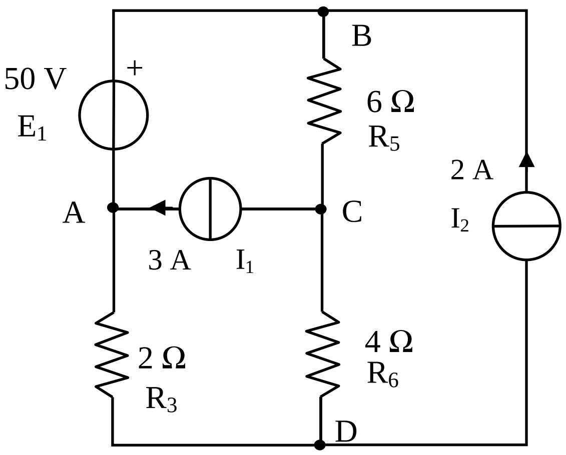
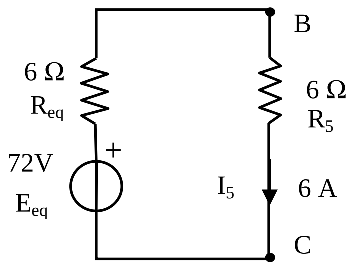
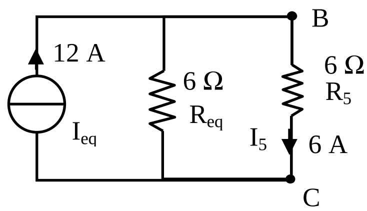
Esercizi sulle reti elettriche in corrente continua (parte 2)

Esercizio 13: Determinare gli equivalenti di Thevenin e di Norton del bipolo complementare al resistore R_5 nel circuito in figura e calcolare la corrente che circola attraverso il resistore R_5

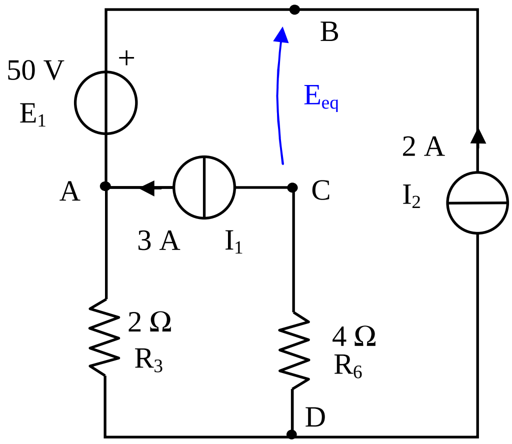


Soluzioni:





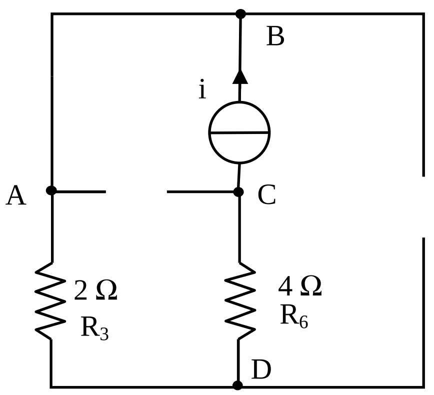
Soluzione:



Il bipolo lineare di cui trovare l'equivalente di Thevenin è illustrato in figura. I terminali del bipolo sono B e C.
Per definizione, $E_{eq} = V_{BC}$ a vuoto, cioè supponendo che il bipolo sia collegato ad un circuito aperto. In tali condizioni le correnti sui rami ABD ad ACD sono definite dai generatori di corrente indipendenti. La corrente sul ramo AD si deduce applicando la LKC al nodo A (oppure D): $I_3 = I_1 + I_2 = 5A$. Applicando la LKT alla maglia BADCB si ha quindi:

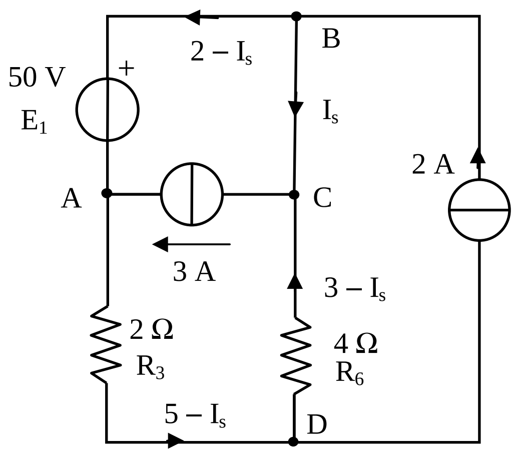
$$0 = -V_{BC} + 50 + 2\,I_3 + 4\,I_1$$

da cui $V_{BC} = 72$ V, e dunque $E_{eq} = 72$ V.



Per definizione, $R_{eq} = V_{BC}/i$ con i generatori indipendenti azzerati (dove i è la corrente circolante nel bipolo con il verso di riferimento associato alla tensione V_{BC}, e dunque entrante in B ed uscente da C). Nel circuito a sinistra si sono quindi spenti i generatori indipendenti ($E_1 = 0$, equivalente ad un cortocircuito, $I_2 = I_3 = 0$, equivalenti a circuiti aperti) e si sono collegati i terminali B e C ad un generatore di corrente esterno a corrente impressa i. Il circuito contiene la sola maglia BADCB. Applicando la LKT alla maglia si ha quindi: $0 = -V_{BC} + 2\,i + 4\,i$
da cui $V_{BC} = 6i$, e dunque $R_{eq} = 6\ \Omega$.

Per quanto riguarda la determinazione del bipolo di Norton, il calcolo della resistenza equivalente è essenzialmente lo stesso (anche se, per rispettare le ipotesi del Teorema di Norton si dovrebbero collegare i terminali B e C ad un generatore di tensione esterno a tensione impressa v, determinare la corrente che circola attraverso il bipolo e infine determinare la resistenza equivalente come rapporto tensione/corrente)

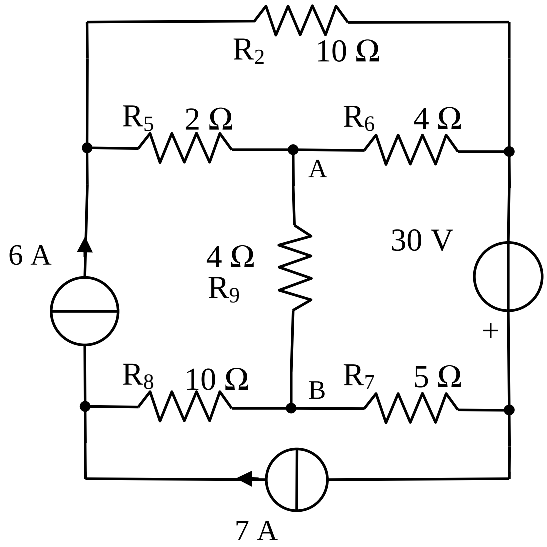


Infine, per definizione, I_{eq} è uguale alla corrente di cortocircuito, cioè supponendo che il bipolo sia collegato ad un cortocircuito (il verso con cui calcolare tale corrente è definito dal verso della corrente impressa nel bipolo di Norton). In tale condizione (vedi circuito a sinistra), detta I_s la corrente di cortocircuito, le correnti su tutti i rami sono definite applicando le LKC ai nodi. La corrente I_s si deduce applicando la LKT alla maglia definita da I_s (BCDAB). Si ha quindi:

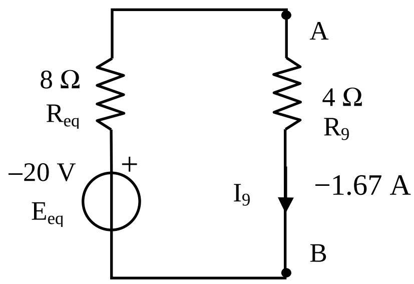
$0 = -4(3- I_s) -2(5- I_s) -50 = -72 + 6I_s$.

