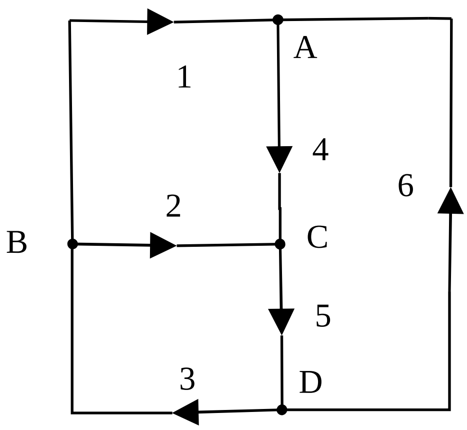
Esercizi sui grafi orientati

Nei seguenti esercizi si utilizza l'ordinamento naturale (A,B,C, …)(1,2,3, …) ed i versi di riferimento associati (con la scelta dell'utilizzatore) per tensioni e correnti di ramo. Si considerano le correnti positive se uscenti da nodi (o superfici chiuse) e negative se entranti. Inoltre, si scelglie come verso di percorrenza di ogni maglia fondamentale quello sul ramo di coalbero che la definisce.

Esercizio 1. Determinare la matrice di incidenza ridotta [A] (riferimento D), la matrice delle maglie fondamentali [B] (albero {2, 4, 6}) del grafo orientato e verificare che $[B][A]^T = [0]$ e che $[A][B]^T = [0]$.



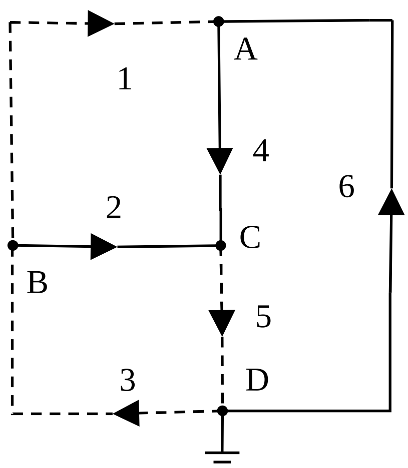
Soluzione:

$$[A]=\left\|\begin{matrix}-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0\end{matrix}\right\|$$

$$[B]=\left\|\begin{matrix}1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\end{matrix}\right\|$$

Soluzione: Il grafo presenta N=4 nodi e R=6 rami. La matrice di incidenza ridotta si ottiene applicando le LKC a tutti i nodi escluso il riferimento. Quindi, per i nodi A, B e C, considerando le correnti positive se uscenti dai nodi e negative se entranti, si ottiene un sistema di N–1 =3 equazioni in R = 6 correnti di ramo. La matrice di incidenza ridotta [A], con dimensioni (N–1)×R = 3×6, si ottiene quindi determinando la matrice dei coefficienti delle equazioni del sistema.

$$\begin{matrix}\text{LKC(A)}\\ \text{LKC(B)}\\ \text{LKC(C)}\end{matrix}\begin{cases}-i_1+i_4-i_6=0\\ i_1+i_2-i_3=0\\ -i_2-i_4+i_5=0\end{cases} \Rightarrow \quad [A]=\left\|\begin{matrix}-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0\end{matrix}\right\|$$



L'albero {2, 4, 6}, costituito da N–1 = 3 rami, è indicato in figura con le linee continue. Il Coalbero {1, 3, 5}, costituito da R–N+1 = 3 rami, è indicato in figura con le linee tratteggiate. La matrice delle maglie fondamentali [B] si ottiene applicando le LKT a tutte le maglie fondamentali. Le maglie fondamentali, individuate aggiungendo un ramo di coalbero alla volta all'albero, sono R–N+1 = 3, e in particolare:

(1, 4, 2), (3, 2, 4, 6), (5, 6, 4)

(l'ordine è definito dal verso della corrente sul ramo di coalbero). Utilizzando i versi di riferimento associati, la matrice delle maglie fondamentali [B], con dimensioni (R–N+1)×R = 3×6, si ottiene quindi determinando la matrice dei coefficienti delle equazioni del seguente sistema.

