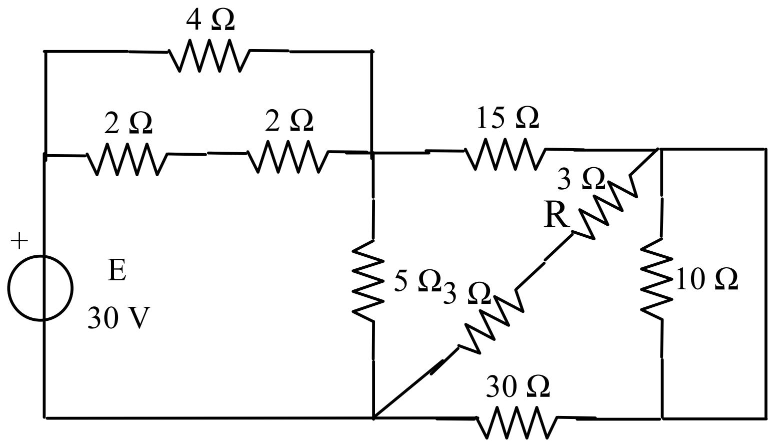
Esercizi sulle reti elettriche in corrente continua

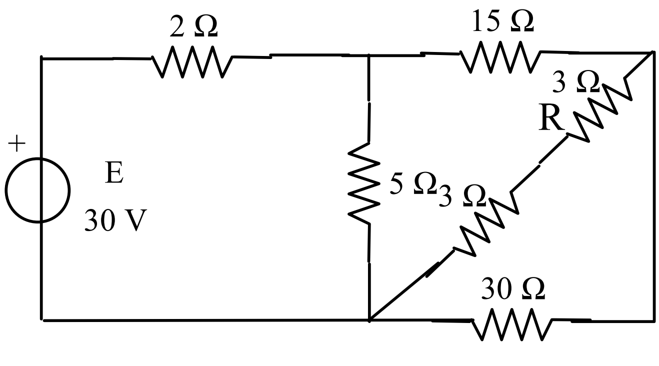
Esercizio 1: Determinare la potenza P_E erogata dal generatore, e la potenza P_R assorbita dal resistore R del circuito in figura



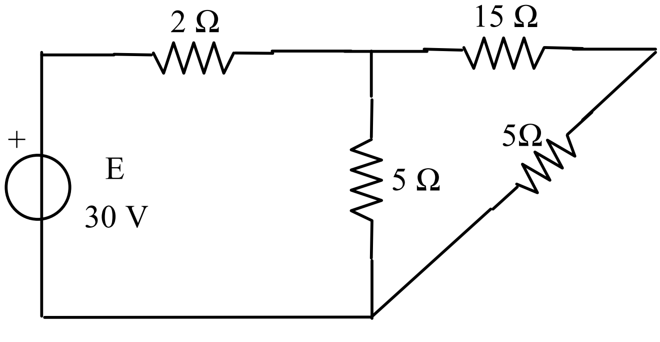
Soluzione:
$P_E = 150$ W
$P_R = 2.08$ W

Soluzione

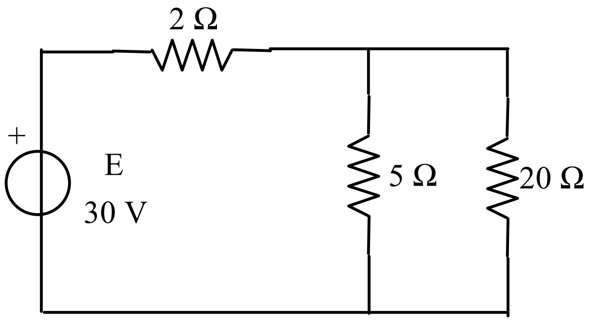
È possibile semplificare il circuito applicando ripetutamente le regole di equivalenza per resistenze collegate in serie e in parallelo.



