CIRCUITI CON MEMORIA

Vengono detti circuiti con memoria (o circuiti dinamici) quelli in cui è presente almeno un componente dotato di memoria (come induttori e condensatori, ma non solo); in questo caso il sistema risolvente del circuito stesso contiene le caratteristiche (differenziali) dei componenti con memoria. Il valore di tutte le variabili circuitali in un generico istante può essere calcolato solo dalla conoscenza del valore delle grandezze impresse dai generatori indipendenti nel circuito in tutto l'intervallo temporale precedente all'istante considerato, a partire da un istante iniziale in cui sono note le variabili di stato del sistema (quelle grandezze cui è associata una energia elettromagnetica immagazzinata: la tensione sui condensatori e la corrente negli induttori). Tutti i metodi precedentemente descritti per il caso dei circuiti privi di memoria sono applicabili ai circuiti con memoria, ma portano a scrivere un sistema di equazioni algebrico - differenziali. Ad esempio, per quanto riguarda l'analisi di Tableau, le equazioni costituite dalle LKC e LKT rimangono un sistema di equazioni algebriche lineari che viene però completato dalle caratteristiche dei componenti in cui compaiono i termini differenziali. La maggior parte dei metodi di analisi, sia esatti che numerici, presuppongono che il sistema da risolvere sia in forma normale (o canonica) in cui le derivate sono esplicitate. A tal fine si può utilizzare il metodo delle equazioni di stato, che permette di ottenere un sistema differenziale in forma normale di equazioni differenziali del primo ordine.

1. METODO DELLE EQUAZIONI DI STATO

Si consideri un circuito in cui gli unici componenti dotati di memoria siano induttori e condensatori. È possibile pervenire con un procedimento automatico ad un sistema risolvente costituito da tante equazioni differenziali ordinarie del primo ordine quanti sono i condensatori e gli induttori presenti nel circuito (equazioni di stato), ed in cui le incognite sono le variabili di stato del circuito, e cioè le tensioni tra i terminali dei condensatori e le correnti attraverso gli induttori.

Si proceda come segue:

1. Definire le caratteristiche di induttori e condensatori, esplicitando le derivate di v_C ed i_L;
2. Nel circuito (con memoria) sostituire induttori e condensatori con, rispettivamente, generatori indipendenti di corrente e di tensione (grandezze impresse pari alle variabili di stato v_C ed i_L). Risolvere il circuito (privo di memoria) risultante per determinare le variabili complementari (i_C e v_L);
3. Sostituire i_C e v_L nelle caratteristiche per ottenere le equazioni di stato.

Si consideri ad esempio il circuito lineare illustrato nella figura 1.a. Le caratteristiche del condensatore e dell'induttore portano a scrivere le seguenti equazioni, in cui sono esplicitate le derivate delle variabili di stato:

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{i_C}{C}, \quad \frac{di_L}{dt} = \frac{v_L}{L} \qquad (1)$$

Per ottenere un sistema di due equazioni (per costruzione differenziali del primo ordine) in due variabili (le variabili di stato v_C ed i_L) è necessario determinare la corrente attraverso il condensatore i_C e la tensione ai capi dell'induttore v_L in funzione di v_C ed i_L. A tal fine si può procedere supponendo (formalmente) note le variabili di stato. In questo modo il condensatore può essere sostituito, nel circuito, con un generatore di tensione a tensione impressa v_C e l'induttore con un generatore di corrente a corrente impressa i_L.

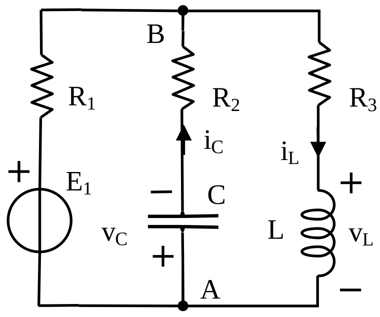


Figura 1.a

L'utilità di questa sostituzione è dovuta al fatto che il circuito che si ottiene, illustrato nella figura 1.b, è privo di memoria e quindi può essere risolto, con una qualsiasi delle metodologie già viste, per determinare la tensione v_L e la corrente i_C.

In particolare, la soluzione del circuito di figura 1.b può essere ottenuta applicando il teorema di Millman (la serie resistore - generatore di corrente è equivalente al solo generatore di corrente: $i_3 = -i_L$.):

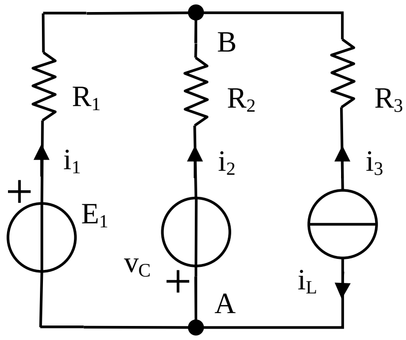


Figura 1.b

$$v_{BA} = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{v_C}{R_2} - i_L}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} i_1 = \dfrac{E_1 - v_{BA}}{R_1} \\ i_2 = \dfrac{-v_C - v_{BA}}{R_2} \\ i_3 = -i_L \end{cases} \qquad (2)$$

È quindi possibile esprimere la corrente i_C e la tensione v_L in funzione delle variabili di stato e delle grandezze impresse dai generatori indipendenti (in questo caso, E_1):

$$\begin{aligned} i_C &= \frac{-v_C - v_{BA}}{R_2} \\ v_L &= v_{BA} - R_3 i_L \end{aligned} \qquad (3)$$

Sostituendo la (2) nella (3) e introducendo per semplicità di notazione le conduttanze si ha:

$$\begin{aligned} i_C &= -\frac{G_1 G_2 E_1}{G_1 + G_2} - \frac{G_1 G_2 v_C}{G_1 + G_2} + \frac{G_2 i_L}{G_1 + G_2} \\ v_L &= \frac{G_1 E_1}{G_1 + G_2} - \frac{G_2 v_C}{G_1 + G_2} - \left(\frac{1}{G_1 + G_2} + R_3 \right) i_L \end{aligned} \qquad (4)$$

La sostituzione delle (4) nelle (1) fornisce quindi il risultato voluto, ovvero un sistema differenziale in forma normale:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_C}{dt} = -\dfrac{G_1 G_2 v_C}{C(G_1 + G_2)} + \dfrac{G_2 i_L}{C(G_1 + G_2)} - \dfrac{G_1 G_2 E_1}{C(G_1 + G_2)} \\ \dfrac{di_L}{dt} = -\dfrac{G_2 v_C}{L(G_1 + G_2)} - \left(\dfrac{1}{G_1 + G_2} + R_3 \right) \dfrac{i_L}{L} + \dfrac{G_1 E_1}{L(G_1 + G_2)} \end{cases} \qquad (5)$$

In forma vettoriale il sistema (5) si scrive come:

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} v_C \\ i_L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{G_1 G_2}{C(G_1 + G_2)} & \dfrac{G_2}{C(G_1 + G_2)} \\ -\dfrac{G_2}{L(G_1 + G_2)} & -\left(\dfrac{1}{G_1 + G_2} + R_3 \right) \dfrac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_C \\ i_L \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\dfrac{G_1 G_2 E_1}{C(G_1 + G_2)} \\ \dfrac{G_1 E_1}{L(G_1 + G_2)} \end{Bmatrix} \qquad (6)$$

Il sistema differenziale a cui si perviene utilizzando il metodo delle equazioni di stato è sempre[*] simile al (6), se il circuito iniziale è lineare (se il circuito non è lineare il metodo è comunque applicabile, ma può essere notevolmente più difficile determinare le variabili complementari alle variabili di stato). Indicando con $\mathbf{x}$ il vettore delle variabili di stato, con $[A]$ la matrice dei coefficienti (matrice di stato) e con $\mathbf{b}$ il vettore degli ingressi (così chiamato in quanto vi compaiono le grandezze impresse dai generatori indipendenti), si ottiene quindi un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine a coefficienti costanti in forma normale (**equazioni di stato**):

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = [A] \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \qquad (7)$$

L'ordine del sistema è pari al numero di equazioni che lo costituiscono (ad esempio, il sistema (6) è del secondo ordine) che, per costruzione, è uguale al numero di variabili di stato, cioè al numero di induttori e condensatori presenti nel circuito. La definizione di ordine si estende anche ai circuiti

[*] Questa affermazione si basa unicamente sulla effettiva possibilità di risolvere il circuito privo di memoria ottenuto dalla sostituzione di induttori e condensatori con generatori indipendenti di corrente e tensione, rispettivamente. Ci sono casi in cui tale circuito non è univocamente solubile (ad esempio i circuiti contenenti tagli costituiti solo da induttori o maglie solo di condensatori). Il metodo è ancora applicabile, ma il sistema differenziale deve essere accompagnato da uno (o più) vincoli tra le variabili di stato, che ne complicano la soluzione.

con memoria, indicando come “del primo ordine” i circuiti con un solo induttore o condensatore, “del secondo ordine” i circuiti con due componenti con memoria, eccetera.

Se i dati del problema sono E_1 = 110 V, R_1 = 0.5 Ω, R_2 = 0.5 Ω, R_3 = 5 Ω, C = 200 μF , L = 3 mH, dalla (6) si ottiene, sostituendo:

$$\frac{d}{dt}\begin{Bmatrix} v_C \\ i_L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -5\cdot 10^3 & 2.5\cdot 10^3 \\ -1.66\cdot 10^2 & -1.75\cdot 10^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_C \\ i_L \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -5.5\cdot 10^5 \\ 1.826\cdot 10^4 \end{Bmatrix} \tag{8}$$

Per quanto riguarda l’unità di misura dei valori numerici presenti in [A] e b, un modo semplice per dedurli è effettuare un’analisi dimensionale dei vari termini dell’equazione (8). Ad esempio il temine “$-5\cdot 10^3$” moltiplicato per v_C [V] deve avere la stessa dimensione della derivata di v_C [V/s] e quindi ha come unità di misura [s^{-1}]. Analogamente il temine “$2.5\cdot 10^3$” moltiplicato per i_L [A] deve avere la stessa dimensione della derivata di v_C [V/s] e quindi ha come unità di misura [Ω/s]. Quindi, la matrice di stato del circuito illustrato nella figura 1.a (con le unità di misura) è:

$$[A] = \begin{bmatrix} -5\cdot 10^3\ s^{-1} & 2.5\cdot 10^3 \Omega / s \\ -1.66\cdot 10^2 S/s & -1.75\cdot 10^3 s^{-1} \end{bmatrix} \tag{9}$$

(La matrice di stato, come si vedrà nel seguito è sufficiente a determinare se il circuito è stabile ed il tempo necessario in questo caso per raggiungere il regime.)

La soluzione del sistema di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine (7) può essere ottenuta, eventualmente per via numerica, a partire dall’istante iniziale in cui sono noti i valori v_{C0} ed i_{L0} delle variabili di stato (**condizioni iniziali** o stato iniziale):

$$\begin{aligned} v_C(0) &= v_{C0} \\ i_L(0) &= i_{L0} \end{aligned} \tag{10}$$

La definizione dell’istante iniziale, convenzionalmente t = 0, può avvenire in diversi modi, tuttavia di solito si ha interesse a studiare circuiti in cui interviene una istantanea variazione della topologia, ossia circuiti in cui sono presenti interruttori ideali che si aprono e si chiudono istantaneamente (come mostrato in figura 2). Quando l’interruttore ideale è aperto esso equivale ad un circuito aperto e quindi la corrente che lo attraversa è nulla (i = 0). Viceversa quando l’interruttore è chiuso esso equivale ad un corto circuito e la tensione ai suoi capi è nulla (v = 0)[#]. L’istante in cui l’interruttore si apre o si chiude rappresenta in questo caso la scelta usuale per definire l’istante iniziale t = 0.

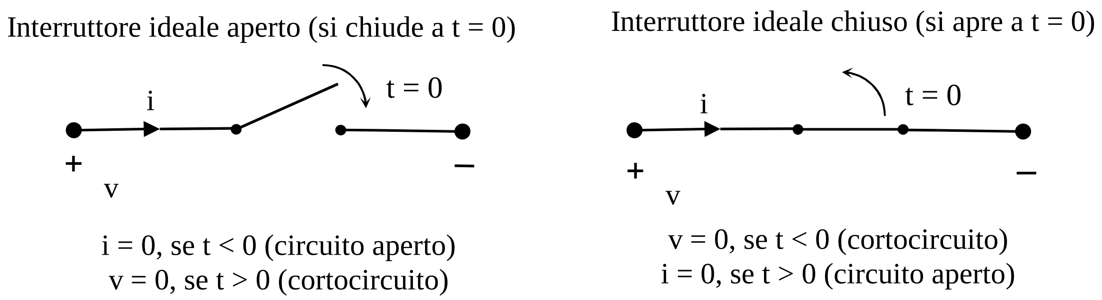


Figura 2. Interruttore ideale.