$$\begin{array}{r} \text{LKT}(1,4,2) \\ \text{LKT}(3,2,4,6) \\ \text{LKT}(5,6,4) \end{array}\begin{cases} v_1 + v_4 - v_2 = 0 \\ v_3 + v_2 - v_4 - v_6 = 0 \\ v_5 + v_6 + v_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \qquad [B] = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

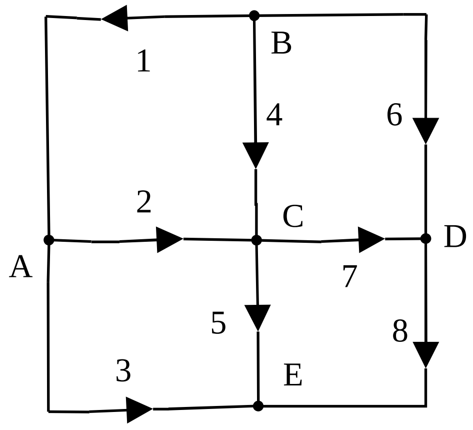
La prima verifica richiesta è la conseguenza del fatto che [B]**v** = 0 e **v** = $[A]^T$ **e**. Data l'arbitrarietà delle tensioni di nodo **e**, il prodotto $[B][A]^T$ deve essere la matrice nulla di dimensioni (R–N+1) × (N–1) = 3×3. Infatti:

$$[B][A]^T = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

La seconda verifica richiesta è la conseguenza del fatto che [A]**i** = 0 e **i** = $[B]^T$ $\mathbf{i_c}$. Data l'arbitrarietà delle correnti sui rami di coalbero $\mathbf{i_c}$, il prodotto $[A][B]^T$ deve essere la matrice nulla di dimensioni (N–1)×(R–N+1) = 3×3. Infatti:

$$[A][B]^T = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Esercizio 2. Determinare la matrice di incidenza ridotta [A] (riferimento E), la matrice delle maglie fondamentali [B] (albero {1, 4, 6, 8}) del grafo orientato e verificare che $[B][A]^T$ = [0] e che $[A][B]^T$ = [0].



Soluzione: N = 5, R = 8; R–N+1 = 4

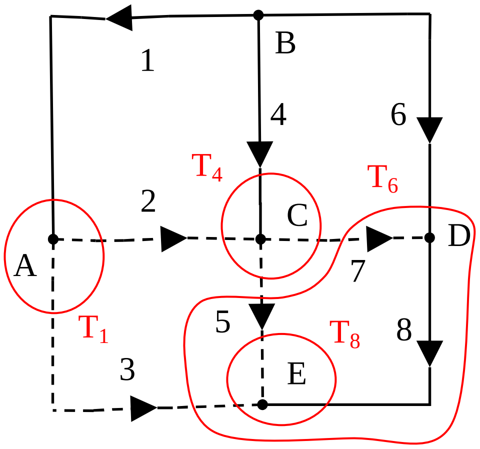
$$[A] = \begin{Vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$[B] = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

Soluzione: Il grafo presenta N = 5 nodi e R = 8 rami. La trasposta della matrice di incidenza ridotta si ottiene applicando le LKT a tutti i rami (posta a zero la tensione del nodo di riferimento). Si ottiene un sistema di R = 8 equazioni per R = 8 tensioni di ramo ed N–1 = 4 tensioni di nodo.

La trasposta della matrice di incidenza ridotta $[A]^T$, con dimensioni R×(N–1) = 8×4, si ottiene quindi determinando la matrice dei coefficienti dei termini a destra delle equazioni del sistema $\mathbf{v} = [A]^T \mathbf{e}$. La matrice di incidenza ridotta [A] si ottiene infine per trasposizione di $[A]^T$.

$$
\begin{array}{l}
\text{LKT}(1)\\
\text{LKT}(2)\\
\text{LKT}(3)\\
\text{LKT}(4)\\
\text{LKT}(5)\\
\text{LKT}(6)\\
\text{LKT}(7)\\
\text{LKT}(8)
\end{array}
\quad
\begin{cases}
v_1 = e_B - e_A\\
v_2 = e_A - e_C\\
v_3 = e_A\\
v_4 = e_B - e_C\\
v_5 = e_C\\
v_6 = e_B - e_D\\
v_7 = e_C - e_D\\
v_8 = e_D
\end{cases}
\quad \Rightarrow \quad
[A]^T = \begin{Vmatrix}
-1 & 1 & 0 & 0\\
1 & 0 & -1 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & -1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & -1\\
0 & 0 & 1 & -1\\
0 & 0 & 0 & 1
\end{Vmatrix}
$$