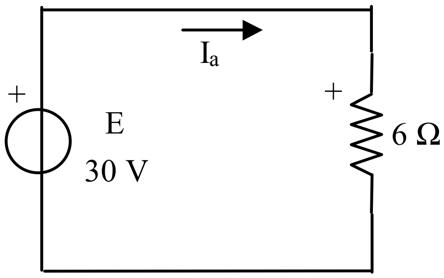
(1)



(2)



(3)



(4)

Dal circuito elementare (4) si ricava:

$I_a = 30/6 = 5\ A$

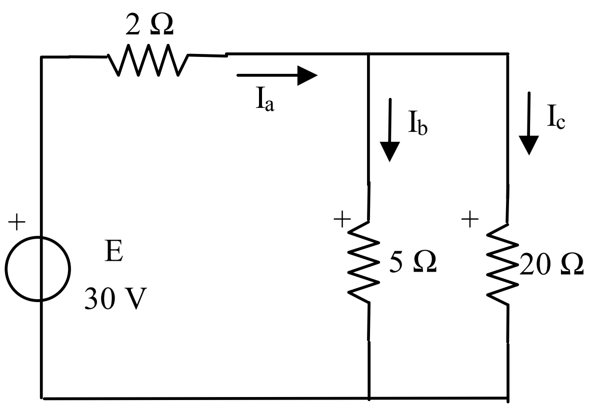
La potenza <u>assorbita</u> dal generatore vale:

$P_{E\,assorb} = E \cdot (-I_a) = -150\,W$

ovvero, la potenza <u>erogata</u> dal generatore vale:

$P_{E\,erog} = -P_{E\,assorb} = 150\,W$

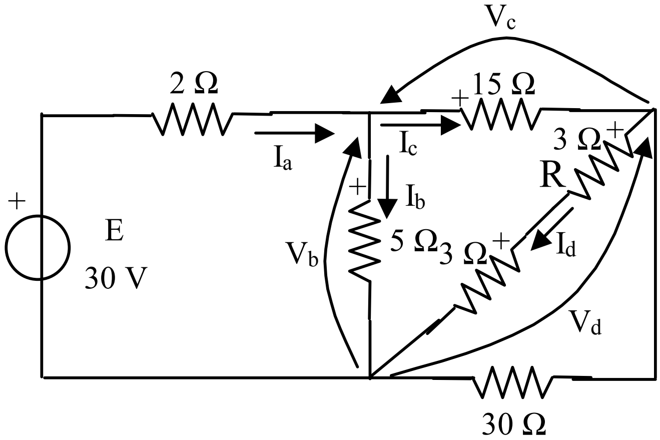
Procedendo a ritroso, è possibile determinare la corrente i_R che attraversa il resistore R. Considerato il circuito (3), si ha:



(5)

$$\begin{cases} I_a = I_b + I_c \\ 5\,I_b = 20\,I_c \end{cases} \Rightarrow \quad I_b = 4\,A, \quad I_c = 1\,A$$

Considerato il circuito (1), si può scrivere:



(6)

$$V_b - V_c - V_d = 0$$

dove:

$$V_b = 5 \cdot I_b = 20\,V$$
$$V_c = 15 \cdot I_c = 15\,V$$
$$V_d = (3+3) \cdot I_d$$

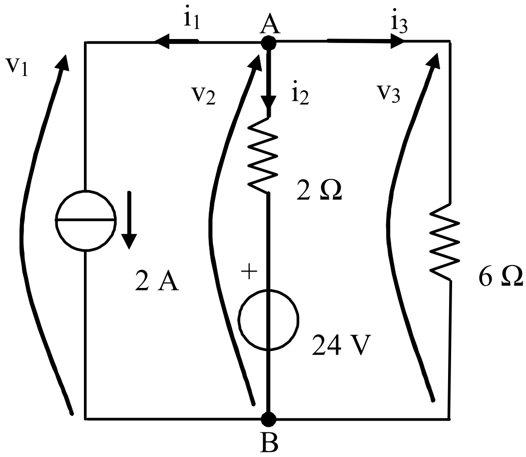
per cui si ricava:

$$I_d = \frac{20-15}{6} = 0.833\,A$$

La potenza assorbita dal resistore risulta:

$$P_R = R\,I_d^{\,2} = \frac{25}{12} = 2.08\,W$$

Esercizio 2: Risolvere la rete in figura e verificare il bilancio delle potenze



Soluzione:
$I_1 = 2$ A
$I_2 = -4.5$ A
$I_3 = 2.5$ A

Soluzione

Il circuito è costituito da **R=3** rami e **N=2** nodi.