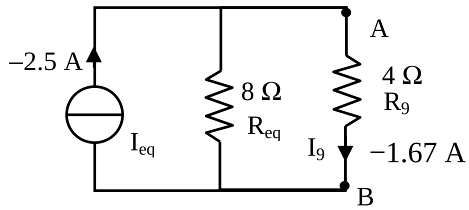
Quindi $I_s = 12A = I_{eq}$

Esercizio 14: Determinare gli equivalenti di Norton e di Thevenin del bipolo complementare al resistore R_9 nel circuito in figura e calcolare la corrente che circola attraverso il resistore R_9

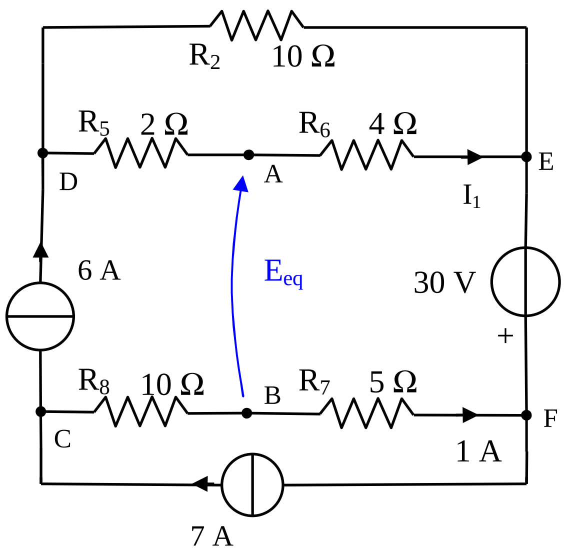


Soluzioni:





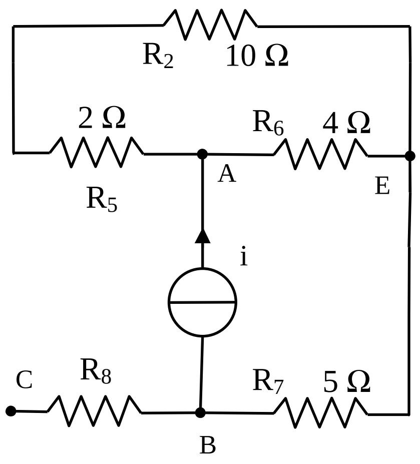
Soluzione:



Il bipolo lineare di cui trovare l'equivalente di Thevenin è illustrato in figura. I terminali del bipolo sono A e B. Per definizione, $E_{eq} = V_{AB}$ a vuoto, cioè supponendo che il bipolo sia collegato ad un circuito aperto. La corrente sulla serie tra R_7 ed R_8 si ottiene applicando la LKC al nodo C. La corrente sulla serie tra R_5 ed R_6 ($R_s = 2 + 4 = 6\ \Omega$) si ottiene dalla caratteristica $I_1 = V_{DE}/6$. Poiché R_s è in parallelo ad R_2 ($R_p = 10\times6/(10 + 6) = 3.75\ \Omega$) e sul parallelo scorre la corrente di 6 A impressa da generatore di corrente, si ha $V_{DE} = R_p\, 6$. Pertanto $I_1 = 3.75$ A. Infine la tensione equivalente si trova applicando la LKT alla sequenza chiusa (BFEAB):

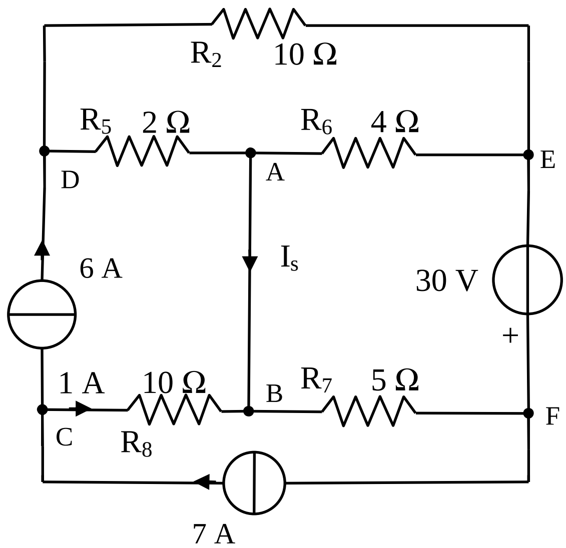
$$0 = 5\times1 + 30 - 4\ I_1 + V_{AB}$$

Quindi $V_{AB} = -\ 20\ V = E_{eq}$



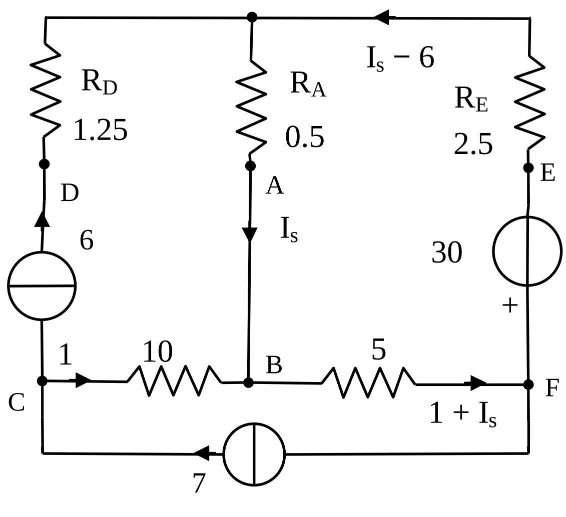
Per definizione, $R_{eq} = V_{AB}$ /i con i generatori indipendenti azzerati (dove i è la corrente circolante nel bipolo con il verso di riferimento associato alla tensione V_{AB}, e dunque entrante in A ed uscente da B). Nel circuito a sinistra si sono quindi spenti i generatori indipendenti e si sono collegati i terminali A e B ad un generatore di corrente esterno a corrente impressa i. Il nodo C è isolato (non è collegato a nessun altro terminale), quindi R_8 è percorso da corrente nulla (LKC al nodo C). I resistori R_5 ed R_2 sono in serie (R_s = 2 + 10 = 12 Ω). Poiché tale serie è collegata ai terminali A ed E, essa è in parallelo ad R_6 (R_p = 12×4/(12 + 4) = 3 Ω). La serie tra i resistori R_p ed R_7 è collegata ai terminali A e B per cui V_{AB} = (3 + 5) i, e dunque R_{eq} = 8 Ω.