L'albero {1, 4, 6, 8}, costituito da N–1 = 4 rami, è indicato in figura con le linee continue. Il Coalbero {2, 3, 5, 7}, costituito da R–N+1 = 4 rami, è indicato in figura con le linee tratteggiate. La trasposta della matrice delle maglie fondamentali $[B]^T$ si ottiene applicando le LKC a tutti i tagli fondamentali (e usando le definizioni di correnti sui rami di coalbero). I tagli fondamentali, definiti come superfici chiuse che intersecano un solo ramo di coalbero, sono N –1 = 4, e sono illustrati a sinistra.
Le correnti sui rami di coalbero, indicate come i_{c2}, i_{c3}, i_{c5} e i_7 coincidono con le correnti sui rispettivi rami.

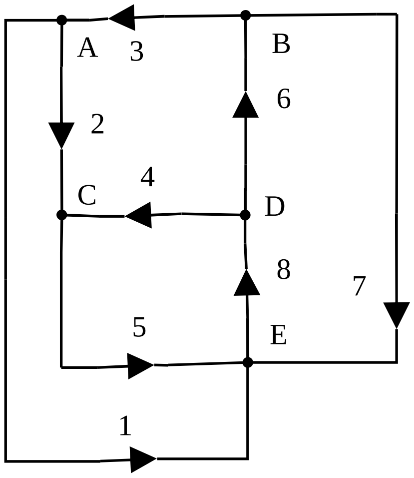
La trasposta della matrice delle maglie fondamentali $[B]^T$, con dimensioni R×(R–N+1) = 8×4, si ottiene quindi determinando la matrice dei coefficienti dei termini a destra delle equazioni del sistema $\mathbf{i} = [B]^T \mathbf{i_c}$ (L'ordinamento delle equazioni è definito dalle correnti di ramo). La matrice delle maglie fondamentali [B] si ottiene infine per trasposizione di $[B]^T$.

$$
\begin{array}{l}
\text{LKC}(T_1)\\
\text{Def.}(i_{c2})\\
\text{Def.}(i_{c3})\\
\text{LKC}(T_4)\\
\text{Def.}(i_{c5})\\
\text{LKC}(T_6)\\
\text{Def.}(i_{c7})\\
\text{LKC}(T_8)
\end{array}
\quad
\begin{cases}
i_1 = i_{c2} + i_{c3}\\
i_2 = i_{c2}\\
i_3 = i_{c3}\\
i_4 = -i_{c2} + i_{c5} + i_{c7}\\
i_5 = i_{c5}\\
i_6 = -i_{c3} - i_{c5} - i_{c7}\\
i_7 = i_{c7}\\
i_8 = -i_{c3} - i_{c5}
\end{cases}
\quad \Rightarrow \quad
[B]^T = \begin{Vmatrix}
1 & 1 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0\\
-1 & 0 & 1 & 1\\
0 & 0 & 1 & 0\\
0 & -1 & -1 & -1\\
0 & 0 & 0 & 1\\
0 & -1 & -1 & 0
\end{Vmatrix}
$$

La prima verifica richiesta si ottiene direttamente (e la seconda è una conseguenza: $[A][B]^T = ([B][A]^T)^T = [0]^T = [0]$.), come segue:

$$
[B][A]^T = \begin{Vmatrix}
1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0
\end{Vmatrix}
\begin{Vmatrix}
-1 & 1 & 0 & 0\\
1 & 0 & -1 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & -1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & -1\\
0 & 0 & 1 & -1\\
0 & 0 & 0 & 1
\end{Vmatrix}
= \begin{Vmatrix}
0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0
\end{Vmatrix}
$$

Esercizio 3. Determinare la matrice di incidenza ridotta [A] (riferimento E) e la matrice delle maglie fondamentali [B] (albero {1, 3, 4, 6}) e verificare la corretta definizione delle relazioni tra tensioni di ramo e di nodo e tra correnti di ramo e di maglia.