I rami 2 e 3 sono controllati sia in tensione che in corrente (è possibile esprimere la tensione del ramo in funzione della corrente del ramo stesso e viceversa). Il ramo 1, essendo presente il generatore di corrente, è controllato in tensione ma non in corrente.

Metodo di Tableau

Incognite	Equazioni
– R tensioni di ramo	– R equazioni indipendenti applicando la LKT ai rami
– R correnti di ramo	– N-1 equazioni indipendenti applicando la LKC ai nodi
– N-1 potenziali di nodo	– R equazioni costitutive dei rami
Totale: 2R+N-1	Totale: 2R+N-1

Si sceglie il nodo B come nodo di riferimento ($e_B = 0$).

$$\begin{cases} v_1 = e_A \\ v_2 = e_A \\ v_3 = e_A \end{cases}$$

R equazioni indipendenti applicando la legge di Kirchhoff delle tensioni ai rami

$$\{ i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

N-1 equazioni indipendenti applicando la legge di Kirchhoff delle correnti ai nodi

$$\begin{cases} i_1 = 2 \\ v_2 = 24 + 2i_2 \\ v_3 = 6i_3 \end{cases}$$

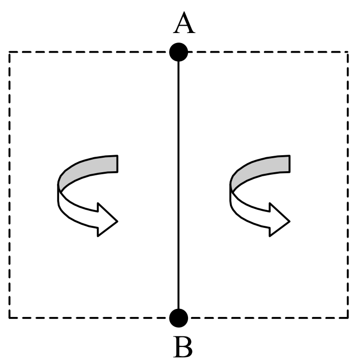
R equazioni costitutive dei rami

Si ottengono 7 equazioni indipendenti nelle 7 incognite (v_1, v_2, v_3, i_1, i_2, i_3, e_A).

Metodo delle equazioni di Kirchhoff (maglie fondamentali)

Incognite	Equazioni
– R tensioni di ramo	– R-N+1 equazioni indipendenti applicando la legge di Kirchhoff delle tensioni alle maglie fondamentali
– R correnti di ramo	– N-1 equazioni indipendenti applicando la legge di Kirchhoff delle correnti ai nodi
	– R equazioni costitutive dei rami
Totale: 2R	Totale: 2R

Si traccia un albero del grafo, e si determinano le R-N+1 maglie fondamentali (in questo caso 2):



- Rami di albero: N-1=1
- Rami di coalbero: R-N+1=2
- Numero di maglie fondamentali: R-N+1=2

$$\begin{cases} -v_1 + v_2 = 0 \\ -v_2 + v_3 = 0 \end{cases}$$

R-N+1 equazioni indipendenti applicando la legge di Kirchhoff delle tensioni alle maglie fondamentali:

$$\{ i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

N-1 equazioni indipendenti applicando la legge di Kirchhoff delle correnti ai nodi

$$\begin{cases} i_1 = 2 \\ v_2 = 24 + 2i_2 \\ v_3 = 6i_3 \end{cases}$$

R equazioni costitutive dei rami

Sostituendo le equazioni costitutive nelle equazioni di Kirchhoff si ottiene quindi un sistema di R equazioni indipendenti rispettivamente in R incognite di corrente oppure di tensione di ramo.

$$\begin{cases} -v_1 + 24 + 2i_2 = 0 \\ -24 - 2i_2 + 6i_3 = 0 \\ 2 + i_2 + i_3 = 0 \end{cases}$$

Si ottengono 3 equazioni indipendenti nelle 3 incognite (v_1, i_2, i_3).

Metodo dei tagli fondamentali

Incognite
- R-N+1 correnti dei rami di coalbero
- R_{ncc} tensioni incognite dei rami non controllati in corrente (in cui non è possibile esprimere la tensione in funzione della corrente utilizzando la caratteristica)

