

CIRCUITI IN REGIME SINUSOIDALE (AC)

1. GRANDEZZE PERIODICHE E GRANDEZZE SINUSOIDALI

Una grandezza tempodipendente $a(t)$, che supponiamo reale, si dice **periodica** quando ad uguali intervalli T assume valori uguali, cioè quando vale la relazione $a(t) = a(t + T)$ ($\forall t$):

L'intervallo di tempo T si dice **periodo**. Inoltre la grandezza $f = 1/T$, che rappresenta il numero di periodi contenuti nell'unità di tempo, si dice **frequenza**. La frequenza si misura in Hertz [Hz] (periodi/secondo).

Si definisce **valore medio** la media di $a(t)$ eseguita sul periodo T :
$$\langle a \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} a(t) dt$$

dove t_0 può essere scelto arbitrariamente. Per la definizione di periodicità, il valore medio non cambia se si estende la media ad un numero intero qualsiasi di periodi. La media, intesa come operazione su una grandezza periodica che restituisce un numero reale, è lineare e dunque per il valore medio valgono le relazioni: 1) $\langle a + b \rangle = \langle a \rangle + \langle b \rangle$, 2) $\langle m a \rangle = m \langle a \rangle$, se m è costante.

Si definisce **valore efficace** [o valore RMS, dalle iniziali di "Root Mean Square"] di $a(t)$ la radice quadrata della media del quadrato di $a(t)$ eseguita su un periodo T :
$$A = \sqrt{\langle a^2 \rangle}$$

Una grandezza periodica si definisce **alternata** quando il suo valore medio è nullo.

Si dice **sinusoidale**, una grandezza periodica che sia rappresentabile come: $a(t) = A_M \cos(\omega t + \alpha)$

- La grandezza A_M è detta **ampiezza**, ed è pari al valore massimo di $a(t)$;
- La grandezza ω è detta **pulsazione**, ha le dimensioni di una velocità angolare (radianti/secondo) ed è pari a $2\pi/T$; ($\omega = 2\pi/T = 2\pi f$)
- La grandezza α è detta **fase**. Dato che si può aggiungere un qualsiasi multiplo intero di 2π all'argomento del coseno senza modificare $a(t)$, per dare un valore univoco alla fase nel seguito si suppone $-\pi < \alpha \leq \pi$.

Il valore medio di una grandezza sinusoidale è pari a zero (per ogni valore di A_M e α). Infatti:

$$\langle a \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T A_M \cos(\omega t + \alpha) dt = \frac{A_M}{\omega T} [\sin(\omega t + \alpha)]_{t=0}^{t=T} = \frac{A_M}{2\pi} [\sin(2\pi + \alpha) - \sin(\alpha)] = 0$$

Il valore medio del quadrato della grandezza sinusoidale è pari a:

$$\langle a^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T A_M^2 \cos^2(\omega t + \alpha) dt = \frac{1}{T} \int_0^T A_M^2 \frac{1 + \cos(2\omega t + 2\alpha)}{2} dt = \left\langle \frac{A_M^2}{2} \right\rangle + \left\langle \frac{A_M^2}{2} \cos(2\omega t + 2\alpha) \right\rangle = \frac{A_M^2}{2}$$

E quindi il valore efficace di una grandezza sinusoidale è pari a:
$$A = \frac{A_M}{\sqrt{2}} \cong 0.707 A_M$$

Una grandezza sinusoidale è quindi completamente definita da tre parametri:

- 1) L'ampiezza A_M , o il valore efficace A .
- 2) La pulsazione ω , o la frequenza f , o il periodo T .
- 3) La fase α , o la differenza di fase con un'altra grandezza sinusoidale nota di uguale pulsazione.

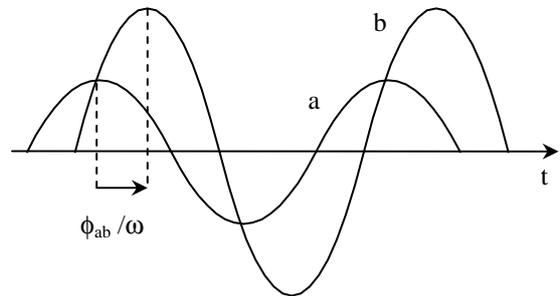
Siano $a(t)$ e $b(t)$ due grandezze sinusoidali isofrequenziali (cioè alla stessa frequenza):

$$a(t) = A_M \cos(\omega t + \alpha_a)$$

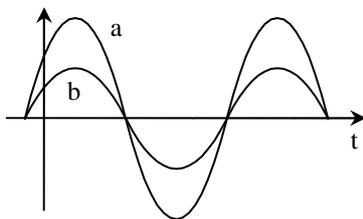
$$b(t) = B_M \cos(\omega t + \alpha_b)$$

Si definisce **sfasamento** tra a e b l'angolo: $\phi_{ab} = \alpha_a - \alpha_b$

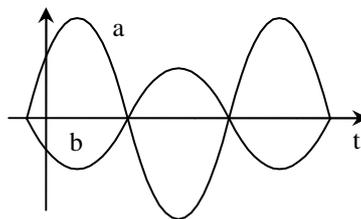
- Se $\phi_{ab} = 0$, $a(t)$ e $b(t)$ si dicono in **fase**;
- Se $\phi_{ab} > 0$, $a(t)$ è in **anticipo di fase** rispetto a $b(t)$;
- Se $\phi_{ab} < 0$, $a(t)$ è in **ritardo di fase** rispetto a $b(t)$;
- Se $\phi_{ab} = \pm \pi$, $a(t)$ e $b(t)$ si dicono in **opposizione**;
- Se $\phi_{ab} = \pm \pi/2$, $a(t)$ e $b(t)$ si dicono in **quadratura**.



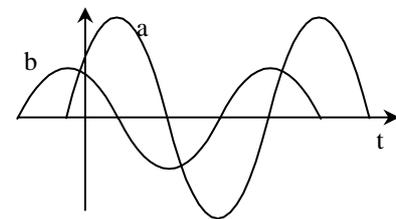
$a(t)$ è in anticipo rispetto a $b(t)$.



$a(t)$ e $b(t)$ sono in fase



$a(t)$ e $b(t)$ sono in opposizione



$a(t)$ e $b(t)$ sono in quadratura

Scelta dell'origine dei tempi

Si supponga cambiare l'istante iniziale di riferimento della scala temporale, ad esempio $t = t' + t_0$. Le due grandezze sinusoidali isofrequenziali $a(t)$ e $b(t)$ si trasformano quindi in:

$$a(t') = A_M \cos(\omega t' + \alpha_{a'})$$

$$b(t') = B_M \cos(\omega t' + \alpha_{b'})$$

In cui le fasi sono date da $\alpha_{a'} = \omega t_0 + \alpha_a$ ed $\alpha_{b'} = \omega t_0 + \alpha_b$. Lo sfasamento tra a e b nel nuovo sistema di riferimento è:

$$\phi_{ab}' = \alpha_{a'} - \alpha_{b'} = (\omega t_0 + \alpha_a) - (\omega t_0 + \alpha_b) = \alpha_a - \alpha_b = \phi_{ab}$$

Lo sfasamento ϕ_{ab} è quindi chiaramente indipendente dall'istante iniziale di riferimento (origine dei tempi). Dato un insieme di grandezze sinusoidali isofrequenziali, l'arbitrarietà nella scelta dell'origine può essere utilizzata per annullare la fase di una di esse. Ad esempio, posto $t_0 = -\alpha_a/\omega$, si ha $\alpha_{a'} = 0$ ed $\alpha_{b'} = -\alpha_a + \alpha_b = -\phi_{ab}$ e dunque, in questo sistema di riferimento si ha:

$$a(t') = A_M \cos(\omega t')$$

$$b(t') = B_M \cos(\omega t' - \phi_{ab})$$

1.1 TRASFORMATA DI STEINMETZ

A partire dall'identità di Eulero $e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x)$, si deduce che $\cos(x) = \Re [e^{jx}]$, dove con \Re si indica l'operatore "parte reale". Pertanto una grandezza sinusoidale $a(t)$ può essere quindi interpretata come parte reale di un opportuno numero complesso:

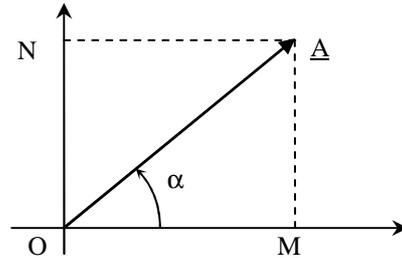
$$a(t) = A_M \cos(\omega t + \alpha) = \Re [A_M e^{j(\omega t + \alpha)}] = \Re [\sqrt{2} A e^{j\omega t} e^{j\alpha}] = \Re [\sqrt{2} \underline{A} e^{j\omega t}] \quad \underline{A} = A e^{j\alpha} = \frac{A_M}{\sqrt{2}} e^{j\alpha}$$

Il numero complesso \underline{A} , detto **fasore**, individua univocamente la grandezza sinusoidale $a(t)$ e viceversa. Tale corrispondenza biunivoca tra grandezze sinusoidali e numeri complessi prende il nome di **trasformata di Steinmetz**. Il numero complesso \underline{A} può essere rappresentato anche in forma cartesiana: $\underline{A} = M + j N$, dove $M = \Re [\underline{A}] = A \cos(\alpha)$ ed $N = \Im [\underline{A}] = A \sin(\alpha)$ sono la parte reale ed immaginaria di \underline{A} .