Soluzione: N = 5, R = 8; R–N+1 = 4

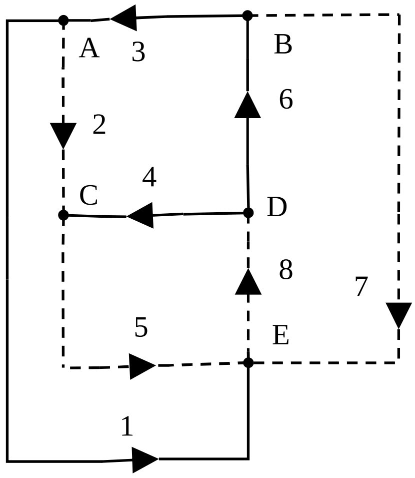
$$[A]=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$$

$$[B]=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Soluzione: Il grafo presenta N=5 nodi e R=8 rami. La matrice di incidenza ridotta si ottiene applicando le LKC a tutti i nodi escluso il riferimento. Quindi, per i nodi A, B, C e D, considerando le correnti positive se uscenti dai nodi e negative se entranti, si ottiene un sistema di N−1 =4 equazioni in R = 8 correnti di ramo. La matrice di incidenza ridotta [A], con dimensioni (N−1)×R = 4×8, si ottiene quindi determinando la matrice dei coefficienti delle equazioni del sistema.

$$\begin{matrix} \mathrm{LKC(A)} \\ \mathrm{LKC(B)} \\ \mathrm{LKC(C)} \\ \mathrm{LKC(D)} \end{matrix} \begin{cases} i_1 + i_2 - i_3 = 0 \\ i_3 + i_7 - i_6 = 0 \\ i_5 - i_2 - i_4 = 0 \\ i_6 + i_4 - i_8 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad [A]=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$$

L’albero {1, 3, 4, 6}, costituito da N−1 = 4 rami, è indicato in figura con le lineee continue. Il Coalbero {2, 5, 7, 8}, costituito da R–N+1 = 4 rami, è indicato in figura con le lineee tratteggiate. La matrice delle maglie fondamentali [B] si ottiene applicando le LKT a tutte le maglie fondamentali. Le maglie fondamentali, individuate aggiungendo un ramo di coalbero alla volta all’albero, sono R–N+1 = 3, e in particolare:



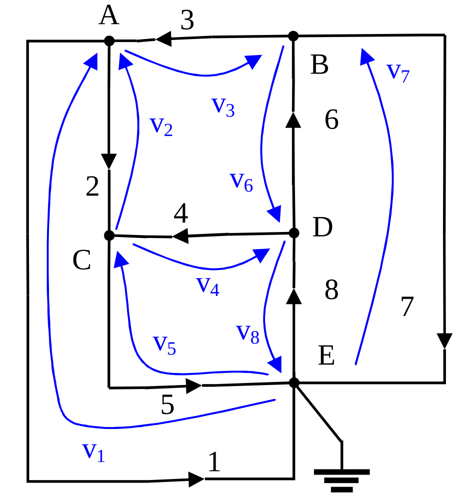
(2, 4, 6, 3), (5, 1, 3, 6, 4), (7, 1, 3), (8, 6, 3, 1)

(l’ordine è definito dal verso della corrente sul ramo di coalbero)

Utilizzando i versi di riferimento associati, la matrice delle maglie fondamentali [B], con dimensioni (R–N+1)×R = 4×8, si ottiene quindi determinando la matrice dei coefficienti delle equazioni del seguente sistema.

