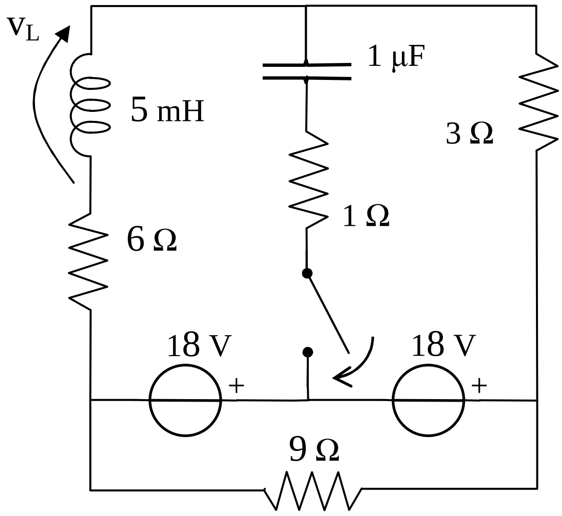
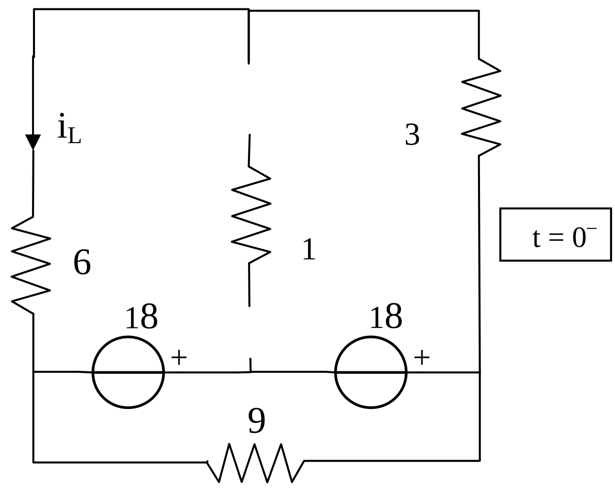
# Esercizi sui circuiti in fase transitoria

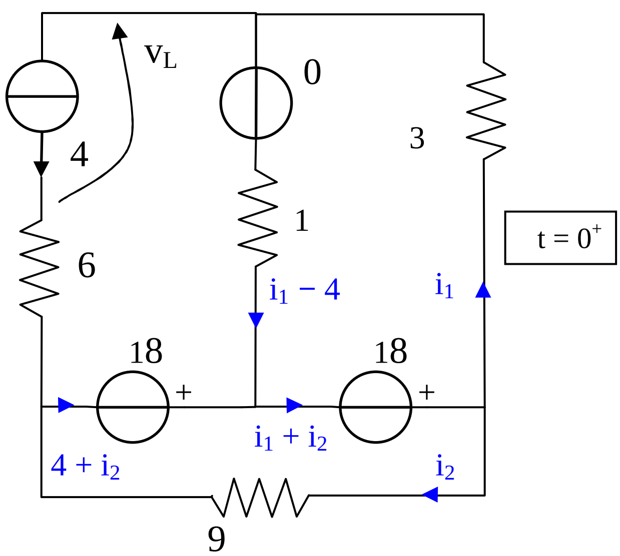



**Esercizio 1**. Calcolare la tensione $v_L$ un istante dopo la chiusura dell'interruttore T (t =0). Si supponga che il circuito sia in regime stazionario prima della chiusura dell'interruttore e che il condensatore sia scarico.

Soluzione: $v_L(0^+) = -4.5$ V




**Soluzione:** Per determinare la grandezza richiesta è necessario utilizzare il postulato di continuità dell'energia e quindi determinare le variabili di stato prima della chiusura dell'interruttore. Il circuito equivalente per $t = 0^-$ (unità SI) è rappresentato a sinistra. I resistori da 3 Ω e 6 Ω sono in serie (sono percorsi dalla stessa corrente $i_L$) e soggetti alla tensione impressa dai generatori. Pertanto, con il verso scelto, $i_L = (18 + 18)/(3+6) = 4$ A. La tensione sul condensatore è assegnata come nulla. Pertanto:
$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 4$ A, $v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0$ V

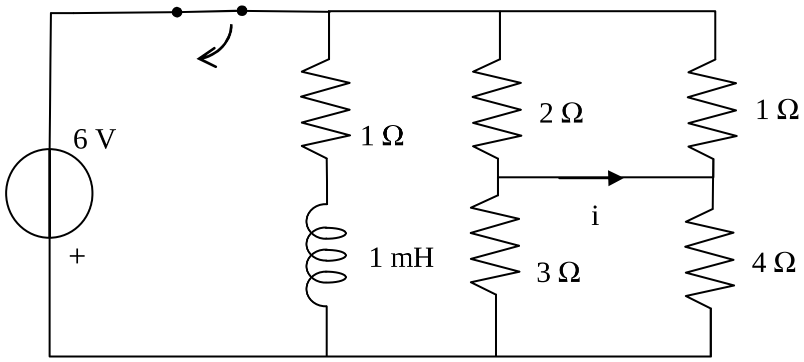



Per $t = 0^+$ sono note quindi la corrente circolante sull'induttore e la tensione sul condensatore. Pertanto, nel circuito equivalente per $t = 0^+$, a sinistra (unità SI), si sono rappresentati tali componenti tramite generatori indipendenti. Per risolvere il circuito, si definisca come albero quello formato dai tre rami centrali. Le correnti sui rami di coalbero sono quindi $i_1$, $i_2$ e la corrente impressa dal generatore. Le correnti sui rami di albero si deducono applicando le LKC. Il sistema risolvente si ottiene applicando le LKT alle maglie fondamentali (definite dalle correnti sui rami di coalbero):

$$0 = -18 - 18 + 9\, i_2$$
$$0 = -18 + 3\, i_1 + 1(i_1 - 4)$$
$$0 = v_L + 6 \cdot 4 - 18 - 1(i_1 - 4)$$

Da cui: $i_2 = 4$ A, $i_1 = 5.5$ A, $v_L = -4.5$ V

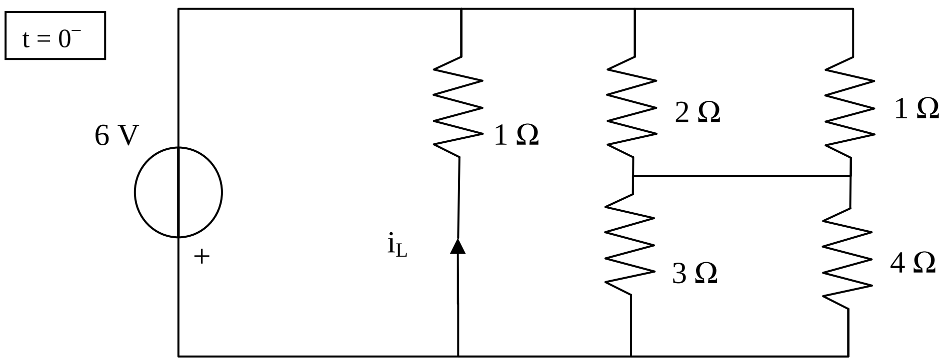
**Esercizio 2.** Il circuito è in regime stazionario prima dell'apertura dell'interruttore. Calcolare la corrente i un istante dopo l'apertura dell'interruttore (t = 0+).