Le formule inverse per modulo e fase sono:

$$|\underline{A}| = \sqrt{M^2 + N^2}$$

$$\alpha = \angle \underline{A} = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{N}{M}\right), & \text{se } M > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{N}{M}\right), & \text{se } M < 0 \end{cases}$$



Ad esempio, se è data $v(t) = 100 \cos(\omega t + \pi/3)$, è immediato dedurre che la fase è $\alpha = \pi/3$ e l'ampiezza è $V_M = 100$ (quindi il valore efficace è $V = 70.71$). Il fasore di v è quindi $\underline{V} = 70.71 e^{j\pi/3}$ (in forma polare). Il fasore in forma cartesiana si determina utilizzando l'identità di Eulero: $\underline{V} = 70.71 \cos(\pi/3) + j 70.71 \sin(\pi/3) = 35.35 + j 61.23$.

Viceversa, se è dato $\underline{I} = 3 + j 4$, si determina il modulo $I = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ (che coincide con il valore efficace della corrispondente grandezza sinusoidale) e la fase $\alpha_I = \operatorname{Arctan}(4/3) = 0.9273$ rad. Il fasore in forma polare è quindi $\underline{I} = 5 e^{j0.9273}$ e la grandezza sinusoidale è: $i(t) = 5\sqrt{2} \cos(\omega t + 0.9273)$.

Complesso coniugato: Dato un numero complesso $\underline{A} = A e^{j\alpha}$, si dice "coniugato di \underline{A} " il numero \underline{A}^* , avente modulo uguale e fase opposta:

$$\underline{A}^* = A e^{-j\alpha}$$

Si verifica facilmente che il prodotto di un numero complesso per il suo coniugato è pari al quadrato del modulo (attenzione: $|\underline{A}|^2 \neq \underline{A}^2$):

$$\underline{A} \underline{A}^* = A^2$$

Quindi, per calcolare l'inverso di un numero complesso si può procedere nel seguente modo:

$$\frac{1}{\underline{A}} = \frac{\underline{A}^*}{\underline{A} \underline{A}^*} = \frac{\underline{A}^*}{A^2}$$

Operazioni compatibili con la trasformata di Steinmetz

Dato che anche il risultato dell'operazione deve essere una grandezza sinusoidale isofrequenziale, le operazioni possibili su grandezze sinusoidali isofrequenziali sono limitate alle seguenti tre:

- **SOMMA:** Date due grandezze sinusoidali isofrequenziali $a(t)$ e $b(t)$ rappresentate dai fasori \underline{A} e \underline{B} è facile verificare la grandezza sinusoidale $a(t) + b(t)$ è rappresentata dal fasore $\underline{A} + \underline{B}$. Infatti:

$$a(t) + b(t) = \Re[\sqrt{2} \underline{A} e^{j\omega t}] + \Re[\sqrt{2} \underline{B} e^{j\omega t}] = \Re[\sqrt{2} \underline{A} e^{j\omega t} + \sqrt{2} \underline{B} e^{j\omega t}] = \Re[\sqrt{2} (\underline{A} + \underline{B}) e^{j\omega t}]$$

- **PRODOTTO PER UN NUMERO REALE:** Data una grandezza sinusoidale $a(t)$, rappresentata dal numero complesso \underline{A} ed un numero reale m , si verifica immediatamente che la grandezza sinusoidale $m \cdot a(t)$ è rappresentata dal fasore $m \underline{A}$. Infatti:

$$m a(t) = m \Re[\sqrt{2} \underline{A} e^{j\omega t}] = \Re[m \sqrt{2} \underline{A} e^{j\omega t}] = \Re[\sqrt{2} (m \underline{A}) e^{j\omega t}]$$

- **DERIVAZIONE:** La derivata di grandezza sinusoidale $a(t)$, rappresentata dal numero complesso \underline{A} è rappresentata dal fasore $j\omega \underline{A}$. Infatti:

$$\frac{d}{dt} a(t) = \frac{d}{dt} \Re[\sqrt{2} \underline{A} e^{j\omega t}] = \Re\left[\sqrt{2} \underline{A} \frac{d}{dt} e^{j\omega t}\right] = \Re[\sqrt{2} (j\omega \underline{A}) e^{j\omega t}]$$

Sul piano complesso quindi la derivata di $a(t)$ è rappresentata da un numero complesso di modulo pari a ωA e in anticipo di $\pi/2$ rispetto ad \underline{A} . Infatti se $\underline{A} = A e^{j\alpha}$, dato che dall'identità di Eulero si ha $j = e^{j\pi/2}$, si ottiene immediatamente $j\omega \underline{A} = \omega A e^{j(\alpha + \pi/2)}$.

Riassumendo, un insieme di grandezze sinusoidali isofrequenziali	$a(t) \Leftrightarrow \underline{A}$
$a(t) = \sqrt{2}A \cos(\omega t + \alpha_a), b(t) = \sqrt{2}B \cos(\omega t + \alpha_b), \dots$	$b(t) \Leftrightarrow \underline{B}$
può quindi essere rappresentato dai numeri complessi (fasori)	$a(t) + b(t) \Leftrightarrow \underline{A} + \underline{B}$
$\underline{A} = Ae^{j\alpha_a}, \underline{B} = Be^{j\alpha_b}, \dots$	$m a(t) \Leftrightarrow m \underline{A}$
utilizzando la trasformata di Steinmetz:	$\frac{da}{dt} \Leftrightarrow j\omega \underline{A}$
$a(t) = \Re[\sqrt{2} \underline{A} e^{j\omega t}], b(t) = \Re[\sqrt{2} \underline{B} e^{j\omega t}], \dots$	$0 \Leftrightarrow 0$
Inoltre, le operazioni di somma, prodotto per uno scalare reale e derivazione definite su grandezze sinusoidali si trasformano in operazioni sui fasori: somma, prodotto per uno scalare reale e prodotto per $j\omega$.	

Scegliendo opportunamente l'origine dei tempi, si può sempre porre a zero la fase di una (sola) grandezza sinusoidale arbitraria. In tal modo, la grandezza assunta come riferimento di fase sarà rappresentata da un numero reale puro.

1.2 SERIE DI FOURIER

Una data grandezza periodica $a(t)$ reale e di periodo T si può sempre rappresentare, purché il suo valore efficace sia finito, come la sovrapposizione di un termine costante e di infinite grandezze sinusoidali a frequenze multiple intere della frequenza fondamentale $f = 1/T$, come segue:

$$a(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{M,k} \cos(k\omega t + \alpha_k)$$

dove $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$. Il primo termine della sommatoria, alla frequenza f , prende il nome di armonica fondamentale (o prima armonica o, semplicemente, fondamentale). Il k -esimo termine della somma prende il nome di k -esima armonica (a frequenza kf). Dato che il valore medio delle armoniche è chiaramente nullo, il termine costante A_0 coincide con il valore medio di $a(t)$, ovvero $\langle a \rangle = A_0$. Per calcolare ampiezza e fase delle armoniche conviene scomporle come segue:

$$a(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [p_k \cos(k\omega t) + q_k \sin(k\omega t)], \text{ dove } p_k = A_{M,k} \cos(\alpha_k), -q_k = A_{M,k} \sin(\alpha_k)$$

Spesso è possibile semplificare il calcolo di p_k e q_k utilizzando le simmetrie presenti nella grandezza periodica $a(t)$. Infine si possono utilizzare i seguenti risultati, validi per h e k interi (le medie sono definite sul periodo T):

$$i) \langle \cos(h\omega t) \sin(k\omega t) \rangle = 0, \quad \forall h, k; \quad ii) \langle \cos(h\omega t) \cos(k\omega t) \rangle = \langle \sin(h\omega t) \sin(k\omega t) \rangle = 0, \quad \forall h \neq k$$

$$iii) \langle \cos^2(k\omega t) \rangle = \langle \sin^2(k\omega t) \rangle = 1/2, \quad \forall k \geq 1$$

$$\text{per ottenere: } p_k = 2 \langle a(t) \cos(k\omega t) \rangle, \quad q_k = 2 \langle a(t) \sin(k\omega t) \rangle, \quad \forall k \geq 1.$$

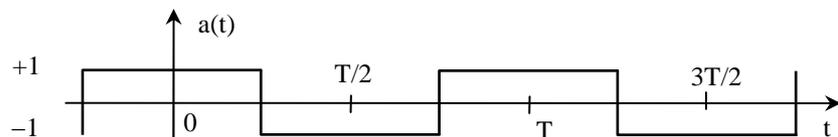
Si consideri ad esempio la grandezza periodica reale $a(t)$ di periodo T mostrata in figura, il cui valore è $+1$ per $-T/4 < t < T/4$ ed è -1 per $T/4 < t < 3T/4$ (+ multipli interi del periodo).

