

METODI PER L'ANALISI DEI CIRCUITI

Nel seguito vengono illustrati, mediante esempi, alcuni tra i metodi più utilizzati per l'analisi dei circuiti elettrici. Il problema che si vuole risolvere è il seguente: assegnato il circuito elettrico e le grandezze impresse dai generatori indipendenti presenti, in generale funzioni qualunque del tempo, si vuole calcolare l'andamento temporale delle correnti e delle tensioni in tutti i rami del circuito. Si suppone per semplicità che tutti i componenti siano dei bipoli, potendosi ricondurre a questa ipotesi mediante l'introduzione di circuiti equivalenti dei componenti a più di due terminali. Gli esempi illustrativi si riferiscono, per semplicità, a circuiti in regime stazionario (o regime di corrente continua o DC), definito dalla condizione $d/dt \equiv 0$. In tal caso, ogni grandezza nel circuito si suppone tempo-invariante.

1. DAI CIRCUITI AI GRAFI

Dato un circuito con N nodi ed R rami su cui siano assegnati i versi delle correnti, si dice **grafo** (o, più precisamente, **grafo orientato**) associato al circuito un oggetto costituito dagli stessi nodi e dagli stessi rami del circuito, orientati con il versi delle correnti (i rami sono solitamente rappresentati omettendo il componente, quindi con una linea continua che connette i due terminali). Notiamo che si è così evidenziata la struttura topologica del circuito, cioè il modo in cui sono connessi i componenti tra loro, senza preoccuparsi delle caratteristiche dei componenti stessi. Ad ogni ramo sono associati una corrente di ramo ed una tensione di ramo. È possibile associare ad ogni nodo un potenziale (tensione di nodo) definita come tensione esistente tra il nodo in esame e il nodo di riferimento, il cui simbolo è $\text{---}\overset{\bullet}{\perp}$, scelto arbitrariamente. Una proprietà del circuito che si trasferisce al corrispondente grafo è la **proprietà di connessione**, secondo la quale un circuito è connesso se per ogni nodo del circuito è possibile trovare un percorso attraverso i rami che connetta tale nodo al nodo di riferimento (nel caso in cui il circuito non sia connesso vedremo che è sempre possibile connetterlo interponendo un collegamento tra ogni coppia di circuiti non connessi). Ogni ramo del grafo è orientato come la corrente in quel ramo, ma l'orientazione della tensione del ramo può essere fatta indipendentemente da quella della corrente. Tuttavia, usualmente la tensione sarà orientata secondo la convenzione degli utilizzatori in modo che la corrente scorra dal terminale positivo a quello negativo. Con questa convenzione, la potenza $p(t) = v(t) i(t)$ è assorbita se positiva, erogata se negativa. Se la tensione è orientata in senso opposto (convenzione dei generatori), allora la potenza è assorbita se negativa, erogata se positiva.

Le Leggi di Kirchhoff (equazioni topologiche) permettono di scrivere delle equazioni che descrivono la topologia del circuito, ovvero il modo in cui i componenti sono connessi tra loro:

- Legge di Kirchhoff delle Correnti per un nodo (LKC_n): la somma algebrica delle correnti su tutti i rami in un nodo è nulla.
$$\sum_{r(\text{RAMI})} i_r = 0 \quad (1.a)$$

- Legge di Kirchhoff delle Tensioni per una maglia (LKT_m): per ogni maglia la somma algebrica delle tensioni di ramo è nulla.
$$\sum_{r(\text{RAMI})} v_r = 0 \quad (1.b)$$

- Legge di Kirchhoff delle Tensioni per un ramo (LKT_r): ogni tensione di ramo è pari alla differenza tra le tensioni di nodo dei suoi terminali positivo e negativo.
$$v_{AB} = e_A - e_B \quad (1.c)$$

A titolo di esempio si consideri il circuito illustrato nella figura 1.a ($N = 4$ nodi, $R = 6$ rami), dove non sono stati indicati i versi positivi delle tensioni di ramo, perché si suppone di considerare comunque versi di riferimento associati per tensioni e correnti di ramo mediante la scelta dell'utilizzatore. Il grafo orientato corrispondente è illustrato in figura 1.b.

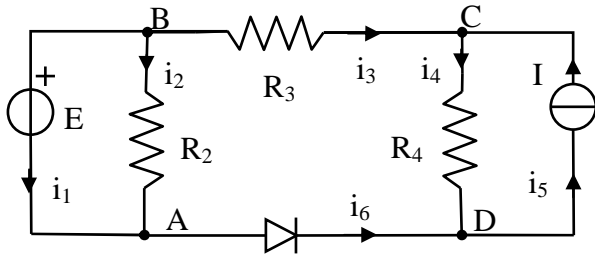


Figura 1.a

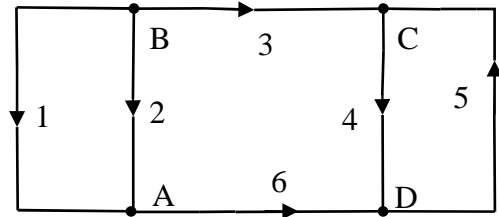


Figura 1.b

Scriviamo le equazioni *LKC* e *LKT* utilizzando il grafo associato al circuito. Supponiamo che il grafo abbia N nodi e R rami orientati. Con riferimento al grafo di figura 1.b, $N = 4$ (A, B, C, D) e $R = 6$. Si scelga ad esempio il nodo D come nodo di riferimento per le tensioni e si indichino con e_A , e_B ed e_C le tensioni dei nodi A, B e C rispetto al nodo di riferimento ($e_D = 0$). Le equazioni *LKT_r* e *LKC_n* assumono allora la forma rispettivamente delle (2.i) e (2.ii):

$$\text{LKT}_r: \begin{cases} \text{ramo 1} & v_1 = e_B - e_A \\ \text{ramo 2} & v_2 = e_B - e_A \\ \text{ramo 3} & v_3 = e_B - e_C \\ \text{ramo 4} & v_4 = e_C \\ \text{ramo 5} & v_5 = -e_C \\ \text{ramo 6} & v_6 = e_A \end{cases} \quad (2.i)$$

(una equazione per ogni ramo, quindi in generale R equazioni in cui compaiono R tensioni di ramo ed $N - 1$ tensioni di nodo; nell'esempio in oggetto possiamo quindi scrivere 6 *LKT_r* in cui compaiono 6 tensioni di ramo ed 3 tensioni di nodo)

$$\text{LKC}_n: \begin{cases} \text{nodo A} & -i_1 - i_2 + i_6 = 0 \\ \text{nodo B} & i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\ \text{nodo C} & -i_3 + i_4 - i_5 = 0 \end{cases} \quad (2.ii)$$

(una equazione per ogni nodo, meno quello di riferimento, quindi in generale $N - 1$ equazioni in cui compaiono R correnti di ramo; nell'esempio in oggetto possiamo quindi scrivere 3 *LKC_n* in cui compaiono 6 correnti di ramo). È ovviamente possibile scrivere una ulteriore *LKC_n* applicata al nodo di riferimento ($-i_6 - i_4 + i_5 = 0$), ma è facile mostrare che è una combinazione lineare delle precedenti $N - 1$. Infatti, tale equazione si ottiene sommando le (2.ii) cambiate segno.

Si noti che le (2.i) e le (2.ii) sono $R + N - 1$ equazioni in $2R + N - 1$ incognite (tensioni di ramo, tensioni di nodo e correnti di ramo): per risolvere il circuito dobbiamo aggiungere ancora R equazioni, e precisamente i modelli dei componenti.

Le (2.ii) sono state scritte considerando positive le correnti uscenti nei nodi e negative quelle entranti. La matrice dei coefficienti del sistema (2.ii) prende il nome di *matrice di incidenza ridotta*. Indicata con \mathbf{A} , essa ha dimensioni $(N - 1) \times R$; nell'esempio in oggetto possiamo quindi scrivere la seguente matrice 3×6 :

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

che ci permette di rappresentare il sistema (2.ii) nella forma $\mathbf{A} \mathbf{i} = \mathbf{0}$, avendo indicato con \mathbf{i} il vettore colonna delle R correnti di ramo ordinate secondo la numerazione dei rami. Con le convenzioni

utilizzate ed avendo scritto le equazioni nell'ordine specificato dalla numerazione dei rami (1, 2, 3, 4, 5, 6,...) e dall'indicizzazione dei nodi (A, B, C, D, ...) anche il sistema (2.i) può essere rappresentato tramite la matrice di incidenza ridotta come $\mathbf{v} = \mathbf{A}^T \mathbf{e}$, dove T indica l'operazione di trasposizione, \mathbf{v} il vettore colonna delle R tensioni di ramo ordinate secondo la dalla numerazione dei rami ed \mathbf{e} il vettore colonna delle N – 1 tensioni di nodo ordinate secondo l'indicizzazione dei nodi. Nell'esempio in oggetto possiamo quindi scrivere

$$\mathbf{A} \mathbf{i} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i_1 - i_2 + i_6 \\ i_1 + i_2 + i_3 \\ -i_3 + i_4 - i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^T \mathbf{e} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_A \\ e_B \\ e_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_B - e_A \\ e_B - e_A \\ e_B - e_C \\ e_C \\ -e_C \\ e_A \end{bmatrix}$$

Se si utilizzano convenzioni diverse nella scrittura delle LKC_n e delle LKT_r, o non si rispetta l'ordine predefinito di rami e nodi, la matrice di incidenza \mathbf{A} è comunque definibile e le LKC_n rappresentabili nella forma $\mathbf{A} \mathbf{i} = \mathbf{0}$. Tuttavia le LKT_r divengono $\mathbf{v} = \mathbf{M} \mathbf{e}$, dove \mathbf{M} è una matrice costante di dimensioni R×(N – 1) la cui relazione con \mathbf{A}^T è comunque definibile, ma più complicata.

La LKT può essere enunciata considerando le maglie del circuito (secondo la formulazione 1.b). Per questo, introduciamo il concetto di *albero T* associato ad un grafo *G*:

1. *T* è un sottografo di *G* con tutti i nodi e una parte dei rami; ogni ramo conserva la sua orientazione;
2. *T* è connesso;
3. *T* non ha maglie: c'è un solo percorso che collega ogni coppia di nodi.

Ovviamente, ad ogni grafo è associato più di un albero. Comunque, ogni albero *T* ha N – 1 rami. I rami di *G* appartenenti a *T* sono chiamati *rami dell'albero*, mentre i rimanenti sono chiamati *rami del coalbero* (e sono R – N + 1). Se aggiungiamo un ramo del coalbero a *T*, creiamo una maglia che è formata da rami dell'albero e da quell'unico ramo del coalbero (*maglia fondamentale*). Per ogni ramo del coalbero, possiamo ripetere l'operazione formando ogni volta una maglia diversa, indipendente da tutte le altre^(*). Si può allora dimostrare che il numero di maglie indipendenti di un circuito (cioè l'insieme delle maglie fondamentali) è pari ai rami del coalbero, e precisamente R – (N – 1) = R – N + 1.

^(*) Un insieme di *m* maglie si dice indipendente se le *m* equazioni ottenute applicando la LKT ad ognuna di esse sono linearmente indipendenti (cioè la matrice dei coefficienti è di rango massimo). Pertanto, una maglia è indipendente da altre se la relativa equazione LKT è indipendente dalle equazioni LKT delle altre.