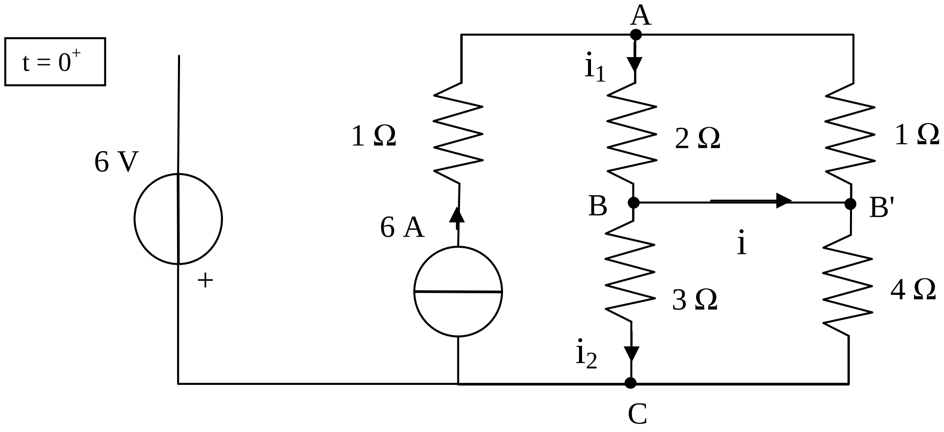

Soluzione:

$i(0^+) = -1.43$ A

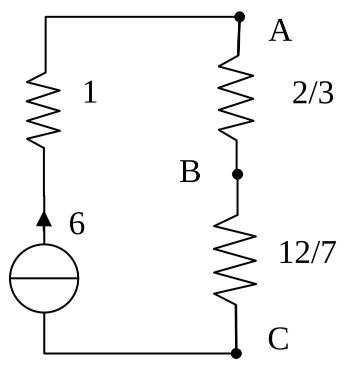
**Soluzione:** Per determinare la grandezza richiesta è necessario utilizzare il postulato di continuità dell'energia e quindi determinare la corrente sull'induttore (variabile di stato) prima dell'apertura dell'interruttore. Nel circuito all'istante $t = 0^-$ (in regime DC) l'induttore è equivalente ad un cortocircuito e l'interruttore è chiuso. Sul ramo contenete l'induttore circola quindi la corrente $i_L(0^-)$ pari a 6 A (il resistore da 1 Ω è soggetto alla tensione di 6 V impressa dal generatore indipendente).




All'istante $t = 0^+$ l'interruttore è aperto e la corrente sull'induttore nota: per il postulato di continuità dell'energia $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 6$ A. L'induttore quindi è equivalente (solo per $t = 0^+$) ad un generatore indipendente di corrente con corrente impressa 6 A.




Il generatore di tensione è percorso da corrente nulla (è in serie ad un circuito aperto), quindi è equivalente ad un circuito aperto. Indicando con A, B, B' e C i quattro nodi nel circuito si nota che la coppia di resistori da 1 Ω e 2 Ω è in parallelo. Analogamente la coppia di resistori da 3 Ω e 4 Ω è in parallelo. Le rispettive resistenze equivalenti sono quindi 2/3 Ω e 12/7 Ω Il circuito equivalente è quindi il seguente:




Le tensioni $V_{AB}$ e $V_{BC}$ sono immediatamente calcolabili tramite le caratteristiche dei resistori:

$$V_{AB} = 6 \times 2/3 = 4 \text{ V}, \quad V_{BC} = 6 \times 12/7 = 10.29 \text{ V}$$

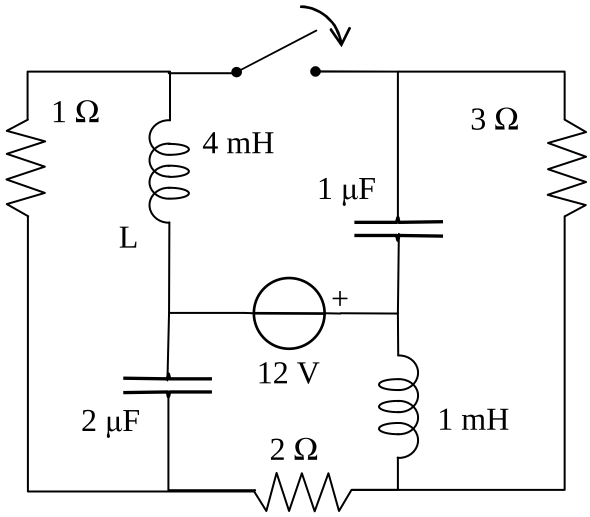
Con riferimento allo schema precedente, le correnti $i_1$ ed $i_2$ sui resistori da 2 Ωe 3 Ω sono quindi:

$$i_1 = V_{AB}/2 = 2 \text{ A}, \quad i_2 = V_{BC}/3 = 3.43 \text{ A}$$

Applicando la LKC al nodo B si ha quindi:

$$i = i_1 - i_2 = -1.43 \text{ A}$$

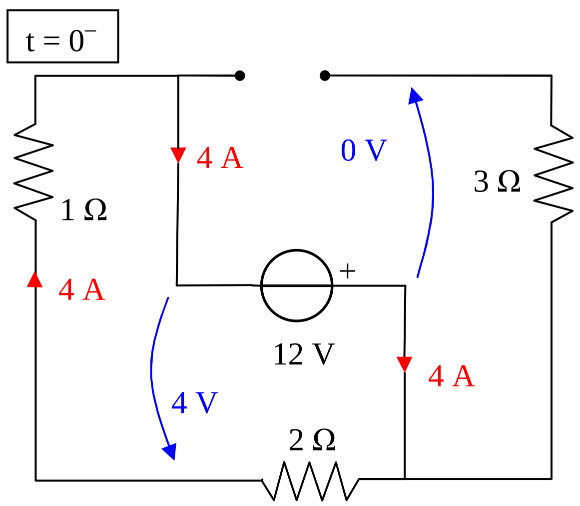
**Esercizio 3.** Il circuito è in regime stazionario prima della chiusura dell'interruttore. Calcolare le potenze erogate dal generatore di tensione un istante prima della chiusura dell'interruttore ($t = 0^-$), un istante dopo ($t = 0^+$) e a regime ($t \to \infty$).




Soluzione:

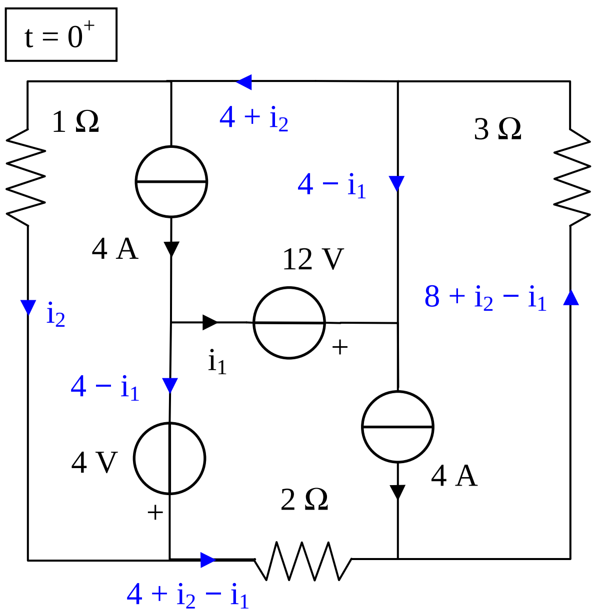
$p_E(0^-) = 48$ W
$p_E(0^+) = 192$ W
$p_E(\infty) = 96$ W

**Soluzione:** Si consideri il circuito un istante prima della chiusura dell'interruttore ($t = 0^-$) al fine di determinare la corrente circolante attraverso il generatore e le variabili di stato dei componenti con memoria (necessarie per definire il circuito all'istante $t = 0^+$ tramite il postulato di continuità dell'energia). Il circuito è in regime DC per $t < 0$; pertanto, nel circuito equivalente a $t = 0^-$ si sono sostituiti gli induttori ed i condensatori con cortocircuiti e circuiti aperti, rispettivamente. Inoltre l'interruttore è aperto, quindi è equivalente ad un circuito aperto.