E' immediato verificare che:

$$I. \langle a \rangle = 0;$$

$$II. a(-t) = a(t);$$

$$III. a(t + T/2) = -a(t).$$



Quindi, per la (I), $A_0 = 0$, e per la (II), sono assenti nella serie tutti i termini di tipo seno dato che sono dispari rispetto a $t = 0$, cioè $\sin(-k\omega t) = -\sin(k\omega t)$. Sono presenti quindi solo i termini di tipo coseno. La (III) tuttavia permette di escludere le armoniche pari, che non rispettano tale simmetria (infatti se $k = 2n$, con n intero, si ha $\cos(2n\omega(t + T/2)) = \cos(2n\omega t + n\omega T) = \cos(2n\omega t + n2\pi) = \cos(2n\omega t)$). Lo sviluppo in serie di Fourier della grandezza periodica $a(t)$ è quindi rappresentabile, in questo caso, come:

$$a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{2n+1} \cos((2n+1)\omega t) = p_1 \cos(\omega t) + p_3 \cos(3\omega t) + p_5 \cos(5\omega t) + \dots$$

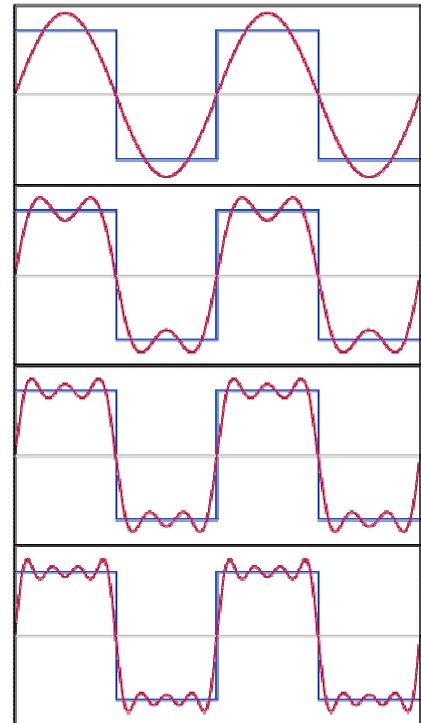
Per calcolare i coefficienti p_k si può ora utilizzare la definizione. In particolare, per quanto riguarda p_1 si ha:

$$\begin{aligned}
p_1 &= 2\langle a(t)\cos(\omega t) \rangle = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} a(t)\cos(\omega t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} a(t)\cos(\omega t) dt = \\
&= \frac{4}{T} \int_0^{T/4} \cos(\omega t) dt - \frac{4}{T} \int_{T/4}^{T/2} \cos(\omega t) dt = \\
&= \frac{4}{\omega T} [\text{sen}(\omega t)]_{t=0}^{t=T/4} - \frac{4}{\omega T} [\text{sen}(\omega t)]_{t=T/4}^{t=T/2} = \\
&= \frac{4}{2\pi} \left[\text{sen}\left(\frac{2\pi}{4}\right) - \text{sen}(0) \right] - \frac{4}{2\pi} \left[\text{sen}\left(\frac{2\pi}{2}\right) - \text{sen}\left(\frac{2\pi}{4}\right) \right] = \\
&= \frac{2}{\pi} \left[\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] - \frac{2}{\pi} \left[-\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] = \frac{4}{\pi}
\end{aligned}$$

Per i termini successivi si procede analogamente. Posto $k = 2n+1$, si ottiene:
 $p_k = (4/\pi) (-1)^n/k$. Il risultato finale è quindi:

$$a(t) = \frac{4}{\pi} \cos(\omega t) - \frac{4}{3\pi} \cos(3\omega t) + \frac{4}{5\pi} \cos(5\omega t) - \frac{4}{7\pi} \cos(7\omega t) + \dots$$

La figura più in alto confronta la grandezza periodica $a(t)$ con la sua prima armonica. Le figure dall'alto verso il mostrano come, aggiungendo anche le armoniche 3, 5 e 7, la serie di Fourier approssimi sempre meglio $a(t)$.



2. METODO SIMBOLICO PER LA SOLUZIONE DI CIRCUITI LINEARI IN CORRENTE ALTERNATA

In figura 1 è illustrato lo schema generalmente utilizzato per determinare la soluzione di regime di circuiti lineari in regime sinusoidale (AC). Un circuito è in regime sinusoidale se tutte le variabili circuitali sono funzioni sinusoidali del tempo con lo stesso periodo (o la stessa frequenza).^(*) Il metodo consiste nel trasformare il sistema di equazioni algebrico-differenziali per i valori istantanei (reali) delle tensioni e delle correnti in un sistema algebrico (a variabili complesse) di più agevole soluzione.

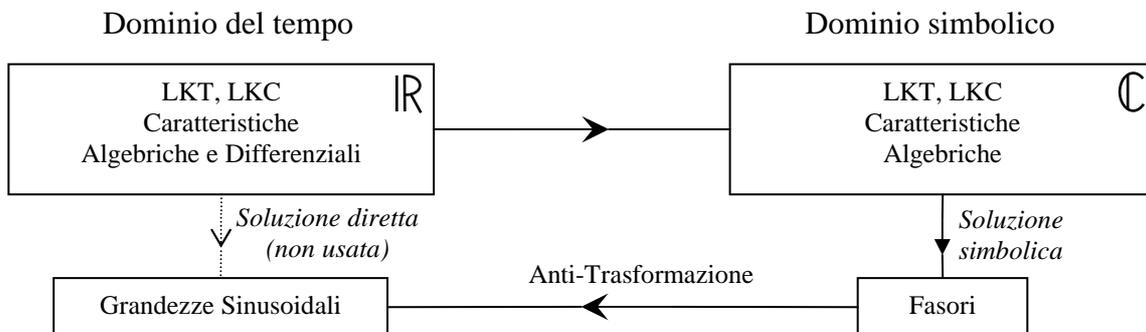


Figura 1. - Schema di risoluzione per circuiti lineari in regime AC.

Una volta scritte le LK e le caratteristiche ai valori istantanei, il metodo prevede tre passi:

- 1) Trasformazione delle equazioni nel dominio del tempo (algebrico-differenziali) in equazioni nel dominio simbolico (algebriche). Come si vedrà tra breve, l'operazione di trasformazione permette di risolvere il circuito con i metodi visti per la soluzione dei circuiti in regime stazionario.

^(*) Analogamente, un circuito è in regime periodico se tutte le variabili circuitali sono funzioni periodiche del tempo con lo stesso periodo (o la stessa frequenza). Solitamente questo regime di funzionamento viene studiato utilizzando la serie di Fourier (ogni grandezza periodica di periodo T si può rappresentare, purché il suo valore efficace sia finito, come la somma di un termine costante e di infinite grandezze sinusoidali a frequenze multiple intere della frequenza fondamentale $f = 1/T$). In questo modo, se il circuito è lineare, ci si riconduce tramite il principio di sovrapposizione degli effetti all'analisi di un circuito in regime DC (corrispondente ai termini costanti nelle variabili circuitali) e di (numerose, in teoria infiniti) circuiti in regime AC a frequenze multiple intere della fondamentale (corrispondenti ai termini sinusoidali a frequenza $f, 2f, 3f, \dots$ nelle variabili circuitali).

- 2) Risoluzione delle equazioni simboliche e determinazione dei numeri complessi rappresentativi delle variabili circuitali (fasori).
- 3) Determinazione delle correnti e delle tensioni istantanee a partire dalle grandezze simboliche che le rappresentano. Quest'ultima fase è del tutto immediata, tanto che viene normalmente sottintesa.