Per determinare i valori delle variabili di stato nell’istante iniziale (t = 0), ossia nell’istante in cui si modifica la topologia del circuito e inizia il transitorio, si utilizza il **postulato di continuità dell’energia**: <u>l’energia non può subire discontinuità nel tempo</u>. Una discontinuità dell’energia in un intervallo di tempo infinitesimo equivarrebbe infatti all’intervento di una sorgente di potenza infinita, il che non è fisicamente accettabile. La dimostrazione del postulato è basata quindi sull’ipotesi che per ogni componente la potenza assorbita sia limitata, cioè che $|p(t)| < p_{max}$, $\forall t$. Infatti, conside-

[#] Può capitare che l’interruttore ideale porti a inconsistenze (ad esempio se si cerca di aprire un interruttore in serie ad un induttore percorso da corrente). In tal caso è necessario introdurre un modello circuitale dell’interruttore “reale” che tenga conto degli effetti parassiti che sono principalmente costituiti da una resistenza di contatto (in serie all’interruttore ideale), una resistenza di isolamento (in parallelo, non-lineare) e una capacità in parallelo.

rando un componente con memoria si ha $p = dW/dt$, dove W è l'energia immagazzinata nel componente. Integrando tale relazione (posto $t_1 < t_2$) si ha:

$$W(t_1) - W(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p(t)dt \quad \Rightarrow \quad 0 \le |W(t_1) - W(t_2)| = \left|\int_{t_1}^{t_2} p(t)dt\right| \le \int_{t_1}^{t_2} |p(t)|dt < \int_{t_1}^{t_2} p_{max}dt = p_{max}|t_2 - t_1|$$

Al limite per $t_1 \to t_0^-$ e $t_2 \to t_0^+$ si ottiene, per il teorema del confronto: $W(t_0^+) = W(t_0^-)$, $\forall t_0$.

Di conseguenza si ha che le variabili di stato sono funzioni continue del tempo e, in particolare, che:

- la *corrente* in un *induttore* non può subire discontinuità, ovvero $i_L(t_0^+) = i_L(t_0^-)$, $\forall t_0$;
- la *tensione* su un *condensatore* non può subire discontinuità, ovvero $v_C(t_0^+) = v_C(t_0^-)$, $\forall t_0$.

Quindi, di fatto, la determinazione delle condizioni iniziali viene effettuata analizzando il circuito all'instante $t = 0^-$, prima che l'interruttore si apra o si chiuda. L'analisi all'instante $t = 0^-$ è semplificata dal fatto che, solitamente, si suppone che il circuito sia a regime. [Questo consente anche di risolvere il circuito all'istante $t = 0^+$ a partire dalla conoscenza dei valori delle variabili di stato all'istante $t = 0^-$, ad esempio per terminare quali sono i componenti più sollecitati nei primi istanti dopo l'apertura o la chiusura di un interruttore. A tal fine il condensatore può essere sostituito, nel circuito all'istante $t = 0^+$, con un generatore di tensione a tensione impressa $v_C(t = 0^-)$ e l'induttore con un generatore di corrente a corrente impressa $i_L(t = 0^-)$. Il circuito equivalente che si ottiene, all'istante $t = 0^+$, è quindi privo di memoria.]

Si consideri ad esempio il circuito RL rappresentato nella figura 3, in cui è presente l'interruttore ideale T che si chiude istantaneamente all'istante $t = 0$. All'istante $t = 0^-$, cioè un istante prima che l'interruttore si chiuda, il circuito si trova in regime stazionario; la corrente è nulla e quindi è nulla anche la tensione ai capi dell'induttore e del resistore. Un istante dopo che l'interruttore si è chiuso ($t = 0^+$) le grandezze del circuito hanno generalmente, essendo cambiata in maniera discontinua la topologia del circuito, valori diversi da quelli relativi all'istante $t = 0^-$. Ad esempio, la tensione ai capi della serie RL, nulla all'istante $t = 0^-$ risulta pari ad E all'istante $t = 0^+$. Non risulta però cambiato il valore della corrente i (variabile di stato dell'induttore) a cui è associata l'energia $W = ½ L i^2$. Per il postulato di continuità dell'energia $½ L i^2(0^+) = W(0^+) = W(0^-) = ½ L i^2(0^-) = 0$, quindi $i(0^+) = i(0^-) = 0$.

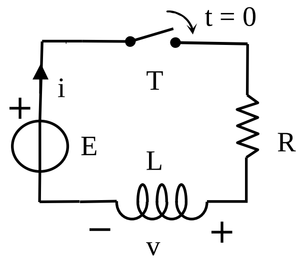


Figura 3. Circuito RL con interruttore ideale.

Come esempio di circuito del 2° ordine, si consideri il circuito rappresentato in figura 4.a, nelle condizioni definite dalla chiusura dell'interruttore T. Per calcolare le condizioni iniziali (cioè all'istante $t = 0^+$, immediatamente successivo alla chiusura di T) è sufficiente considerare il circuito (a regime) prima della chiusura dell'interruttore ($t < 0$).

Per $t < 0$ (e quindi anche per $t = 0^-$) si suppone che il circuito sia a regime (in questo caso stazionario, se E è costante). In questa condizione di funzionamento, mostrata in figura 4.b, è chiaro che le correnti sono tutte nulle e quindi $i_L(0^-) = 0$. Inoltre, dato il verso scelto per la tensione sul condensatore, si ha $v_C(0^-) = - E$. Utilizzando ora il postulato di continuità dell'energia è possibile affermare che $i_L(0^+) = 0$ e che $v_C(0^+) = - E$.

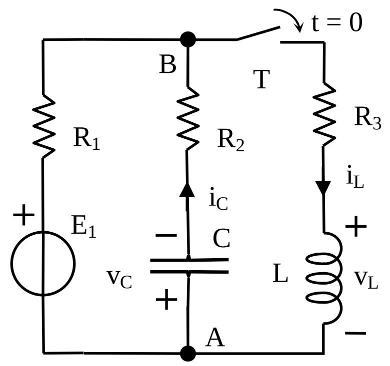


Figura 4.a

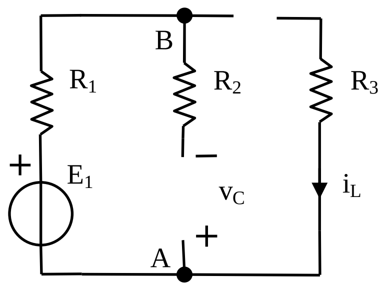


Figura 4.b – Circuito equivalente per t < 0 (DC)

Il sistema (8) viene quindi completato dalle condizioni iniziali e può essere risolto:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_C}{dt} = -5000v_C + 2500i_L - 550000 \\ \dfrac{di_L}{dt} = -166v_C - 1750i_L + 18260 \\ v_C(0) = -110, \quad i_L(0) = 0 \end{cases} \qquad (11)$$

Indicando con $\mathbf{x}_0$ lo stato iniziale (o condizioni iniziali) e con la notazione della (7), si ha quindi:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = [A]\cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \qquad (12)$$