Il resistore da 3 Ω ha un terminale isolato. Quindi è percorso da corrente nulla e soggetto a tensione nulla (che è anche la tensione sul condensatore in alto a destra). La corrente sull'unica maglia presente (che è anche la corrente nei due induttori) si ottiene notando che i resistori da 1 Ω e 2 Ω sono in serie e che il resistore equivalente da 3 Ω è soggetto alla tensione impressa dal generatore, quindi la corrente che lo percorre è 12/3 = 4 A. La tensione sul condensatore in basso a sinistra coincide con la tensione sul resistore da 1 Ω, quindi è 4 V. Infine la potenza erogata dal generatore è:

$$p_E(0^-) = 12 \times 4 = 48 \text{ W}$$



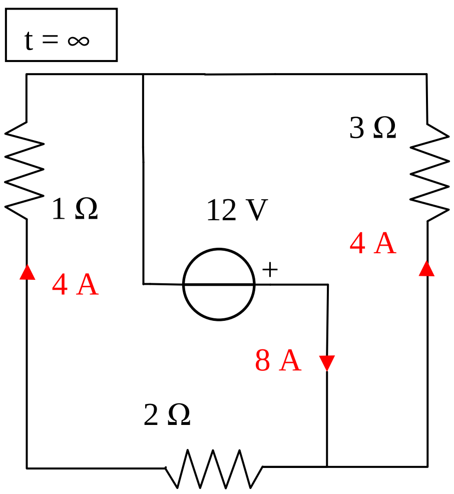

All'istante $t = 0^+$ l'interruttore è chiuso e la corrente sugli induttori è nota: per il postulato di continuità dell'energia $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 4$ A. Gli induttori quindi sono equivalenti (per $t = 0^+$) a generatori indipendenti di corrente con corrente impressa 4 A. Analogamente per i condensatori la tensione è nota: per il postulato di continuità dell'energia $v_C(0^+) = v_C(0^-)$. I condensatori quindi sono equivalenti (per $t = 0^+$) a generatori indipendenti di tensione con tensione impressa 4 V e 0 V (rappresentato come un cortocircuito).

Nel circuito equivalente mostrato a lato (valido solo a $t = 0^+$), è necessario calcolare $i_1$ per valutare la potenza richiesta. Le correnti su tutti i rami del circuito sono determinate applicando la LKC a tutti i nodi (è necessario introdurre un'altra corrente $i_2$, come mostrato).

Le maglie fondamentali sono definite da $i_1$ ed $i_2$. Applicando le $\text{LKT}_{mf}$ si ha:

$$0 = -12 - 3(8 + i_2 - i_1) - 2(4 + i_2 - i_1) + 4, \quad 0 = i_2 + 2(4 + i_2 - i_1) + 3(8 + i_2 - i_1)$$

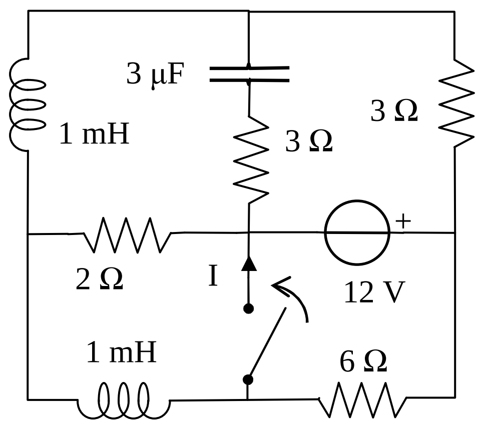
Quindi $i_1 = 16$ A, $i_2 = 8$ A e infine la potenza erogata dal generatore è: $p_E(0^+) = 12 \times 16 = 192$ W




Il circuito equivalente a regime ($t \rightarrow \infty$) è mostrato a sinistra. Dato che il circuito è privo di generatori pilotati è certamente stabile e si raggiunge il regime stazionario (DC), si sono sostituiti induttori e condensatori con cortocircuiti e circuiti aperti, rispettivamente. Inoltre l'interruttore è chiuso, quindi è equivalente ad un cortocircuito. I resistori da 1 Ω e 2 Ω sono in serie e il resistore equivalente da 3 Ω è soggetto alla tensione impressa dal generatore, quindi la corrente che lo percorre è 12/3 = 4 A. Analogamente, sul resistore da 3 Ω a destra la corrente è 4 A. la corrente sul generatore si ottiene applicando la LKC ad uno dei suoi terminali, quindi è 8 A. Infine la potenza erogata dal generatore è:

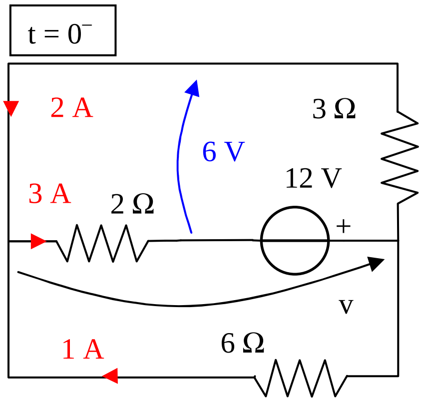
$$p_E(\infty) = 12 \times 8 = 96 \text{ W}$$

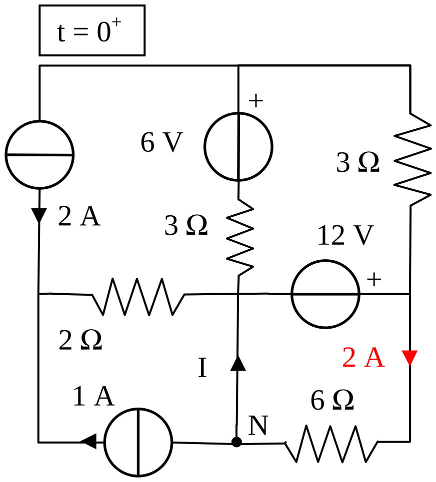
**Esercizio 4.** Il circuito è in regime stazionario prima della chiusura dell'interruttore. Calcolare la corrente I un istante dopo la chiusura dell'interruttore ($t = 0$) e a regime ($t \rightarrow \infty$).

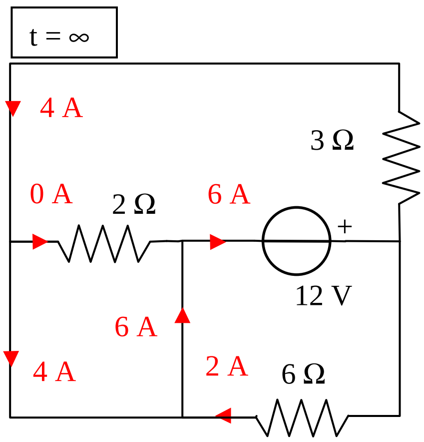



Soluzione: $I(0^+) = 1$ A

$I(\infty) = 6$ A



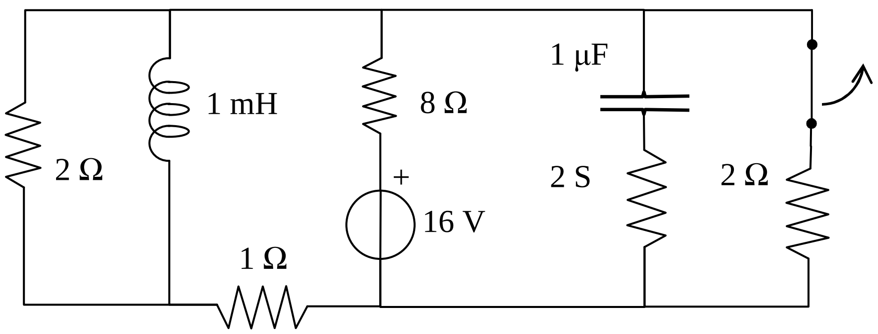

**Soluzione:** Si consideri il circuito un istante prima della chiusura dell'interruttore ($t = 0^-$) al fine di determinare le variabili di stato dei componenti con memoria (necessarie per definire il circuito all'istante $t = 0^+$ tramite il postulato di continuità dell'energia). Il circuito è in regime DC; pertanto, induttori ed condensatori sono equivalenti a cortocircuiti e circuiti aperti, rispettivamente. Inoltre l'interruttore è aperto, quindi è equivalente ad un circuito aperto.

Il resistore centrale da 3 Ω ha un terminale isolato, quindi è equivalente ad un cortocircuito. Il circuito è costituito da tre rami in parallelo. Applicando il Teorema di Millman si ha: $v = (0/3 + 12/2 + 0/6)/(1/3 + 1/2 + 1/6) = 6$ V. Le correnti sui resistori da 3 Ω e 6 Ω sono 2 A e 1 A, rispettivamente (e sono anche le correnti sui due induttori). La tensione sul condensatore coincide con la tensione sul resistore da 2 Ω (che è percorso dalla corrente di 3 A, ottenuta applicando la LKC a uno dei due nodi del circuito), quindi è 6 V.