A titolo di esempio si consideri il grafo illustrato nella figura 1.b; uno dei possibili alberi è illustrato con le linee continue (rami 2, 3 e 4). I rami tratteggiati sono quelli di coalbero (rami 1, 5 e 6). Le maglie indipendenti sono quindi $R - N + 1 = 3$ e, in particolare, $a = (1,2)$, $b = (5,4)$, $c = (6,4,3,2)$.^(**)

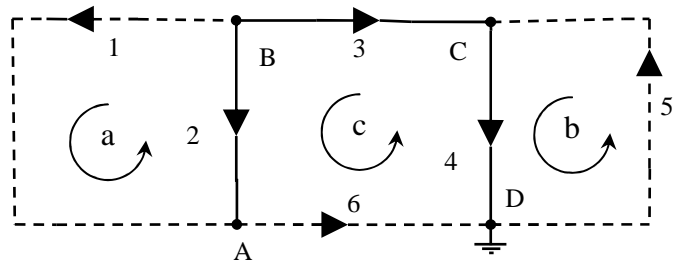


Figura 1.b

Applicando la LKT_m alle maglie fondamentali così definite (nell'ordine specificato dalla numerazione dei rami di coalbero che definiscono le maglie e orientando le maglie secondo la corrente dei rami di coalbero che definiscono le maglie) si ottiene il seguente sistema di equazioni lineari in cui compaiono solo le tensioni di ramo:

$$LKT_m: \begin{cases} mf(1,2) & \left\{ \begin{array}{l} v_1 - v_2 = 0 \\ v_5 + v_4 = 0 \\ v_6 - v_4 - v_3 + v_2 = 0 \end{array} \right. \end{cases} \quad (2.iii)$$

(una equazione per ogni maglia indipendente quindi in generale $R - N + 1$ equazioni in cui compaiono R tensioni di ramo; nell'esempio in oggetto possiamo quindi scrivere 3 LKT_m in cui compaiono 6 tensioni di ramo) Si noti che le (2.iii) e le (2.ii) sono R equazioni in $2R$ incognite (tensioni di ramo e correnti di ramo): per risolvere il circuito dobbiamo aggiungere ancora R equazioni, e precisamente i modelli dei componenti.

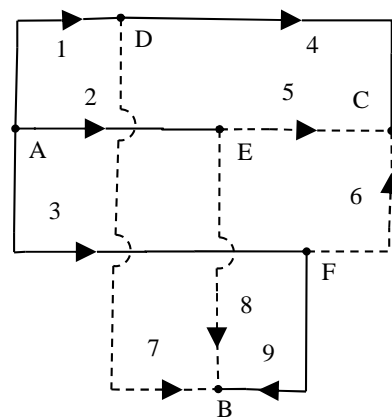
Le (2.iii) sono state scritte considerando i versi di riferimento associati con la convenzione da utilizzatore e scegliendo come verso di percorrenza della maglia fondamentale quello del ramo di coalbero che la definisce. La matrice dei coefficienti del sistema (2.iii) prende il nome di *matrice delle maglie fondamentali*. Indicata con \mathbf{B} , essa ha dimensioni $(R - N + 1) \times R$; nell'esempio in oggetto possiamo quindi scrivere la seguente matrice 3×6 :

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

che ci permette di rappresentare il sistema (2.iii) nella forma $\mathbf{B} \mathbf{v} = \mathbf{0}$, avendo indicato con \mathbf{v} il vettore colonna delle R tensioni di ramo ordinate secondo la numerazione dei rami^(o). Nell'esempio in oggetto possiamo quindi scrivere

^(**) Questa costruzione delle maglie fondamentali può sembrare complicata. In effetti, per i circuiti planari, cioè senza rami sovrapposti, la determinazione delle maglie fondamentali è intuitivamente legata al bordo delle regioni di piano racchiuse dai rami del circuito. La situazione è decisamente diversa per i circuiti non planari come quello in figura. Si noti che il ramo 7 si sovrappone ai rami 2 e 3 ma non ha nodi in comune con essi. Analogamente per il ramo 8. Il grafo presenta $N = 6$ nodi e $R = 9$ rami. Le maglie fondamentali sono quindi $R - N + 1 = 4$. Per determinarle definiamo un albero, ad esempio (1,2,3,4,9), e di conseguenza il coalbero (5,6,7,8). Le maglie fondamentali, individuate aggiungendo un ramo di coalbero alla volta all'albero, sono quindi:

$$(5,4,1,2), (6,4,1,3), (7,9,3,1), (8,9,3,2)$$



^(o) Si noti che le colonne di \mathbf{B} corrispondenti agli indici di ramo dei rami di coalbero (in questo caso 1, 5, 6) formano, per costruzione, una matrice identità il cui determinante (unitario) garantisce che \mathbf{B} è a rango massimo, ovvero che le LKT_m scritte in questa forma sono indipendenti.

$$\mathbf{B} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 - v_2 \\ v_4 + v_5 \\ v_2 - v_3 - v_4 + v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Con le convenzioni utilizzate ed avendo scritto le equazioni nell'ordine specificato dalla numerazione dei rami (1, 2, 3, 4, 5, 6,...) e dall'indicizzazione dei nodi (A, B, C, D,...) anche le LKC possono essere rappresentate tramite la matrice delle maglie fondamentali come $\mathbf{i} = \mathbf{B}^T \mathbf{i}_c$, dove T indica l'operazione di trasposizione, \mathbf{i} il vettore colonna delle R correnti di ramo ordinate secondo la numerazione dei rami ed \mathbf{i}_c il vettore colonna delle R - N + 1 correnti sui rami di coalbero ordinate corrispondentemente alle maglie fondamentali. Per la loro scrittura diretta è tuttavia necessario definire i tagli fondamentali, che saranno introdotti nel seguito. Se si utilizzano convenzioni diverse nella scrittura delle LK, o non si rispetta l'ordine predefinito, la matrice delle maglie fondamentali \mathbf{B} è comunque definibile e le LKT_m sono rappresentabili nella forma $\mathbf{B} \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Tuttavia le LKC divengono $\mathbf{i} = \mathbf{Q} \mathbf{i}_c$, dove \mathbf{Q} è una matrice costante di dimensioni $R \times (R - N + 1)$ la cui relazione con \mathbf{B}^T è comunque definibile, ma più complicata.

Si noti infine che poiché $\mathbf{B} \mathbf{v} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{A}^T \mathbf{e}$, data l'arbitrarietà delle tensioni di nodo \mathbf{e} , il prodotto $\mathbf{B} \mathbf{A}^T$ deve essere la matrice nulla di dimensioni $(R - N + 1) \times (N - 1) = 3 \times 3$. Infatti:

$$\mathbf{B} \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. CIRCUITI PRIVI DI MEMORIA

I circuiti privi di memoria (o circuiti adinamici) sono quelli in cui tutti i componenti del circuito sono privi di memoria ossia le loro caratteristiche tensione-corrente stabiliscono un legame istantaneo tra le due grandezze che non dipende dai valori da esse assunte in precedenza^(o). In tal caso il sistema risolvibile del circuito stesso è costituito da un sistema di equazioni algebriche ed il valore di tutte le grandezze incognite in un generico istante può essere calcolato dalla conoscenza del valore delle grandezze impresse del circuito in quello stesso istante.

2.1 ANALISI BASATE SUI NODI

Il metodo più semplice da applicare, per l'analisi di un circuito qualunque (R = numero di rami del circuito, N = numero di nodi del circuito), è il **metodo di Tableau**, in cui si considerano come incognite del sistema le R correnti di ramo, le R tensioni di ramo e le (N - 1) tensioni di nodo rispetto ad un nodo arbitrariamente scelto come nodo di riferimento. Il sistema risolvibile viene quindi ottenuto da R equazioni LKT_r (una per ogni ramo), da N - 1 equazioni LKC_n (una per ogni nodo, tranne quello di riferimento) e da R equazioni costitutive dei componenti.

^(o) Questo tipo di circuiti comprende anche i circuiti in regime DC, infatti induttori e condensatori sono equivalenti in DC a cortocircuiti e circuiti aperti, rispettivamente

A titolo di esempio si consideri il circuito illustrato nella figura 1, dove non sono stati indicati i versi positivi delle tensioni di ramo, perché si suppone di considerare comunque versi di riferimento associati con la regola dell'utilizzatore per tensioni e correnti di ramo. Si scelga il nodo D come nodo di riferimento e si indichino con e_A , e_B ed e_C le tensioni dei nodi A, B e C rispetto al riferimento.

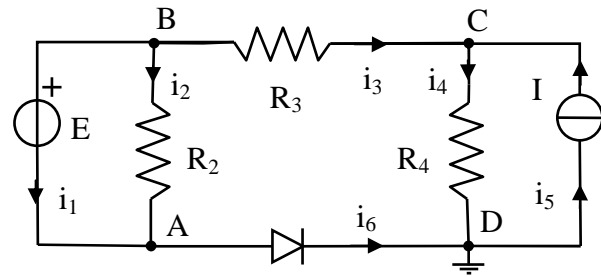


Figura 1

Le equazioni LKT_r e LKC_n assumono allora la forma rispettivamente delle (2.i) e (2.ii):

(R = 6 equazioni LKT_r in cui compaiono come incognite R = 6 tensioni di ramo ed N - 1 = 3 tensioni di nodo)

$$\begin{aligned} v_1 &= e_B - e_A \\ v_2 &= e_B - e_A \\ v_3 &= e_B - e_C \\ v_4 &= e_C \\ v_5 &= -e_C \\ v_6 &= e_A \end{aligned} \quad (2.i)$$

(N - 1 = 3 equazioni LKC_n in cui compaiono come incognite R = 6 correnti di ramo)

$$\begin{aligned} -i_1 - i_2 + i_6 &= 0 \\ i_1 + i_2 + i_3 &= 0 \\ -i_3 + i_4 - i_5 &= 0 \end{aligned} \quad (2.ii)$$

Il sistema viene quindi chiuso dalle seguenti equazioni costitutive dei componenti^(*):

(R = 6 equazioni costitutive dei componenti in cui compaiono come incognite R = 6 tensioni di ramo ed R = 6 correnti di ramo)

$$\begin{aligned} v_1 &= E \\ v_2 &= R_2 i_2 \\ v_3 &= R_3 i_3 \\ v_4 &= R_4 i_4 \\ i_5 &= I \\ v_6 i_6 &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Il sistema costituito dalle equazioni (2.i), (2.ii) e (3), dove sono note le grandezze E, I, R₂, R₃, ed R₄, costituisce un sistema di 15 equazioni nelle 15 incognite del problema che sono rispettivamente e_A , e_B , e_C , v_1 , v_2 , v_3 , v_4 , v_5 , v_6 , i_1 , i_2 , i_3 , i_4 , i_5 , i_6 . Il sistema di equazioni risolvente è non lineare per la presenza del diodo che è un componente non lineare (ultima delle (3)). Il procedimento illustrato è completamente trasferibile su un computer e la soluzione (o le soluzioni, poiché in generale, essendo il sistema non lineare, può esistere più di una soluzione) può essere ottenuta numericamente. In questo caso la soluzione può essere ottenuta eliminando la non linearità del sistema, considerando separatamente i due casi possibili: diodo in conduzione ($i_6 \geq 0$, $v_6 = 0$) oppure diodo interdetto ($i_6 = 0$, $v_6 \leq 0$).

Diodo in conduzione. Ponendo $v_6 = 0$ nelle (2.i) ed eliminando contemporaneamente l'ultima equazione delle (3) che è diventata una identità, si ottiene un sistema di 14 equazioni lineari nelle 14 incognite e_A , e_B , e_C , v_1 , v_2 , v_3 , v_4 , v_5 , i_1 , i_2 , i_3 , i_4 , i_5 , i_6 , la cui soluzione è la seguente:

$$\begin{aligned} e_A &= 0, \quad e_B = E, \quad e_C = R_4 \frac{E + R_3 I}{R_3 + R_4} \\ v_1 &= E, \quad v_2 = E, \quad v_3 = R_3 \frac{E - R_4 I}{R_3 + R_4}, \quad v_4 = R_4 \frac{E + R_3 I}{R_3 + R_4}, \quad v_5 = -R_4 \frac{E + R_3 I}{R_3 + R_4}, \quad v_6 = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$i_1 = -\frac{E - R_4 I}{R_3 + R_4} - \frac{E}{R_2}, \quad i_2 = \frac{E}{R_2}, \quad i_3 = \frac{E - R_4 I}{R_3 + R_4}, \quad i_4 = \frac{E + R_3 I}{R_3 + R_4}, \quad i_5 = I, \quad i_6 = -\frac{E - R_4 I}{R_3 + R_4}$$

Affinché la soluzione trovata non contraddica l'ipotesi di diodo in conduzione deve essere $i_6 \geq 0$ e quindi deve essere:

$$E \leq R_4 I \quad (5)$$

^(*) Come caratteristica del diodo si è indicato, per semplicità di scrittura, $v_i = 0$, invece del più corretto $\begin{cases} v = 0, i \geq 0 \\ i = 0, v \leq 0 \end{cases}$

Diodo interdetto. Ponendo $i_6 = 0$ nelle (2.ii) ed eliminando contemporaneamente l'ultima equazione delle (3) che è diventata una identità, si ottiene un sistema di 14 equazioni lineari nelle 14 incognite $e_A, e_B, e_C, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, i_1, i_2, i_3, i_4, i_5$, la cui soluzione è la seguente:

$$\begin{aligned} e_A &= -E + R_4 I, & e_B &= R_4 I, & e_C &= R_4 I \\ v_1 &= E, & v_2 &= E, & v_3 &= 0, & v_4 &= R_4 I, & v_5 &= -R_4 I, & v_6 &= -E + R_4 I \\ i_1 &= -\frac{E}{R_2}, & i_2 &= \frac{E}{R_2}, & i_3 &= 0, & i_4 &= I, & i_5 &= I, & i_6 &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Affinché la soluzione trovata non contraddica l'ipotesi di diodo interdetto deve essere $v_6 \leq 0$ e quindi deve essere:

$$E \geq R_4 I \quad (7)$$

Dal confronto della (5) con la (7) si vede che, una volta assegnati i valori di E, I ed R_4 , una sola delle due soluzioni è accettabile.

