CALCOLO DELLA DISTRIBUZIONE DI CORRENTE ALL'INTERNO DI UNO STRAND SUPERCONDUTTIVO MULTIFILAMENTARE MEDIANTE RETE CIRCUITALE EQUIVALENTE

A. Morandi, P. L. Ribani, A. Cristofolini, M. Fabbri, F. Negrini
Dipartimento di Ingegneria Elettrica, Università di Bologna,
Viale Risorgimento 2, 40136, Bologna, Italy

Uno strand superconduttivo multifilamentare è realizzato mediante un elevato numero di filamenti superconduttivi di piccola sezione ($d \cong 6\mu m$), immersi in una matrice di materiale conduttore normale (rame). L'adozione di tale struttura si rende necessaria, nella pratica, per ridurre le perdite ac tipiche dei superconduttori e per conseguire una maggiore stabilità termica. In questa memoria si presenta un modello numerico per la determinazione della distribuzione di corrente e delle perdite all'interno di uno strand superconduttivo multifilamentare quando esso trasporta una corrente impressa dall'esterno ed è soggetto ad un campo magnetico variabile nel tempo con legge assegnata. La principale caratteristica del modello consiste nell'assunzione, mediante un processo di media su un volume piccolo rispetto alle dimensioni totali dello strand ma sufficientemente grande da contenere un elevato numero di filamenti superconduttivi e di zone in rame, di una relazione $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{J}, \mathbf{x})$ valida in ogni punto, indipendentemente dal materiale (superconduttore o rame) che forma il punto considerato [1].

A partire dalla formulazione magnetoquasistatica delle equazioni di Maxwell, introducendo il potenziale vettore $\mathbf{A}$ e il potenziale scalare φ, ed operando una suddivisione del volume occupato dallo strand in numero finito di elementi tridimensionali è possibile pervenire alla seguente equazione di bilancio delle tensioni relativa ad un percorso che congiunge i centri $\mathbf{x}_h$ e $\mathbf{x}_k$ di due elementi confinanti:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\mu_0}{8\pi}\sum_{i=1}^{NE}\int_{V_i}\left(\frac{1}{\left\|\mathbf{x}_h-\mathbf{x}'\right\|}+\frac{1}{\left\|\mathbf{x}_k-\mathbf{x}'\right\|}\right)\mathbf{dx}'\sum_{j=1}^{NF_i}\left[\left([\sum_{j=1}^{NF_i}S_{j,i}^2\mathbf{u}_{j,i}\mathbf{u}_{j,i}^T]^{-1}S_{j,i}\mathbf{u}_{j,i}\right)\cdot(\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_h)\right]\frac{dI_{j,i}}{dt}+ \\
&-\frac{1}{2}(\mathbf{E}_h+\mathbf{E}_k)\cdot(\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_h)+(\varphi_h-\varphi_k)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\mathbf{A}_{ext,h}+\mathbf{A}_{ext,k})\cdot(\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_h)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

dove NE è il numero totale di elementi della suddivisione, NF_i è il numero di facce dell'elemento i, $I_{j,i}$ è la corrente attraverso la j-esima faccia dell'elemento i, e $\mathbf{A}_{ext}$ è il potenziale vettore associato al campo magnetico prodotto dalle correnti che circolano all'esterno dello strand. Si può dimostrare che l'equazione (1) è invariante, relativamente al solo termine di corrente, rispetto a tutte le possibili scelte del potenziale vettore esterno purché risulti $\nabla\times\mathbf{A}_{ext} = \mathbf{B}_{ext}$ sul volume dello strand.

La relazione (1) può essere formalmente interpretata come l'equazione di Kirchhoff delle tensioni del ramo circuitale rappresentato in Fig. 1. Infatti, i termini in essa presenti corrispondono, nell'ordine in cui compaiono, ad un termine di mutua ed auto induzione, un termine resistivo non lineare, una differenza di potenziali di nodo ed un termine di tensione impressa, rispettivamente. Ne consegue che l'intero strand superconduttivo può essere schematizzato mediante un circuito avente come numero di nodi il numero di elementi in cui è stato suddiviso il volume da esso occupato, aumentato di due per prevedere la connessione dello strand ad un generatore di corrente esterno (NE + 2), e come numero di rami il numero di facce attraversate da corrente

(NC). La non linearità della relazione E-J conduce alla presenza del termine non lineare nell'equazione di bilancio delle tensioni di ramo.

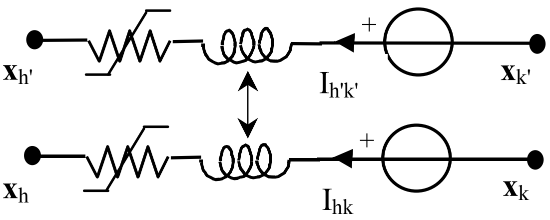

Fig. 1 - Modello circuitale dell'equazione (1).

Con riferimento alla rete equivalente dello strand, avente NE + 2 nodi e NC rami, si può scrivere il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} [A]\mathbf{i} = \mathbf{I}_g \\ [M]\dfrac{d\mathbf{i}}{dt} + \mathbf{r}(\mathbf{i}) + [A]^T \mathbf{v} = \mathbf{e} \end{cases} \tag{2}$$

dove **i, v** ed **e** sono i vettori delle correnti incognite, dei potenziali incogniti e delle tensioni impresse, [A] è la matrice di incidenza della rete, [M] è la matrice dei coefficienti di auto e mutua induzione, $\mathbf{I}_g$ è il vettore delle forzanti ed $\mathbf{r}(\mathbf{i})$ è il vettore dei termini resistivi non lineari.

La soluzione del sistema (2) consente di determinare la distribuzione di corrente ed il potenziale all'interno dello strand. Attraverso permutazioni di colonne e somme e differenze di righe la prima delle equazioni (2) può essere riscritta come:

$$[I \vdots S_A]\begin{Bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{I}_g \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{i}_1 = \mathbf{I}_g - [S_A]\,\mathbf{i}_2 \tag{3}$$

dove [I] è la matrice identica di dimensioni (NE + 1) × (NE + 1) e $[S_A]$ è la matrice residua di dimensioni (NE + 1) × (NC – NE – 1). Questa trasformazione corrisponde all'individuazione di un albero della rete i cui rami sono quelli attraverso i quali circolano le (NE + 1) correnti del vettore $\mathbf{i}_1$. Inoltre, attraverso permutazioni, somme e differenze di righe è anche possibile trasformare la matrice $[A]^T$ come segue

$$[A]^{T'} = \begin{bmatrix} S_{At} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Applicando la permutazione di correnti $\mathbf{i} \rightarrow \begin{Bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_2 \end{Bmatrix}$ e la trasformazione (4) alla seconda delle equazioni (2), e sostituendo in essa la (3), si ottiene un sistema ridotto di (NC – NE – 1) equazioni differenziali non lineari del primo ordine nelle (NC – NE – 1) incognite rappresentate dalle (NC – NE – 1) correnti del vettore $\mathbf{i}_2$ (correnti di coalbero), nella forma $\dfrac{d}{dt}\mathbf{i}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{i}_2, t)$.

[1] M. Breschi, A. Cristofolini, M. Fabbri, F. Negrini, P.L. Ribani, "Metodi per lo studio della distribuzione di corrente nei cavi superconduttori", *Atti della XVI riunione annuale dei ricercatori di elettrotecnica - ET2000*, Udine, 15-17 Giugno, p. 316-217, 2000.