All'istante $t = 0^+$ l'interruttore è chiuso e le variabili di stato sono note: induttori e condensatori sono equivalenti a generatori indipendenti di corrente e di tensione, rispettivamente. La corrente richiesta si determina notando che il resistore da 6 Ω è soggetto alla tensione impressa dal generatore, quindi la corrente che lo percorre è $12/6 = 2$ A. Applicando la LKC al nodo N si ha: $2 = I + 1$. Quindi $I(0^+) = 1$ A.

Il circuito equivalente a regime ($t \to \infty$) è mostrato a sinistra, dove si sono sostituiti induttori e condensatori con cortocircuiti e circuiti aperti, rispettivamente. Inoltre l'interruttore è chiuso, quindi è equivalente ad un cortocircuito. Il resistore da 2 Ω è in parallelo ad un cortocircuito. Quindi è soggetto a tensione nulla e percorso da corrente nulla I resistori da 3 Ω e 6 Ω sono soggetti alla tensione impressa dal generatore, quindi le correnti che li attraversano sono 4 A e 2 A, rispettivamente. Applicando le LKC ai nodi si ottengono le correnti sugli altri rami. In particolare si ha: $I(\infty) = 6$ A.

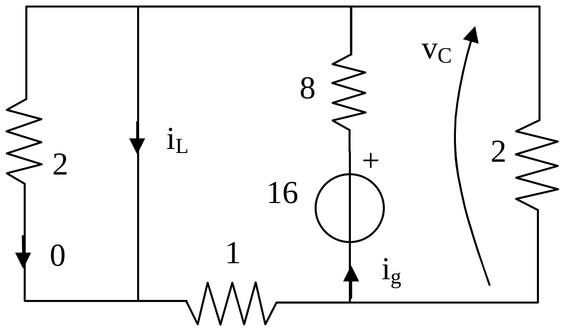
**Esercizio 5.** Il circuito è in regime DC per $t < 0$. Calcolare le potenze erogate dal generatore di tensione prima della chiusura dell'interruttore ($t = 0^-$), un istante dopo ($t = 0^+$) e a regime ($t \to \infty$).



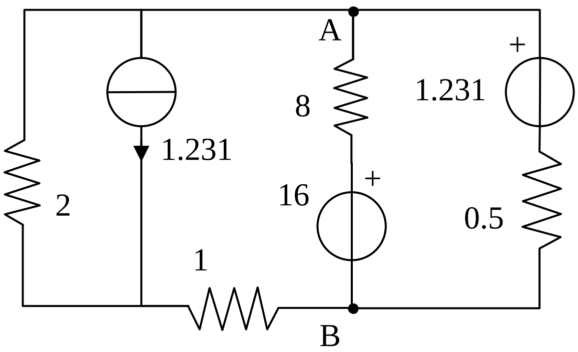

Soluzione:

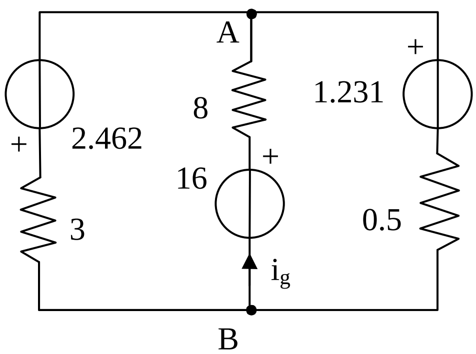
$p_{gt(e)}(0^-) = 29.5$ W
$p_{gt(e)}(0^+) = 29$ W
$p_{gt(e)}(\infty) = 28.4$ W

$t = 0^-$

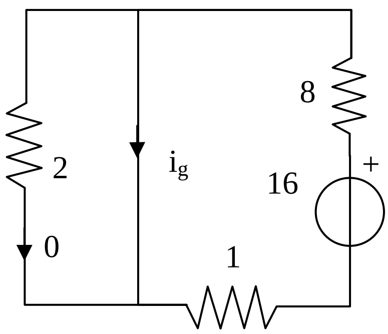



$t = 0^+$




$t = \infty$



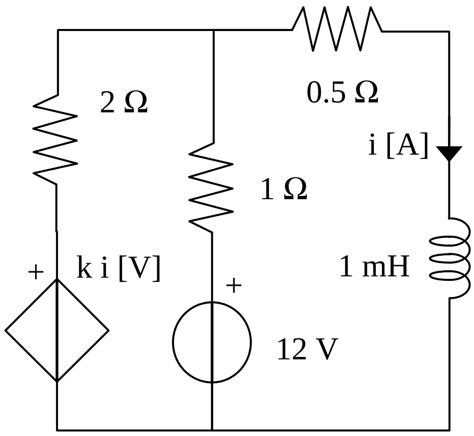

**Soluzione:** Si consideri il circuito un istante prima dell'apertura dell'interruttore ($t = 0^-$) al fine di determinare la corrente sul generatore e le variabili di stato dei componenti con memoria. Il circuito è in regime DC; pertanto, induttori ed condensatori sono equivalenti a cortocircuiti e circuiti aperti, rispettivamente. Inoltre l'interruttore è chiuso, quindi è equivalente ad un cortocircuito.

Il resistore da 2 Ω a sinistra è in parallelo ad un cortocircuito, quindi è attraversato da una corrente nulla. Quindi il circuito è costituito da tre rami in parallelo. La tensione sul condensatore coincide con la tensione sul parallelo. Applicando il Teorema di Millman si ha: $v_C = (0/1 + 16/8 + 0/2)/(1/1 + 1/8 + 1/2) = 16/13 = 1.231$ V. Le corrente sul resistore da 1 Ω è 1.231 A (ed è anche la corrente $i_L$ sull'induttore). La corrente sul generatore si ottiene dalla caratteristica del ramo: $v_C = -\,8\ i_g + 16$. Da cui si ottiene $i_g = 1.846$ A ed infine $p_{gt(e)}\ (0^-) = 16\ i_g = 29.5$ W.

Nel circuito un istante dopo l'apertura dell'interruttore ($t = 0^+$) l'interruttore è aperto e le variabili di stato sono note: induttori e condensatori sono equivalenti a generatori indipendenti di corrente e di tensione, rispettivamente. Trasformando il parallelo tra generatore di corrente e resistore nell'altra forma del generatore reale ($E_{eq} = 2\times1.231 = 2.462$ V, $R_{eq} = 2$ Ω) e notando che la resistenza equivalente è in serie al resistore da 1 Ω, si ottiene un circuito costituito da tre rami in parallelo tra i nodi A e B. Applicando il Teorema di Millman si ha: $v_{AB} = (-2.462/3 + 16/8 + 1.231/0.5)/(1/3 + 1/8 + 1/0.5) = 1.481$ V. La corrente sul generatore si ottiene dalla caratteristica del ramo: $v_{AB} = -\,8\ i_g + 16$. Da cui si ottiene $i_g = 1.815$ A ed infine $p_{gt(e)}\ (0^+) = 16\ i_g = 29$ W.

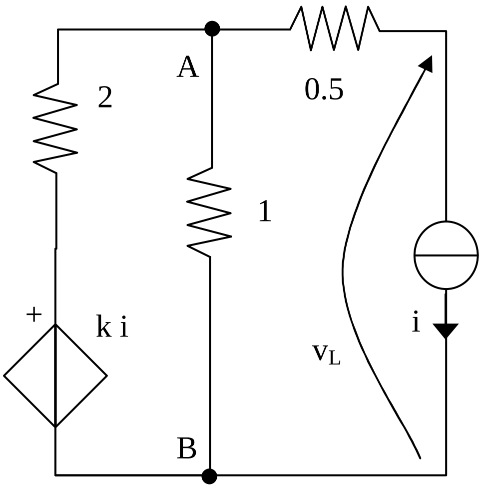
Il circuito equivalente a regime ($t \to \infty$) è mostrato a sinistra, dove si sono sostituiti induttori e condensatori con cortocircuiti e circuiti aperti, rispettivamente. Inoltre l'interruttore è aperto. Il resistore da 2 Ω a sinistra è in parallelo ad un cortocircuito, quindi è attraversato da una corrente nulla. Il circuito è costituito da una sola maglia su cui scorre la corrente $i_g$. Per determinarla è si applica la LKT sulla maglia: $0 = i_g - 16 + 8\ i_g$ Da cui si ottiene $i_g = 16/9 = 1.778$ A ed infine $p_{gt(e)}\ (\infty) = 16\ i_g = 28.4$ W.