Per quanto riguarda la determinazione del bipolo di Norton, il calcolo della resistenza equivalente è essenzialmente lo stesso (anche se, per rispettare le ipotesi del Teorema di Norton si dovrebbero collegare i terminali A e B ad un generatore di tensione).



La corrente di cortocircuito (la corrente impressa dal generatore di corrente nel bipolo di Norton) è già determinabile utilizzando l'equivalenza tra le due forme del generatore reale: $I_{eq} = E_{eq} / R_{eq}$ = − 20/8 = − 2.5 A.

Se invece si utilizza la definizione, I_{eq} è uguale alla corrente di cortocircuito, cioè supponendo che il bipolo sia collegato ad un cortocircuito (il verso con cui calcolare tale corrente è definito dal verso della corrente impressa nel bipolo di Norton). In tale condizione (vedi circuito a sinistra), detta I_s la corrente di cortocircuito, il resistore R_8 è percorso da una corrente da 1 A (LKC al nodo C).



Si può trasformare il triangolo di resistori collegati ai terminali D, A e E. Le resistenze equivalenti sono date da:

R_D = 10×2/(10+2+4) = 1.25 Ω
R_A = 2×4/(10+2+4) = 0.5 Ω
R_E = 10×4/(10+2+4) = 2.5 Ω

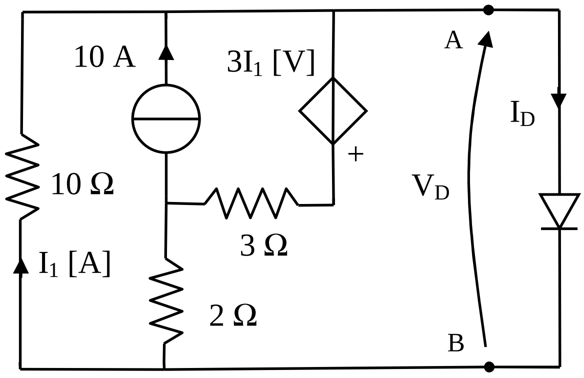
Le correnti su tutti i rami sono definite applicando le LKC ai nodi. La corrente I_s si deduce applicando la LKT alla maglia definita da I_s (BCDAB). Si ha quindi:

$0 = 0.5I_s + 5(1 + I_s) + 30 + 2.5(I_s - 6) = 20 + 8I_s.$

Quindi $I_s = -20/8 = -2.5\text{ A} = I_{eq}$

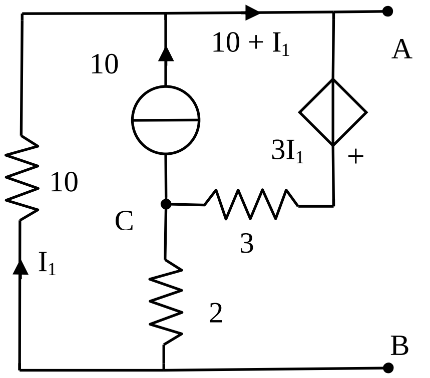
Esercizio 15: Determinare tensione e corrente alla porta AB del circuito in figura.

Suggerimento: utilizzare il circuito equivalente di Thevenin (o di Norton) del circuito a sinistra della porta AB.



Soluzione:
$V_D = 0$ V
$I_D = 6$ A

Soluzione:

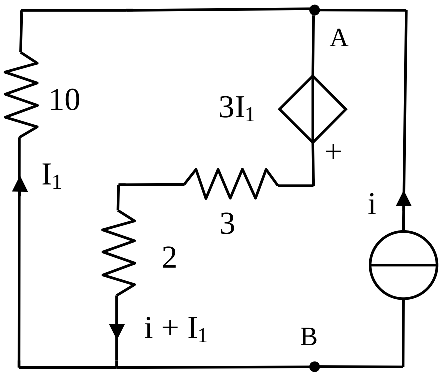


Il bipolo lineare di cui trovare l'equivalente di Thevenin è illustrato in figura (unità SI). I terminali del bipolo sono A e B. Per definizione, $E_{eq} = V_{AB}$ a vuoto. La corrente sul ramo contenente il generatore pilotato si deduce applicando la LKC al nodo C e, col verso scelto, è pari a $10 + I_1$. La tensione V_{AB} è la tensione ai terminali del resistore da 10 Ω e dunque $V_{AB} = -10\, I_1$. La corrente I_1 si deduce applicando la LKT alla maglia definita da I_1:

$$0 = -3\, I_1 + 3\,(10 + I_1) + 2\, I_1 + 10\, I_1$$

da cui $I_1 = -2.5$ A, e dunque $E_{eq} = 25$ V.

Per definizione, $R_{eq} = V_{AB}/i$ con i generatori indipendenti azzerati (dove i è la corrente circolante nel bipolo con il verso di riferimento associato alla tensione V_{AB}, e dunque entrante in A).



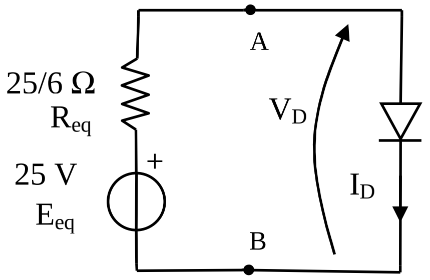
Nel circuito a sinistra si è quindi spento il generatore indipendente e si sono collegati i terminali A e B ad un generatore di corrente esterno a corrente impressa i. La corrente sul ramo contenente il generatore pilotato si deduce applicando la LKC al nodo A. Applicando la LKT alle due maglie del circuito si ha quindi:

$$0 = -V_{AB} - 3\, I_1 + 5\,(i + I_1)$$
$$0 = 10\, I_1 - 3\, I_1 + 5\,(i + I_1)$$

da cui, supponendo nota la corrente i, si deduce

$$I_1 = -(5/12)\, i$$
$$V_{AB} = (25/6)\, i,$$

e dunque $R_{eq} = V_{AB}/i = 25/6\ \Omega$

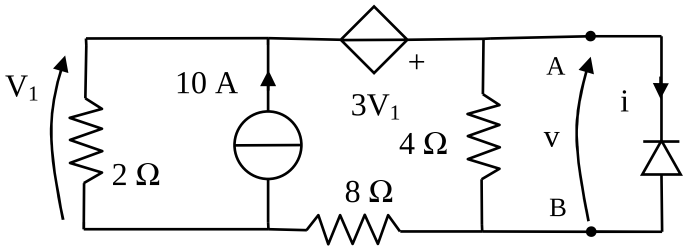


Sostituendo l'equivalente di Thevenin nel circuito iniziale si ha il circuito a sinistra, la cui soluzione è immediata se si considera che il diodo ideale, con i versi di riferimento scelti, è equivalente a:

- un circuito aperto se $V_D < 0$. (In tal caso $I_D = 0$ ma $V_D = 25$ V che è positiva e quindi inaccettabile).
- un cortocircuito se $I_D > 0$. (In tal caso $V_D = 0$ e la LKT sulla maglia fornisce $0 = -25 + (25/6)\, I_D$, da cui $I_D = 6$ A, che quindi è la soluzione cercata)

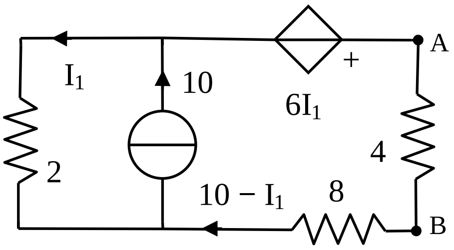
Esercizio 16: Determinare tensione e corrente alla porta AB del circuito in figura.

Suggerimento: utilizzare il circuito equivalente di Thevenin (o di Norton) del circuito a sinistra della porta AB.
Attenzione: i versi di tensione e corrente indicati in figura sono opposti a quelli solitamente utilizzati per definire la caratteristica tensione-corrente del diodo.



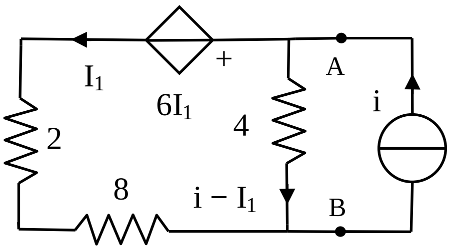
Soluzione:
$i = 0$ A
$v = 16$ V

Soluzione:



La figura a lato mostra il bipolo a vuoto. Si è utilizzata la caratteristica del resistore da 2 Ω per cambiare la variabile pilota del generatore pilotato: $V_1 = 2\ I_1$ quindi $3V_1 = 6\ I_1$. La corrente circolante sul ramo di destra si ottiene applicando la LKC ad uno dei terminali del generatore di corrente. La corrente I_1 si determina applicando la LKT alla maglia definita da I_1: $0 = 2\ I_1 - (8 + 4)(10 - I_1) + 6\ I_1$.
$I_1 = 120/20 = 6$ A, da cui $V_{AB} = 4(10 - I_1) = 16\ V = E_{eq}$

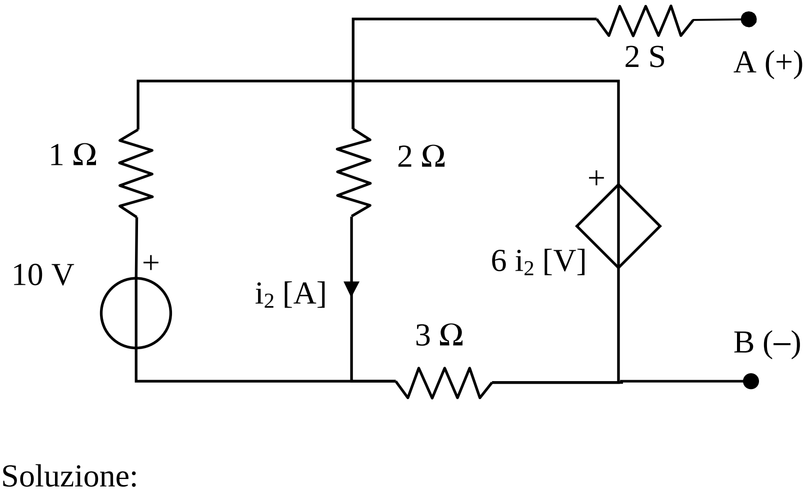
Questo è già sufficiente a determinare la soluzione del problema. Infatti la tensione tra anodo e catodo a vuoto è negativa ($V_{BA} = -16$ V), quindi il diodo è interdetto e la corrente è nulla.



In ogni caso, per determinare la resistenza equivalente del bipolo di Thevenin, si ha $R_{eq} = V_{AB}/i$ con i generatori indipendenti azzerati. Nel circuito a sinistra si è quindi spento il generatore indipendente e si sono collegati i terminali A e B ad un generatore di corrente esterno a corrente impressa i. La corrente circolante sul ramo centrale si ottiene applicando la LKC ad uno dei suoi terminali.

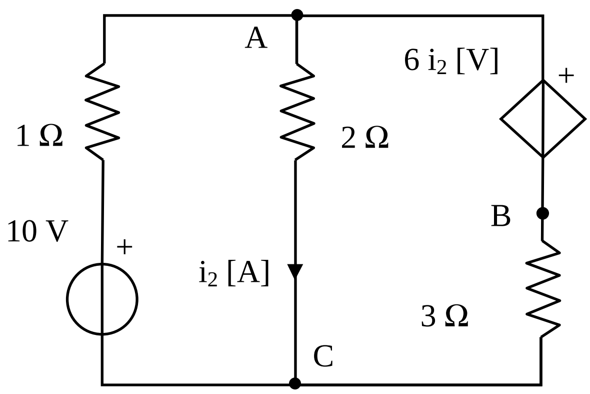
La corrente I_1 (in funzione di i, che si suppone nota) si determina applicando la LKT alla maglia definita da I_1: $0 = 6\ I_1 + (2 + 8)\ I_1 - 4(i - I_1)$. Quindi $I_1 = 4i/20 = i/5$, da cui $V_{AB} = 4(i - I_1) = 16i/5$. Pertanto $R_{eq} = V_{AB}/i = 16/5 = 3.2\ \Omega$.

Esercizio 17: Determinare l'equivalente di Thevenin del bipolo in figura.