Trasformazione simbolica delle Leggi di Kirchhoff

Sia dato un circuito in regime sinusoidale caratterizzato da R rami ed N nodi. Per ciascun ramo si assumano versi positivi per la tensione di ramo e la corrente di ramo associati secondo la scelta dell'utilizzatore. Preso arbitrariamente un nodo come nodo di riferimento del circuito, la LKT permette di scrivere R relazioni linearmente indipendenti tra tensioni di ramo e tensioni di nodo che, in forma matriciale, assumono la forma:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{M} \mathbf{e}(t) \quad (1)$$

dove $\mathbf{v}(t)$ è il vettore delle tensioni di ramo, $\mathbf{e}(t)$ è il vettore delle tensioni di nodo. Tutte le componenti di $\mathbf{v}(t)$ ed $\mathbf{e}(t)$ sono, per definizione di regime AC, grandezze sinusoidali. \mathbf{M} è una matrice costante avente R righe ed $(N - 1)$ colonne, il cui generico elemento M_{hk} risulta nullo se il ramo h non è collegato al nodo k , uguale a $+1$ se la corrente del ramo h esce dal nodo k , -1 se la corrente del ramo h entra nel nodo k .

La LKC applicata a tutti i nodi tranne quello di riferimento permette di scrivere $(N - 1)$ equazioni che in forma matriciale assumono la forma:

$$\mathbf{A} \mathbf{i}(t) = \mathbf{0} \quad (2)$$

dove $\mathbf{i}(t)$ è il vettore delle correnti di ramo (sinusoidali, per definizione di regime AC) ed \mathbf{A} è la matrice di incidenza ridotta, avente $(N - 1)$ righe ed R colonne, il cui generico elemento A_{hk} risulta nullo se il ramo k non è collegato al nodo h , uguale a $+1$ se la corrente del ramo k esce dal nodo h , -1 se la corrente del ramo k entra nel nodo h . Quindi \mathbf{M} è la trasposta di \mathbf{A} , cioè: $\mathbf{M} = \mathbf{A}^T$.

Dato che le LK sono equazioni lineari (quindi le operazioni effettuate su grandezze sinusoidali sono solo somme e prodotti per uno scalare reale), è possibile trasformare le LK dal dominio del tempo al dominio simbolico utilizzando la trasformata di Steinmetz. Mediante tale trasformazione si perviene alle seguenti relazioni:

$$\underline{\mathbf{V}} = \mathbf{A}^T \underline{\mathbf{E}} \quad (3)$$

$$\mathbf{A} \underline{\mathbf{I}} = \mathbf{0} \quad (4)$$

dove $\underline{\mathbf{V}}$ è il vettore dei fasori delle tensioni di ramo, $\underline{\mathbf{E}}$ è il vettore dei fasori delle tensioni di nodo e $\underline{\mathbf{I}}$ è il vettore dei fasori delle correnti di ramo. Le (3)-(4) sono formalmente identiche alle (1)-(2) salvo il fatto che in luogo delle tensioni e correnti compaiono i rispettivi fasori.

Naturalmente, non è necessario effettuare ogni volta dall'inizio la trasformazione delle LKT ed LKC dal dominio del tempo al dominio simbolico. È solitamente molto più semplice trasformare il circuito ed applicare direttamente le LK nel dominio simbolico. A tal fine si possono formulare le LK direttamente in forma simbolica, come segue:

- Legge di Kirchhoff delle Correnti per un nodo (LKC_n): la somma algebrica dei fasori delle correnti in un nodo è nulla.
- Legge di Kirchhoff delle Tensioni per una maglia (LKT_m): per ogni maglia la somma algebrica dei fasori delle tensioni di ramo è nulla.
- Legge di Kirchhoff delle Tensioni per un ramo (LKT_r): ogni fasore di tensione di ramo è pari alla differenza tra i fasori delle tensioni di nodo dei suoi terminali positivo e negativo.

$$\sum_{r(\text{RAMI})} \underline{I}_r = 0$$

$$\sum_{r(\text{RAMI})} \underline{V}_r = 0$$

$$\underline{V}_{AB} = \underline{E}_A - \underline{E}_B$$

3. COMPONENTI

In questa sezione sono illustrate le caratteristiche dei generatori e dei componenti lineari che possono essere trasformati nel dominio simbolico. Tutti i componenti non-lineari non possono invece essere trasformati nel dominio simbolico. Ad esempio, il diodo non può essere trasformato nel dominio simbolico in quanto la corrente che lo attraversa non può essere sinusoidale (la semionda negativa non può attraversare il diodo interdetto) e dunque il circuito non può essere in regime AC.

Generatore di tensione

Il generatore indipendente di tensione in un circuito in regime AC deve (per definizione) avere una tensione impressa sinusoidale. Nel dominio simbolico si utilizza lo stesso simbolo usato nel dominio del tempo, in cui sono indicati direttamente i fasori della tensione di ramo, della corrente di ramo e della tensione impressa ($\underline{E} = E_{\text{eff}} e^{j\alpha_E}$, dove $E_{\text{eff}} = E_M/\sqrt{2}$). Il terminale contrassegnato dal segno + indica il terminale positivo della tensione impressa.

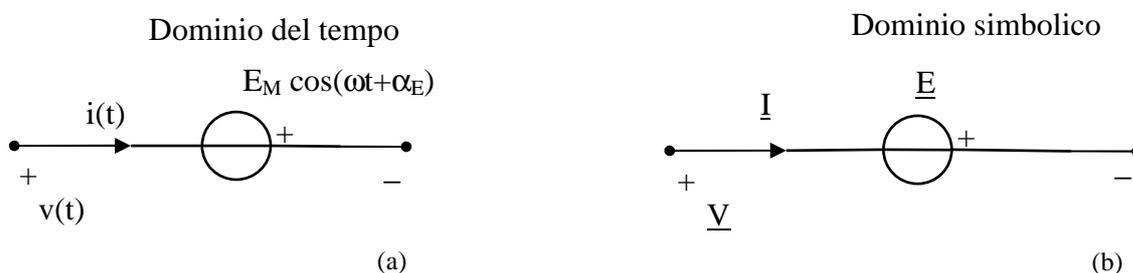


Figura 2 Generatore di tensione indipendente: (a) nel dominio del tempo, (b) nel dominio simbolico.

Con riferimento ai versi positivi delle grandezze indicati nella figura 2.a, la caratteristica del generatore di tensione indipendente nel dominio del tempo è la seguente:

$$v(t) = - E_M \cos(\omega t + \alpha_E) \quad (5)$$

Utilizzando la trasformata di Steinmetz, la caratteristica del generatore di tensione indipendente nel dominio simbolico è quindi:

$$\underline{V} = - \underline{E} \quad (6)$$

Si noti che la (6) è ottenibile direttamente dal circuito 2.b, utilizzando le solite convenzioni sui versi di riferimento. Anche per i generatori di tensione pilotati lineari (GTPT e GTPC) si procede allo stesso modo: nel dominio simbolico si utilizza lo stesso simbolo e tutte le variabili circuitali sono sostituite dai rispettivi fasori.

Generatore di corrente

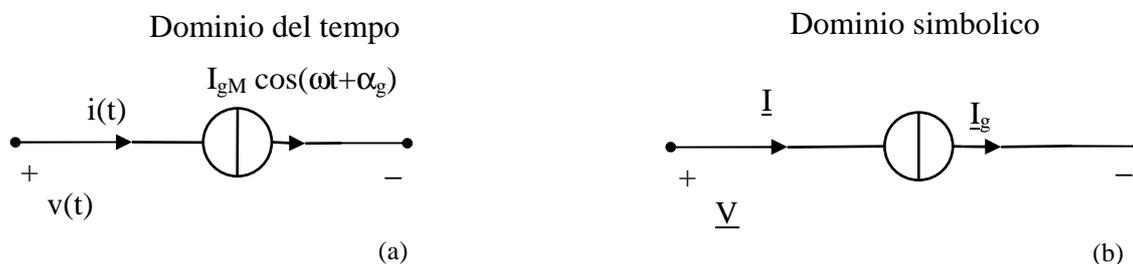


Figura 3 Generatore di corrente indipendente: (a) nel dominio del tempo, (b) nel dominio simbolico.

Il generatore indipendente di corrente in un circuito in regime AC deve (per definizione) avere una corrente impressa sinusoidale. Nel dominio simbolico si utilizza lo stesso simbolo usato nel dominio del tempo, in cui sono indicati direttamente i fasori della tensione di ramo, della corrente di ramo e della corrente impressa ($\underline{I}_g = I_{g,\text{eff}} e^{j\alpha_g}$, dove $I_{g,\text{eff}} = I_{gM}/\sqrt{2}$). La freccia indica il verso positivo della corrente impressa.