**Esercizio 6.** Determinare la costante di tempo del circuito di figura per k = 0.5 Ω, 1.5 Ω, 3 Ω.




Soluzione:
$\tau$ = 1 ms, 1.5 ms, 6 ms.

**Soluzione**: Il circuito contiene un solo componente con memoria, cioè è un circuito del primo ordine. La caratteristica dell'induttore è L di/dt = $v_L$ (induttanza L nota). È quindi necessario determinare la tensione sull'induttore (versi associati con la convenzione da utilizzatore) considerando nota la variabile di stato i. Inoltre il generatore indipendente presente nello schema può essere azzerato, in quanto contribuisce solo con termine costante alla $v_L$, ininfluente sulla costante di tempo.




Pertanto, nel circuito (unità SI) si è rappresentato l'induttore tramite un generatore indipendente di corrente a corrente impressa i e si è spento il generatore di tensione indipendente. Applicando la LKT alla maglia di destra si ha: $0 = -v_{AB}+0.5i +v_L$.
Quindi $v_L = v_{AB} - 0.5i$ . La tensione $v_{AB}$ si può determinare direttamente applicando il teorema di Millman, oppure applicando la LKC al nodo A. In entrambi i casi si ha:

$$\frac{v_{AB}-ki}{2}+\frac{v_{AB}}{1}+i=0$$

Ovvero

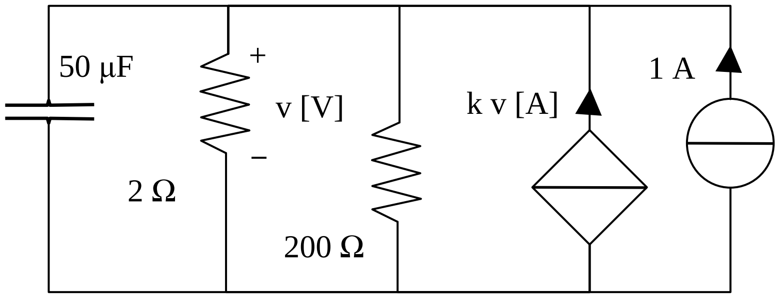
$$v_{AB}=\frac{\frac{ki}{2}-i}{\frac{1}{2}+1}=\frac{1}{3}(k-2)i$$

Quindi $v_L = (0.333\ k - 1.166)i$ .Sostituendo nella caratteristica dell'induttore si ha

$10^{-3}$ di/dt = (0.333 k –1.166)i $\quad\Rightarrow\quad$ di/dt = $10^3$ (0.333 k –1.166)i

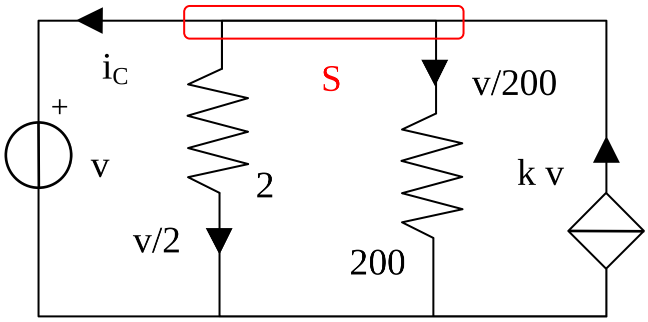
La matrice di stato è formata da un solo elemento, che coincide anche con il suo unico autovalore. Quindi $\lambda = 10^3\ (0.333\ k - 1.166)$ ed il circuito è stabile solo se $0.333\ k - 1.166 < 0$ ovvero $k < 3.5$ Ω. La costante di tempo risulta pari a $\tau = 10^{-3}/(1.166 - 0.333\ k)$ che nei tre casi richiesti fornisce $\tau$ = 1 ms, 1.5 ms, 6 ms. (Si sarebbe giunti allo stesso risultato anche utilizzando la relazione $\tau = L/R_{eq}$ dove $R_{eq}$ è la resistenza equivalente del bipolo collegato all'induttore).

**Esercizio 7.** Determinare la costante di tempo del circuito di figura per k = 0.05 S, 0.5 S.




Soluzione:
$\tau$ = 0.11 ms, 10 ms.

**Soluzione**: Il circuito contiene un solo componente con memoria, cioè è un circuito del primo ordine. La caratteristica del condensatore è C dv/dt = $i_C$ (capacità C nota). È quindi necessario determinare la corrente sul condensatore (versi associati con la convenzione da utilizzatore) considerando nota la variabile di stato v. Inoltre il generatore indipendente presente nello schema può essere azzerato, in quanto contribuisce solo con termine costante alla $i_C$, ininfluente sulla costante di tempo.



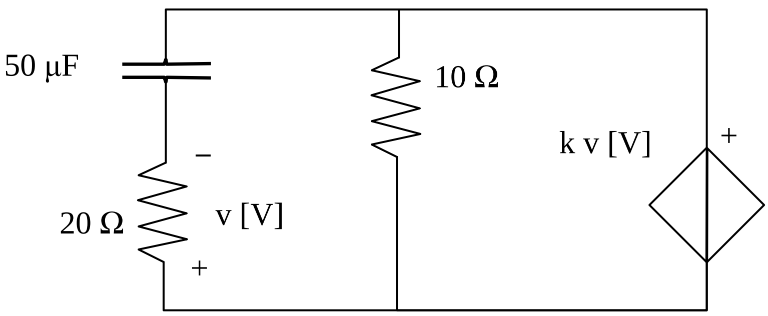

Pertanto, nel circuito (unità SI) si è rappresentato il condensatore tramite un generatore indipendente di tensione a tensione impressa v (coincidente con la variabile pilota del generatore pilotato) e si è spento il generatore di corrente indipendente. Applicando la LKC alla superficie chiusa S si ha: $0 = -kv + v/2 + v/200 + i_C$.
Quindi $i_C = (k - 0.505)v$ .

Sostituendo nella caratteristica del condensatore si ha

$5\times10^{-5}$ dv/dt = (k – 0.505)v $\Rightarrow$ dv/dt = $2\times10^{4}$ (k – 0.505)v

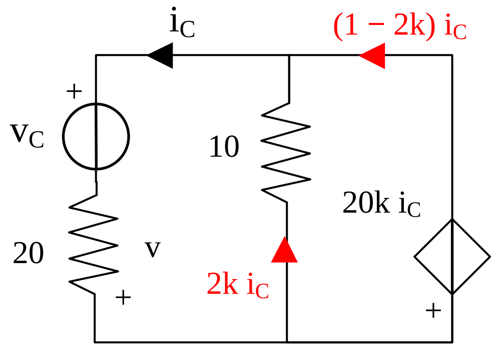
La matrice di stato è formata da un solo elemento, che coincide anche con il suo unico autovalore. Quindi $\lambda = 2\times10^{4}$ (k – 0.505) ed il circuito è stabile solo se (k – 0.505) < 0 ovvero k < 0.505 S. La costante di tempo risulta pari a $\tau = 10^{-3}/(10.1 - 20k)$ che nei casi richiesti fornisce $\tau$ = 0.11 ms e 10 ms. (Si sarebbe giunti allo stesso risultato anche utilizzando la relazione $\tau = CR_{eq}$ dove $R_{eq}$ è la resistenza equivalente del bipolo collegato al condensatore).

**Esercizio 8.** Determinare la costante di tempo del circuito di figura per k = 1, 10, 100.




Soluzione:
$\tau$ = 2 ms, 11 ms, 101 ms.