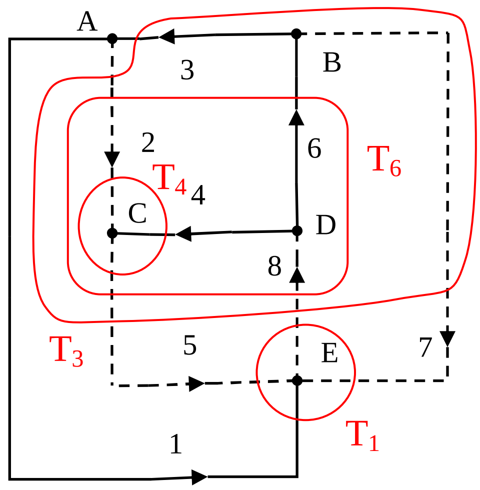
$$\begin{matrix} \mathrm{LKT(2,4,6,3)} \\ \mathrm{LKT(5,1,3,6,4)} \\ \mathrm{LKT(7,1,3)} \\ \mathrm{LKC(8,6,3,1)} \end{matrix} \begin{cases} v_2 - v_4 + v_6 + v_3 = 0 \\ v_5 - v_1 - v_3 - v_6 + v_4 = 0 \\ v_7 - v_1 - v_3 = 0 \\ v_8 + v_6 + v_3 + v_1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad [B]=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Per le verifiche richieste è sufficiente calcolare **v** = $[A]^T$ **e** ed **i** = $[B]^T$ $\mathbf{i_c}$, rappresentando sul grafo le variabili necessarie, come segue:



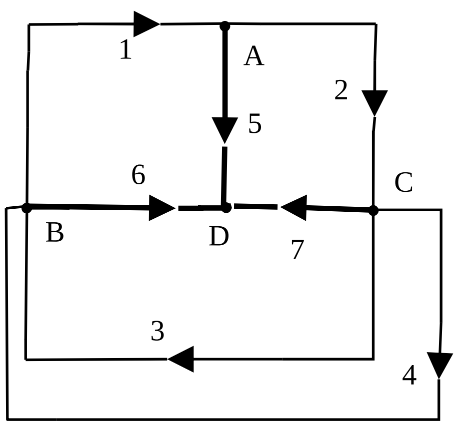
Poiché E è il nodo di riferimento ($e_E = 0$) si ha:

$$
\begin{array}{l}
\text{LKT}(1)\\
\text{LKT}(2)\\
\text{LKT}(3)\\
\text{LKT}(4)\\
\text{LKT}(5)\\
\text{LKT}(6)\\
\text{LKT}(7)\\
\text{LKT}(8)
\end{array}
\left\{
\begin{array}{l}
v_1 = e_A\\
v_2 = e_A - e_C\\
v_3 = e_B - e_A\\
v_4 = e_D - e_C\\
v_5 = e_C\\
v_6 = e_D - e_B\\
v_7 = e_B\\
v_8 = -e_D
\end{array}
\right.
$$



$$
\begin{array}{l}
\text{LKC}_{T1}\\
\text{def.}\\
\text{LKC}_{T3}\\
\text{LKC}_{T4}\\
\text{def.}\\
\text{LKC}_{T6}\\
\text{def.}\\
\text{def.}
\end{array}
\left\{
\begin{array}{c}
i_1 = -i_{c2} - i_{c3} + i_{c4}\\
i_2 = i_{c1}\\
i_3 = i_{c1} - i_{c2} - i_{c3} + i_{c4}\\
i_4 = -i_{c1} + i_{c2}\\
i_5 = i_{c2}\\
i_6 = i_{c1} - i_{c2} + i_{c4}\\
i_7 = i_{c3}\\
i_8 = i_{c4}
\end{array}
\right.
$$

Esercizio 4. Determinare la matrice di incidenza ridotta [A] (riferimento D) e la matrice delle maglie fondamentali [B] (albero {5, 6, 7}, indicato con il tratto più spesso).



Soluzione: N = 4, R = 7; R–N+1 = 4

$$
[A] = \left\| \begin{array}{ccccccc}
-1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0\\
0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array} \right\|
$$

$$
[B] = \left\| \begin{array}{ccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1
\end{array} \right\|
$$