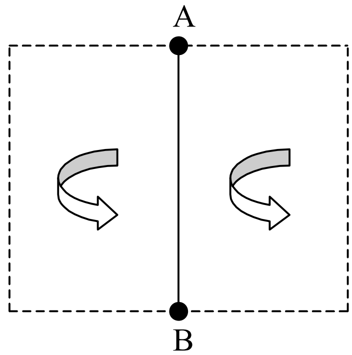
Totale: R-N+1+ R_{ncc}

Equazioni
- R-N+1 equazioni indipendenti applicando la legge di Kirchhoff delle tensioni alle maglie fondamentali. Sui rami controllati in corrente, le tensioni sono espresse in funzione delle correnti dei rami di coalbero (mediante le equazioni costitutive dei rami e le equazioni di Kirchhoff delle correnti ai tagli fondamentali).
- R_{ncc} equazioni caratteristiche dei rami non controllati in corrente

Totale: R-N+1+ R_{ncc}

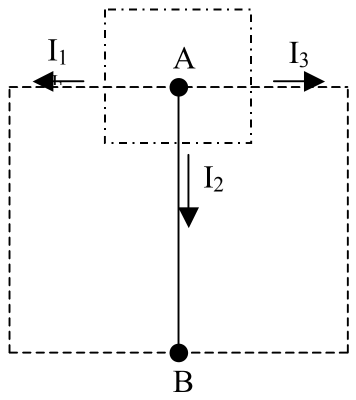
Nel caso del circuito in esame R_{ncc} = 1.

Si traccia un albero del grafo, e si determinano le R-N+1 maglie fondamentali (in questo caso 2):



- Rami di albero: N-1=1
- Rami di coalbero: R-N+1=2
- Numero di maglie fondamentali: R-N+1=2

Espressione delle correnti dei rami d'albero in funzione delle correnti dei rami di coalbero mediante le N-1 equazioni di Kirchhoff delle correnti applicate ai tagli fondamentali (in questo caso 1):



$$\{i_1 + i_2 + i_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad i_2 = -i_1 - i_3$$

ATT: in questo caso particolare l'equazione al taglio fondamentale coincide con l'equazione di Kirchhoff delle correnti applicata al nodo A. In generale invece l'applicazione della legge di Kirchhoff delle correnti ai tagli fondamentali determina un sistema di equazioni nelle correnti in forma diversa da quella che si ottiene applicando la legge di Kirchhoff delle correnti ai nodi. I due sistemi di equazioni sono comunque equivalenti, essendo sempre possibile ottenere la forma delle equazioni di uno mediante combinazioni lineari delle equazioni dell'altro.

$$\begin{cases} -v_1 + 24 + 2(-i_1 - i_3) = 0 \\ -24 - 2(-i_1 - i_3) + 6i_3 = 0 \end{cases}$$

R-N+1 equazioni indipendenti applicando la legge di Kirchhoff delle tensioni alle maglie fondamentali

$$\{\, i_1 = 2$$

caratteristica del ramo non controllato in corrente

Si ottengono 3 equazioni indipendenti nelle 3 incognite (v_1, i_1, i_3).

Metodo dei potenziali di nodo

Incognite

- N-1 potenziali di nodo
- R_{nct} correnti incognite dei rami non controllati in tensione (in cui non è possibile esprimere la corrente in funzione dei potenziali di nodo utilizzando le equazioni caratteristiche dei rami del circuito)

Totale: N-1+ R_{nct}

Equazioni

- N-1 equazioni indipendenti applicando la legge di Kirchhoff delle correnti ai nodi. Sui rami controllati in tensione, le correnti sono espresse in funzione dei potenziali di nodo (mediante le equazioni costitutive dei rami e le equazioni di Kirchhoff delle tensioni ai rami)
- R_{nct} equazioni caratteristiche dei rami non controllati in tensione

Totale: N-1+ R_{nct}

Nel caso del circuito in esame $R_{nct} = 0$.

Si sceglie il nodo B come nodo di riferimento ($e_B = 0$).
Espressione delle tensioni di ramo in funzione dei potenziali di nodo mediante le equazioni di Kirchhoff delle tensioni ai rami.

$$\begin{cases} v_1 = e_A \\ v_2 = e_A \\ v_3 = e_A \end{cases}$$

Espressione delle correnti di ramo in funzione dei potenziali di nodo mediante le R equazioni costitutive e le R equazioni di Kirchhoff delle tensioni ai rami (per tutti i rami del circuito in esame è possibile ricavare direttamente la corrente di ramo in funzione dei potenziali di nodo):

$$\begin{cases} i_1 = 2 \\ v_2 = e_A = 24 + 2i_2 \\ v_3 = e_A = 6i_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_1 = 2 \\ i_2 = \dfrac{e_A}{2} - 12 \\ i_3 = \dfrac{e_A}{6} \end{cases}$$

$$2 + \frac{e_A}{2} - 12 + \frac{e_A}{6} = 0$$

N-1 equazioni indipendenti applicando la legge di Kirchhoff delle correnti ai nodi

Si ottiene 1 equazione in 1 incognita (e_A).