Con riferimento ai versi positivi delle grandezze indicati nella figura 3.a, la caratteristica del generatore di corrente indipendente nel dominio del tempo è la seguente:

$$i(t) = I_{g,eff} \cos(\omega t + \alpha_g) \quad (7)$$

Utilizzando la trasformata di Steinmetz, la caratteristica del generatore di corrente indipendente nel dominio simbolico è quindi:

$$\underline{I} = \underline{I}_g \quad (8)$$

Si noti che la (8) è ottenibile direttamente dal circuito 3.b, utilizzando le solite convenzioni sui versi di riferimento. Anche per i generatori di corrente pilotati lineari (GCPT e GCPC) si procede allo stesso modo: nel dominio simbolico si utilizza lo stesso simbolo e tutte le variabili circuitali sono sostituite dai rispettivi fasori.

Trasformatore ideale

Il trasformatore ideale è definito nel dominio del tempo dalle seguenti relazioni lineari:

$$v_1(t) = K v_2(t) \quad (9.a)$$

$$i_2(t) = -K i_1(t) \quad (9.b)$$

Utilizzando la trasformata di Steinmetz, le (9) si trasformano nel dominio simbolico come segue:

$$\underline{V}_1 = K \underline{V}_2 \quad (10.a)$$

$$\underline{I}_2 = -K \underline{I}_1 \quad (10.b)$$

Come per i generatori, nel dominio simbolico si mantiene lo stesso simbolo e tutte le variabili circuitali sono sostituite dai rispettivi fasori.

Resistore

Il resistore lineare ha come caratteristica nel dominio del tempo:

$$v(t) = R i(t) \quad [\text{oppure } i(t) = G v(t), \text{ dove } G = 1/R] \quad (11)$$

Utilizzando la trasformata di Steinmetz, le (11) si trasformano nel dominio simbolico come segue:

$$\underline{V} = R \underline{I} \quad [\text{oppure } \underline{I} = G \underline{V}, \text{ dove } G = 1/R] \quad (12)$$

Nel dominio simbolico il resistore si indica come in figura 4.b, specificando il valore di resistenza (o di conduttanza), e sostituendo le variabili circuitali con i rispettivi fasori.

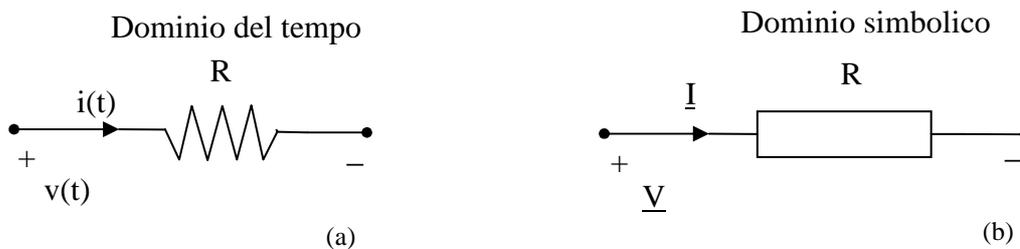


Figura 4 Resistore lineare: (a) nel dominio del tempo, (b) nel dominio simbolico.

Induttore

L'induttore lineare ha come caratteristica nel dominio del tempo:

$$v(t) = L \frac{d}{dt} i(t) \quad (13)$$

Utilizzando la trasformata di Steinmetz, la (13) si trasforma nel dominio simbolico come segue:

$$\underline{V} = j\omega L \underline{I} \quad [\text{oppure } \underline{I} = \underline{V}/(j\omega L)] \quad (14)$$

Nel dominio simbolico l'induttore si indica come in figura 5.b, specificando il valore di $j\omega L$ e sostituendo le variabili circuitali con i rispettivi fasori.

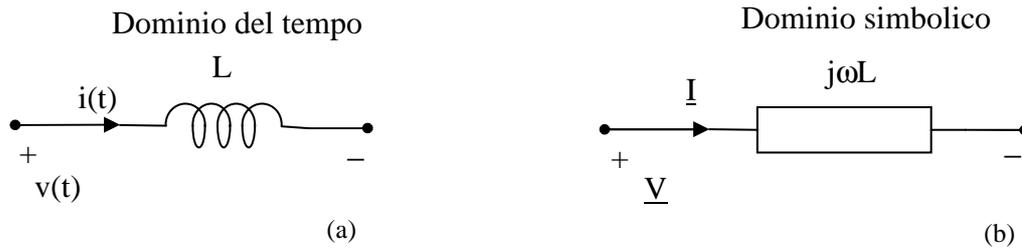


Figura 5 Induttore lineare: (a) nel dominio del tempo, (b) nel dominio simbolico.

Condensatore

Il condensatore lineare ha come caratteristica nel dominio del tempo: $i(t) = C \frac{d}{dt} v(t)$ (15)

Utilizzando la trasformata di Steinmetz, la (15) si trasforma nel dominio simbolico come segue:

$$\underline{I} = j\omega C \underline{V} \quad [\text{oppure } \underline{V} = \underline{I} / (j\omega C)] \quad (16)$$

Nel dominio simbolico il condensatore si indica come in figura 6.b, specificando il valore di $1/(j\omega C)$, oppure di $-j/(\omega C)$, e sostituendo le variabili circuitali con i rispettivi fasori.

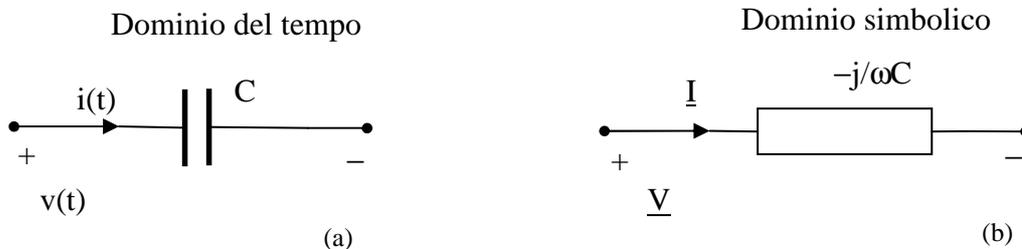


Figura 6 Condensatore lineare: (a) nel dominio del tempo, (b) nel dominio simbolico.

La ragione per cui resistore, induttore e condensatore sono rappresentati con lo stesso simbolo circuitale nel dominio simbolico è legato al fatto che le loro caratteristiche nel dominio simbolico impongono tutte la proporzionalità tra il fasore di tensione di ramo ed il fasore della corrente sul ramo. Pertanto le costanti di proporzionalità si possono considerare come casi particolari di una grandezza che viene detta **impedenza** ed indicata con \underline{Z} .

Le (12), (14) e (16) sono quindi rappresentabili come: $\underline{V} = \underline{Z} \underline{I}$ (17)

La (17) viene detta **legge di Ohm simbolica**.

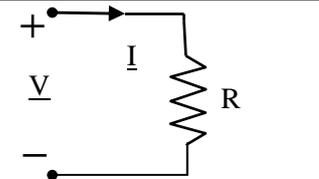
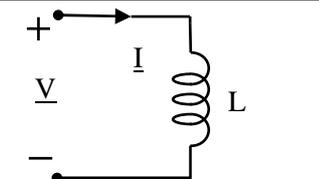
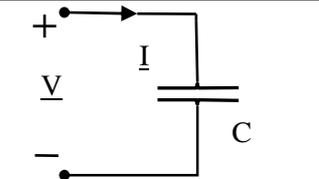
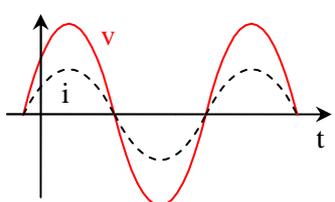
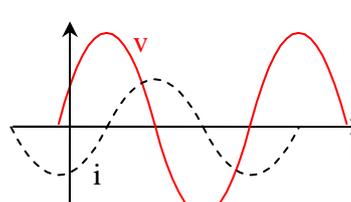
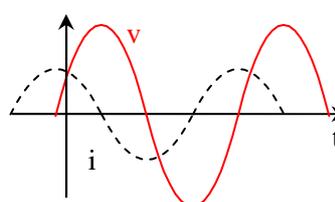
In forma cartesiana l'impedenza può essere scritta come: $\underline{Z} = R + j X$ (18)

La grandezza X è detta **reattanza**, e costituisce la parte immaginaria dell'impedenza. Se la reattanza è nulla ($X = 0$), l'impedenza rappresenta un resistore di resistenza R . Viceversa, se $R = 0$ l'impedenza rappresenta un induttore se $X = \omega L$ (reattanza induttiva) o un condensatore se $X = -1/\omega C$ (reattanza capacitiva).