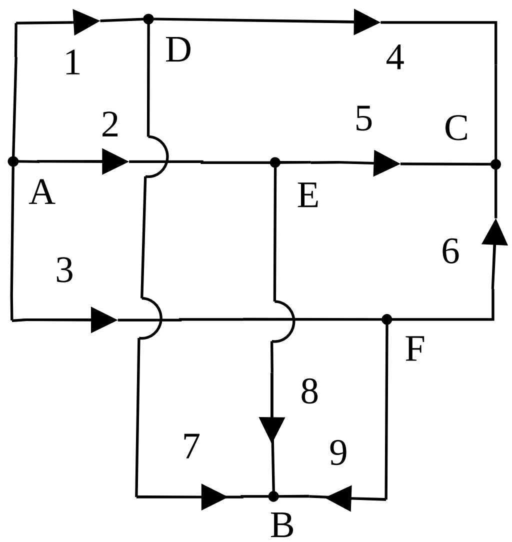
Soluzione: Il grafo presenta N=4 nodi e R=7 rami. La matrice di incidenza ridotta si ottiene applicando le LKC a tutti i nodi escluso il riferimento. La matrice di incidenza ridotta [A], con dimensioni (N−1)×R = 3×7, si ottiene quindi come matrice dei coefficienti delle equazioni.

$$
\begin{array}{l} \text{LKC(A)} \\ \text{LKC(B)} \\ \text{LKC(C)} \end{array}
\begin{cases} -i_1 + i_2 + i_5 = 0 \\ i_1 + i_6 - i_3 - i_4 = 0 \\ -i_2 + i_3 + i_4 + i_7 = 0 \end{cases}
\Rightarrow \quad [A] = \begin{Vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}
$$

Dall'albero dato {5, 6, 7}, costituito da N−1 = 3 rami, si deduce il coalbero {1, 2, 3, 4}, costituito da R−N+1 = 4 rami. La matrice delle maglie fondamentali [B] si ottiene applicando le LKT alle R−N+1 = 4 maglie fondamentali, individuate aggiungendo un ramo di coalbero alla volta all'albero: (1, 5, 6), (2, 7, 5), (3, 6, 7), (4, 6, 7). Utilizzando i versi di riferimento associati, la matrice delle maglie fondamentali [B], con dimensioni (R−N+1)×R = 4×8, si ottiene quindi come matrice dei coefficienti delle equazioni.

$$
\begin{array}{l} \text{LKT(1,5,6)} \\ \text{LKT(2,7,5)} \\ \text{LKT(3,6,7)} \\ \text{LKC(4,6,7)} \end{array}
\begin{cases} v_1 + v_5 - v_6 = 0 \\ v_2 + v_7 - v_5 = 0 \\ v_3 + v_6 - v_7 = 0 \\ v_4 + v_6 - v_7 = 0 \end{cases}
\Rightarrow \quad [B] = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{Vmatrix}
$$

Esercizio 5. Determinare la matrice di incidenza ridotta [A] (riferimento F), e la matrice delle maglie fondamentali [B] (albero {1, 2, 3, 6, 9}). Verificare che è possibile dedurre da $[B]^T$ i tagli fondamentali associati ai rami di albero.



Soluzione: N = 6, R = 9; R−N+1 = 4

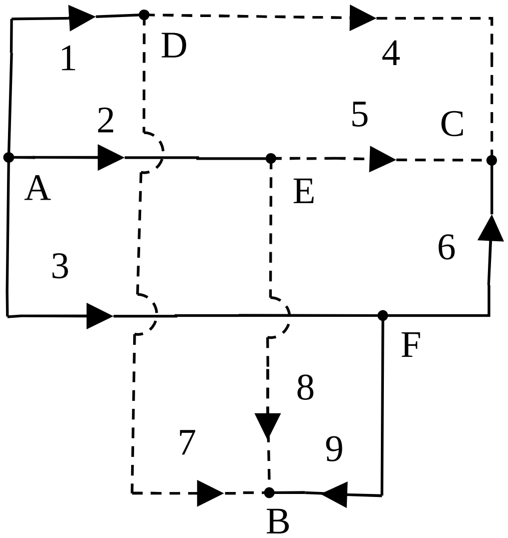
$$
[A] = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}
$$

$$
[B] = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{Vmatrix}
$$

Soluzione

Il grafo (che è NON PLANARE) presenta N=6 nodi e R=9 rami. La matrice di incidenza ridotta si ottiene applicando le LKC a tutti i nodi escluso il riferimento. Quindi, per i nodi A, B, C, D ed E, considerando le correnti positive se uscenti dai nodi e negative se entranti, si ottiene un sistema di N−1 =5 equazioni in R = 9 correnti di ramo. La matrice di incidenza ridotta [A], con dimensioni (N−1)×R = 5×9, si ottiene quindi determinando la matrice dei coefficienti delle equazioni del sistema.