Soluzione:
$R_{eq} = 0.5\ \Omega$
$E_{eq} = 36$ V

Soluzione:

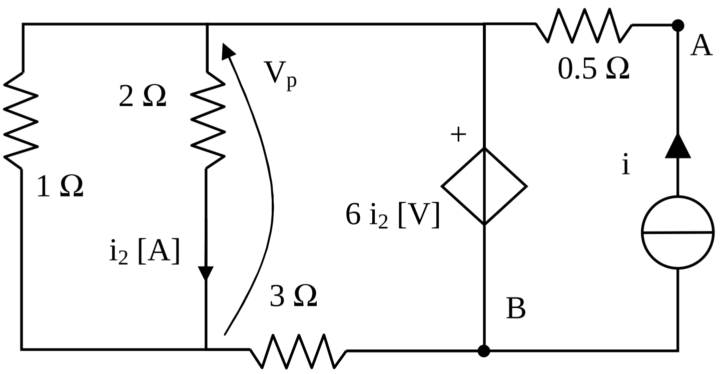


Per definizione, $E_{eq} = V_{AB}$ a vuoto (i terminali A e B sono collegati da un circuito aperto). Si può quindi risolvere il circuito a sinistra. Applicando il teorema di Millman si ha:

$$V_{AC} = \frac{\frac{10}{1} + \frac{0}{2} + \frac{6i_2}{3}}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{12}{11}\left(5 + i_2\right)$$

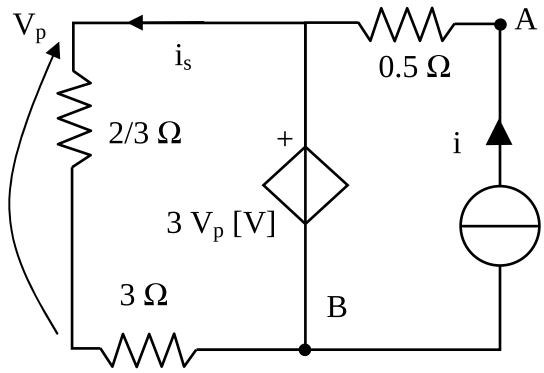
Inoltre la caratteristica del resistore sul ramo centrale fornisce: $V_{AC} = 2i_2$

Sostituendo e risolvendo si ha: $i_2 = 6$ A. Quindi, la tensione $V_{AB} = 6\ i_2 = 36$ V $= E_{eq}$.

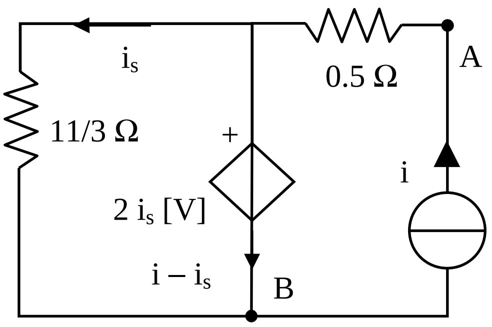


Per definizione, $R_{eq} = V_{AB}/i$ con i generatori indipendenti azzerati (dove i è la corrente circolante nel bipolo con il verso di riferimento associato alla tensione V_{AB}, e dunque entrante in A ed uscente da B). Nel circuito a sinistra si è quindi spento il generatore indipendente e si sono collegati i terminali A e B ad un generatore di corrente esterno a corrente impressa i.

I resistori da 1 e 2 Ω sono in parallelo (stessi terminali). Prima di sostituirli con un resistore equivalente (resistenza 2/3 Ω) si noti che è necessario esprimere la variabile pilota i_2 in termini di una variabile circuitale che sia presente nel circuito dopo la sostituzione (altrimenti la tensione impressa dal generatore pilotato non sarebbe calcolabile). In questo caso $i_2 = V_p/2$, quindi la tensione impressa dal generatore pilotato è $6\ i_2 = 3V_p$.



Nel circuito semplificato i due resistori a sinistra sono in serie (sono percorsi dalla stessa corrente i_s). Prima di sostituirli con un resistore equivalente (resistenza 11/3 Ω) si noti che è necessario esprimere la variabile pilota V_p in termini di una variabile circuitale che sia presente nel circuito dopo la sostituzione (altrimenti la tensione impressa dal generatore pilotato non sarebbe calcolabile). In questo caso $V_p = (2/3)\ i_s$, quindi la tensione impressa dal generatore pilotato è $3V_p = 2i_s$.



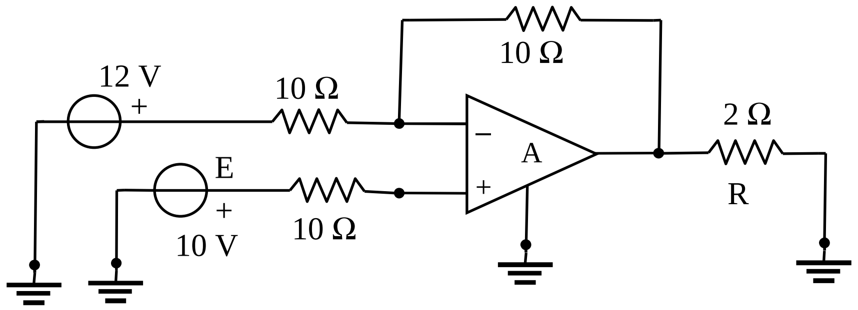
Applicando la LKC al nodo B si ottiene quindi la corrente sul ramo centrale.

Applicando la LKT alla maglia a sinistra si ottiene: $(11/3)i_s - 2i_s = 0$. Quindi: $i_s = 0$

Infine: $R_{eq} = V_{AB}/i = (0.5i+2i_s)/i = 0.5\ \Omega$

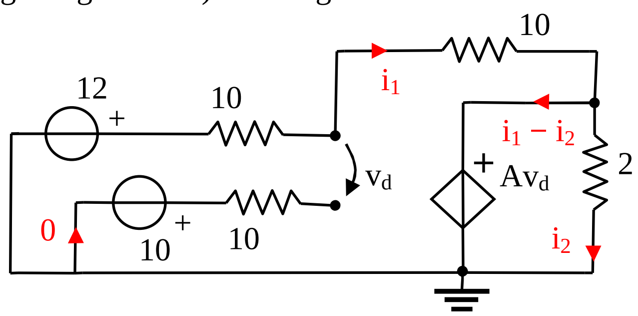
Esercizio 18a: Determinare la potenza assorbita dal resistore R (con A =10^5, E_{sat} = 10 V).

Suggerimento: sostituire il circuito equivalente dell'A.O. (nella regione lineare). È possibile utilizzare anche il cortocircuito virtuale.



Soluzione: P_R = 32 W (L'amplificatore opera nella regione lineare)

Soluzione: Si supponga che l'A.O. operi nella regione lineare (e quindi dovrà essere verificato, dopo avere risolto il circuito, che sia $|v_o| < E_{sat}$). Sostituendo il circuito equivalente dell'A.O. (a guadagno finito) nella regione lineare si ottiene:



Il circuito è costituito quindi da due maglie (la corrente sul generatore di tensione da 10 V è nulla, essendo collegato ad un terminale isolato). Definendo quindi le correnti i_1 ed i_2, la corrente sul ramo centrale si ottiene applicando la LKC ad uno dei suoi terminali. Applicando le LTK_{mf} (le maglie fondamentali sono definite dalle correnti i_1 ed i_2) si ha:

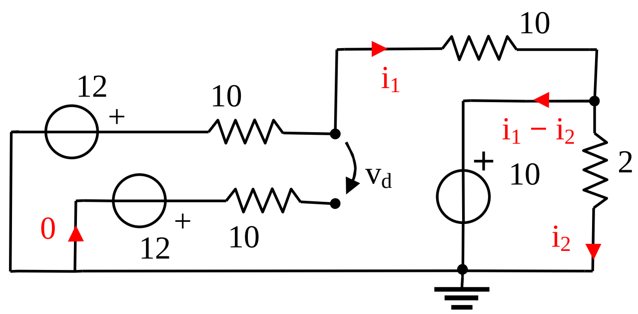
$0 = -12 + 10i_1 + 10i_1 + A\,v_d$, $\quad 0 = 2i_2 - A\,v_d$