L'inverso dell'impedenza viene definito **ammettenza**: $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$ (19)

In base alla legge di Ohm simbolica, si ha quindi: $\underline{I} = \underline{Y} \underline{V}$ (20)

La tabella riassume i risultati ottenuti (per chiarezza si utilizzano qui i simboli di resistore, induttore e condensatore anche nel dominio simbolico). La tensione è stata scelta come riferimento di fase, cosicché $\alpha_v = 0$; lo sfasamento tra tensione e corrente è quindi $\varphi = -\alpha_i$.

		
$\underline{Z} = R$	$\underline{Z} = j\omega L$	$\underline{Z} = -j/\omega C$
$\underline{I} = \underline{V}/R = (V/R) e^{j0}$	$\underline{I} = \underline{V}/(j\omega L) = (V/\omega L) e^{-j\pi/2}$	$\underline{I} = \underline{V}/(-j/\omega C) = \omega CV e^{j\pi/2}$
\underline{I} è in fase con \underline{V} : $I = V/R, \varphi = 0$	\underline{I} è in quadratura ritardo su \underline{V} : $I = V/\omega L, \varphi = \pi/2$	\underline{I} è in quadratura anticipo su \underline{V} : $I = \omega CV, \varphi = -\pi/2$
 	 	 

Riassumendo, si noti come nel dominio simbolico le LK siano formalmente identiche alle LK nel dominio del tempo per i circuiti privi di memoria (o in regime stazionario) salvo il fatto che in luogo delle grandezze tensioni e correnti compaiono i loro fasori. Anche le caratteristiche dei generatori, sia indipendenti sia pilotati, e del trasformatore ideale nel dominio simbolico sono formalmente identiche alle rispettive caratteristiche nel dominio del tempo per i circuiti in regime stazionario salvo il fatto che in luogo delle grandezze tensioni e correnti compaiono i loro fasori. Infine resistore, induttore e condensatore possono essere unificati nel dominio simbolico con un unico componente lineare in cui il rapporto tra i fasori di tensione e corrente è un numero complesso (impedenza). In questo caso la legge di ohm simbolica ($\underline{V} = \underline{Z} \underline{I}$) è formalmente identica alla legge di ohm di un resistore ($v = R i$), salvo il fatto che in luogo di tensione e corrente compaiono i loro fasori e che in luogo della resistenza compare l'impedenza. Queste osservazioni permettono di affermare che tutti i metodi di soluzione applicabili ai circuiti privi di memoria (o in regime stazionario) possono essere applicati anche ai circuiti in AC nel dominio simbolico, salvo l'impiego dei fasori e l'utilizzo delle impedenze al posto delle resistenze. Valgono inoltre tutti i teoremi e le equivalenze sulle reti prive di memoria (serie, parallelo, trasformazioni stella-triangolo, Teoremi di Thevenin, di Norton, di Millman, etc.) con le dette modifiche. Quanto detto mostra anche come non sia necessario, ogni volta che si risolve un circuito, procedere alla "trasformazione" delle equazioni, potendosi scrivere direttamente queste ultime nel dominio simbolico. In definitiva quindi l'operazione di trasformazione è di regola effettuata direttamente sullo schema circuitale. Anche l'operazione di antitransformazione si può di solito sottintendere essendo del tutto ovvio il passaggio dai fasori alle grandezze sinusoidali che essi rappresentano. Tale passaggio infatti implica semplicemente che si prendano modulo e fase del fasore e si identifichino con il valore efficace e la fase della grandezza sinusoidale.

È da notare che una qualsiasi delle correnti o tensioni incognite del problema può essere presa come grandezza di riferimento per gli angoli di fase, cioè è possibile porre uguale a zero la sua fase. Ciò equivale infatti a scegliere una opportuna origine dei tempi.

Si consideri ad esempio il circuito di figura 7.a costituito da una resistenza R, un'induttanza L e una capacità C in serie, alimentato da una tensione $e(t)$ sinusoidale nota: $e(t) = E_M \cos(\omega t + \alpha_E)$

Per determinare la corrente $i(t)$, supponendo il circuito in regime AC, si trasforma il circuito nel dominio simbolico ottenendo il circuito di figura 7.b.

Applicando la LKT all'unica maglia presente si ha quindi:

$$0 = -\underline{E} + j\omega L \underline{I} + R \underline{I} + \left(\frac{-j}{\omega C}\right) \underline{I}$$

da cui

$$\underline{E} = \left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right] \underline{I}$$

L'impedenza equivalente della serie R-L-C è quindi:

Posto $X = \omega L - 1/\omega C$, si ha $\underline{Z} = R + jX$.

La soluzione nel dominio simbolico è immediata:

$$\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (21)$$

$$\underline{I} = \underline{E}/\underline{Z} \quad (22)$$

da cui si ricava il modulo di \underline{I} (per definizione pari al valore efficace di i): $I = E/\sqrt{R^2 + X^2}$

e la fase di \underline{I} (assumendo $R > 0$)^(*): $\alpha_i = \angle \underline{I} = \angle \underline{E} - \angle \underline{Z} = \alpha_e - \text{Arctg}(X/R)$

Infine, anti-trasformando, è possibile determinare i : $i(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha_i) = \frac{E\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + X^2}} \cos\left(\omega t + \alpha_e - \text{Arctg} \frac{X}{R}\right)$

Tutti i metodi di soluzione applicabili ai circuiti privi di memoria sono generalmente applicabili anche nel dominio simbolico. A titolo di esempio si consideri il circuito illustrato nella figura 8.a, in cui si intende calcolare la corrente circolante sul condensatore C.

Sia D il nodo di riferimento. Si considerino versi di riferimento associati con la regola dell'utilizzatore per tensioni e correnti di ramo. Il circuito è costituito da $R = 6$ rami e da $N = 4$ nodi. La figura 8.b mostra lo stesso circuito nel dominio simbolico (i fasori rappresentativi dei generatori indipendenti sono $\underline{E}_S = E_S/\sqrt{2}$ ed $\underline{I}_S = (I_S/\sqrt{2}) e^{j\alpha_S}$). Uno dei possibili alberi è illustrato in figura 8.c (rami 4, 5 e 6). I rami tratteggiati sono quelli di coalbero (rami 1, 2 e 3).

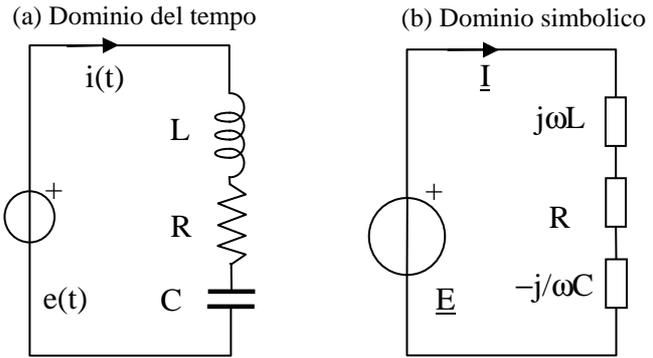


Figura 7.

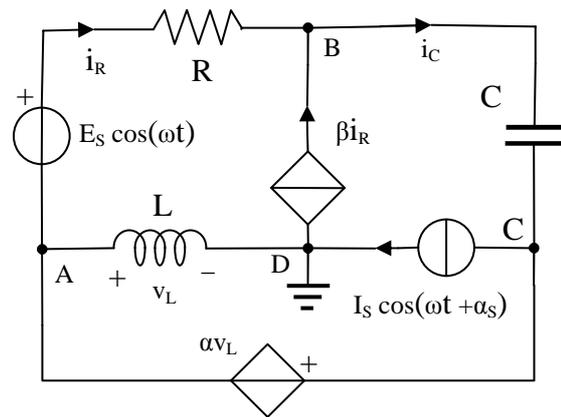


Figura 8a.

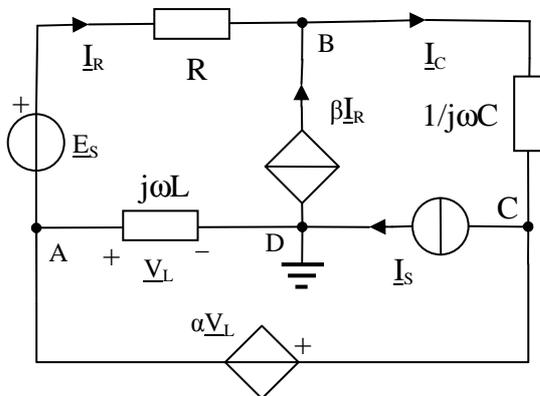


Figura 8b.