$$
\begin{array}{r}
LKC(A)\\ LKC(B)\\ LKC(C)\\ LKC(D)\\ LKC(E)
\end{array}
\begin{cases}
i_1+i_2+i_3=0\\
-i_7-i_8-i_9=0\\
-i_4-i_5-i_6=0\\
-i_1+i_4+i_7=0\\
-i_2+i_5+i_8=0
\end{cases}
\Rightarrow \quad [A]=\begin{Vmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1\\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{Vmatrix}
$$

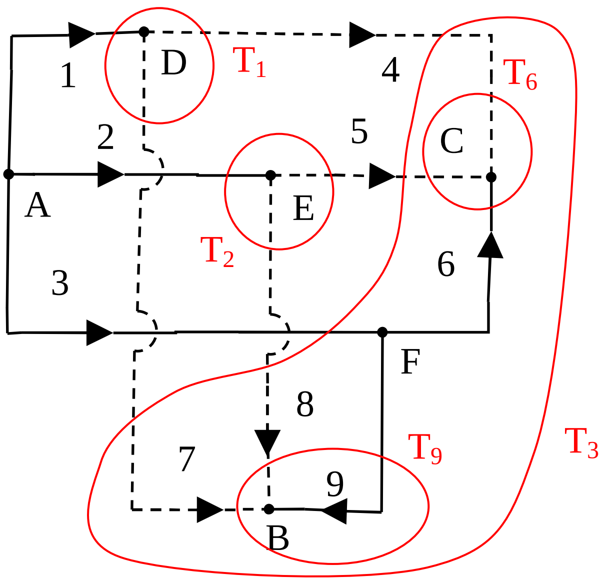


L'albero {1, 2, 3, 6, 9}, costituito da N–1 = 5 rami, è indicato in figura con le linee continue. Il Coalbero {4, 5, 7, 8}, costituito da R–N+1 = 4 rami, è indicato in figura con le linee tratteggiate. La matrice delle maglie fondamentali [B] si ottiene applicando le LKT a tutte le maglie fondamentali. Le maglie fondamentali, individuate aggiungendo un ramo di coalbero alla volta all'albero, sono R–N+1 = 4, e in particolare:

(4, 6, 3, 1), (5, 6, 3, 2), (7, 9, 3, 1), (8, 9, 3, 2)

(l'ordine è definito dal verso della corrente sul ramo di coalbero) Utilizzando i versi di riferimento associati, la matrice delle maglie fondamentali [B], con dimensioni (R–N+1)×R = 4×9, si ottiene quindi determinando la matrice dei coefficienti delle equazioni del seguente sistema.

$$
\begin{array}{r}
LKT(4,6,3,1)\\ LKT(5,6,3,2)\\ LKT(7,9,3,1)\\ LKT(8,9,3,2)
\end{array}
\begin{cases}
v_4-v_6-v_3+v_1=0\\
v_5-v_6-v_3+v_2=0\\
v_7-v_9-v_3+v_1=0\\
v_8-v_9-v_3+v_2=0
\end{cases}
\Rightarrow \quad [B]=\begin{Vmatrix}
1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{Vmatrix}
$$



La verifica richiesta è conseguenza della relazione tra correnti di ramo e di coalbero ($\mathbf{i}=[B]^T\,\mathbf{i_c}$):

$$
\begin{array}{r}
LKC_{T1}\\ LKC_{T2}\\ LKC_{T3}\\ \text{def.}\\ \text{def.}\\ LKC_{T6}\\ \text{def.}\\ \text{def.}\\ LKC_{T9}
\end{array}
\begin{cases}
i_1=i_{c1}+i_{c3}\\
i_2=i_{c2}+i_{c4}\\
i_3=-i_{c1}-i_{c2}-i_{c3}-i_{c4}\\
i_4=i_{c1}\\
i_5=i_{c2}\\
i_6=-i_{c1}-i_{c2}\\
i_7=i_{c3}\\
i_8=i_{c4}\\
i_9=-i_{c3}-i_{c4}
\end{cases}
$$