Riassumendo, per applicare il metodo di Tableau ad un circuito connesso qualunque (R = numero di rami, N = numero di nodi), si prende arbitrariamente un nodo come nodo di riferimento del circuito, si applica la LKT_r ad ogni ramo del circuito, si applica la LKC_n a tutti i nodi tranne quello di riferimento e si chiude il sistema con le caratteristiche dei componenti:	R equazioni LKT_r	$\mathbf{v} = \mathbf{M} \mathbf{e}$
	$N - 1$ equazioni LKC_n	$\mathbf{A} \mathbf{i} = \mathbf{0}$
	R equazioni caratteristiche	$\mathbf{f}(\mathbf{i}, \mathbf{v}) = \mathbf{0}$

dove \mathbf{v} è il vettore delle tensioni di ramo (dimensione R), \mathbf{i} è il vettore delle correnti di ramo (dimensione R), \mathbf{e} è il vettore delle tensioni di nodo (dimensione $N - 1$), \mathbf{M} è una matrice costante $R \times (N - 1)$ ed \mathbf{A} è una matrice costante $(N - 1) \times R$ [Come si è già visto, risulta che \mathbf{M} è la trasposta di \mathbf{A} , cioè: $\mathbf{M} = \mathbf{A}^T$]. In generale la funzione \mathbf{f} può dipendere anche dalla variabile temporale t , ma tale dipendenza, per semplicità di notazione, non è esplicitamente indicata. Il sistema risolvete contiene dunque $2R + N - 1$ equazioni in $2R + N - 1$ incognite.

Nel caso particolare in cui tutti i componenti siano resistori lineari, generatori indipendenti di tensione e di corrente oppure generatori pilotati con caratteristica lineare, la rete si definisce lineare^(c) e le equazioni delle caratteristiche possono essere scritte nella forma

$$R \text{ caratteristiche lineari} \qquad \mathbf{H} \mathbf{i} + \mathbf{K} \mathbf{v} = \mathbf{S}$$

dove \mathbf{H} è una matrice costante $R \times R$, \mathbf{K} è una matrice costante $R \times R$ ed \mathbf{S} è il vettore di dimensione R che contiene le tensioni e le correnti impresse dai generatori indipendenti (sui rami in cui sono presenti e zero altrove). In tal caso il sistema risolvete è lineare ed è possibile esprimere ogni variabile come combinazione lineare delle sole tensioni e correnti impresse dai generatori indipendenti. Infatti LKT_r, LKC_n , e le caratteristiche possono essere rappresentate in un unico sistema lineare, come segue (dove la matrice identità $R \times R$ è indicata con il simbolo $\mathbf{1}$):

$$\left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{1} & -\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{K} & \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \mathbf{v} \\ \mathbf{e} \\ \mathbf{i} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{S} \end{array} \right\| \Rightarrow \mathbf{T} \left\| \begin{array}{c} \mathbf{v} \\ \mathbf{e} \\ \mathbf{i} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{S} \end{array} \right\| \Rightarrow \left\| \begin{array}{c} \mathbf{v} \\ \mathbf{e} \\ \mathbf{i} \end{array} \right\| = \mathbf{T}^{-1} \left\| \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{S} \end{array} \right\|$$

La matrice dei coefficienti \mathbf{T} (matrice Tableau) è una matrice costante $(2R + N - 1) \times (2R + N - 1)$ che contiene, per costruzione, tutti i parametri dei componenti presenti nel circuito, tranne le grandezze impresse dai generatori indipendenti. Ovviamente, anche la matrice \mathbf{T}^{-1} è una matrice costan-

^(c) In generale, si dice circuito lineare un circuito che contiene solo componenti lineari (generatori pilotati compresi) e generatori indipendenti. Un circuito lineare quindi ha un sistema risolvete costituito solo da equazioni lineari.

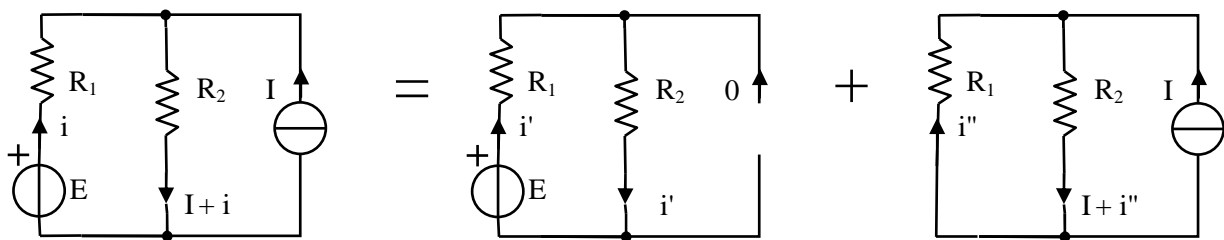
te. Ammesso che \mathbf{T} sia invertibile^(*), tutte le variabili circuitali sono quindi combinazioni lineari delle sole tensioni e correnti impresse dai generatori indipendenti. Pertanto, la corrente sul k-esimo ramo è rappresentabile come segue:

$$i_k = \sum_n g_{k,n} E_{s,n} + \sum_m \alpha_{k,m} I_{s,m} \quad \text{per ogni } k = 1, \dots, R$$

gen.ind.tensione
gen.ind.corrente

Tale relazione è l'enunciato del **Principio di Sovrapposizione degli effetti**: *In una rete lineare univocamente solubile la corrente in un generico ramo (effetto) è uguale alla somma algebrica delle correnti che vi sarebbero prodotte dai singoli generatori indipendenti presenti nella rete se agissero separatamente. Lo stesso vale per le tensioni di ramo e di nodo.*

Risolvere una rete lineare utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti significa scomporre la rete originaria in tante rete parziali quanti sono i generatori indipendenti, calcolare la corrente nei rami per ognuna di queste reti, e sommare algebricamente le correnti parziali. Si calcoli ad esempio la corrente i nella resistenza R_1 della rete di figura (a sinistra). Indicando con i' ed i'' le correnti nei due circuiti a destra, si ha $i = i' + i''$. La prima è la rete che si ottiene da quella originaria, annullando la corrente impressa del generatore indipendente di corrente, la seconda quella in cui è annullata la tensione impressa dal generatore indipendente di tensione. La figura illustra il concetto mostrando, nel contempo, in che modo si attua l'annullamento dei generatori: i generatori indipendenti a tensione impressa nulla sono equivalenti a cortocircuiti ($v = 0$ per entrambi i bipoli), i generatori indipendenti a corrente impressa nulla sono equivalenti a circuiti aperti ($i = 0$ per entrambi i bipoli).



Risolvendo si ha $i' = E/(R_1 + R_2)$ ed $i'' = -R_2 I/(R_1 + R_2)$ e quindi si ottiene: $i = (E - R_2 I)/(R_1 + R_2)$. Chiaramente questa procedura di soluzione richiede la soluzione di un numero di circuiti pari al numero di generatori indipendenti presenti nella rete iniziale. Pertanto può essere conveniente solo se tali circuiti sono più semplici da risolvere della rete iniziale. Con riferimento all'ultimo esempio si noti infatti che R_1 ed R_2 non sono né in serie né in parallelo nello schema iniziale; tuttavia, nel primo circuito semplificato R_1 ed R_2 sono in serie, mentre nel secondo sono in parallelo, ed in entrambi i casi possono essere sostituite con un solo resistore equivalente.

Quando il numero dei nodi N del circuito è piccolo, è possibile e conveniente utilizzare il **metodo delle tensioni di nodo** per scrivere un sistema risolvete contenente le tensioni di nodo incognite del circuito. Ad esempio, si considerino nuovamente le (2.i), (2.ii) e (3):

^(*) Come noto, condizione necessaria e sufficiente per l'invertibilità di una matrice è che il suo determinante sia non nullo. Nel caso in cui \mathbf{T} non sia invertibile ($\det \mathbf{T} = 0$) il circuito si dice non-univocamente solubile. Nel seguito si assumerà che tutti i circuiti trattati siano univocamente solubili. Questa situazione, che matematicamente è causata dalla non-indipendenza delle equazioni, è solitamente il risultato di un eccesso di idealizzazione nel modello del dispositivo fisico studiato. Ad esempio, è certamente possibile collegare in serie o in parallelo due generatori reali. In tal caso tuttavia è essenziale considerare le resistenze interne (spesso trascurate in prima approssimazione) per ottenere un circuito univocamente solubile. Infatti se in un circuito sono presenti due generatori indipendenti di tensione in parallelo, con la stessa tensione impressa E , è impossibile determinare le correnti circolanti su di essi (la LKT sulla maglia da essi formata porta alla identità: $0 = E - E$). Analogamente, se in un circuito sono presenti due generatori indipendenti di corrente in serie, con la stessa corrente impressa I , è impossibile determinare le tensioni su di essi (la LKC sul nodo in comune porta alla identità: $0 = I - I$).

(R = 6 equazioni LKT_r in cui compaiono come incognite R = 6 tensioni di ramo ed N - 1 = 3 tensioni di nodo)

$$\begin{aligned} v_1 &= e_B - e_A \\ v_2 &= e_B - e_A \\ v_3 &= e_B - e_C \\ v_4 &= e_C \\ v_5 &= -e_C \\ v_6 &= e_A \end{aligned} \quad (2.i)$$

(N - 1 = 3 equazioni LKC_n in cui compaiono come incognite R = 6 correnti di ramo)

$$\begin{aligned} -i_1 - i_2 + i_6 &= 0 \\ i_1 + i_2 + i_3 &= 0 \\ -i_3 + i_4 - i_5 &= 0 \end{aligned} \quad (2.ii)$$

(R = 6 equazioni costitutive dei componenti in cui compaiono come incognite R = 6 tensioni di ramo ed R = 6 correnti di ramo)

$$\begin{aligned} v_1 &= E \\ v_2 &= R_2 i_2 \\ v_3 &= R_3 i_3 \\ v_4 &= R_4 i_4 \\ i_5 &= I \\ v_6 i_6 &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Per ogni ramo è possibile sostituire le relazioni (2.i) nelle relazioni costitutive dei componenti (3). Tale sostituzione porta ad un sistema contenente un numero di equazioni pari a R + N - 1, in altrettante variabili (tensioni di nodo e correnti di ramo). Nell'esempio in oggetto otterremo quindi il seguente sistema di 9 equazioni nelle incognite e_A, e_B, e_C, i₁, i₂, i₃, i₄, i₅, i₆:

(N - 1 = 3 equazioni LKC_n in cui compaiono come incognite R = 6 correnti di ramo)

$$\begin{aligned} -i_1 - i_2 + i_6 &= 0 \\ i_1 + i_2 + i_3 &= 0 \\ -i_3 + i_4 - i_5 &= 0 \end{aligned} \quad (2.ii)$$