**Soluzione**: Il circuito è del primo ordine. La caratteristica del condensatore è C $dv_C/dt = i_C$. È quindi necessario determinare la corrente sul condensatore considerando nota la variabile di stato $v_C$.



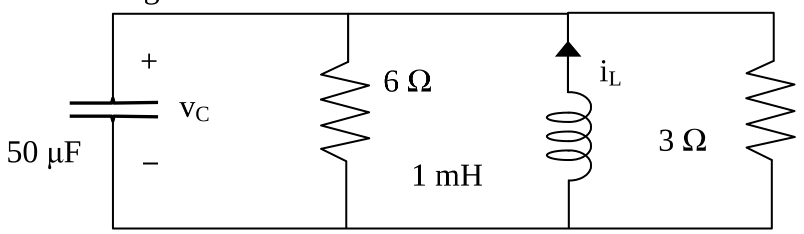

Pertanto, nel circuito (unità SI) si è rappresentato il condensatore tramite un generatore indipendente di tensione a tensione impressa $v_C$ (la corrente sul condensatore ha il verso associato con la convenzione da utilizzatore) e si è cambiata la variabile pilota notando che $v = -20\ i_C$ (quindi $kv = -20\ k\ i_C$). Il resistore sul ramo centrale e soggetto alla tensione impressa dal generatore pilotato, quindi la corrente che lo attraversa è $20\ k\ i_C/10 = 2\ k\ i_C$. La corrente sul generatore pilotato si deduce applicando la LKC ad uno dei suoi terminali.

Applicando la LKT alla maglia di sinistra si ha: $0 = v_C + 20 i_C + 20 k i_C$. Quindi $i_C = -v_C/20(1 + k)$. Sostituendo nella caratteristica del condensatore si ha

$$5\times10^{-5}\ dv_C/dt = -v_C/20(1 + k) \qquad \Rightarrow \qquad dv_C/dt = -10^3\ v_C/(1 + k)$$

La matrice di stato è formata da un solo elemento, che coincide anche con il suo unico autovalore. Quindi $\lambda = -10^3/(1 + k)$ed il circuito è stabile solo se $(1 + k) > 0$ ovvero $k > -1$. La costante di tempo risulta pari a $\tau = 10^{-3}(1 + k)$ che nei casi richiesti fornisce $\tau$ = 2 ms, 11 ms, 101 ms.

**Esercizio 9.** Determinare la matrice di stato (nell'ordine $i_L$, $v_C$) e la massima costante di tempo del circuito di figura.



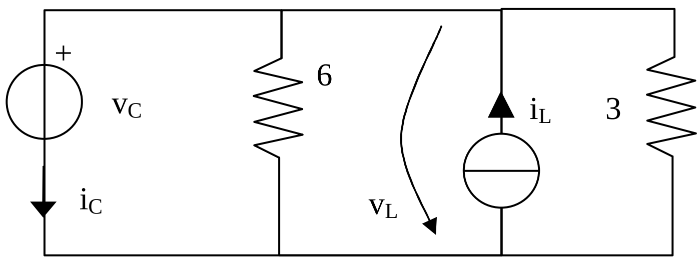

Soluzione:

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & -1[\mathrm{Ss}^{-1}] \\ 20[\Omega\mathrm{s}^{-1}] & -10[\mathrm{s}^{-1}] \end{Vmatrix} \times 10^3$$

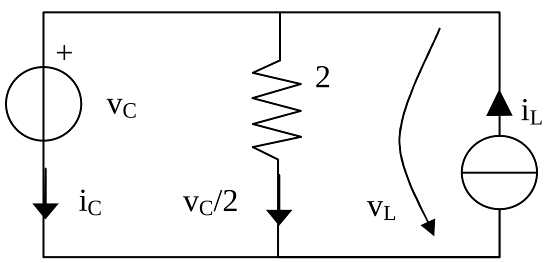
$\tau_{max}$ = 0.36 ms.

**Soluzione**: Per determinare la matrice di stato è necessario definire le equazioni di stato del circuito. Le caratteristiche dell'induttore e del condensatore sono (l'induttanza L e la capacità C sono assegnate):

$$\begin{cases} L\dfrac{di_L}{dt} = v_L \\ C\dfrac{dv_C}{dt} = i_C \end{cases}$$




È quindi necessario determinare la tensione sull'induttore e la corrente sul condensatore considerando note le variabili di stato. Pertanto, nel circuito (unità SI) si sono rappresentati i componenti con memoria tramite generatori indipendenti.




Per risolvere il circuito si noti che i due resistori sono in parallelo. Sostituendo il resistore equivalente da 2 Ω (6×3/(6+3) ) e notando che è collegato ai terminali del generatore di tensione, si deduce immediatamente la corrente circolante su di esso.

Applicando la LKC ad uno dei due nodi del circuito si ha quindi: $i_C = i_L - v_C/2$ . Per quanto riguarda la tensione sull'induttore, la LKT mostra che: $v_L = -v_C$ . Sostituendo nelle caratteristiche e passando alla notazione matriciale si ha quindi:

$$\begin{cases} 10^{-3}\dfrac{di_L}{dt} = -v_C \\ 5\cdot10^{-5}\dfrac{dv_C}{dt} = i_L - 0.5v_C \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\begin{Bmatrix} i_L \\ v_C \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -10^3 \\ 2\cdot10^4 & -10^4 \end{bmatrix}}_{[A]}\begin{Bmatrix} i_L \\ v_C \end{Bmatrix}$$

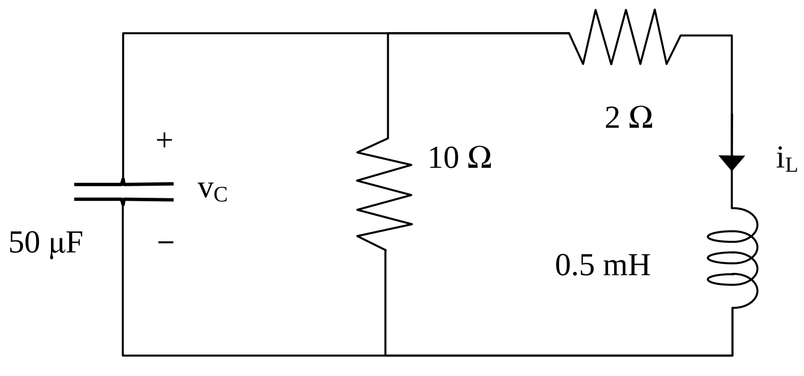
La matrice di stato [A] risulta quindi determinata. Le unità SI dei coefficienti si deducono dall'analisi dimensionale delle equazioni. Per la prima equazione di stato, detta X l'unità di misura incognita del secondo elemento della prima riga della matrice di stato e tenendo presente che corrente, tensione e tempo hanno come unità A, V e s, si ha: A/s = X V. Quindi X = A/(V s). Dato che il SI è razionale A/V = S e si ha infine X = S/s. Analogamente nella seconda equazione di stato, detta X l'unità di misura incognita del primo elemento della seconda riga della matrice di stato, si ha: V/s = X A. Quindi X = V/(A s). Dato che il SI è razionale V/A = Ω e si ha infine X = Ω/s. Per quanto riguarda il secondo elemento della seconda riga della matrice di stato, si ha: V/s = X V. Quindi X = 1/s = $s^{-1}$ (questo ragionamento è identico per tutti gli elementi sulla diagonale principale della matrice di stato che quindi hanno sempre la stessa unità $s^{-1}$).

Infine, per determinare le costanti di tempo del circuito è necessario calcolare gli autovalori della matrice di stato, risolvendo il polinomio:

$$\det([A]-\lambda[I]) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} -\lambda & -10^3 \\ 2\cdot10^4 & -10^4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + 10^4\lambda + 2\cdot10^7 = 0$$

I due autovalori sono quindi $\lambda_1 = -2764$ e $\lambda_2 = -7236$, entrambi reali e negativi (quindi il circuito è stabile, come si poteva dedurre subito dall'assenza di generatori pilotati) e le costanti di tempo sono $\tau_1 = 0.362$ ms e $\tau_2 = 0.138$ ms.

