METODO DST PER L'OTTIMIZZAZIONE GLOBALE NEI PROBLEMI DI SINTESI DI CAMPO MAGNETICO

C.A. Borghi, M. Fabbri, U. Reggiani

*Istituto di Elettrotecnica dell'Università degli Studi di Bologna
Viale Risorgimento 2, 40136 Bologna*

Un problema di sintesi di campo magnetico è costituito dalla ricerca della distribuzione di corrente in un dominio tridimensionale τ_e all'esterno di una regione data τ_i di dimensioni finite. Tali correnti devono generare una assegnata distribuzione di campo magnetico in τ_i . All'interno di tale regione il campo è univocamente determinato dal valore del suo componente tangente al contorno di essa. La relazione fra campo sul contorno di τ_i e densità di corrente è espressa dalla legge di Biot-Savart. Nel caso di simmetria assiale, utilizzando un sistema di coordinate cilindrico (R, ϕ, Z) , si definisce la funzione scalare flusso magnetico $\psi(R, Z)$ [1]. In tal caso la relazione integrale tra la funzione scalare flusso magnetico e la densità di corrente è data da

$$\psi(R, Z) = \iint L(R, Z, R', Z') J_\phi(R', Z') dR' dZ' \quad (1)$$

Il kernel L è calcolato utilizzando gli integrali ellittici completi di prima e seconda specie [1,2]. Per discretizzare l'eq.(1) si suppone che la distribuzione di corrente sia costituita da un sistema di N bobine coassiali filiformi e che quindi la densità di corrente sia esprimibile da:

$$J_\phi(R, Z) = \sum_{n=1}^N I_n \delta(R - R_n) \delta(Z - Z_n) \quad (2)$$

L'eq. (1) perciò diviene

$$\{\psi(R_m, Z_m)\}_M = \|L(R_m, Z_m, R_n, Z_n)\|_{M \times N} \cdot \{I_n\}_N \quad (3)$$

ove la discretizzazione del termine noto viene fatta considerando il valore noto di ψ in M punti sul contorno di τ_i . In generale il sistema (3) può avere infinite soluzioni o non averne. Inoltre risulta essere malposto [1,3]. Una soluzione ingegneristica del sistema (3) è data dalla soluzione del seguente problema:

$$\begin{array}{l} \text{minimizza} \quad W(R_1, \dots, R_N, Z_1, \dots, Z_N, I_1, \dots, I_N) \\ \text{soggetto a} \quad \|L(R_1, \dots, R_N, Z_1, \dots, Z_N)\|_{M \times N} \cdot \{I_1, \dots, I_N\}_N - \{\psi_1, \dots, \psi_M\}_M = 0 \end{array} \quad (4)$$

ove W rappresenta una funzione significativa dal punto di vista ingegneristico come, ad esempio, l'energia magnetica. Il problema (4) è un problema di ottimizzazione vincolata. Risulta inoltre non lineare poiché L è una funzione non lineare. Questo problema viene trasformato in un problema di ottimizzazione non vincolata espresso da

$$\begin{array}{l} \text{minimizza} \quad f(x) \\ \text{soggetto a} \quad x \in R^{3N} \end{array} \quad (5)$$

ove $x = (R_1, \dots, R_N, Z_1, \dots, Z_N, I_1, \dots, I_N)$, $f(x) = W(x) + c \cdot |L(x) \cdot I - \psi|^2$, c è il parametro di penalità [4].

Nel caso in cui il sistema (3) presenti infinite soluzioni, la soluzione del problema (5) è la soluzione ottimale del sistema (3), rispetto al criterio espresso dalla funzione obiettivo W . Qualora invece il sistema (3) non abbia soluzione la soluzione del problema (5) minimizza il residuo $|L(x) \cdot I - \psi|^2$. In tal caso W ha funzione stabilizzante.

Per la soluzione del sistema (5) è stato utilizzato l'algoritmo DST (Dynamic Search Trajectories) per cui le traiettorie di ricerca delle soluzioni del problema di ottimizzazione sono definite da

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\nabla f(x) \quad (6)$$

L'eq. (6) rappresenta il moto di una particella di massa unitaria in un campo di forza conservativo 3N-dimensionale espresso da $-\nabla f(x)$. E' possibile definire a priori l'andamento della velocità della particella attraverso la scelta di un parametro γ (target level [5]). La convergenza al minimo globale è garantita da una scelta opportuna dei parametri c e γ . Al variare di γ , la traiettoria di ricerca così ottenuta ha come proprietà di non portare a nuovi minimi con valori di f superiori al valore di γ considerato. Inoltre non è richiesto il calcolo dell'hessiano di f . Ciò permette la ricerca dei minimi globali per approssimazioni successive di γ con una accettabile economia di calcolo.

Il metodo descritto è stato applicato al problema di bibliografia [2]. I minimi trovati dall'algoritmo, nel rispetto dei vincoli adottati e con precisioni di 10^{-3} , sono molteplici. Il minore dei minimi suddetti, che si assume come minimo globale, è in accordo col risultato riportato in [2].

- [1] C.A. Borghi, U. Reggiani, G. Zama, *A Method for the Solution of an Axisymmetric Magnetic Field Synthesis Problem*, IEEE Transaction on Magnetics, vol.27, n°5, pp 4093-4096, September 1991.
- [2] C.A. Borghi, U. Reggiani, G. Zama, *An Approach to the Design of the Poloidal Field System for a Toroidal Device*, Fusion Technology 1990, pp 1574-1578, Elsevier Science Publisher B.V.,1991
- [3] M.Guarnieri, A.Stella, F.Trevisan, *A Methodological Analysis of Different Formulations for Solving Inverse Electromagnetic Problems*, IEEE Transaction on Magnetics, vol.26, n°2, pp 622-625, March 1990.
- [4] D.P. Bertsekas, *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*, Academic Press, New York, pp 158-164,pp 302-305, 1982
- [5] A.O. Griewank, *Generalized Descent for Global Optimization*, Journal of Optimization Theory and Application, vol. 34, n° 1, pp 11-39, May1981