Risolvendo si ha: $\frac{2}{3} e_A - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad e_A = 15V$

Per verificare il bilancio delle potenze come richiesto dall'esercizio calcoliamo le correnti di ramo e le tensioni di ramo. La potenza assorbita da ogni ramo, visto che sono stati utilizzati i versi di riferimento associati con la scelta dell'utilizzatore, si ottiene dal prodotto delle relative tensione e corrente:

ramo	v	i	p
1	15 V	2 A	30 W
2	15 V	–4.5 A	– 67.5 W
3	15 V	2.5A	37.5 W

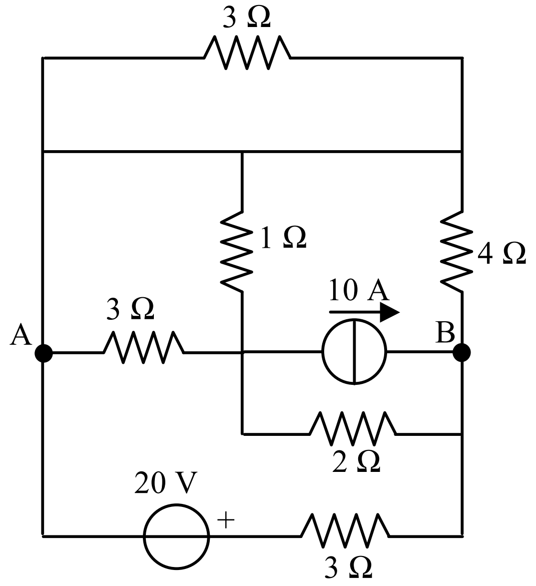
Il bilancio delle potenze è quindi verificato ($p_1 + p_2 + p_3 = 0$).

Per il ramo 2 si ha inoltre: $p_R = v_R\, i_R = R\, i_R^2 = 2\,(4.5)^2 = 40.5$ W (assorbita), $p_E = E\, i_2 = 24\,(-4.5) = -108$ W (assorbita, in quanto i_2 è entrante nel terminale positivo del generatore di tensione). Anche il bilancio di potenza sul ramo 2 è soddisfatto:

$$\underbrace{40.5\text{W}}_{\substack{\textit{potenza}\\ \textit{assorbita}\\ \textit{dal}\\ \textit{resistore}}} + \underbrace{(-108\text{W})}_{\substack{\textit{potenza}\\ \textit{assorbita}\\ \textit{dal}\\ \textit{generatore}}} = \underbrace{-67.5\text{W}}_{\substack{\textit{potenza}\\ \textit{assorbita}\\ \textit{dal}\\ \textit{ramo}}} \qquad \text{ovvero} \qquad \underbrace{108\text{W}}_{\substack{\textit{potenza}\\ \textit{erogata}\\ \textit{dal}\\ \textit{generatore}}} - \underbrace{40.5\text{W}}_{\substack{\textit{potenza}\\ \textit{assorbita}\\ \textit{dal}\\ \textit{resistore}}} = \underbrace{67.5\text{W}}_{\substack{\textit{potenza}\\ \textit{erogata}\\ \textit{dal}\\ \textit{ramo}}}$$

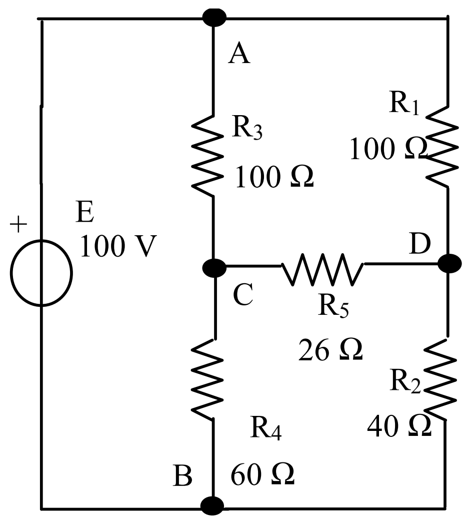
Esercizio 3: Determinare la tensione tra i punti A e B del circuito in figura

Suggerimento: semplificare il circuito utilizzando le formule per collegamenti in serie e in parallelo.