Il sistema lineare (12) è solubile tramite vari metodi (trasformata di Laplace, esponenziale di matrice, ecc.) che portano ovviamente alla medesima soluzione. Il metodo di soluzione più semplice sfrutta la linearità delle equazioni di stato per determinare l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali lineari come la somma di un integrale particolare (soluzione di regime, se il regime esiste ovvero se il circuito è stabile) e dell'integrale generale del sistema omogeneo associato (soluzione transitoria): $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{x}_{om}(t)$. Se il vettore degli ingressi $\mathbf{b}$ (termine noto) è costante, per calcolare l'integrale particolare è sufficiente(*) annullare le derivate e quindi risolvere il sistema $[A]\cdot\mathbf{x}_p + \mathbf{b} = 0$. Per quanto riguarda l'integrale generale del sistema omogeneo associato (cioè con $\mathbf{b} = \mathbf{0}$), esso va sempre cercato nella forma di un esponenziale reale o immaginario. La sostituzione della soluzione esponenziale $c\ \mathbf{u}\ e^{\lambda t}$ (con c e λ costanti scalari ed $\mathbf{u}$ vettore costante) nel sistema omogeneo associato al (12) porta a scrivere

$$\frac{d}{dt}\left(c\mathbf{u}e^{\lambda t}\right) = [A]\cdot\left(c\mathbf{u}e^{\lambda t}\right) \quad \Rightarrow \quad \lambda c\mathbf{u}e^{\lambda t} = [A]\cdot\left(c\mathbf{u}e^{\lambda t}\right) \quad \Rightarrow \quad \lambda\mathbf{u} = [A]\cdot\mathbf{u} \quad \Rightarrow \quad ([A]-\lambda[1])\cdot\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

Quindi λ ed $\mathbf{u}$ sono rispettivamente gli autovalori e gli autovettori della matrice di stato [A]. L'equazione caratteristica $det([A] - \lambda[1]) = 0$ permette di determinare gli autovalori ([1] è la matrice identità). Dato che [A] è una matrice M×M a coefficienti reali (M è l'ordine del circuito), il polinomio caratteristico è a coefficienti reali e di grado M. Per il teorema fondamentale dell'algebra, gli M zeri del polinomio sono quindi reali o complessi coniugati e possono essere rappresentati nella forma(**) $\lambda_k = -1/\tau_k + j\ \Omega_k$ con $k = 1, \ldots, M$. Le costanti τ_k e Ω_k prendono il nome di costanti di tempo e pulsazioni naturali del circuito. Ammesso per semplicità che gli autovalori siano distinti(o), la determinazione degli autovettori $\mathbf{u}_k$ della matrice di stato permette quindi di stabilire per sovrapposizione (grazie alla linearità) l'integrale generale del sistema omogeneo associato: $\mathbf{x}_{om}(t) = c_1\ \mathbf{u}_1\ e^{\lambda_1 t} + \ldots + c_M\ \mathbf{u}_M\ e^{\lambda_M t}$. Le costanti $c_1, \ldots, c_M$ possono quindi essere calcolate imponendo la condizione iniziale, ovvero $\mathbf{x}_p(0) + \mathbf{x}_{om}(0) = \mathbf{x}_0$, che è un sistema lineare di M equazioni nelle M incognite c_k.

Gli autovalori di [A] sono particolarmente rilevanti nello studio della stabilità delle reti lineari (Un circuito si dice <u>stabile</u> se per ogni eccitazione limitata ha una risposta che rimane limitata). Infatti, l'integrale generale del sistema omogeneo associato mostra immediatamente che un circuito

---

(*) Nel caso in cui il $\mathbf{b}$ sia funzione del tempo è necessario usare altri metodi (ad esempio il metodo della variazione delle costanti o la trasformata di Laplace). Nel caso particolare in cui le grandezze impresse dai generatori siano funzioni sinusoidali del tempo è possibile utilizzare il metodi simbolico [definito nel seguito] per determinare l'integrale particolare. Si può in ogni caso dimostrare che se $\mathbf{b}$ è limitato (cioè sono limitate le grandezze impresse dai generatori indipendenti) anche $\mathbf{x}_p$ è limitata.

(**) Al fine di evitare possibili fraintendimenti è consuetudine in elettrotecnica, a differenza di quanto accade usualmente, indicare con la lettera "j" l'unità immaginaria ($j^2 = -1$), riservando il simbolo "i" per le correnti.

(o) Si suppone quindi che tutte le soluzioni del polinomio caratteristico siano diverse fra loro, cioè sono esclusi gli autovalori multipli. Ovviamente è possibile risolvere le equazioni di stato anche nel caso in cui siano presenti autovalori multipli. Tuttavia, in pratica, gli autovalori risultano sempre distinti. La ragione intuitiva è che l'esistenza di soluzioni multiple è legata a <u>precise</u> condizioni tra i valori dei coefficienti del polinomio caratteristico della matrice di stato. Questi tuttavia sono ottenuti sulla base dei parametri dei componenti reali che costituiscono il circuito e sono quindi soggetti ad una tolleranza (errore relativo sul valore nominale). In effetti è possibile dimostrare che "Per ogni matrice quadrata a coefficienti reali a_{ij} esiste una matrice quadrata a coefficienti reali b_{ij} <u>con autovalori distinti</u> tale che $|a_{ij} - b_{ij}| < \varepsilon$, $\forall\varepsilon > 0$ positivo e ($\forall$ i, j)". Ad esempio si consideri la matrice identità 2×2, che ha un solo autovalore doppio, pari ad 1. Se si varia di ε uno dei termini sulla diagonale principale gli autovalori diventano distinti (1 ed $1 + \varepsilon$). Allo stesso modo se si variano di ε i termini sulla diagonale secondaria gli autovalori diventano distinti ($1 \pm \varepsilon$).

lineare è stabile se $\Re(\lambda) \leq 0$, per ogni λ autovalore della matrice di stato (in caso contrario $\mathbf{x}_{om}(t)$ divergerebbe esponenzialmente per tempi crescenti)(***).

Nel seguito vengono illustrati alcuni esempi di soluzione di circuiti con memoria. Il problema che si vuole risolvere è il seguente: assegnato il circuito elettrico e le grandezze impresse dei generatori indipendenti presenti, si vuole calcolare l'andamento temporale delle correnti di ramo e delle tensioni di ramo. Si suppone per semplicità che tutti i componenti siano dei bipoli, potendosi ricondurre all'ipotesi mediante l'introduzione di circuiti equivalenti dei componenti a più di due terminali.

Si consideri, ad esempio, il circuito in figura 3, che è un circuito del 1° ordine (cioè contenente un solo elemento con memoria).