Queste sono due equazioni in tre incognite. Per completare il sistema risolvente è necessaria un'altra equazione. Questa si ottiene considerando come ramo anche il circuito aperto su cui è definita v_d. La corrispondente maglia fondamentale è ovviamente percorsa da corrente nulla, come già osservato. Applicando la LTK_{mf} si ha quindi: $0 = -12 + 10i_1 - v_d + 10$. Risolvendo e sostituendo A =10^5, si ottiene: $v_d = 8/(A+2) \cong 80\ \mu V$, $i_1 \cong 0.2$ A ed $i_2 \cong 4$ A. La tensione di uscita dell'A.O. è $v_o = A\,v_d \cong 8$ V. Poiché $|v_o| = 8\text{ V} < 10\text{ V} = E_{sat}$, l'A.O. è in effetti nella regione lineare. Infine, la potenza assorbita dal resistore R è data da $P_R = R\,i_2^2 = 32$ W.

Esercizio 18b: Con riferimento al circuito in 18a determinare la potenza assorbita dal resistore R se E =12 V (e tutti i restanti parametri invariati).

Soluzione: P_R= 50 W (L'amplificatore opera nella regione di saturazione positiva)

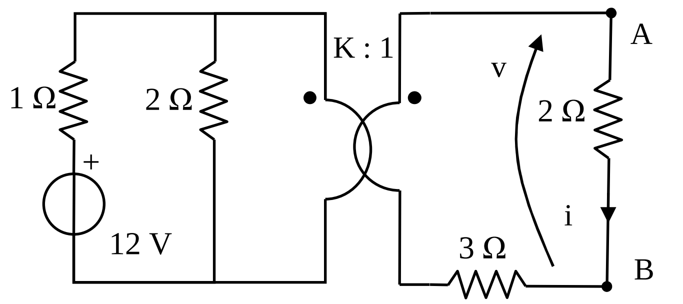
Soluzione: Procedendo come prima si ottiene $v_d = 12/(A+2) \cong 120\ \mu V$. La tensione di uscita dell'A.O. è $v_o = A\,v_d \cong 12$ V. Poiché $|v_o| = 12\text{ V} > 10\text{ V} = E_{sat}$, l'A.O. opera nella regione di saturazione positiva. Sostituendo il circuito equivalente dell'A.O. in saturazione positiva si ha:



La soluzione è immediata notando che il resistore R è soggetto alla tensione di 10 V. Quindi $i_2 = 10/2 = 5$ A e la potenza assorbita dal resistore R è data da $P_R = R\,i_2^2 = 50$ W. Infine, applicando le LTK_{mf} si ha: $0 = -12 + 10i_1 + 10i_1 + 10$, $\quad 0 = -12 + 10i_1 - v_d + 12$. Quindi $i_1 \cong 0.1$ A e $v_d = 10i_1 \cong 1$ V (positiva, dunque l'A.O. è in effetti nella regione di saturazione positiva).

Esercizio 19: Determinare tensione e corrente alla porta AB del circuito in figura con K = 1, K = 10 e K = 100.

Suggerimento: si può utilizzare il circuito equivalente del trasformatore ideale, oppure la formula per la riduzione del carico dal secondario al primario.

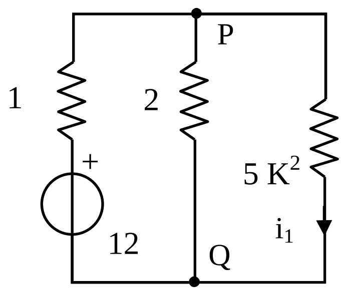


Soluzione (K = 1):
i = 1.412 A; v = 2.824 V

Soluzione (K = 10):
i = 159.8 mA; v = 319.6 mV

Soluzione (K = 100):
i = 16 mA; v = 32 mV

Soluzione: I terminali A e B sono collegati a un resistore da 2 Ω. Pertanto, con i versi dati, v = 2i. Inoltre i resistori sul secondario del trasformatore ideale sono in serie e si possono riportare a primario moltiplicando per il quadrato del rapporto di trasformazione (K). Nel circuito equivalente a sinistra (unità SI) compare quindi la corrente i_1 sul primario del trasformatore. Con i versi scelti, si ha quindi $i = Ki_1$.



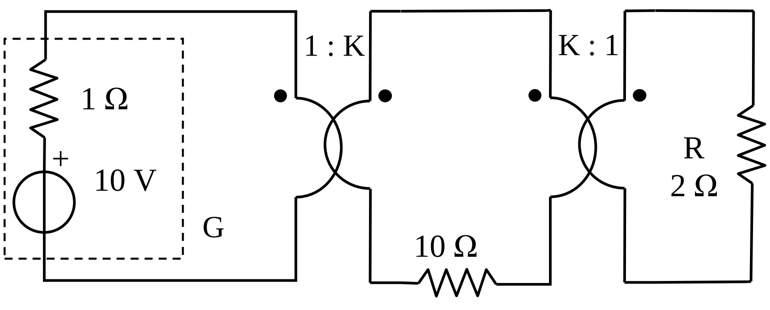
Per determinare i_1 è sufficiente conoscere la tensione V_{PQ}, infatti $i_1 = V_{PQ} /(5K^2)$. Per determinare la tensione V_{PQ} è possibile utilizzare il Teorema di Millman, da cui:

$$V_{PQ} = \frac{12}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5K^2}} \quad \Rightarrow \quad i_1 = \frac{12}{\frac{15K^2}{2} + 1} \quad \Rightarrow \quad i = \frac{24K}{15K^2 + 2}$$

Sostituendo i valori K = 1, 10, 100, si ottengono le correnti richieste (in A).

Esercizio 20: Determinare la potenza assorbita dal resistore R e la potenza erogata dal generatore reale G (nei casi K = 1, K = 10 e K = 100).

Suggerimento: si può utilizzare il circuito equivalente dei trasformatore ideali, oppure la formula per la riduzione del carico dal secondario al primario (due volte).