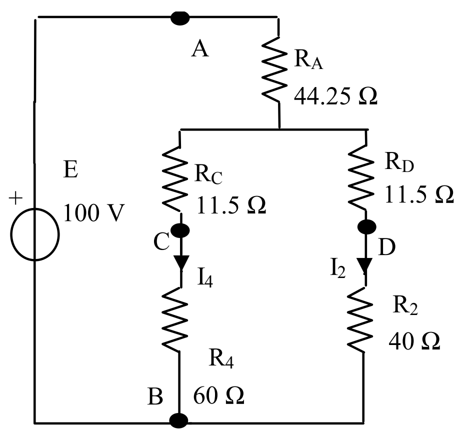


Soluzione:
$V_{BA} = 14.7$ V

Esercizio 4: Determinare la potenza dissipata dal resistore R_5 del circuito in figura.



Suggerimento: utilizzare la trasformazione stella triangolo:

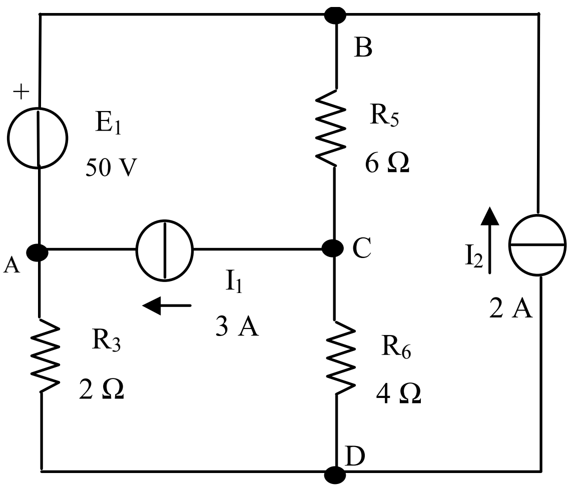


Soluzione:

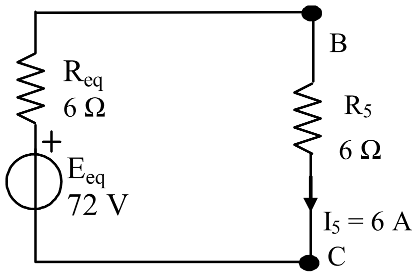
$$P_5 = \frac{V_{CD}^2}{R_5} = \frac{(R_4 I_4 - R_2 I_2)^2}{R_5} = 0.24W$$

Esercizio 5.a: Determinare il bipolo equivalente di Thevenin tra i punti B e C del circuito in figura e calcolare la corrente che circola attraverso il resistore R_5 .

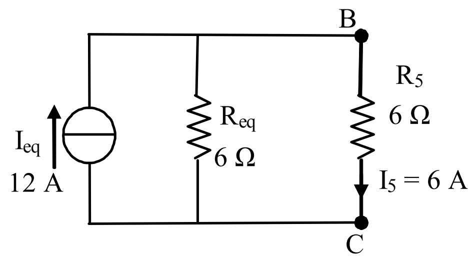
Esercizio 5.b: Determinare il bipolo equivalente di Norton tra i punti B e C del circuito in figura e calcolare la corrente che circola attraverso il resistore R_5.