Applicando la LKT per t > 0 (cioè dopo la chiusura dell'interruttore T), si ottiene:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E \quad \Rightarrow \quad \frac{di}{dt} = \frac{E - Ri}{L} \qquad (13)$$

La soluzione cercata è la somma di un integrale particolare $i_p(t)$ e dell'integrale generale dell'equazione omogenea associata $i_{om}(t)$: $i(t) = i_p(t) + i_{om}(t)$. Se si assume che E sia costante, per calcolare l'integrale particolare è sufficiente annullare la derivata: $i_p(t) = E/R$. Per quanto riguarda l'integrale generale dell'equazione omogenea associata, esso va sempre cercato nella forma di un esponenziale reale o immaginario. La sostituzione dell'esponenziale $e^{\lambda t}$ nella omogenea associata della (13) porta a scrivere l'equazione caratteristica:

$$\lambda = -R/L \qquad \Rightarrow \qquad i(t) = E/R + I\,e^{-Rt/L}$$

La determinazione della costante I può essere effettuata se è noto il valore iniziale: $i(0^+) = i_0$. Per calcolare tale valore iniziale è sufficiente considerare il circuito di figura 3 prima della chiusura dell'interruttore T ($t < 0$). È evidente che $i(0^-) = 0$, visto che l'interruttore T è aperto. Utilizzando ora il postulato di continuità dell'energia è possibile affermare che $i(0^+) = 0$. Risulta quindi:

$$0 = E/R + I \qquad \Rightarrow \qquad I = -E/R$$

In conclusione, l'andamento temporale della corrente i(t), mostrato in figura 5, è stato calcolato (per t > 0) tramite la soluzione della seguente equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficienti costanti con il valore iniziale di corrente nulla.

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt} = \dfrac{E}{L} - \dfrac{Ri}{L} \\ i(0) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

Il parametro $\tau = L/R$ è la <u>costante di tempo</u> del circuito. Nell'esponenziale $e^{-t/\tau}$ la costante di tempo τ specifica la durata del fenomeno transitorio: dopo un tempo pari a 5τ la soluzione ha raggiunto il 99% del suo valore di regime(*), cioè del valore limite per $t \to +\infty$.

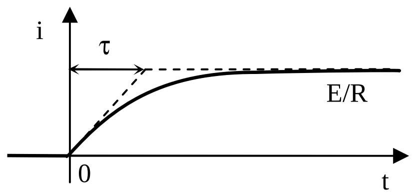


Figura 5

Si consideri ora il circuito rappresentato nella figura 6.a in cui è presente l'interruttore ideale T che si chiude istantaneamente all'istante t = 0. Per t > 0 dalla LKT sulla maglia si ha:

$$E = Ri + v_C \quad \Rightarrow \quad i = \frac{E - v_C}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv_C}{dt} = \frac{E - v_C}{CR} \qquad (14)$$

(***)Ad esempio dalla matrice di stato (34) si può determinare la stabilità e le costanti di tempo del circuito di figura 22.a:

$$0 = \det([A] - \lambda[1]) = \begin{vmatrix} -5\cdot 10^3 - \lambda & 2.5\cdot 10^3 \\ -1.66\cdot 10^2 & -1.75\cdot 10^3 - \lambda \end{vmatrix} = (5\cdot 10^3 + \lambda)(1.75\cdot 10^3 + \lambda) + 4.15\cdot 10^5$$

Sviluppando il prodotto si ottiene il polinomio di secondo grado $\lambda^2 + 6.75\cdot 10^3\lambda + 9.165\cdot 10^6 = 0$, i cui zeri (reali) sono $\lambda_1 = -4.86\cdot 10^3$ e $\lambda_2 = -1.883\cdot 10^3$ (a cui corrispondono le costanti di tempo $\tau_1 = 0.206\cdot$ms e $\tau_2 = 0.531\cdot$ms). Dato che entrambi gli autovalori sono negativi, il circuito di figura 22.a è stabile. Questo tipo di analisi può essere ripetuta per ogni circuito lineare, tuttavia per circuiti di ordine superiore al secondo è necessaria la soluzione numerica del polinomio. Se si è interessati invece soltanto alla stabilità del circuito, questa analisi si può evitare per tutti i circuiti lineari non contenenti generatori pilotati che, si può dimostrare, sono stabili.

(*) Lo stesso ragionamento è applicabile ad ognuno degli esponenziali della soluzione transitoria di un circuito lineare di ordine qualsiasi, purché stabile. Dato che ogni esponenziale decade con la sua costante di tempo, il regime si considera raggiunto per $t > 5\tau_{max}$, dove τ_{max} è la maggiore delle costanti di tempo.

Dalla (14) si ottiene immediatamente l'integrale particolare: $v_p(t) = E$. Inoltre La sostituzione dell'esponenziale $e^{\lambda t}$ nella omogenea associata della (14) porta a scrivere l'equazione caratteristica:

$$\lambda = -1/CR \quad \Rightarrow \quad v_C(t) = E + A\, e^{-t/CR} \tag{15}$$

dove $\tau = CR$ è la <u>costante di tempo</u> del circuito. Per la determinazione della costante A si considera il valore iniziale $v_{C,0}$ (che si mantiene uguale a $t = 0^-$ e a $t = 0^+$ per il postulato di continuità dell'energia) e si scrive la (15) per $t = 0^+$:

$$v_C(0^+) = v_{C,0} = E + A \quad \Rightarrow \quad v_C(t) = E + (v_{C,0} - E)e^{-t/\tau} \quad \Rightarrow \quad i(t) = \frac{E - v_{C,0}}{R} e^{-t/\tau} \tag{16}$$

Il grafico della (16) è mostrato in figura 6.b. Si noti che anche in questo caso per $t > 5\tau$ si può assumere che il transitorio sia esaurito e che si sia raggiunta la soluzione di regime ($i = 0$).

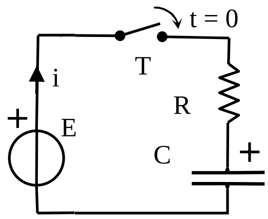


Figura 6.a

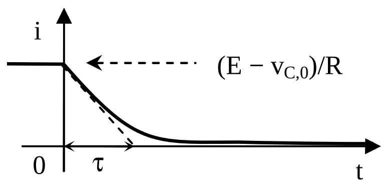


Figura 6.b

Come si è detto, i circuiti contenenti generatori pilotati non sono necessariamente stabili. A titolo di esempio si consideri il circuito di figura 7.a, in cui l'interruttore T si chiude all'istante $t = 0$ e si riapre all'istante $t = t_0$. Si suppone che il circuito sia a regime (DC) per $t < 0$.

L'andamento temporale della corrente i, per $0 \le t \le t_0$, è calcolabile risolvendo il seguente sistema, con il valore iniziale di corrente nulla (supponendo $k \neq R_1 + R_2$).