(R = 6 equazioni costitutive dei componenti in cui compaiono come incognite R = 6 correnti di ramo ed N - 1 = 3 tensioni di nodo)

$$\begin{aligned} e_B - e_A &= E \\ e_B - e_A &= R_2 i_2 \\ e_B - e_C &= R_3 i_3 \\ e_C &= R_4 i_4 \\ i_5 &= I \\ e_A i_6 &= 0 \end{aligned} \quad (8.i)$$

Infine, per tutti i componenti controllati in tensione (in questo esempio i rami 2, 3, 4 e 5), è possibile esplicitare le correnti e sostituire le equazioni costitutive nelle LKC [i₂ = (e_B - e_A)/R₂, i₃ = (e_B - e_C)/R₃, i₄ = e_C/R₄, i₅ = I]. Tale sostituzione porta ad un sistema contenente un numero di equazioni pari a N - 1 + (Numero di componenti non controllati in tensione), in altrettante variabili (correnti di ramo o tensioni di nodo). Nell'esempio in oggetto otterremo quindi (dato che il diodo ed il generatore di tensione non sono controllati in tensione) il seguente sistema di 5 equazioni nelle incognite e_A, e_B, e_C, i₁, i₆:

$$\begin{aligned} -i_1 - \frac{e_B - e_A}{R_2} + i_6 &= 0 \\ i_1 + \frac{e_B - e_A}{R_2} + \frac{e_B - e_C}{R_3} &= 0 \end{aligned} \quad (8.ii)$$

(equazioni costitutive dei componenti non controllati in tensione)

$$\begin{aligned} -\frac{e_B - e_C}{R_3} + \frac{e_C}{R_4} - I &= 0 \\ e_B - e_A &= E \\ e_A i_6 &= 0 \end{aligned} \quad (8.iii)$$

Riassumendo, per applicare il metodo delle tensioni di nodo ad un cir- R equazioni LKT_r **v = M e**

cuito connesso ($R =$ numero di rami, $N =$ numero di nodi), si prende arbitrariamente un nodo come riferimento, si applica la LKT_r ad ogni ramo, si applica la LKC_n a tutti i nodi tranne quello di riferimento e si chiude il sistema con le caratteristiche dei componenti:

$$N - 1 \text{ equazioni } LKC_n \quad \mathbf{A} \mathbf{i} = \mathbf{0}$$

$$R \text{ equazioni caratteristiche} \quad \mathbf{f}(\mathbf{i}, \mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

dove \mathbf{v} è il vettore delle tensioni di ramo (dimensione R), \mathbf{i} è il vettore delle correnti di ramo (dimensione R), \mathbf{e} è il vettore delle tensioni di nodo (dimensione $N - 1$), \mathbf{M} è una matrice costante $R \times (N - 1)$ ed \mathbf{A} è una matrice costante $(N - 1) \times R$.

Applicando il **metodo delle tensioni di nodo** è dunque sempre possibile sostituire le LKT nelle caratteristiche ottenendo il sistema ridotto:

$$N - 1 \text{ equazioni } LKC_n \quad \mathbf{A} \mathbf{i} = \mathbf{0}$$

$$R \text{ equazioni caratteristiche} \quad \mathbf{f}(\mathbf{i}, \mathbf{M} \mathbf{e}) = \mathbf{0}$$

Il sistema risolvibile contiene dunque $R + N - 1$ equazioni in $R + N - 1$ incognite. Tuttavia, se tutti i componenti sono controllati in tensione, cioè se $\mathbf{f}(\mathbf{i}, \mathbf{v}) = \mathbf{i} - \mathbf{g}(\mathbf{v})$, è possibile sostituire le caratteristiche nelle LKC , giungendo ad un sistema risolvibile di $N - 1$ equazioni nelle $N - 1$ incognite "tensioni di nodo".

$$N - 1 \text{ equazioni } LKC_n$$

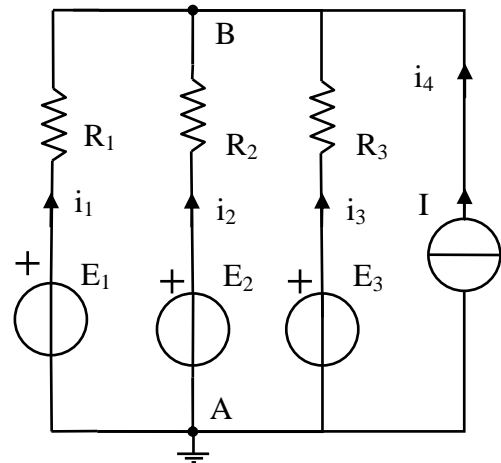
$$\mathbf{A} \mathbf{g}(\mathbf{M} \mathbf{e}) = \mathbf{0}$$

Il metodo delle tensioni di nodo è particolarmente utile quando N è piccolo e tutti i componenti sono controllati in tensione. Come esempio limite si consideri il circuito illustrato nella figura, che contiene due soli nodi ($N - 1 = 1$). Tre generatori di tensione reali sono collegati in parallelo a un generatore di corrente. Prendendo il nodo A come riferimento, è presente una sola tensione di nodo $e_B = v_{BA}$ incognita.

Ogni componente è controllato in tensione. Infatti, dalla caratteristica di ogni componente si può dedurre la corrente di ramo in funzione della tensione ai suoi terminali:

$$v_{BA} = E_k - R_k i_k \Rightarrow i_k = G_k (E_k - v_{BA}), k = 1, 2, 3$$

$$i_4 = I \quad (9)$$



La tensione di ciascun ramo può essere espressa come differenza delle tensioni di nodo dei terminali cui il ramo è collegato (LKT_r). Il sistema risolvibile si ottiene scrivendo la LKC_n per ogni nodo del circuito, escluso quello di riferimento, e risulta quindi costituito da $(N - 1) = 1$ equazioni nelle $(N - 1) = 1$ tensioni di nodo incognite. Con riferimento all'esempio di figura risulta:

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^3 G_k (E_k - v_{BA}) + I = 0 \Rightarrow v_{BA} = \frac{\sum_{k=1}^3 G_k E_k + I}{\sum_{k=1}^3 G_k} = \frac{\sum_{k=1}^3 \frac{E_k}{R_k} + I}{\sum_{k=1}^3 \frac{1}{R_k}} \quad (10)$$

La (10), che mostra la relazione tra la tensione v_{BA} , le tensioni e la corrente impressa dei generatori e le resistenze dei rami stessi; viene anche indicata col nome di **Teorema di Millman**, e può essere estesa ad un numero qualsiasi di generatori reali in parallelo.

Supponendo, ad esempio, che i dati del problema siano: $E_1 = 110 \text{ V}$, $E_2 = 105 \text{ V}$, $E_3 = 0 \text{ V}$, $R_1 = 0.5 \Omega$, $R_2 = 0.5 \Omega$, $R_3 = 5 \Omega$, $I = 3 \text{ A}$ dalla (10) si ottiene $v_{BA} = 103.1 \text{ V}$ e sostituendo nelle (9) $i_1 = 13.8 \text{ A}$, $i_2 = 3.8 \text{ A}$, $i_3 = -20.6 \text{ A}$.

2.2 ANALISI BASATE SULLE MAGLIE

Le soluzioni (4) e (6) sono state ottenute risolvendo un sistema di 14 equazioni lineari in 14 incognite. Tale soluzione, anche se la matrice del sistema è sparsa, può risultare complessa. L'ordine del sistema risolvete può essere ridotto osservando che è possibile ottenere un sistema di 2R equazioni indipendenti nelle sole tensioni e correnti di ramo incognite (**metodo fondamentale**).

Si consideri infatti la figura 2.a in cui sono indicate 3 ($R - N + 1$ risulta in questo caso uguale a 3) maglie fondamentali del circuito individuate in figura 1.b. Applicando la LKT_m alle maglie così definite si ottiene il seguente sistema di equazioni lineari in cui compaiono solo le tensioni di ramo (versi di riferimento associati):

($R - N + 1 = 3$ equazioni LKT_m in cui come incognite compaiono $R = 6$ tensioni di ramo)

$$\begin{aligned} v_1 - v_2 &= 0 \\ v_5 + v_4 &= 0 \\ v_6 - v_4 - v_3 + v_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.iii)$$

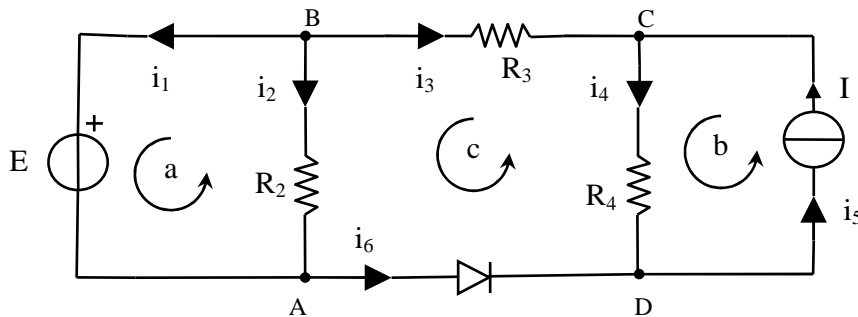


Figura 2.a

Le LKT_m (2.iii), le LKC_n (2.ii) e le relazioni costitutive (3) costituiscono un sistema di 2R equazioni, risolvendo il quale è possibile calcolare le 2R incognite tensioni e correnti di ramo.

($N - 1 = 3$ equazioni LKC_n in cui compaiono come incognite $R = 6$ correnti di ramo)

$$\begin{aligned} -i_1 - i_2 + i_6 &= 0 \\ i_1 + i_2 + i_3 &= 0 \\ -i_3 + i_4 - i_5 &= 0 \end{aligned} \quad (2.ii)$$

($R = 6$ equazioni costitutive dei componenti in cui compaiono come incognite $R = 6$ tensioni di ramo ed $R = 6$ correnti di ramo)

$$\begin{aligned} v_1 &= E \\ v_2 &= R_2 i_2 \\ v_3 &= R_3 i_3 \\ v_4 &= R_4 i_4 \\ i_5 &= I \\ v_6 i_6 &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Infine, per tutti i componenti controllati in tensione (in questo esempio il ramo 5) o in corrente (in questo esempio i rami 1, 2, 3, e 4), è possibile sostituire le equazioni costitutive nelle LKT_m ed LKC_n . Tale sostituzione porta ad un sistema contenente un numero di equazioni pari a $R +$ (Numero di componenti non controllati né in tensione né in corrente), in altrettante variabili (tensioni o correnti di ramo). Nell'esempio in oggetto otterremo quindi (dato che il diodo è l'unico componente presente non controllato né in tensione né in corrente) il seguente sistema di 7 equazioni nelle incognite $v_5, v_6, i_1, i_2, i_3, i_4, i_6$:

($R - N + 1 = 3$ equazioni LKT_m)

$$\begin{aligned} -E + R_2 i_2 &= 0 \\ -R_2 i_2 + R_3 i_3 + R_4 i_4 - v_6 &= 0 \\ -R_4 i_4 - v_5 &= 0 \end{aligned} \quad (3.i)$$

($N - 1 = 3$ equazioni LKC_n)

$$\begin{aligned} -i_1 - i_2 + i_6 &= 0 \\ i_1 + i_2 + i_3 &= 0 \\ -i_3 + i_4 - I &= 0 \end{aligned} \quad (3.ii)$$

(equazione costitutive dei componenti non controllati né in tensione né in corrente)

$$v_6 i_6 = 0 \quad (3.iii)$$

Riassumendo, per applicare il **metodo fondamentale** ad un circuito connesso (R = numero di rami, N = numero di nodi), si applica la LKT_m ad ogni maglia fondamentale del circuito, si applica la LKC_n a tutti i nodi tranne uno e si chiude il sistema con le caratteristiche dei componenti:

$$\begin{aligned} R - N + 1 \text{ equazioni } LKT_m \quad & \mathbf{B} \mathbf{v} = \mathbf{0} \\ N - 1 \text{ equazioni } LKC_n \quad & \mathbf{A} \mathbf{i} = \mathbf{0} \\ R \text{ equazioni caratteristiche} \quad & \mathbf{f}(\mathbf{i}, \mathbf{v}) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

dove \mathbf{v} è il vettore delle tensioni di ramo (dimensione R), \mathbf{i} è il vettore delle correnti di ramo (dimensione R), \mathbf{B} è una matrice costante $(R - N + 1) \times R$ ed \mathbf{A} è una matrice costante $(N - 1) \times R$. Il sistema risolvibile contiene dunque $2R$ equazioni in $2R$ incognite. Tuttavia, se tutti i componenti sono controllati in tensione o in corrente è possibile sostituire le caratteristiche nelle LKT ed LKC , giungendo ad un sistema risolvibile di R equazioni in R incognite.