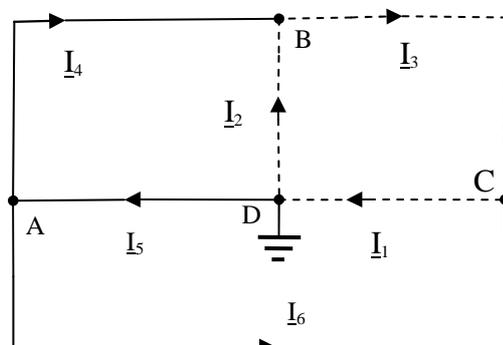


Figura 8c.

^(*) si noti che se $R > 0$ lo sfasamento tra tensione e corrente ai terminali dell'impedenza (con i versi associati secondo la convenzione da utilizzatore) è: $\varphi = \alpha_e - \alpha_i = \text{Arctan}(X/R)$; e pertanto si ha $-\pi/2 < \varphi \leq \pi/2$. Per ogni altro componente tuttavia lo sfasamento tra tensione e corrente può anche essere superiore o inferiore ($-\pi < \varphi \leq \pi$).

Analisi di Tableau (sistema di $2R + N - 1 = 15$ equazioni). Le equazioni sono scritte con riferimento ai versi delle correnti indicate in figura 8.c. Come sempre i versi delle correnti sono stati assegnati arbitrariamente. Per le tensioni si fa riferimento ai versi associati con la convenzione da utilizzatore. [Attenzione alla caratteristica del generatore pilotato: $\underline{V}_6 = -\alpha \underline{V}_1 = -\alpha (-\underline{V}_5) = \alpha \underline{V}_5$]

$$\begin{aligned}
 & \underline{V}_1 = \underline{E}_C \\
 & \underline{V}_2 = -\underline{E}_B \\
 & \underline{V}_3 = \underline{E}_B - \underline{E}_C \\
 & \underline{V}_4 = \underline{E}_A - \underline{E}_B \\
 & \underline{V}_5 = -\underline{E}_A \\
 & \underline{V}_6 = \underline{E}_A - \underline{E}_C
 \end{aligned}
 \tag{23.i}$$

(R = 6 equazioni LKT_r in cui compaiono come incognite R = 6 tensioni di ramo ed N - 1 = 3 potenziali di nodo)

$$\begin{aligned}
 & -\underline{I}_5 + \underline{I}_4 + \underline{I}_6 = 0 \\
 & \underline{I}_3 - \underline{I}_4 - \underline{I}_2 = 0 \\
 & \underline{I}_1 - \underline{I}_3 - \underline{I}_6 = 0
 \end{aligned}
 \tag{23.ii}$$

(N - 1 = 3 equazioni LKC_n in cui compaiono come incognite R = 6 correnti di ramo)

$$\begin{aligned}
 & \underline{I}_1 = \underline{I}_S \\
 & \underline{I}_2 = \beta \underline{I}_4 \\
 & \underline{V}_3 = \underline{I}_3 / j\omega C \\
 & \underline{V}_4 = -\underline{E}_S + R \underline{I}_4 \\
 & \underline{V}_5 = j\omega L \underline{I}_5 \\
 & \underline{V}_6 = \alpha \underline{V}_5
 \end{aligned}
 \tag{23.iii}$$

(R = 6 equazioni costitutive dei componenti in cui compaiono come incognite R = 6 tensioni di ramo ed R = 6 correnti di ramo)

La soluzione del sistema (23) consente di determinare \underline{I}_3 :

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{E}_S + \alpha j\omega L \underline{I}_S}{\frac{1}{j\omega C} + \frac{R + \alpha \beta j\omega L}{1 + \beta}}$$

Supponendo che i dati siano: $E_S = 10 \text{ V}$, $I_S = 5 \text{ A}$, $\alpha_S = 50^\circ$, $R = 2 \ \Omega$, $L = 0.5 \text{ mH}$, $C = 4 \ \mu\text{F}$, $\alpha = 3$, $\beta = 20$, $f = 50 \text{ Hz}$ si ottiene $\underline{I}_3 = 6.203 - j 18.07$ e quindi $i_3(t) = 27.02 \cos(\omega t - 1.240) \text{ [A]}$.

Metodo fondamentale (R + (Numero di componenti non controllati né in tensione né in corrente) = 8 equazioni)

$$\begin{aligned}
 & \underline{V}_1 + j\omega L \underline{I}_5 + \underline{V}_6 = 0 \\
 & \underline{V}_2 - R \underline{I}_4 + \underline{E}_S - j\omega L \underline{I}_5 = 0 \\
 & \frac{\underline{I}_3}{j\omega C} - \underline{V}_6 - \underline{E}_S + R \underline{I}_4 = 0
 \end{aligned}
 \tag{24.i}$$

(R - N + 1 = 3 equazioni LKT_m)

$$\begin{aligned}
 & -\underline{I}_5 + \underline{I}_4 + \underline{I}_6 = 0 \\
 & \underline{I}_3 - \underline{I}_4 - \underline{I}_2 = 0 \\
 & \underline{I}_S - \underline{I}_3 - \underline{I}_6 = 0
 \end{aligned}
 \tag{24.ii}$$

(N - 1 = 3 equazioni LKC_n)

$$\begin{aligned}
 & \underline{I}_2 = \beta \underline{I}_4 \\
 & \underline{V}_6 = \alpha j\omega L \underline{I}_5
 \end{aligned}
 \tag{24.iii}$$

(equazione costitutive dei componenti non controllati né in tensione né in corrente)

Metodo dei tagli fondamentali (R - N + 1 + (Numero di componenti non controllati in corrente) = 5 equazioni)

$$\begin{aligned}
 & \underline{V}_1 + j\omega L (\underline{I}_S - \underline{I}_2) + \underline{V}_6 = 0 \\
 & \underline{V}_2 - R (\underline{I}_3 - \underline{I}_2) + \underline{E}_S - j\omega L (\underline{I}_S - \underline{I}_2) = 0 \\
 & \frac{\underline{I}_3}{j\omega C} - \underline{V}_6 - \underline{E}_S + R (\underline{I}_3 - \underline{I}_2) = 0
 \end{aligned}
 \tag{25.i}$$

(R - N + 1 = 3 equazioni LKT_m)

$$\begin{aligned}
 & \underline{I}_2 = \beta (\underline{I}_3 - \underline{I}_2) \\
 & \underline{V}_6 = \alpha j\omega L (\underline{I}_S - \underline{I}_2)
 \end{aligned}
 \tag{25.ii}$$

(equazione costitutive dei componenti non controllati in corrente)

Metodo delle tensioni di nodo (sistema di N - 1 + (Numero di componenti non controllati in tensione) = 5 equazioni)

($N - 1 = 3$ equazioni LKC_n)

$$\frac{\underline{E}_A}{j\omega L} + \frac{\underline{E}_A - \underline{E}_B + \underline{E}_S}{R} + \underline{I}_6 = 0$$

$$j\omega C(\underline{E}_B - \underline{E}_C) - \frac{\underline{E}_A - \underline{E}_B + \underline{E}_S}{R} - \underline{I}_2 = 0 \quad (26.i)$$

$$\underline{I}_S - j\omega C(\underline{E}_B - \underline{E}_C) - \underline{I}_6 = 0$$

(equazioni costitutive dei componenti non controllati in tensione)

$$\underline{I}_2 = \beta \frac{\underline{E}_A - \underline{E}_B + \underline{E}_S}{R} \quad (26.ii)$$

$$\underline{E}_A - \underline{E}_C = -\alpha \underline{E}_A$$

In questo caso, non essendo \underline{I}_3 tra le incognite del sistema, è necessario determinare separatamente la relazione che la lega ai potenziali di nodo: $\underline{I}_3 = j\omega C(\underline{E}_B - \underline{E}_C)$.

Teorema di Thevenin

Si può applicare il teorema di Thevenin alla soluzione del circuito di figura 8.b considerando come bipolo N il condensatore C e quindi come bipolo L l'insieme di tutti gli altri componenti del circuito (vedi figura 8.d). Il bipolo L' è quello indicato nella figura 8.e, mentre il valore della tensione \underline{E}_0 viene calcolato risolvendo il bipolo L a vuoto (figura 8.f). Infine il valore della corrente \underline{I}_3 viene ottenuto risolvendo il circuito illustrato nella figura 3.g, ottenuto sostituendo il bipolo L con il suo circuito equivalente di Thevenin. [Attenzione: anche se si utilizzano gli stessi simboli (per comodità di notazione) le tensioni e le correnti indicate nei circuiti 8.e ed 8.f sono diverse tra loro e da quelle nel circuito iniziale. Infatti le diverse condizioni applicate ad L portano ovviamente a condizioni di funzionamento diverse.]