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt} = \dfrac{E - R_1 i}{L} \\ i(0) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad i(t) = \frac{E}{R_1}\left(1 - e^{-\frac{R_1}{L}t}\right) \tag{17}$$

$$E + R_2(i - i_E) - ki = 0$$

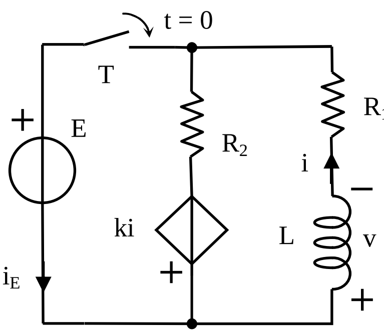


Figura 7.a

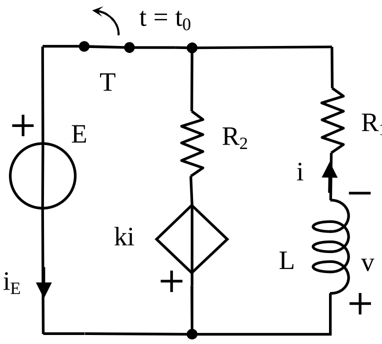


Figura 7.b

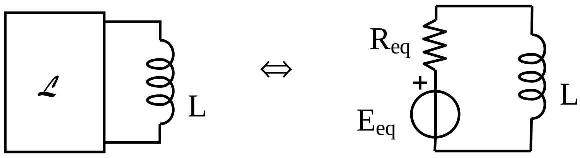
L'andamento temporale della corrente i, per $t \ge t_0$, è calcolabile risolvendo il seguente sistema, con il valore iniziale di corrente $i_0 = i(t_0^+) = i(t_0^-)$ deducibile dalla (17):

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt} = -\dfrac{(R_1 + R_2 - k)}{L} i \\ i(t_0) = i_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad i(t) = i_0\, e^{\frac{k - R_1 - R_2}{L}(t - t_0)} \tag{18}$$

La (18) mostra che il circuito è stabile solo se $k \le R_1 + R_2$. Nel caso contrario la corrente i cresce esponenzialmente. Pertanto, se il circuito di figura 7 rappresenta il modello un dispositivo fisico, al crescere della i si raggiungeranno i limiti operativi del dispositivo (che si guasterà), oppure si raggiungeranno i limiti del modello lineare e sarà necessario modificare la struttura del circuito.

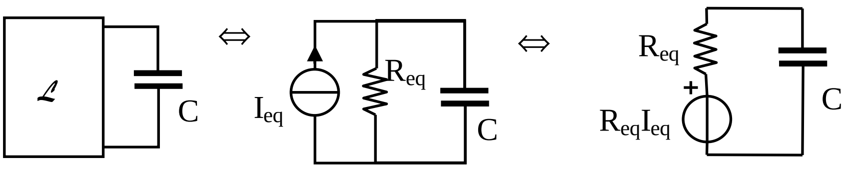
2. CALCOLO DELLE COSTANTI DI TEMPO

Negli esempi precedenti si era interessati alla determinazione delle tensioni e delle correnti nei circuiti in funzione del tempo. Più spesso tuttavia si è interessati solo al calcolo delle costanti di tempo (ovvero alla stabilità del circuito). In tal caso, per i circuiti del primo ordine si possono utilizzare i teoremi di Thevenin e Norton come segue. Nel caso in cui un induttore L sia connesso al bipolo lineare $\mathcal{L}$ (che si suppone controllato in corrente) l'applicazione del teorema di Thevenin (al bipolo $\mathcal{L}$) porta ad un circuito già analizzato, la cui costante di tempo è $\tau = L/R_{eq}$. Si noti che non è necessario calcolare la E_{eq}.



$\tau = L/R_{eq}$

La stessa procedura è applicabile anche nel caso in cui un condensatore C sia connesso al bipolo lineare $\mathcal{L}$ (che si suppone controllato in tensione) l'applicazione del teorema di Norton (al bipolo $\mathcal{L}$) porta ad un circuito costituito dal parallelo del generatore indipendente di corrente equivalente, della resistenza equivalente e del condensatore. Utilizzando l'equivalenza tra generatori reali si ottiene un circuito già analizzato, la cui costante di tempo è $\tau = CR_{eq}$. Si noti che non è necessario calcolare la I_{eq}.



$\tau = CR_{eq}$

Nel caso dei circuiti di ordine superiore al primo, se si è interessati solo a determinare le costanti di tempo del circuito, è sufficiente determinare la matrice di stato [A]. Infatti gli autovalori di [A] non dipendono da **b**, ovvero dai valori assunti dalle grandezze impresse dai generatori indipendenti. È possibile quindi studiare il circuito con i generatori indipendenti spenti (sostituendo ai generatori di tensione indipendenti dei cortocircuiti ed ai generatori di corrente indipendenti dei circuiti aperti). Ad esempio, se si azzera E_1 nel circuito di figura 1.b si azzera di conseguenza il vettore degli ingressi nella (6), senza che la matrice di stato cambi. Una volta determinati gli autovalori della matrice di stato risolvendo il polinomio $det([A] - \lambda[1]) = 0$, è sempre possibile dedurre da ogni autovalore λ la rispetttiva costante di tempo utilizzando la relazione $\lambda = -1/\tau + j\,\Omega$ se l'autovalore è complesso, ovvero la relazione $\lambda = -1/\tau$ se l'autovalore è reale.

Come caso limite di stabilità, si consideri il circuito del 2° ordine illustrato in figura 8. Per $t < 0$ (DC), si ha: $i = i_L = E/R$, $i_C = 0$, $v_L = v_C = 0$. Dopo l'apertura dell'interruttore T, per $t > 0$, il circuito è costituito dal parallelo dell'induttore con il condensatore.

Pertanto, $v_L = -v_C$, $i_C = i_L$ e l'equazione di stato è data da:

$$\frac{d}{dt}\begin{Bmatrix} v_C \\ i_L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_C \\ i_L \end{Bmatrix} \qquad (19)$$

con le condizioni iniziali $v_C(0) = 0$, $i_L(0) = E/R$.

Dall'equazione caratteristica $det([A] - \lambda[1]) = 0$ si ottiene quindi la relazione $\lambda^2 + 1/LC = 0$. Posto $\omega_0^2 = 1/LC$, si ottengono le due radici, puramente immaginarie, $\lambda = \pm\, j\,\omega_0$. Si noti quindi che $\Re(\lambda) = 0$ e dunque le variabili di stato non tendono a zero, né divergono, ma sono oscillanti.

Per determinare la soluzione si noti intanto che la soluzione particolare è nulla. Per determinare la soluzione dell'omogenea associata alla (19) (che coincide con l'equazione stessa) si calcolano gli autovettori corrispondenti agli autovalori, risolvendo $([A] - \lambda[1])\,\mathbf{u} = 0$.

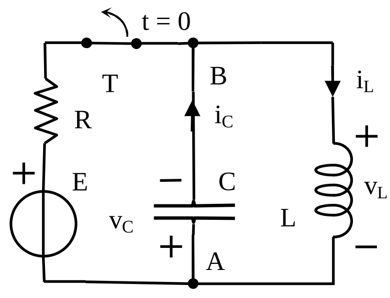


Figura 8

Per l'autovettore $\mathbf{u}_1$ corrispondente all'autovalore $\lambda_1 = +\,j\,\omega_0$ si ha:

$$\begin{bmatrix} -j\omega_0 & 1/C \\ -1/L & -j\omega_0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Le due righe della matrice sono proporzionali (il determinante è nullo) quindi, considerando la prima riga, si può porre $u_{1,1} = 1$ed $u_{1,2} = j\,\omega_0 C$ (o una qualunque altra coppia proporzionale a questa). Analogamente, per il secondo autovettore si ottiene $u_{2,1} = 1$ ed $u_{2,2} = -j\,\omega_0 C$.