Una differente semplificazione del sistema risolvibile (2.iii), (2.ii), (3) che prende il nome di **metodo dei tagli fondamentali (o metodo delle correnti di maglia)** si può ottenere osservando che le LKC permettono di esprimere la corrente in ciascun ramo di albero come una combinazione lineare delle correnti sui rami di coalbero. Infatti, dato che l'albero associato al grafo è, per definizione, privo di maglie, è sempre possibile associare ad ogni ramo d'albero una superficie chiusa (superficie di taglio) che intersechi, oltre ad esso, solo rami di coalbero. L'insieme dei rami intersecati da tale superficie chiusa prende il nome di taglio (la rimozione del taglio separa il grafo in due sotto-grafi non connessi).

Se tra i rami che costituiscono il taglio è presente un solo ramo di albero, il taglio prende il nome di taglio fondamentale relativo a quel ramo e a quell'albero. In figura 2.b sono illustrate le tre superfici che individuano i tre tagli fondamentali associati ai tre rami di albero (2, 3, 4). Dai tagli fondamentali [2, 1, 6], [3, 6], [4, 5, 6] è possibile ricavare le (11) applicando la Legge di Kirchhoff delle Correnti su tali superfici (LKC_t).

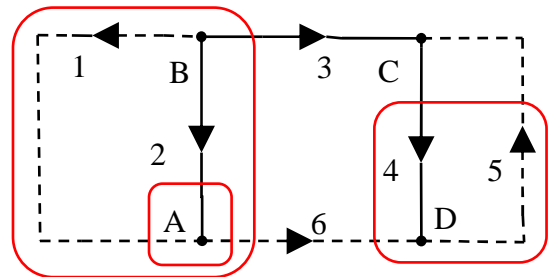


Figura 2.b

($N - 1 = 3$ equazioni LKC_t in cui compaiono come incognite $R = 6$ correnti di ramo)

$$LKT_t \quad \begin{cases} \text{tf [2,1,6]} & \begin{cases} -i_1 - i_2 + i_6 = 0 \\ i_3 + i_6 = 0 \\ -i_4 + i_5 - i_6 = 0 \end{cases} \\ \text{tf [3,6]} \\ \text{tf [4,5,6]} \end{cases} \quad (11)$$

(una relazione per ogni ramo di albero quindi in generale $N - 1$ relazioni che esprimono le $N - 1$ correnti di albero in funzione delle $R - N + 1$ correnti sui rami di coalbero; nell'esempio in oggetto possiamo quindi scrivere 3 relazioni che esprimono le 3 correnti di albero i_2 , i_3 e i_4 in funzione delle 3 correnti sui rami di coalbero i_1 , i_5 e i_6)

($N - 1 = 3$ equazioni LKC_t in cui compaiono come incognite $R = 6$ correnti di ramo)

$$\begin{aligned} i_2 &= -i_1 + i_6 \\ i_3 &= -i_6 \\ i_4 &= -i_6 + i_5 \end{aligned} \quad (8.i)$$

Con le convenzioni utilizzate ed avendo scritto le equazioni nell'ordine specificato dalla numerazione dei rami (1, 2, 3, 4, 5, 6, ...) e le (12.i) possono essere rappresentate tramite la matrice delle maglie fondamentali come $\mathbf{i} = \mathbf{B}^T \mathbf{i}_c$, dove T indica l'operazione di trasposizione, \mathbf{i} il vettore colonna delle R correnti di ramo ordinate secondo la numerazione dei rami ed \mathbf{i}_c il vettore colonna delle $R -$

$N + 1$ correnti sui rami di coalbero ordinate corrispondentemente alle maglie fondamentali. Infatti si ha^(*):

$$\mathbf{B}^T \mathbf{i}_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} i_1 \\ i_5 \\ i_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} i_1 \\ -i_1 + i_6 \\ -i_6 \\ i_5 - i_6 \\ i_5 \\ i_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{Bmatrix} = \mathbf{i}$$

Dato che le (11) sono state ottenute applicando la Legge di Kirchhoff delle Correnti, esse risultano equivalenti alle (2.ii) (infatti sostituendo le (12.i) nelle (2.ii) si ottengono tre identità $0 = 0$). Inoltre, per tutti i componenti sui rami di albero è possibile sostituire le relazioni (12.i) nelle relazioni costitutive dei componenti. Tale sostituzione porta ad un sistema contenente un numero di equazioni pari a $2R - N + 1$, in altrettante variabili (tensioni di ramo e correnti di coalbero).

Nell'esempio in oggetto otterremo quindi il seguente sistema di 9 equazioni nelle incognite $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, i_1, i_5, i_6$:

($R - N + 1 = 3$ equazioni LKT_m in cui come incognite compaiono $R = 6$ tensioni di ramo)

$$\begin{aligned} v_1 - v_2 &= 0 \\ v_5 + v_4 &= 0 \end{aligned} \quad (2.iii)$$

($R = 6$ equazioni costitutive dei componenti in cui compaiono come incognite $R = 6$ tensioni di ramo ed $R - N + 1 = 3$ correnti di coalbero)

$$\begin{aligned} v_6 - v_4 - v_3 + v_2 &= 0 \\ v_1 &= E \\ v_2 &= R_2(-i_1 + i_6) \\ v_3 &= -R_3 i_6 \\ v_4 &= R_4(-i_6 + i_5) \\ i_5 &= I \\ v_6 i_6 &= 0 \end{aligned} \quad (3.iv)$$

Infine, per tutti i componenti controllati in corrente (in questo esempio i rami 1, 2, 3, e 4), è possibile sostituire le equazioni costitutive nelle LKT_m. Tale sostituzione porta ad un sistema contenente un numero di equazioni pari a $R - N + 1 +$ (Numero di componenti non controllati in corrente), in altrettante variabili (tensioni di ramo o correnti di coalbero). Nell'esempio in oggetto otterremo quindi (dato che il diodo ed il generatore di corrente non sono controllati in corrente) il seguente sistema di 5 equazioni nelle incognite v_5, v_6, i_1, i_5, i_6 :

$$\begin{aligned} (R - N + 1 = 3 \text{ equazioni LKT}_m) \quad & E - R_2(-i_1 + i_6) = 0 \\ & v_5 + R_4(-i_6 + i_5) = 0 \end{aligned} \quad (12.ii)$$

(equazione costitutive dei componenti non controllati in corrente)

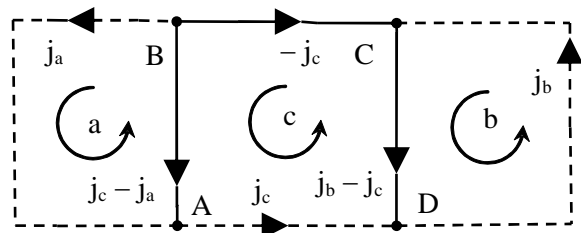
$$\begin{aligned} v_6 - R_4(-i_6 + i_5) + R_3 i_6 + R_2(-i_1 + i_6) &= 0 \\ i_5 &= I \\ v_6 i_6 &= 0 \end{aligned} \quad (12.iii)$$

^(*) Come si è già osservato precedentemente le righe di \mathbf{B}^T corrispondenti agli indici di ramo dei rami di coalbero (in questo caso 1, 5, 6) formano, per costruzione, una matrice identità. Le corrispondenti equazioni ($i_1 = i_1, i_5 = i_5, i_6 = i_6$) sono identità (irrilevanti) se si utilizzano per le correnti sui rami di coalbero gli stessi simboli delle correnti di ramo.

In alternativa si possono utilizzare simboli diversi per le correnti sui rami di coalbero; ad esempio:

$$i_1 = j_a, \quad i_5 = j_b, \quad i_6 = j_c$$

Gli indici a, b, c fanno riferimento alle maglie fondamentali definite dai rami di coalbero 1, 5, 6. Le variabili j_a, j_b, j_c prendono il nome di "correnti di maglia". Infatti utilizzando le (12.i) si deduce che ogni corrente di maglia scorre solo sui rami che definiscono la maglia stessa.



Si noti che risulta conveniente, se possibile, scegliere i rami dell'albero escludendo quelli contenenti generatori di corrente indipendenti. In tal caso infatti, si ottengono direttamente delle equazioni del tipo $i_s = I$ (relazione costitutiva del generatore di corrente), che consentono di ridurre direttamente l'ordine del sistema.

Riassumendo, per applicare il metodo dei tagli fondamentali ad un circuito connesso qualunque (R = numero di rami, N = numero di nodi), si definisce un albero (ed un coalbero), si applica la LKT_m ad ogni maglia fondamentale, si applica la LKC_t ad ogni taglio fondamentale e si chiude il sistema con le caratteristiche dei componenti:

$$R - N + 1 \text{ equazioni } LKT_m \quad \mathbf{B} \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$N - 1 \text{ equazioni } LKC_t \quad \mathbf{i} = \mathbf{Q} \mathbf{i}_c$$

(ed $R - N + 1$ identità)

$$R \text{ equazioni caratteristiche } \mathbf{f}(\mathbf{i}, \mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

dove \mathbf{v} è il vettore delle tensioni di ramo (dimensione R), \mathbf{i} è il vettore delle correnti di ramo (dimensione R), \mathbf{i}_c è il vettore delle correnti dei rami di coalbero (dimensione $R - N + 1$), \mathbf{B} è una matrice costante $(R - N + 1) \times R$ detta matrice delle maglie fondamentali e \mathbf{Q} è una matrice costante $R \times (R - N + 1)$ detta matrice dei tagli fondamentali (\mathbf{Q} è uguale a \mathbf{B}^T se si utilizzano le convenzioni definite precedentemente ed avendo scritto le equazioni nell'ordine specificato dalla numerazione dei rami).

Applicando il **metodo dei tagli fondamentali** è dunque sempre possibile sostituire le LKC nelle caratteristiche ottenendo il sistema ridotto:

$$R - N + 1 \text{ equazioni } LKT_m \quad \mathbf{B} \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$R \text{ equazioni caratteristiche } \mathbf{f}(\mathbf{Q} \mathbf{i}_c, \mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

Il sistema risolvibile contiene dunque $2R - N + 1$ equazioni in $2R - N + 1$ incognite. Tuttavia, se tutti i componenti sono controllati in corrente, cioè se $\mathbf{f}(\mathbf{i}, \mathbf{v}) = \mathbf{v} - \mathbf{h}(\mathbf{i})$, è possibile sostituire le caratteristiche nelle LKT , giungendo ad un sistema risolvibile di $R - N + 1$ equazioni nelle $R - N + 1$ incognite "correnti dei rami di coalbero".

$$R - N + 1 \text{ equazioni } LKT_m$$

$$\mathbf{B} \mathbf{h}(\mathbf{Q} \mathbf{i}_c) = \mathbf{0}$$

3. I TEOREMI DI THEVENIN E DI NORTON

La nozione di equivalenza tra componenti è utilizzata spesso per semplificare la soluzione dei circuiti. Nel caso migliore l'utilizzo ripetuto delle equivalenze porta ad un circuito elementare, che è immediatamente solubile. Ovviamente, se si è interessati alla soluzione del circuito iniziale, è necessario ricostruire "all'indietro" ogni sostituzione effettuata; può capitare anche che sia presente una sottorete (ovvero una parte del circuito) di cui non interessa determinare il funzionamento dettagliato. Questa procedura è semplice da utilizzare ma è limitata dalla disponibilità di equivalenze note. Infatti, le equivalenze introdotte finora (serie e parallelo di resistori, stella-triangolo di resistori, i due schemi possibili per i generatori reali, la riduzione da secondario a primario del trasformatore, ...) non esauriscono certamente tutti i casi possibili e quindi rimane il problema di determinare un circuito equivalente di una data sottorete lineare (ovvero un componente, ai cui terminali è collegata la restante parte del circuito). Nel caso più frequente la sottorete è un bipolo e in questo caso si possono utilizzare i teoremi di Thevenin e Norton per determinare il circuito equivalente. I teoremi sono due in quanto è necessario distinguere i bipoli controllati in corrente da quelli controllati in tensione^(o).