**Esercizio 10.** Determinare la matrice di stato (nell'ordine $i_L$, $v_C$) e la massima costante di tempo del circuito di figura.

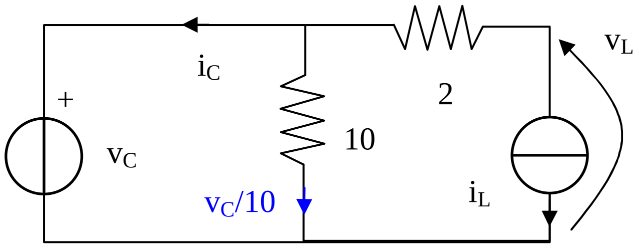



Soluzione:

$$A = \begin{Vmatrix} -4[s^{-1}] & 2[Ss^{-1}] \\ -20[\Omega s^{-1}] & -2[s^{-1}] \end{Vmatrix} \times 10^3$$

$\tau_{max} = 0.33$ ms.

**Soluzione:** è necessario determinare la tensione sull'induttore e la corrente sul condensatore considerando note le variabili di stato. Pertanto, nel circuito (unità SI) si sono rappresentati i componenti con memoria tramite generatori indipendenti.




La corrente sul ramo centrale si deduce notando che il resistore da 10 Ω è soggetto alla tensione $v_C$. Applicando la LKC ad uno dei suoi terminali si ha: $i_C + i_L + v_C/10 = 0$ e quindi

$$i_C = -\, i_L - v_C/10$$

Applicando la LKT alla maglia di destra si ha: $0 = -\, v_L - 2\, i_L + v_C$. Quindi $v_L = -2\, i_L + v_C$. Sostituendo nelle caratteristiche e passando alla notazione matriciale si ha quindi:

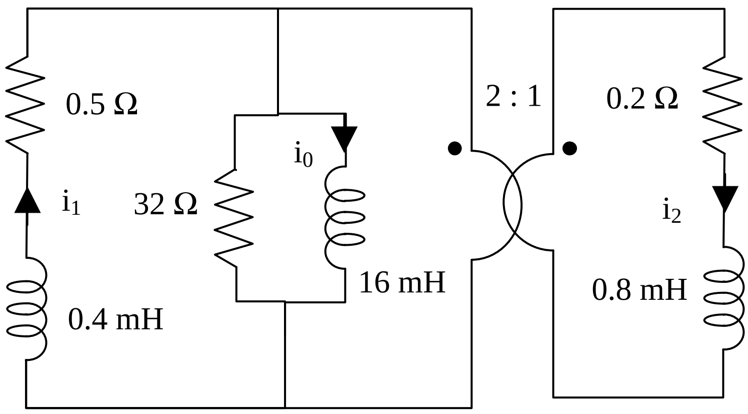
$$\begin{cases} 5\cdot 10^{-4}\dfrac{di_L}{dt} = -2i_L + v_C \\ 5\cdot 10^{-5}\dfrac{dv_C}{dt} = -i_L - 0.1v_C \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\begin{Bmatrix} i_L \\ v_C \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -4\cdot 10^3 & 2\cdot 10^3 \\ -2\cdot 10^4 & -2\cdot 10^3 \end{bmatrix}}_{[A]}\begin{Bmatrix} i_L \\ v_C \end{Bmatrix}$$

La matrice di stato [A] risulta quindi determinata. Le unità SI dei coefficienti si deducono dall'analisi dimensionale delle equazioni. Per determinare le costanti di tempo del circuito è necessario calcolare gli autovalori della matrice di stato, risolvendo il polinomio:

$$\det([A]-\lambda[I]) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} -4\cdot 10^3 - \lambda & 2\cdot 10^3 \\ -2\cdot 10^4 & -2\cdot 10^3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + 6\cdot 10^3\lambda + 4.8\cdot 10^7 = 0$$

I due autovalori sono quindi $\lambda_1 = -\ 3000 + 6245j$ e $\lambda_2 = -\ 3000 - 6245j$, complessi coniugati con parti reali negative (quindi il circuito è stabile, come si poteva dedurre subito dall'assenza di generatori pilotati) e la costante di tempo è $\tau =$ 0.33 ms (è una sola dato che gli autovalori hanno la stessa parte reale e quindi $\lambda_{1.2} = -\ 1/\tau \pm j\ \Omega$).

**Esercizio 11.** Determinare la matrice di stato del circuito di figura (nell'ordine $i_0$,$i_1$,$i_2$).

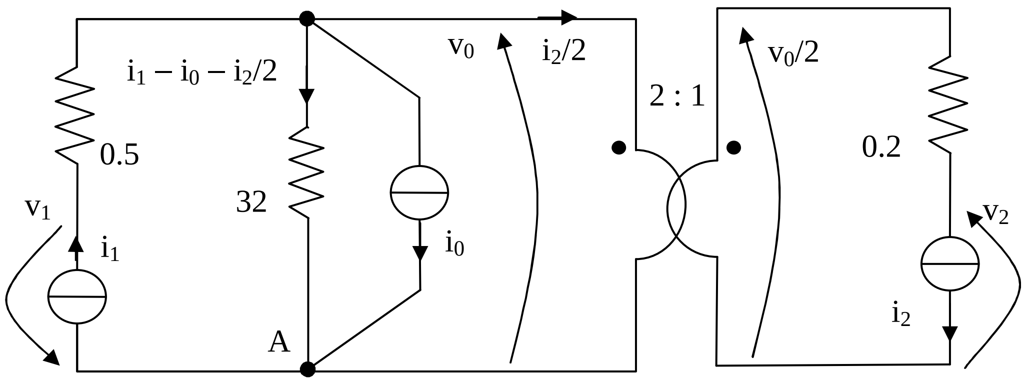



Soluzione:

$$A = \begin{Vmatrix} -2.00 & 2.00 & -1.00 \\ 80.00 & -81.25 & 40.00 \\ -20.00 & 20.00 & -10.25 \end{Vmatrix} \times 10^3\left[s^{-1}\right]$$

**Soluzione**: Per determinare la matrice di stato è necessario definire le equazioni di stato del circuito. Le caratteristiche degli induttori sono indicate a destra (le induttanze $L_0$, $L_1$ ed $L_2$ sono assegnate). È quindi necessario determinare le tensioni sugli induttori (versi associati con la convenzione da utilizzatore) considerando note le variabili di stato (le correnti $i_0$, $i_1$ ed $i_2$). Pertanto, nel circuito (unità SI) si sono rappresentati gli induttori tramite generatori indipendenti di corrente.

$$\begin{cases} L_0\dfrac{di_0}{dt} = v_0 \\ L_1\dfrac{di_1}{dt} = v_1 \\ L_2\dfrac{di_2}{dt} = v_2 \end{cases}$$

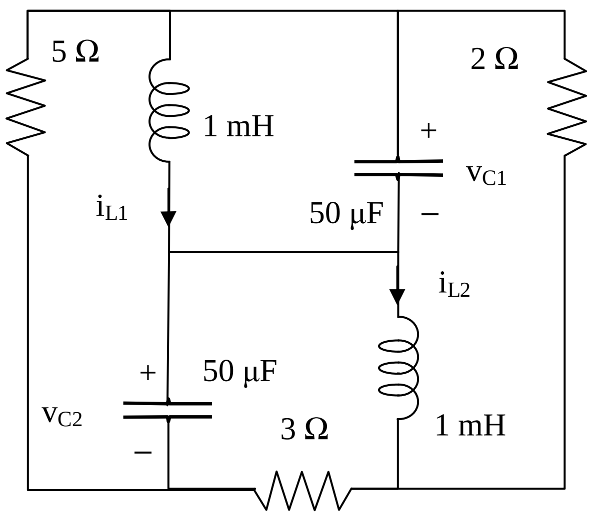



Dato che la tensione sul primario del trasformatore ideale e la corrente sul secondario sono già definite, si possono dedurre la corrente sul primario e la tensione sul secondario utilizzando le caratteristiche del trasformatore ideale. Inoltre, applicando la LKC al nodo A si può dedurre la corrente circolante sul resistore da 32 Ω. Per calcolare la tensione $v_0$ si noti che è la tensione sul resistore da 32 Ω. Quindi utilizzando la caratteristica del resistore si ha: $v_0 = 32\,(i_1 - i_0 - i_2/2)$, ovvero $v_0 = -32i_0 + 32i_1 - 16i_2$. Per calcolare la tensione $v_1$ si applica la LKT sulla maglia a sinistra: $0 = v_1 + 0.5\,i_1 + 32\,(i_1 - i_0 - i_2/2)$, ovvero $v_1 = 32i_0 - 32.5i_1 + 16i_2$). Per calcolare la tensione $v_2$ si applica la LKT sulla maglia a destra: $0 = -v_0/2 + 0.2\,i_2 + v_2$, ovvero $v_2 = -16i_0 + 16i_1 - 8.2i_2$). Sostituendo nelle caratteristiche e passando alla notazione matriciale si ha quindi:

$$\begin{cases} 16\cdot 10^{-3}\dfrac{di_0}{dt} = -32i_0 + 32i_1 - 16i_2 \\ 0.4\cdot 10^{-3}\dfrac{di_1}{dt} = 32i_0 - 32.5i_1 + 16i_2 \\ 0.8\cdot 10^{-3}\dfrac{di_2}{dt} = -16i_0 + 16i_1 - 8.2i_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{d}{dt}\begin{Bmatrix} i_0 \\ i_1 \\ i_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2\cdot 10^3 & 2\cdot 10^3 & -10^3 \\ 80\cdot 10^3 & -81.25\cdot 10^3 & 40\cdot 10^3 \\ -20\cdot 10^3 & 20\cdot 10^3 & -10.25\cdot 10^3 \end{bmatrix}}_{[A]}\begin{Bmatrix} i_0 \\ i_1 \\ i_2 \end{Bmatrix}$$

Le unità SI dei coefficienti della matrice di stato [A] si deducono dall'analisi dimensionale delle equazioni (unità $s^{-1}$, infatti moltiplicando il vettore di stato (in unità A) definisce per le derivate rispetto al tempo delle correnti l'unità corretta: A/s).

**Esercizio 12.** Determinare la matrice di stato del circuito di figura (nell'ordine $v_{C1}, v_{C2}, i_{L1}, i_{L2}$).



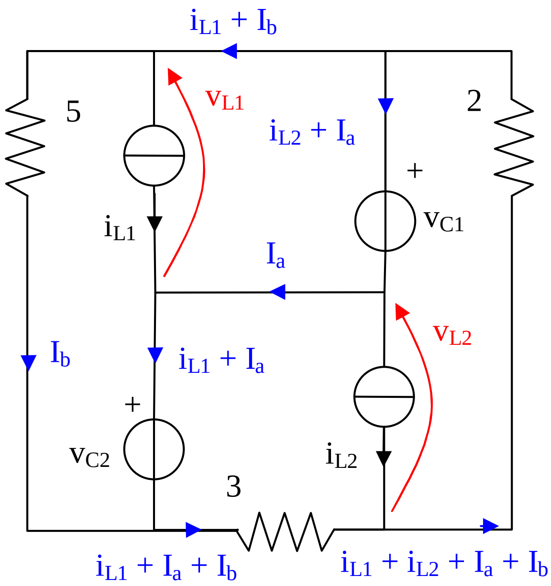

Soluzione:

$$A = \begin{Vmatrix} -8[s^{-1}] & -8[s^{-1}] & -20[\Omega s^{-1}] & 12[\Omega s^{-1}] \\ -8[s^{-1}] & -8[s^{-1}] & 0 & -8[\Omega s^{-1}] \\ 1[Ss^{-1}] & 0 & 0 & 0 \\ -0.6[Ss^{-1}] & 0.4[Ss^{-1}] & 0 & -1.2[s^{-1}] \end{Vmatrix} \times 10^3$$

**Soluzione**: Per determinare la matrice di stato è necessario definire le equazioni di stato del circuito. Le caratteristiche degli induttori e dei condensatori sono (nell'ordine richiesto):

$$\begin{cases} C_1 \dfrac{dv_{C1}}{dt} = i_{C1} \\ C_2 \dfrac{dv_{C2}}{dt} = i_{C2} \\ L_1 \dfrac{di_{L1}}{dt} = v_{L1} \\ L_2 \dfrac{di_{L2}}{dt} = v_{L2} \end{cases}$$

È necessario determinare le tensioni sugli induttori e le correnti sui condensatori considerando note le variabili di stato. Pertanto, nel circuito (unità SI) si sono rappresentati i componenti con memoria tramite generatori indipendenti.




Il circuito equivalente è mostrato a lato.. Le correnti su tutti i rami del circuito sono determinate applicando la LKC a tutti i nodi (oltre alle correnti sugli induttori è necessario introdurre altre due correnti $I_a$ ed $I_b$, come mostrato). Le quattro maglie fondamentali sono definite da $i_{L1}$, $i_{L2}$, $I_a$ ed $I_b$. Applicando le $LKT_{mf}$ si ha:

$$0 = v_{L1} + v_{C2} + 3(i_{L1} + I_a + I_b) + 2(i_{L1} + i_{L2} + I_a + I_b)$$
$$0 = v_{C1} + v_{L2} + 2(i_{L1} + i_{L2} + I_a + I_b)$$
$$0 = v_{C2} + 3(i_{L1} + I_a + I_b) + 2(i_{L1} + i_{L2} + I_a + I_b) + v_{C1}$$
$$0 = 5\, I_b + 3(i_{L1} + I_a + I_b) + 2(i_{L1} + i_{L2} + I_a + I_b)$$

Le incognite sono $v_{L1}$, $v_{L2}$, $I_a$ ed $I_b$. Risolvendo:

$I_b = (v_{C1} + v_{C2})/5$, $I_a = -\,(2v_{C1} + 2v_{C2} + 5i_{L1} + 2i_{L2})/5$

$v_{L1} = v_{C1}$, $v_{L2} = -\,3v_{C1}/5 + 2v_{C2}/5 - 6i_{L2}/5$

Le correnti sui condensatori sono quindi:

$i_{C1} = i_{L2} + I_a = -\,2v_{C1}/5 - 2v_{C2}/5 - i_{L1} + 3i_{L2}/5$, $\;i_{C2} = i_{L1} + I_a = -\,2v_{C1}/5 - 2v_{C2}/5 - 2i_{L2}/5$

Sostituendo nelle caratteristiche e passando alla notazione matriciale si ha quindi:

$$\begin{cases} 5\cdot 10^{-5} \dfrac{dv_{C1}}{dt} = -0.4v_{C1} - 0.4v_{C2} - i_{L1} + 0.6i_{L2} \\ 5\cdot 10^{-5} \dfrac{dv_{C2}}{dt} = -0.4v_{C1} - 0.4v_{C2} - 0.4i_{L2} \\ 10^{-3} \dfrac{di_{L1}}{dt} = v_{C1} \\ 10^{-3} \dfrac{di_{L2}}{dt} = -0.6v_{C1} + 0.4v_{C2} - 1.2i_{L2} \end{cases} \Rightarrow \frac{d}{dt}\begin{Bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{Bmatrix} = 10^3 \underbrace{\begin{bmatrix} -8 & -8 & -20 & 12 \\ -8 & -8 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.6 & 0.4 & 0 & -1.2 \end{bmatrix}}_{[A]} \begin{Bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{Bmatrix}$$

La matrice di stato [A] risulta quindi determinata. Le unità SI dei coefficienti si deducono dall'analisi dimensionale delle equazioni: i minori 2×2 sulla diagonale principale della matrice di stato hanno unità $s^{-1}$, il minore 2×2 sopra la diagonale principale ha unità Ω/s, quello sotto ha unità S/s. Se le variabili di stato sono ordinate elencando prima tutte le T tensioni e poi tutte le C correnti, la struttura di ogni matrice di stato (T+C)×(T+C) è la stessa: i due minori T×T e C×C sulla diagonale principale della matrice di stato hanno unità $s^{-1}$, la sottomatrice T×C sopra la diagonale principale ha unità Ω/s, quella C×T sotto la diagonale principale ha unità S/s.