Indicando con k_1 e k_2 le costanti di integrazione si ha quindi:

$$\begin{Bmatrix} v_C \\ i_L \end{Bmatrix} = k_1 \mathbf{u}_1 e^{j\omega_0 t} + k_2 \mathbf{u}_2 e^{-j\omega_0 t} = \begin{Bmatrix} k_1 e^{j\omega_0 t} + k_2 e^{-j\omega_0 t} \\ k_1 j\omega_0 C e^{j\omega_0 t} - k_2 j\omega_0 C e^{-j\omega_0 t} \end{Bmatrix}$$

Per determinare la costanti di integrazione si utilizzano le condizioni iniziali all'istante t = 0 ($e^0 = 1$):

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ E/R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 + k_2 \\ k_1 j\omega_0 C - k_2 j\omega_0 C \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \begin{cases} k_1 = E/(2j\omega_0 CR) \\ k_2 = -E/(2j\omega_0 CR) \end{cases}$$

Sostituendo si ha quindi:

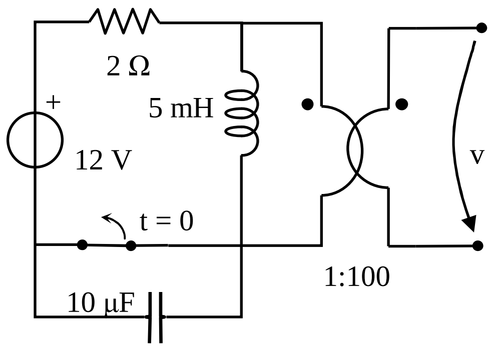
$$\begin{cases} v_C(t) = \dfrac{E}{2j\omega_0 CR} e^{j\omega_0 t} - \dfrac{E}{2j\omega_0 CR} e^{-j\omega_0 t} = \dfrac{E}{\omega_0 CR} \dfrac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} \\ i_L(t) = \dfrac{E}{2R} e^{j\omega_0 t} + \dfrac{E}{2R} e^{-j\omega_0 t} = \dfrac{E}{R} \dfrac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \end{cases}$$

Si riconoscono infine le definizioni delle funzioni *sen*() e *cos*() in campo complesso (oppure si può procedere sostituendo l'identità di Eulero, e^{jx} = *cos*(x) + j *sen*(x)) e si ottiene la soluzione:

$$i_L(t) = \frac{E}{R}\cos(\omega_0 t) \qquad , \qquad v_C(t) = \frac{E}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\sin(\omega_0 t)$$

Nel circuito si instaura quindi un regime periodico con un periodo $T_0 = 2\pi/\omega_0$, ovvero un regime sinusoidale[o] alla frequenza $f_0 = 1/T_0 = \omega_0/2\pi$. In pratica tuttavia induttori e condensatori reali hanno sempre effetti parassiti dissipativi (tipicamente l'induttore reale è una serie R-L ed il condensatore reale un parallelo R-C) che attenuano esponenzialmente le oscillazioni, portando a zero le variabili di stato.

I circuiti in fase transitoria possono essere utilizzati per generare valori di tensione o di corrente molto maggiori di quelli ottenibili a regime dallo stesso circuito.



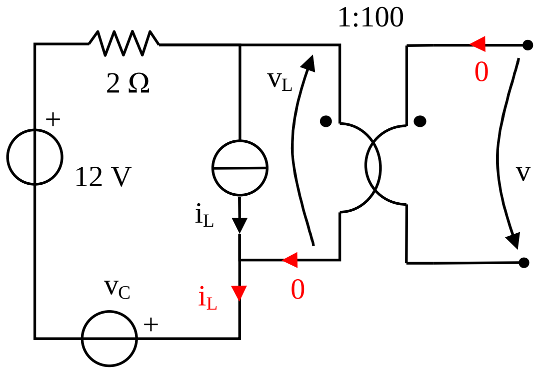
Come esempio applicativo si consideri il circuito di accensione "classico" per un motore a combustione interna a benzina, mostrato in figura. Il problema in questo caso è generare tra gli elettrodi della candela (posta nella camera di combustione) una tensione sufficientemente elevata da innescare la scarica ("scintilla") nella miscela aria-benzina (almeno 12 kV) pur avendo a disposizione un generatore a tensione impressa molto minore (batteria da 12 V). La miscela si può considerare come un materiale elettricamente isolante fino alla tensione di scarica (corrente nulla, quindi un circuito aperto). Oltre quel valore permette il passaggio della corrente e si può rappresentare come un resistore non-lineare.
Il circuito illustrato in figura basa il suo funzionamento su una induttanza (avvolgimento primario della bobina d'accensione) che, quando è collegata al generatore (interruttore chiuso) raggiunge il regime stazionario entro qualche millisecondo (a regime la tensione sull'induttore è nulla, mentre la corrente raggiunge un valore di qualche Ampere. Quando è necessario generare la scintilla, la bobina primaria viene scollegata dalla batteria (aprendo l'interruttore) e posta in serie al condensatore. La tensione ai terminali dell'induttanza raggiunge rapidamente un valore di qualche centinaio di Volt. La tensione tra gli elettrodi della candela (i terminali del secondario del trasformatore, dimensionato con un rapporto di trasformazione di circa 100) cresce quindi fino a qualche decina di kiloVolt, sufficiente a generare la scintilla in camera di combustione e l'accensione della miscela. Dopo la scarica l'interruttore è richiuso, causando la scarica rapida del condensatore (istantanea se si considera l'interruttore chiuso equivalente a un cortocircuito, la costante di tempo dipende

[o] Un circuito è in regime sinusoidale (o regime AC "Alternating Current") se tutte le variabili circuitali sono funzioni sinusoidali del tempo con lo stesso periodo (o la stessa frequenza). Se in un circuito lineare stabile le grandezze impresse dai generatori indipendenti presenti sono funzioni sinusoidali isofrequenziali del tempo, dopo un transitorio di durata dipendente dai parametri del circuito stesso, si raggiunge una soluzione di regime AC in cui tutte le grandezze del circuito sono funzioni sinusoidali isofrequenziali del tempo, con frequenza pari a quella dei generatori. Infatti, ammesso che la soluzione transitoria si annulli (quindi $\Re(\lambda) < 0$, $\forall\lambda$ autovalore di [A]), questo significa mostrare che, se il vettore degli ingressi è sinusoidale, anche la soluzione particolare (che quindi è la soluzione di regime) è sinusoidale. A tal fine è sufficiente supporre $\mathbf{b}(t) = \mathbf{b}_1\cos(\omega t) + \mathbf{b}_2\mathrm{sen}(\omega t)$, sostituire nelle equazioni di stato, e cercare una soluzione particolare nella forma $\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{x}_1\cos(\omega t) + \mathbf{x}_2\mathrm{sen}(\omega t)$. Raggruppando i termini in sen(ωt) e cos(ωt) e annullandone i coefficienti (dato che sono funzioni indipendenti) si perviene a un sistema lineare che è solubile solo se il determinante della matrice dei coefficienti ($[A]^2 + \omega^2[1]$) è non nullo. Indicando con j l'unità immaginaria ($j^2 = -1$) si ha tuttavia *det*($[A]^2 + \omega^2[1]$) = *det*($[A] + j\omega[1]$)·*det*($[A] - j\omega[1]$) e quindi il determinante è nullo solo se almeno uno degli autovalori della matrice di stato coincide con $\pm j\omega$, ma questo è impossibile grazie all'ipotesi $\Re(\lambda) < 0$, $\forall\lambda$.