^(o) Verificare se un bipolo lineare è controllato in tensione o in corrente richiede la determinazione della sua caratteristica. Dato che questa è, per definizione, alla base della dimostrazione dell'equivalenza, cioè l'oggetto dei teoremi di Thevenin e Norton, si procede solitamente ipotizzando che il bipolo sia controllato in corrente e quindi applicando il teorema di Thevenin. Se i parametri del circuito equivalente non esistono (sono infiniti) l'ipotesi risulta essere falsa e quindi

Teorema di Thevenin

Ipotesi. Sono dati due bipoli, L ed N collegati come illustrato nella figura 3. Il bipolo L è una rete lineare e controllato in corrente, mentre il bipolo N può essere qualsiasi, anche non lineare.

Tesi. Limitatamente alla corrente i ed alla tensione v_{AB} alla porta, il circuito che si ottiene sostituendo il bipolo L (quello lineare) con un generatore di tensione ed un bipolo L' collegati in serie, è equivalente in ogni istante al circuito originale. Il bipolo L' si ottiene dal bipolo L annullando le grandezze impresse dei generatori indipendenti di tensione e di corrente eventualmente presenti (i generatori indipendenti di tensione vengono quindi sostituiti con dei corto-circuiti ed i generatori indipendenti di corrente vengono sostituiti con dei circuiti aperti). La tensione impressa E_0 del generatore di tensione di Thevenin è pari al valore della tensione v_{AB} alla porta del bipolo L quando la corrente i è nulla (si noti che il verso positivo di E_0 è arbitrario: una volta scelto il verso positivo, il valore di E_0 è pari alla tensione v_{AB} se il terminale positivo è A, è pari invece a $-v_{AB}$ se il terminale positivo è B).

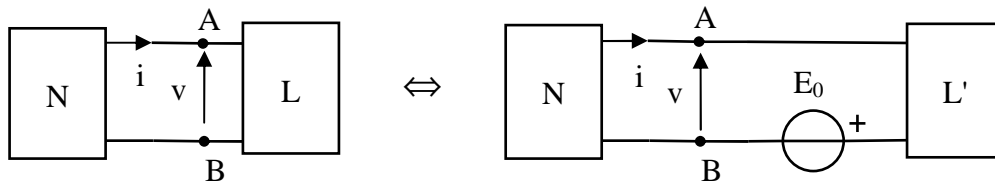
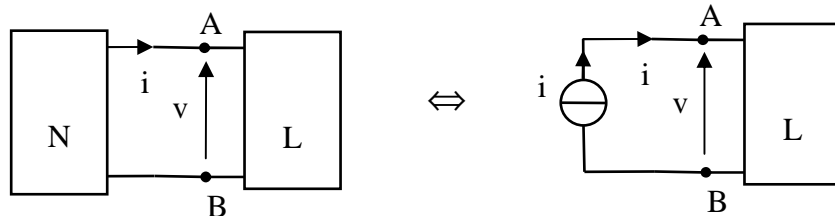


Figura 3 Teorema di Thevenin

Dimostrazione: poiché il bipolo L è controllato in corrente (data la corrente è possibile determinare la tensione ai terminali), è possibile, ai fini del calcolo della tensione v , sostituire al bipolo N un generatore di corrente indipendente la cui corrente impressa i coincide con la corrente assorbita dal bipolo L.



Dato che il bipolo L è lineare, è possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti. In particolare, consideriamo due circuiti: nel primo azzeriamo i generatori indipendenti in L (e indicheremo tale bipolo con L', nel secondo azzeriamo il generatore indipendente di corrente (come già visto, i generatori indipendenti di tensione nulla sono equivalenti a cortocircuiti, i generatori indipendenti di corrente nulla sono equivalenti a circuiti aperti.).



Si ha: $i = i' + i''$, dove i' ed i'' sono le correnti nelle due sottoreti
 e $v = v' + v''$, dove v' ed v'' sono le tensioni nelle due sottoreti

si passa al teorema di Norton. Si noti che una delle due ipotesi è sempre corretta, se il bipolo è lineare. Infatti la caratteristica è in generale $h i + k v = s$, con h e k non contemporaneamente nulli (altrimenti il circuito non è univocamente solubile: la matrice Tableau contiene una riga di zeri e quindi non è invertibile)

È evidente tuttavia che $i' = i$ e che $i'' = 0$. Inoltre, applicando la LKT alle due sottoreti otteniamo (si ricordi che per ipotesi L è controllato in corrente):

$$v' = V_{L'}(i') = V_{L'}(i) \qquad v'' = V_L(i'') = V_L(0)$$

dove $V_{L'}()$ ed $V_L()$ rappresentano le caratteristiche dei bipoli L' ed L , rispettivamente. Infine, definendo $E_0 = V_L(0) = v_{AB}|_{L \text{ a vuoto}}$ si ottiene:

$$v = V_{L'}(i) + E_0$$

che è proprio la caratteristica del bipolo equivalente mostrato in figura 3. Il teorema di Thevenin, come enunciato, è valido in regime qualsiasi. In particolare, in regime stazionario (corrente continua) si ha che “Un circuito lineare L con due terminali controllato in corrente è equivalente a un generatore di tensione reale (bipolo di Thevenin) formato da un generatore indipendente di tensione E_0 in serie con un resistore R_e , in cui E_0 è la tensione a vuoto ai terminali e R_e è la resistenza vista ai terminali quando i generatori indipendenti sono spenti”. Infatti, poiché il bipolo L è lineare e controllato in corrente, la sua relazione costitutiva è esprimibile per ipotesi come $V_{L'}(i) = R_e i$. Questo è sufficiente a definire univocamente il valore di R_e . Risulta infatti:

$$R_e = V_{L'}(i) / i = (v_{AB} / i)_{\text{Generatori Indipendenti di L Spenti}}$$

Si può applicare il teorema di Thevenin alla soluzione del circuito di figura 1 considerando come bipolo N il diodo e quindi come bipolo L l'insieme di tutti gli altri componenti del circuito (vedi figura 4.a). Il bipolo L' è quello indicato nella figura 4.b, mentre il valore della tensione E_0 viene calcolato risolvendo il circuito riportato nella figura 4.c^(*).

Sostituendo al bipolo L il suo equivalente di Thevenin si ottiene un circuito costituito da una sola maglia, la cui soluzione permette di determinare tensione e corrente sul diodo (i_6 e v_6). Tutte le altre variabili circuitali devono essere determinate dall'analisi del circuito iniziale in cui tuttavia i_6 ora è nota. È quindi possibile sostituire al diodo un generatore indipendente di corrente (definire la corrente sul ramo significa definire la caratteristica del componente sul ramo stesso).

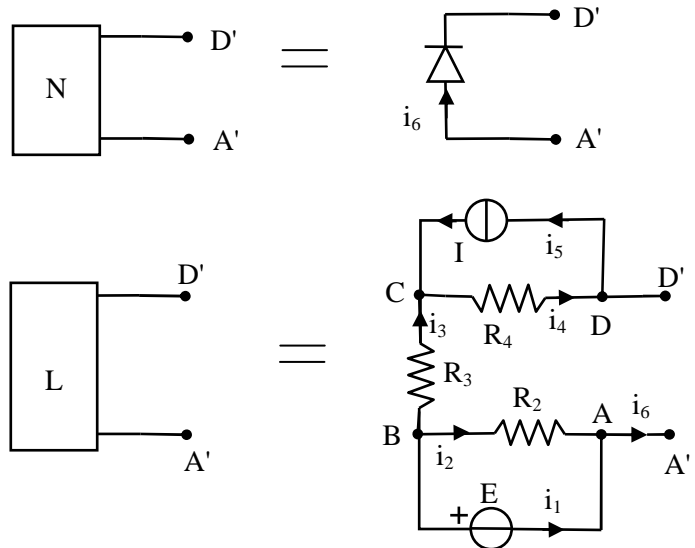
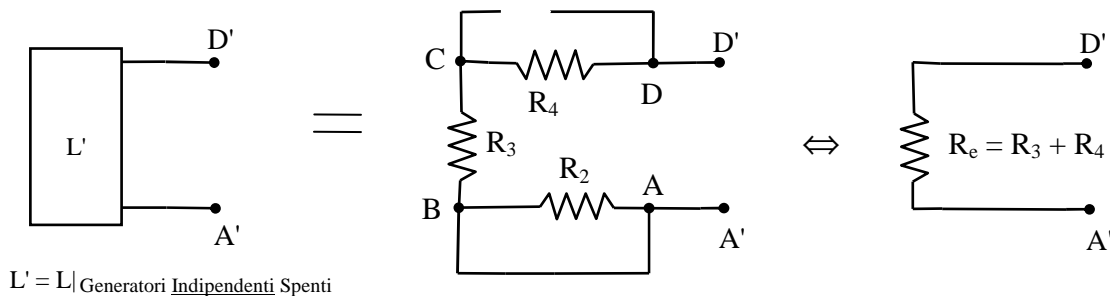


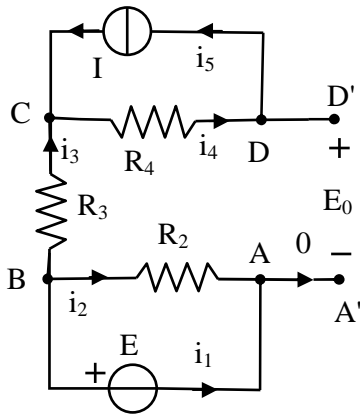
Figura 4.a



$L' = L|_{\text{Generatori Indipendenti Spenti}}$

Figura 4.b

^(*) Per comodità di notazione si utilizzano (tipicamente) per le variabili circuitali gli stessi simboli già definiti. Ovviamente le correnti in figura 4.c (bipolo L a vuoto) hanno valori diversi da quelle in figura 1 (bipolo L collegato al diodo).



← Figura 4.c

La soluzione del circuito di figura è immediata notando che il ramo 3 costituisce un taglio fondamentale. Pertanto $i_3 = 0$, e dunque si ha che

$$i_4 = i_5 = I$$

ed

$$i_2 = -i_1 = E/R_2$$

Infine la valutazione di E_0 si ottiene applicando la LKT alla sequenza ABCDA:

$$0 = -R_2 i_2 + R_3 i_3 + R_4 i_4 + E_0$$

ovvero

$$E_0 = E - R_4 I$$

Infine il valore della corrente i_6 viene ottenuto risolvendo il circuito illustrato nella figura 5, ottenuto sostituendo il bipolo L con il suo circuito equivalente di Thevenin.

Si ritrova quindi che sono possibili due casi: diodo interdetto oppure diodo in conduzione. Se il diodo è interdetto allora la corrente i_6 è nulla e la tensione $v_{A'D'}$, che essendo nulla la tensione sulla resistenza R_e (corrente nulla) coincide con $-E_0$, deve essere minore od uguale a zero, da cui si ricava ancora la relazione (7). Se il diodo è in conduzione allora la corrente i_6 è pari a $-E_0/R_e$ e deve risultare maggiore od uguale a zero, da cui si ricava ancora la (5).

Se $E = 24 \text{ V}$, $I = 4 \text{ A}$, $R_2 = 2 \ \Omega$, $R_3 = 12 \ \Omega$, $R_4 = 8 \ \Omega$, risulta $E_0 = -8 \text{ V}$ ed il diodo è in conduzione. Quindi dalla soluzione del circuito di figura 5 e dalle leggi di Kirchhoff per il circuito di figura 1 si ottiene:

È da notare che la soluzione del circuito di figura 1 in cui sono presenti solo componenti privi di memoria, si ottiene mediante relazioni algebriche (in ogni istante), a partire dai valori che in quell'istante hanno le eccitazioni del sistema (cioè le grandezze impresse dei generatori indipendenti).