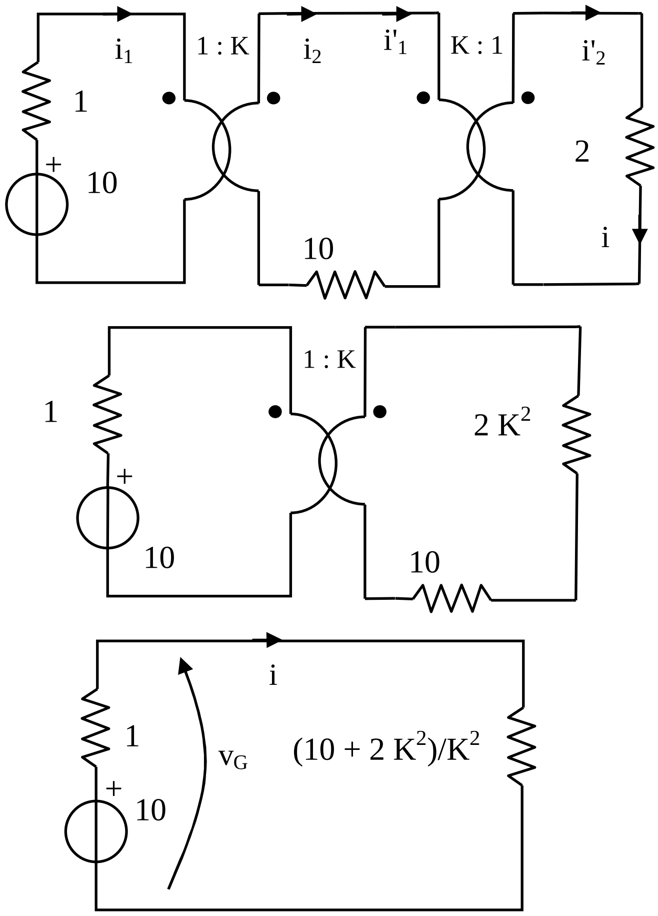


Soluzione (K = 1):
p_R = 1.183 W, $p_{G(e)}$ = 7.101 W

Soluzione (K = 10):
p_R = 20.81 W, $p_{G(e)}$ = 21.85 W

Soluzione (K = 100):
p_R = 22.21 W, $p_{G(e)}$ = 22.22 W

Soluzione: Se si introducono i circuiti equivalenti dei due trasformatori ideali si ottiene un circuito non connesso, costituito da tre maglie. Riconnesso il circuito tramite cortocircuiti, si ottiene un sistema risolvente contenete almeno tre equazioni, sia che si utilizzi il metodo delle tensioni di nodo sia che si utilizzi il metodo delle correnti di maglia. È decisamente più semplice utilizzare la riduzione da secondario a primario per semplificare il circuito.



Utilizzando le caratteristiche dei due trasformatori si ha, con i versi indicati in figura per le correnti:

$$i_1 = K\, i_2 = K\, i'_1 = K\, (i'_2/K) = i'_2$$

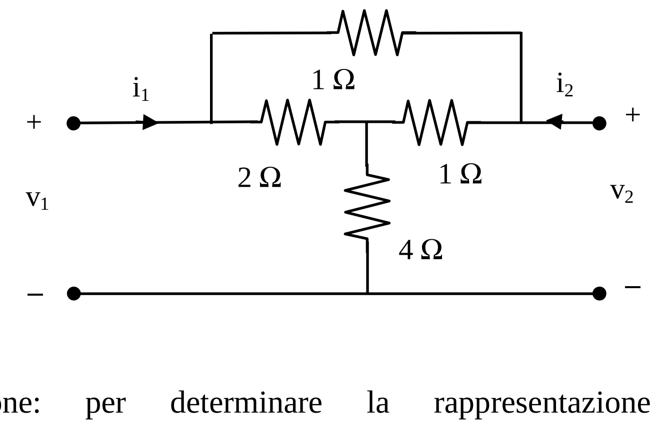
Quindi, se si indica con i la corrente circolante sul resistore R, la stessa corrente circola anche sul generatore G. La corrente nella maglia centrale è invece i/K.

Il resistore da 2 Ω, ridotto a primario, è equivalente ad un resistore con resistenza $2K^2$, che si trova in serie al resistore da 10 Ω. Sommando e riducendo a primario, cioè moltiplicando per $(1/K)^2$, si ottiene un circuito equivalente costituito da una sola maglia su cui circola, come si è già osservato, la corrente i. Applicando la LKT a tale maglia si ottiene dunque:

$$i = 10/(3 + 10/K^2)$$

La potenza assorbita da R è $p_R = 2\, i^2$. La potenza erogata da G è $p_{G(e)} = i\, v_G = i(10 - i)$. Sostituendo i valori K = 1, 10, 100, si ottengono le potenze richieste (in W).

Esercizio 21: Determinare la matrice R del doppio bipolo di figura.

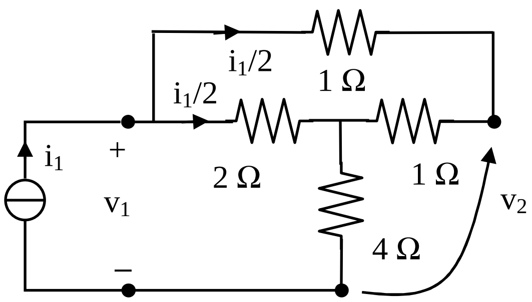


Soluzione:

$$[R] = \begin{bmatrix} 5 & 4.5 \\ 4.5 & 4.75 \end{bmatrix} \Omega$$

Soluzione: per determinare la rappresentazione controllata in corrente (tramite matrice [R]) del doppio bipolo in figura, è sufficiente specializzare le caratteristiche:

$$\begin{cases} v_1 = r_{11} i_1 + r_{12} i_2 \\ v_2 = r_{21} i_1 + r_{22} i_2 \end{cases}$$

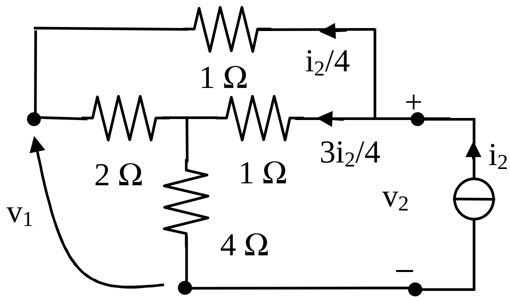


1) Posto i_2 = 0, il primario è alimentato con una corrente i_1 arbitraria. Risolto il circuito per determinare v_1 e v_2, si ha quindi:

$$r_{11} = \left.\frac{v_1}{i_1}\right|_{i_2=0} \quad , \qquad r_{21} = \left.\frac{v_2}{i_1}\right|_{i_2=0}$$

Si noti che i due resistori da 1 Ω sono in serie: R_{s1} = 1 +1 = 2 Ω. Tale resistore equivalente è in parallelo al resistore da 2 Ω: quindi $R_p = 2\times2/(2+2) = 1$ Ω

Infine il resistore R_p e quello da 4 Ω sono in serie: R_{s2} = 4 + 1 = 5 Ω. Si ha quindi $v_1 = 5\ i_1$ e dunque r_{11} = 5 Ω. Per determinare v_2 si noti che la tensione sul resistore R_p (pari a $1\times i_1$) è anche la tensione sulla serie R_{s1}; la corrente circolante su R_{s1} (e sui due resistori da 1 Ω) è quindi $i_1/2$. Pertanto si ottiene $v_2 = i_1/2 + 4\ i_1$ e dunque r_{21} = 4.5 Ω.