Soluzione 5.a:

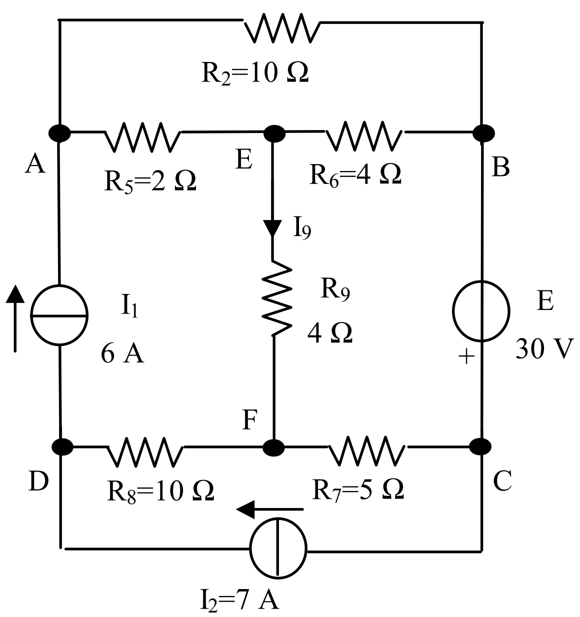


Soluzione 5.b:

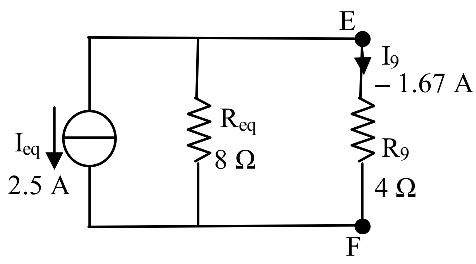


Esercizio 6.a: Determinare il dipolo equivalente di Norton tra i punti E e F del circuito in figura e calcolare la corrente che circola attraverso il resistore R_9.

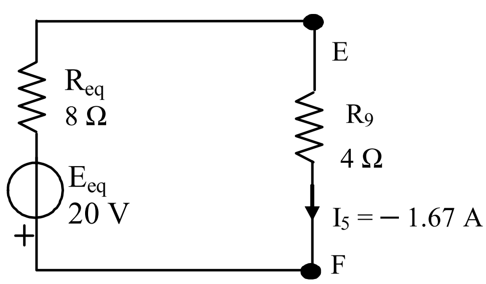
Esercizio 6.b: Determinare il dipolo equivalente di Thevenin tra i punti E e F del circuito in figura e calcolare la corrente che circola attraverso il resistore R_9.



Soluzione 6.a:

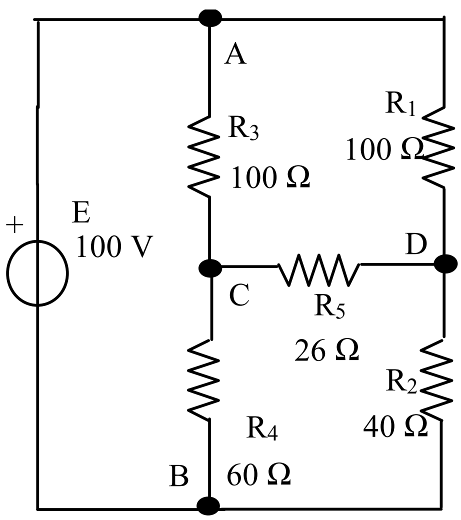


Soluzione 6.b:

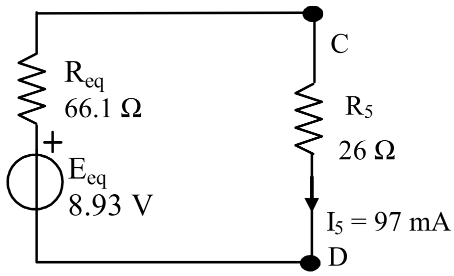


Esercizio 7.a: Determinare il dipolo equivalente di Thevenin tra i punti C e D del circuito in figura e calcolare la potenza dissipata dal resistore R_5 del circuito in figura.

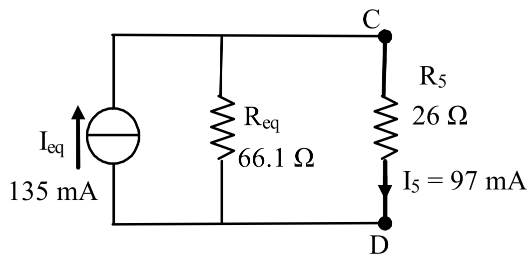
Esercizio 7.b: Determinare il dipolo equivalente di Norton tra i punti C e D del circuito in figura e calcolare la potenza dissipata dal resistore R_5 del circuito in figura.



Soluzione 7.a:



Soluzione 7.b:



$$P_5 = R_5 I_5^2 = 0.24W$$