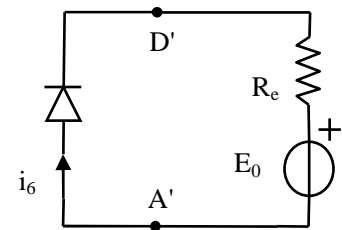


Figura 5

$$v_6 = 0, \quad i_6 = -\frac{E - R_4 I}{R_3 + R_4} = 0.4 \text{ A}$$

$$i_4 = I - i_6 = 3.6 \text{ A}, \quad v_4 = R_4 i_4 = 28.8 \text{ V}$$

$$i_5 = I = 4 \text{ A}, \quad v_5 = -v_4 = -28.8 \text{ V}$$

$$i_3 = -i_6 = -0.4 \text{ A}, \quad v_3 = R_3 i_3 = -4.8 \text{ V}$$

$$v_2 = E = 24 \text{ V}, \quad i_2 = v_2 / R_2 = 12 \text{ A}$$

$$v_1 = E = 24 \text{ V}, \quad i_1 = i_6 - i_2 = -11.6 \text{ A}$$

Teorema di Norton

Ipotesi. Sono dati due bipoli, L ed N collegati come illustrato nella figura 6. Il bipolo L è una rete lineare e controllato in tensione, mentre il bipolo N può essere qualsiasi, anche non lineare.

Tesi. Limitatamente alla corrente i ed alla tensione v_{AB} alla porta, il circuito che si ottiene sostituendo il bipolo L (quello lineare) con un generatore di corrente ed un bipolo L' collegati in parallelo, è equivalente in ogni istante al circuito originale. Il bipolo L' si ottiene dal bipolo L annullando le grandezze impresse dei generatori indipendenti di tensione e di corrente eventualmente presenti (il bipolo L' è lo stesso che interviene nel teorema di Thevenin). La corrente impressa I_c del generatore di corrente di Norton è pari al valore della corrente i alla porta del bipolo L quando la tensione v_{AB} è nulla (si noti che il verso positivo di I_c è arbitrario: una volta scelto il verso positivo il valore di I_c è pari alla corrente i se la freccia punta verso il terminale dove la corrente i esce da L, è pari invece a $-i$ se la freccia punta verso il terminale dove la corrente i entra in L)

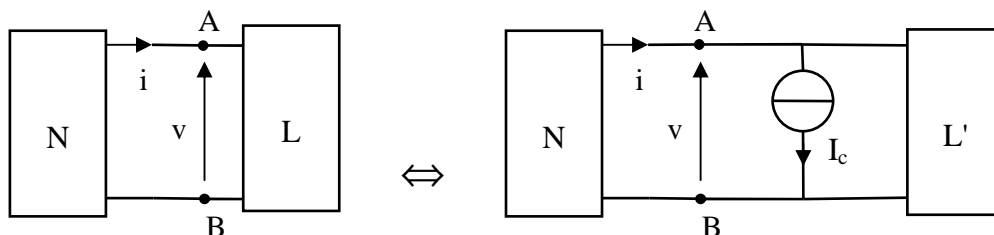
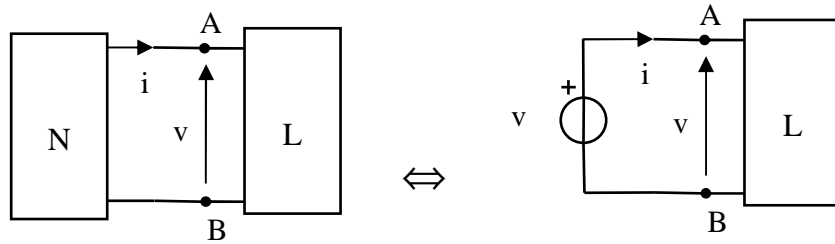
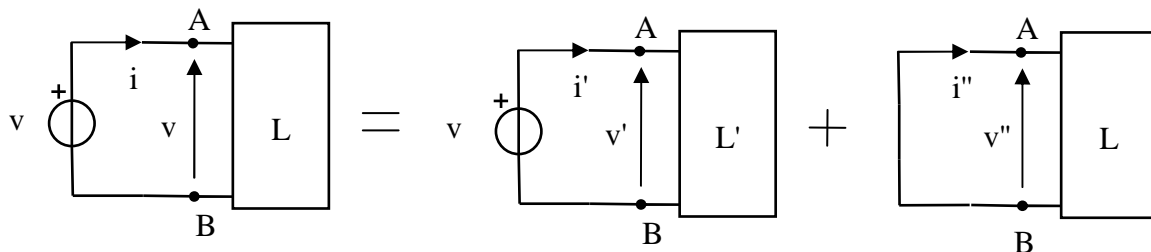


Figura 6 Teorema di Norton

Dimostrazione: poiché il bipolo L è controllato in tensione (data la tensione è possibile determinare la corrente assorbita), è possibile, ai fini del calcolo della corrente i , sostituire al bipolo N un generatore di tensione indipendente la cui tensione impressa v coincide con la tensione ai terminali del bipolo L.



Dato che il bipolo L è lineare, è possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti. In particolare, consideriamo due circuiti: nel primo azzeriamo i generatori indipendenti in L (e indicheremo tale bipolo con L' , nel secondo azzeriamo il generatore indipendente di tensione (come già visto, i generatori indipendenti di tensione nulla sono equivalenti a cortocircuiti, i generatori indipendenti di corrente nulla sono equivalenti a circuiti aperti.).



Si ha:

$$i = i' + i'', \text{ dove } i' \text{ ed } i'' \text{ sono le correnti nelle due sottoreti:}$$

e

$$v = v' + v'', \text{ dove } v' \text{ ed } v'' \text{ sono le tensioni nelle due sottoreti:}$$

È evidente tuttavia che $v' = v$ e che $v'' = 0$. Inoltre, applicando la LKC alle due sottoreti otteniamo (si ricordi che per ipotesi L è controllato in tensione):

$$i' = I_{L'}(v) = I_{L'}(v)$$

$$i'' = I_L(v'') = I_L(0)$$

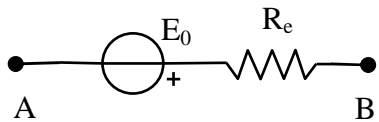
dove $I_{L'}(\)$ ed $I_L(\)$ rappresentano le caratteristiche dei bipoli L' ed L , rispettivamente. Infine, definendo $I_c = I_L(0) = i|_{L \text{ in cortocircuito}}$ si ottiene:

$$i = I_{L'}(v) + I_c$$

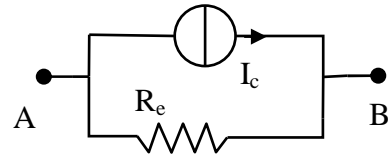
che è proprio la caratteristica del bipolo equivalente mostrato in figura 6. Il teorema di Norton, come enunciato, è valido in regime qualsiasi. In particolare, in regime stazionario (corrente continua) si ha che “Un circuito lineare L con due terminali controllato in tensione è equivalente a un bipolo (bipolo di Norton) formato da un generatore indipendente di corrente I_c in parallelo con un resistore R_e , in cui I_c è la corrente di cortocircuito tra i terminali e R_e è la resistenza vista ai terminali quando i generatori indipendenti sono spenti”. Infatti, poiché il bipolo L è lineare e controllato in tensione, la sua relazione costitutiva è esprimibile per ipotesi come $I_{L'}(v) = v/R_e$. Questo è sufficiente a definire univocamente il valore di R_e . Risulta infatti:

$$R_e = v/I_{L'}(v) = (v_{AB}/i)_{\text{Generatori Indipendenti di L Spenti}}$$

Si noti che tale espressione coincide con quella trovata nel teorema di Thevenin. Infatti, applicando il teorema di Norton al bipolo di Thevenin in regime stazionario si ottiene l'equivalenza mostrata in figura, valida se $I_c = E_0 / R_e$, ovvero se $E_0 = R_e I_c$.



\Leftrightarrow
se e solo se
 $I_c = E_0/R_e$



Si può applicare il teorema di Norton alla soluzione del circuito di figura 1 considerando come bipolo N il diodo ideale e quindi come bipolo L l'insieme di tutti gli altri componenti del circuito (vedi figura 7.a). Il bipolo L' è quello indicato nella figura 7.b, mentre il valore della corrente I_c viene calcolata risolvendo il circuito riportato nella figura 7.c.

Sostituendo al bipolo L il suo equivalente di Norton si ottiene un circuito semplice, la cui soluzione permette di determinare tensione e corrente sul diodo (i_6 e v_6). Tutte le altre variabili circuitali devono essere determinate dall'analisi del circuito iniziale in cui tuttavia v_6 ora è nota. È quindi possibile sostituire al diodo un generatore indipendente di tensione (definire la tensione sul ramo significa definire la caratteristica del componente sul ramo stesso).

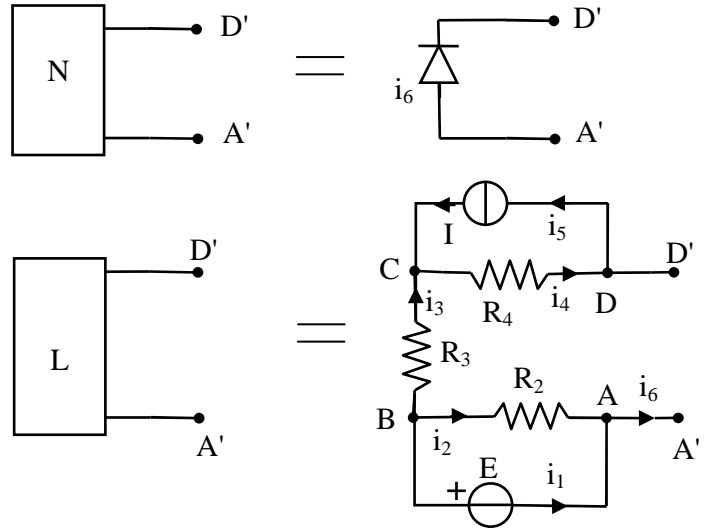
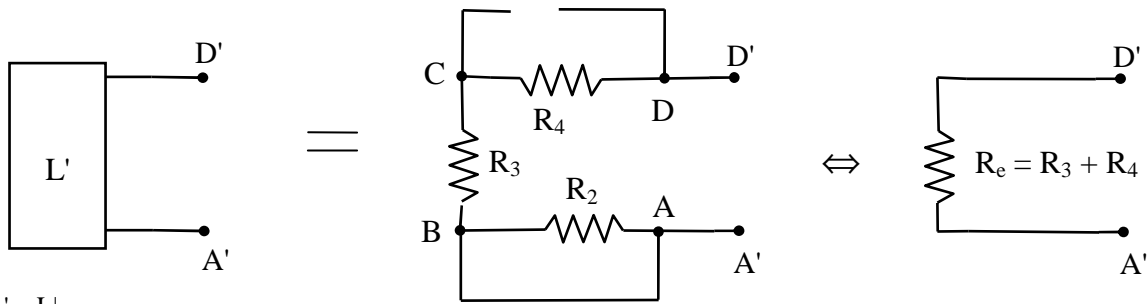
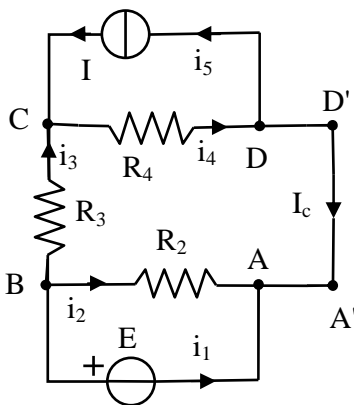


Figura 7.a



$L' = L | \text{Generatori Indipendenti Spenti}$

Figura 7.b



← Figura 7.c

La soluzione del circuito di figura è immediata notando che:

$$\begin{aligned} i_5 &= I \\ i_4 &= I + I_c \\ i_3 &= I_c \\ i_2 &= E/R_2 \\ i_1 &= -I_c - E/R_2 \end{aligned}$$

La valutazione di I_c si ottiene applicando la LKT alla sequenza ABCDA:

$$\begin{aligned} 0 &= -R_2 i_2 + R_3 i_3 + R_4 i_4 \\ 0 &= -E + R_3 I_c + R_4 (I + I_c) \end{aligned}$$

ovvero $I_c = (E - R_4 I)/(R_3 + R_4)$

Infine il valore della corrente i_6 viene ottenuto risolvendo il circuito illustrato nella figura 8, ottenuto sostituendo il bipolo L con il suo circuito equivalente di Norton.