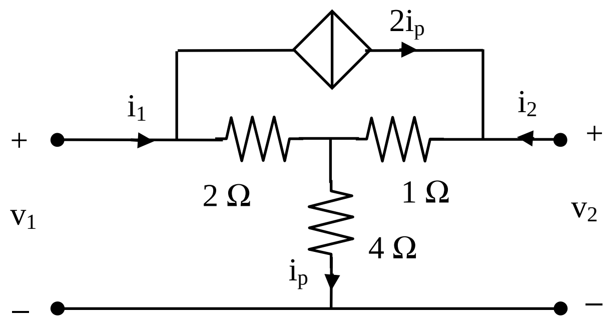
2) posto i_1= 0, il secondario è alimentato con una corrente i_2 arbitraria. Risolto il circuito per determinare v_1 e v_2, si ha quindi:

$$r_{12} = \left.\frac{v_1}{i_2}\right|_{i_1=0} \quad , \qquad r_{22} = \left.\frac{v_2}{i_2}\right|_{i_1=0}$$

Si noti che i due resistori sul ramo superiore sono in serie: R_{s1} = 1 +2 = 3 Ω. Tale resistore equivalente è in parallelo al resistore da 1 Ω: quindi $R_p = 3\times1/(3+1)$ = 0.75 Ω

Infine il resistore R_p e quello da 4 Ω sono in serie: R_{s2} = 4 + 0.75 = 4.75 Ω. Si ha quindi $v_2 = 4.75\ i_2$ e dunque r_{22} = 4.75 Ω. Per determinare v_1 si noti che la tensione sul resistore R_p (pari a 0.75 i_1) è anche la tensione sulla serie R_{s1}; la corrente circolante su R_{s1} (e sul ramo superiore) è quindi $0.75i_1/3 = i_1/4$. Pertanto si ottiene $v_1 = 2i_2/4 + 4\ i_2$ e dunque r_{12} = 4.5 Ω.

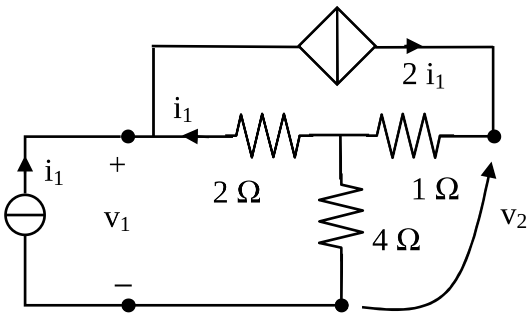
Esercizio 22: Determinare le matrici R e G del doppio bipolo di figura.



Soluzione:

$$[R] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \Omega$$

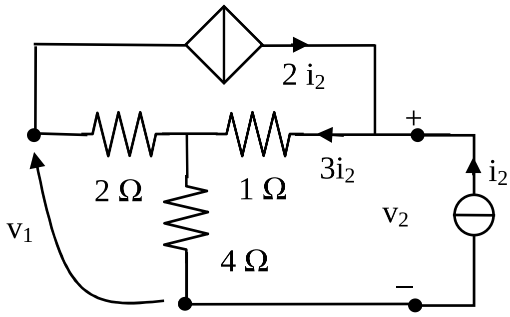
$$[G] = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/7 & 1/7 \end{bmatrix} S$$



Soluzione: Per calcolare la prima colonna di [R], posto $i_2 = 0$, il primario è alimentato con una corrente i_1 arbitraria. Risolto il circuito alato per determinare v_1 e v_2, si ha quindi:

$$r_{11} = \left.\frac{v_1}{i_1}\right|_{i_2=0} \quad , \quad r_{21} = \left.\frac{v_2}{i_1}\right|_{i_2=0}$$

Si noti che $i_p = i_1$, quindi l'applicazione delle LKC ai nodi permette di determinare le correnti su tutti i rami. Le tensioni si deducono immediatamente: $v_1 = -2\ i_1 + 4\ i_1 = 2\ i_1$, $v_2 = +1(2\ i_1) + 4\ i_1 = 6\ i_1$. Quindi si ottiene: $r_{11} = 2\ \Omega$, $r_{21} = 6\ \Omega$.



Per calcolare la prima colonna di [R], posto $i_1 = 0$, il secondario è alimentato con una corrente i_2 arbitraria. Risolto il circuito per determinare v_1 e v_2, si ha quindi:

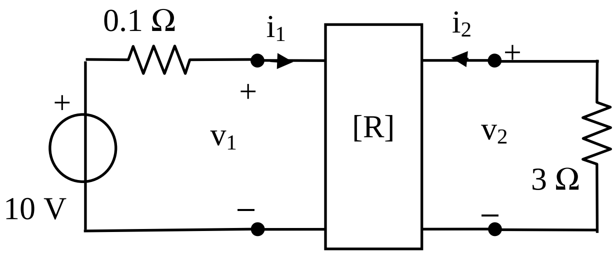
$$r_{12} = \left.\frac{v_1}{i_2}\right|_{i_1=0} \quad , \quad r_{22} = \left.\frac{v_2}{i_2}\right|_{i_1=0}$$

Si noti che $i_p = i_2$, quindi l'applicazione delle LKC ai nodi permette di determinare le correnti su tutti i rami. Le tensioni si deducono immediatamente: $v_1 = -2\ (2i_2) + 4\ i_2 = 0$, $v_2 = +1(3\ i_2) + 4\ i_2 = 7\ i_1$. Quindi si ottiene: $r_{12} = 0\ \Omega$, $r_{22} = 7\ \Omega$.

Per determinare [G] si può procedere come sopra, utilizzando le definizioni ed alimentando il doppio bipolo con generatori indipendenti di tensione, oppure invertendo direttamente le caratteristiche: $v_1 = 2\ i_1$, $v_2 = 6\ i_1 + 7\ i_2$. Si ha quindi: $i_1 = v_1/2$, $i_2 = (v_2 - 3v_1)/7$. Pertanto i coefficienti di G sono: $g_{11} = 1/2 = 0.5$ S, $g_{12} = 0$ S, $g_{21} = -3/7 = -0.429$ S, $g_{22} = 1/7 = 0.143$ S.

Esercizio 23: Determinare tensioni e correnti sulle porte del doppio bipolo in figura, di cui è nota matrice R:

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Omega$$



Soluzione:

$v_1 = 9$ V
$v_2 = 6$ V

$i_1 = 10$ A
$i_2 = -2$ A

Soluzione: Il circuito è costituito da due maglie. Come correnti di maglia si possono utilizzare le correnti indicate sullo schema. Il sistema risolvente è costituito dalle 2 LKT_{mf} e dalle 2 caratteristiche del doppio bipolo (le 4 variabili sono quindi v_1, v_2, i_1 ed i_2).

$$\begin{cases} 0 = -10 + 0.1 i_1 + v_1 \\ 0 = 3 i_2 + v_2 \\ v_1 = i_1 + 0.5 i_2 \\ v_2 = i_1 + 2 i_2 \end{cases}$$