dalla resistenza parassita sulla maglia formata dal condensatore e dall'interruttore) ed il ripristino della corrente di regime sull'induttore. Questa analisi qualitativa del circuito di accensione mostra come ciò che interessa è determinare il valore massimo della tensione v e l'istante di tempo in cui questo si verifica.

Per t > 0 l'interruttore è aperto. Le caratteristiche dell'induttore e del condensatore, in cui sono esplicitate le derivate delle variabili di stato, sono:

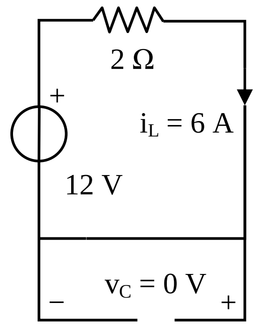
$$di_L/dt = v_L/L = 200\ v_L$$
$$dv_C/dt = i_C/C = 10^5\ i_C$$



Supponendo (formalmente) note le variabili di stato, il condensatore può essere sostituito, nel circuito, con un generatore di tensione a tensione impressa v_C e l'induttore con un generatore di corrente a corrente impressa i_L. Il secondario del trasformatore è collegato ad un circuito aperto (corrente nulla) quindi anche la corrente sul primario è nulla. Applicando la LKC a uno dei terminali dell'induttore, si deduce che $i_C = i_L$.

Inoltre, si ha $v = -100\ v_L$ (il segno meno è dovuto alla scelta del verso di v). Inoltre, per determinare v_L è sufficiente applicare la LKT sulla maglia a primario per ottenere: $0 = v_L + v_C - 12 + 2i_L$. (e quindi $v_L = -2i_L - v_C + 12$). Infine , sostituendo nelle caratteristiche dell'induttore e del condensatore si ottengono le equazioni di stato:

$$\frac{d}{dt}\begin{Bmatrix} i_L \\ v_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -400 & -200 \\ 10^5 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} i_L \\ v_C \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2400 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Le condizioni iniziali si determinano studiando il circuito per $t = 0^-$ (in regime DC). In questa condizione di funzionamento (interruttore chiuso, induttore equivalente ad un cortocircuito, condensatore equivalente ad un circuito aperto), che è mostrata in figura, è chiaro che $i_L(0^-) = 6$ ed $v_C(0^-) = 0$. Utilizzando il postulato di continuità dell'energia si ha quindi $i_L(0^+) = 6$ ed $v_C(0^+) = 0$.

Dato che il termine noto è costante, la soluzione particolare è costante. Annullando le derivate si ha: $i_{L,p} = 0$ A e $v_{C,p} = 12$ V. Gli autovalori della matrice di stato si ottengono dagli zeri del polinomio caratteristico $(400 + \lambda)\ \lambda + 2 \times 10^7 = 0$, per cui $\lambda_1 = -200 + 4472j$ ed $\lambda_2 = -200 - 4472j$. Gli autovalori cono complessi coniugati (si ha quindi una sola costante di tempo, $\tau = 1/200 = 5$ ms) e la soluzione sarà oscillante. Gli autovettori corrispondenti sono $\mathbf{u}_1 = \{\lambda_1, 10^5\}^T$ ed $\mathbf{u}_2 = \{\lambda_2, 10^5\}^T$.

Indicando con k_1 e k_2 le costanti di integrazione si ha quindi:

$$\begin{Bmatrix} i_L \\ v_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} i_{L,p} \\ v_{C,p} \end{Bmatrix} + k_1\mathbf{u}_1 e^{\lambda_1 t} + k_2\mathbf{u}_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{Bmatrix} k_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + k_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t} \\ 12 + k_1 10^5 e^{\lambda_1 t} + k_2 10^5 e^{\lambda_2 t} \end{Bmatrix}$$

Per determinare la costanti di integrazione si utilizzano le condizioni iniziali in t = 0:

$$\begin{Bmatrix} 6 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 \\ 12 + k_1 10^5 + k_2 10^5 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = -6\times10^{-5} - j6.681\times10^{-4} \\ k_2 = -6\times10^{-5} + j6.681\times10^{-4} \end{cases}$$

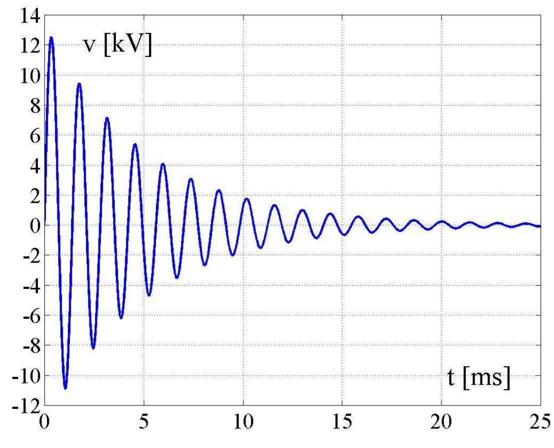
Sostituendo (e utilizzando l'identità di Eulero, $e^{jx} = \cos(x) + j\ sen(x)$) si ottiene la soluzione (valida per t > 0):

$$\begin{cases} i_L(t) = 6e^{-200t}\cos(4472t) + 0.2683e^{-200t}\sin(4472t) \\ v_C(t) = 12 - 12e^{-200t}\cos(4472t) + 133.9e^{-200t}\sin(4472t) \end{cases}$$

Infine $v = -100\ v_L = 200i_L + 100v_C - 1200$

E dunque (per t > 0) si ha:

$$v(t) = 13443\ e^{-200t}\sin(4472t) \quad [V]$$



Come mostrato a lato v(t) ha un andamento oscillante smorzato. Le posizioni dei massimi e dei minimi si ottengono risolvendo dv/dt = 0. Tuttavia poiché 4472 >> 200 si può assumere che il primo massimo coincida circa con il primo massimo del seno, ovvero per $4472t \cong \pi/2$. Quindi all'istante 0.35 ms si ha $v_{max} \cong 12.5$ kV. La soluzione trovata è ovviamente valida sino a quando non si innesca la scarica; per tempi maggiori, il circuito, le equazioni di stato e la loro soluzione sono differenti.