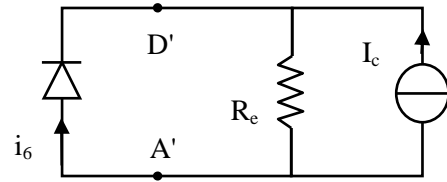


Figura 8

Si ritrova quindi che sono possibili due casi: diodo interdetto oppure diodo in conduzione. Se il diodo è interdetto allora la corrente i_6 è nulla e la tensione $v_{AD'}$, che coincide con la tensione sulla resistenza R_e , cioè con $-R_e I_c$, deve essere minore od uguale a zero, da cui si ricava ancora la relazione (7). Se il diodo è in conduzione allora la corrente i_6 è pari a $-I_c$ e deve risultare maggiore od uguale a zero, da cui si ricava ancora la (5).

4. CIRCUITI NON CONNESSI

Tutti i circuiti visti sinora godono della *proprietà di connessione*, secondo la quale tutto il circuito è connesso elettricamente, e quindi per ogni coppia di nodi del circuito è possibile trovare un percorso che li connetta seguendo i rami del grafo. Consideriamo ora il caso in cui il circuito da studiare sia costituito da due o più sottoreti non connesse. Si consideri ad esempio il circuito di figura 9.a. Sostituendo al trasformatore ideale il suo circuito equivalente si ottiene la rete di figura 9.b. La rete non è connessa, infatti non è possibile per ogni nodo del circuito trovare un percorso che, seguendo i rami del grafo, connetta tale nodo al nodo di riferimento. Analogamente, non è possibile definire un albero per l'intero circuito. I metodi di Tableau, delle tensioni di nodo e delle correnti di coalbero non sono quindi direttamente applicabili. Possiamo però applicare il metodo fondamentale (in cui le variabili sono le tensioni e le correnti di ramo) ad ogni sottorete.

Ad esempio, per il circuito di figura 9.b, la sottorete a primario (P) ha $R_1 = 2$ rami e $N_1 = 2$ nodi, e la sottorete a secondario (S) ha $R_2 = 2$ e $N_2 = 2$.

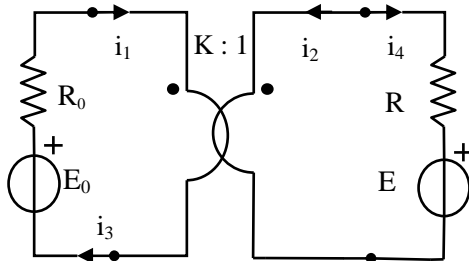


Figura 9.a

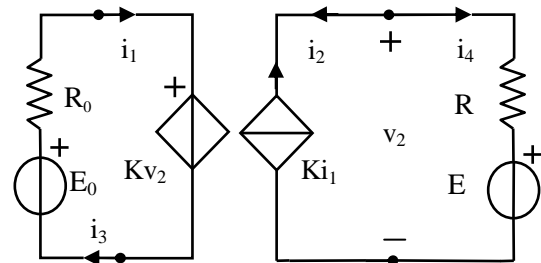


Figura 9.b

Le LKT_m, le LKC_n e le caratteristiche della sottorete P costituiscono un sistema di $2 R_1$ equazioni in cui compaiono le $2 (R_1 + R_2)$ tensioni e le correnti di ramo di tutta la rete:

$$(R_1 - N_1 + 1 = 1 \text{ equazioni LKT}_m \text{ per la sottorete P})$$

$$(N_1 - 1 = 1 \text{ equazioni LKC}_n \text{ per la sottorete P})$$

$$(R_1 = 2 \text{ caratteristiche dei componenti della sottorete P})$$

$$v_1 + v_3 = 0 \quad (13.i)$$

$$i_1 - i_3 = 0 \quad (13.ii)$$

$$\begin{aligned} v_1 &= K v_2 \\ v_3 &= -E_0 + R_0 i_3 \end{aligned} \quad (13.iii)$$

Le LKT_m, le LKC_n e le caratteristiche della sottorete S costituiscono un sistema di $2 R_2$ equazioni in cui compaiono le $2 (R_1 + R_2)$ tensioni e le correnti di ramo di tutta la rete:

$$(R_2 - N_2 + 1 = 1 \text{ equazioni LKT}_m \text{ per la sottorete S})$$

$$(N_2 - 1 = 1 \text{ equazioni LKC}_n \text{ per la sottorete S})$$

$$(R_2 = 2 \text{ caratteristiche dei componenti della sottorete S})$$

$$v_2 - v_4 = 0 \quad (14.i)$$

$$i_2 + i_4 = 0 \quad (14.ii)$$

$$\begin{aligned} i_2 &= -K i_1 \\ v_4 &= R i_4 + E \end{aligned} \quad (14.iii)$$

Pertanto, le (13), (14), costituiscono un sistema di 2 ($R_1 + R_2$) equazioni in cui compaiono le 2 ($R_1 + R_2$) tensioni e le correnti di ramo di tutta la rete. Analogamente quindi ai circuiti connessi, le LKT_m, le LKC_n (applicate ad ogni sottorete) e le relazioni costitutive costituiscono un sistema di 2R equazioni, risolvendo il quale è possibile calcolare le 2R incognite tensioni e correnti di ramo.⁽⁹⁾ La soluzione del sistema (13-14) è la seguente:

$$i_1 = i_3 = \frac{E_0 - KE}{R_0 + K^2R} \quad v_1 = -v_3 = K \frac{KRE_0 + R_0E}{R_0 + K^2R} \quad i_2 = -i_4 = -K \frac{E_0 - KE}{R_0 + K^2R} \quad v_2 = v_4 = \frac{KRE_0 + R_0E}{R_0 + K^2R}$$

Se i dati sono $E_0 = 100$ V, $E = 12$ V, $K = 10$, $R_0 = 0.5$ Ω, $R = 0.1$ Ω, si ottiene $i_1 = -1.905$ A, $i_2 = 19.05$ A, $i_3 = -1.905$ A, $i_4 = -19.05$ A, $v_1 = 100.9$ V, $v_2 = 10.09$ V, $v_3 = -100.9$ V, $v_4 = 10.09$ V.

Modificando la topologia del circuito risulta inoltre possibile applicare anche gli altri metodi ai circuiti non connessi. A tale scopo, si consideri il grafo di figura 10.a: in assenza di informazioni sui componenti presenti sui rami potremmo definire due riferimenti (più in generale, uno per ogni sottorete connessa). La difficoltà in tal caso è dovuta al fatto che, mentre per il primo riferimento (Ref 1) possiamo annullare la tensione del nodo corrispondente, per il secondo riferimento (Ref 2) la tensione del nodo corrispondente è incognita (rispetto al primo riferimento). Dal grafo di figura 10.a è inoltre chiaro che non c'è scambio di corrente tra le due sottoreti. Consideriamo ora il grafo di figura 10.b, in cui si è inserito il ramo 5 tra i nodi di riferimento delle due sottoreti (e dunque se ne è lasciato uno solo per tutta la rete). Il ramo 5 è un taglio fondamentale e dunque $i_5 = 0$ (e non c'è scambio di corrente tra le due sottoreti).

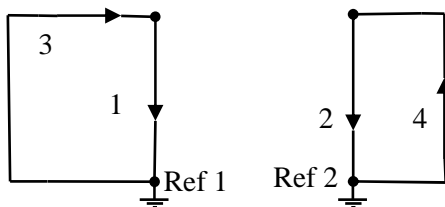


Figura 10.a

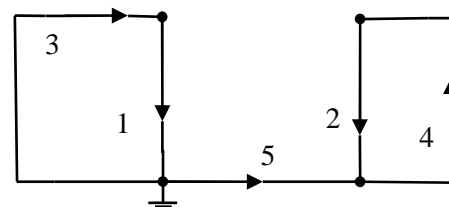


Figura 10.b

Il componente più opportuno da inserire sul ramo 5 dipende anche dalle informazioni disponibili: se si conosce (ed è un dato aggiuntivo) la tensione tra i due riferimenti ($E_{Ref1} - E_{Ref2}$), è possibile inserire un generatore di tensione indipendente (come in figura 11.a). In caso contrario la tensione tra i riferimenti è incognita e possiamo inserire un cortocircuito come in figura 11.b (equivalente a supporre $E_{Ref2} = 0$) con l'avvertenza che la differenza tra tensioni di nodi appartenenti a due reti diverse non ha logicamente senso. In entrambi i casi il circuito è connesso e possiamo utilizzare ogni metodo già visto per la sua soluzione.

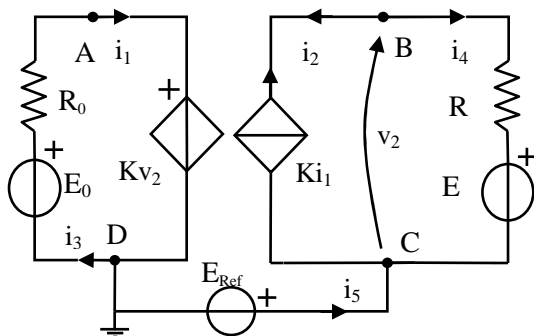


Figura 11.a

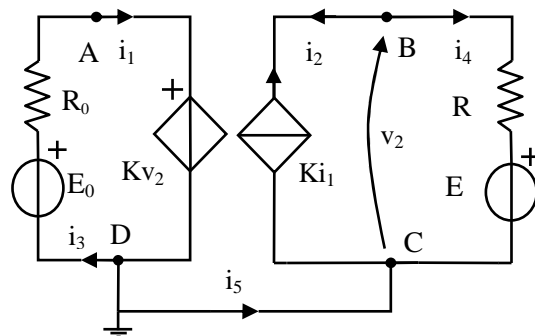


Figura 11.b

Con riferimento al circuito di figura 11.b, con $R = 5$ rami ed $N = 4$ nodi, si ha:

Metodo dei tagli fondamentali ($R - N + 1 + (\text{Numero di componenti non controllati in corrente}) = 4$ equazioni)

⁽⁹⁾ Si noti che è fondamentale applicare le Leggi di Kirchoff ad ogni sottorete separatamente. In caso contrario, con riferimento alla figura 19.b, detti $R = 4$ i rami del circuito e $N = 4$ i nodi, si scriverebbe sbagliando $R - N + 1 = 1$ equazioni LKT_m ed $N - 1 = 3$ equazioni LKC_n. Come si vede dalle (13) e (14) si sono applicate invece 2 LKT_m e 2 LKC_n.

$$(R - N + 1 = 2 \text{ equazioni LKT}_m) [\text{albero} = 1, 5, 2] \quad -E_0 + R_0 i_1 + v_1 = 0, \quad -E + R i_2 + v_2 = 0 \quad (15.i)$$

$$(\text{caratteristiche dei componenti non controllati in corrente}) \quad v_1 = K v_2, \quad i_2 = -K i_1 \quad (15.ii)$$

Metodo delle tensioni di nodo ($N - 1 + (\text{Numero di componenti non controllati in tensione}) = 6$ equazioni)

$$(N - 1 = 3 \text{ equazioni LKC}_n) [e_D = 0] \quad \frac{E_0 - e_A}{R_0} - i_1 = 0, \quad \frac{e_B - E}{R} + i_2 = 0, \quad -\frac{e_B - E}{R} - i_2 - i_5 = 0 \quad (16.i)$$

$$(\text{caratteristiche dei componenti non controllati in tensione}) \quad e_A = K e_B, \quad i_2 = -K i_1, \quad e_C = 0 \quad (16.ii)$$

La soluzione del sistema (16) è la seguente:

$$i_1 = \frac{E_0 - KE}{R_0 + K^2 R} \quad e_A = K \frac{KRE_0 + R_0 E}{R_0 + K^2 R} \quad i_2 = -K \frac{E_0 - KE}{R_0 + K^2 R} \quad e_B = \frac{KRE_0 + R_0 E}{R_0 + K^2 R} \quad i_5 = 0 \quad e_C = 0$$