 2 - 6j$$

$$\Rightarrow \underline{I} = 0.937 + 2.35j$$

$$\text{da cui } |\underline{I}| = \sqrt{(0.937^2 + 2.35^2)} = 2.53 \text{ A}$$

Per quanto riguarda la fase, il fasore è nel primo quadrante e quindi  $\angle \underline{I} = \text{Arctan}(2.35/0.937) = 1.19$  rad (circa  $68^\circ$ ). Infine la potenza complessa assorbita dall'impedenza  $5+2j$  è:

$$\underline{N} = (5+2j) |\underline{I}|^2 = (5+2j) (2.53)^2 = 32 + 12.8j$$

Quindi la potenza reattiva assorbita dall'induttore L è  $Q_L = 12.8 \text{ VAR}$ .