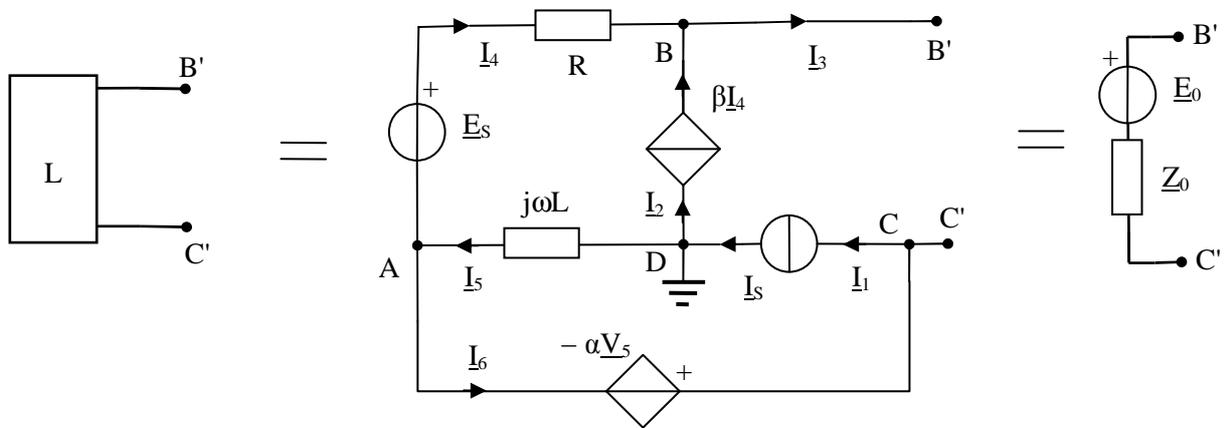
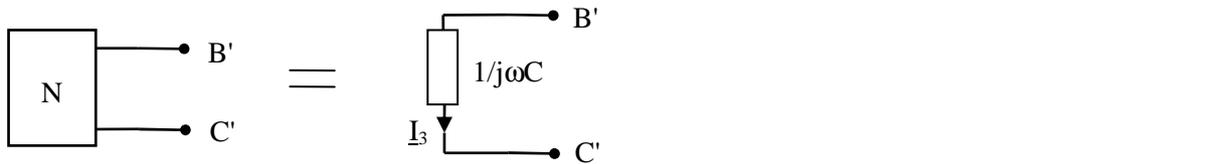


Figura 8.d

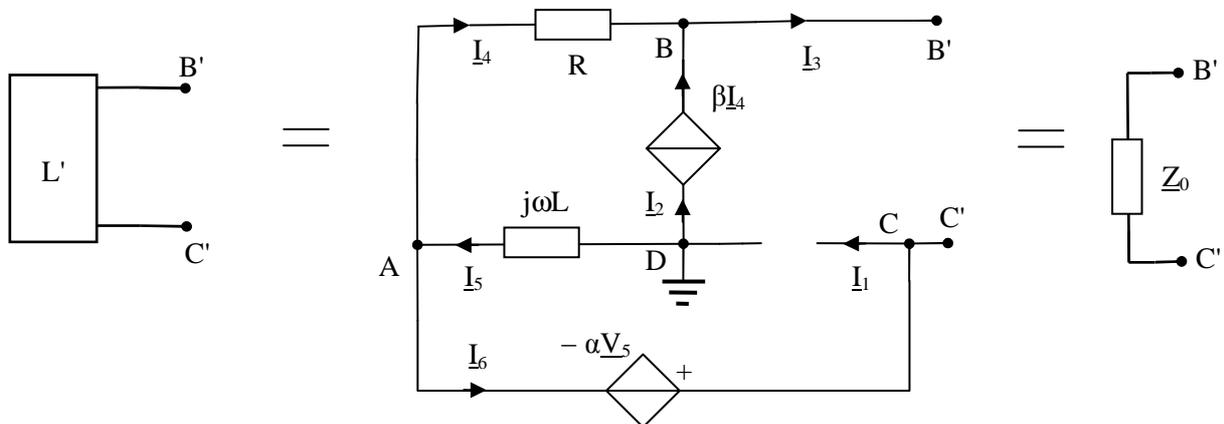


Figura 8.e

Come da definizione, il bipolo L' si ottiene da L annullando tutti generatori indipendenti presenti (ovvero sostituendo i generatori indipendenti di tensione con cortocircuiti ed i generatori indipendenti di corrente con circuiti aperti) La soluzione del circuito di figura 8.e, finalizzata alla determinazione della caratteristica tensione-corrente del bipolo B'C' (cioè della tensione \underline{V}_{BC} in funzione della corrente \underline{I}_3) si può effettuare con uno qualsiasi dei metodi precedentemente illustrati. Ad esempio, utilizzando il metodo dei potenziali di nodo si ottiene il seguente sistema di $N-1+(\text{Numero di componenti non controllati in tensione}) = 5$ equazioni. Supponendo nota \underline{I}_3 , è possibile calcolare \underline{E}_A , \underline{E}_B , \underline{E}_C , \underline{I}_2 ed \underline{I}_6 , che risultano pari a $\underline{E}_A = \beta j\omega L \underline{I}_3 / (\beta + 1)$, $\underline{E}_B = (\beta j\omega L - R) \underline{I}_3 / (\beta + 1)$, $\underline{E}_C = (\alpha + 1) \beta j\omega L \underline{I}_3 / (\beta + 1)$, $\underline{I}_2 = \beta \underline{I}_3 / (\beta + 1)$ ed $\underline{I}_6 = -\underline{I}_3$. Pertanto $\underline{V}_{BC} = \underline{E}_B - \underline{E}_C = -(\alpha \beta j\omega L + R) \underline{I}_3 / (\beta + 1)$ ed il circuito equivalente del bipolo L' è una impedenza di valore pari a: $\underline{Z}_0 = (\alpha \beta j\omega L + R) / (\beta + 1)$

($N - 1 = 3$ equazioni LKC_n)

$$\begin{aligned} \frac{-\underline{E}_A}{j\omega L} - \frac{\underline{E}_A - \underline{E}_B}{R} - \underline{I}_6 &= 0 \\ \underline{I}_3 - \frac{\underline{E}_A - \underline{E}_B}{R} - \underline{I}_2 &= 0 \\ -\underline{I}_3 - \underline{I}_6 &= 0 \end{aligned} \quad (27.i)$$

(equazioni costitutive dei componenti non controllati in tensione)

$$\begin{aligned} \underline{I}_2 &= \beta \frac{\underline{E}_A - \underline{E}_B}{R} \\ \underline{E}_A - \underline{E}_C &= -\alpha \underline{E}_A \end{aligned} \quad (27.ii)$$

[Per poter applicare il teorema di Thevenin il bipolo L deve essere controllato in corrente. Quindi in questo sistema \underline{I}_3 si suppone nota. L'impedenza è determinabile come rapporto tra i fasori di tensione e corrente tra i terminali di L'. Quindi, visto che \underline{I}_3 esce da B' ed entra in C' il terminale positivo per la tensione (con i versi associati) è C' e dunque $\underline{Z}_0 = \underline{V}_{C'B'} / \underline{I}_3$]

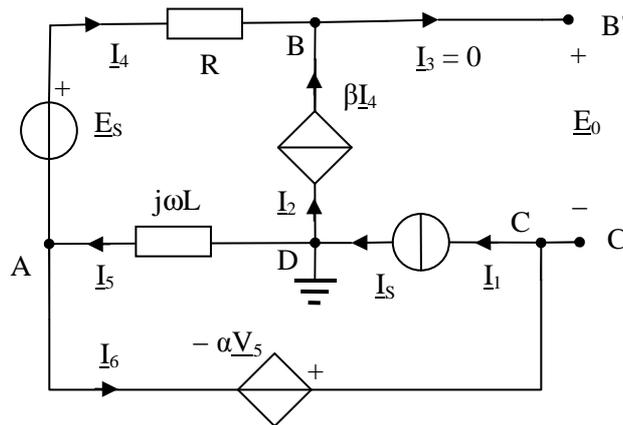


Figura 8.f

La soluzione del circuito di figura 3.f (il bipolo L a vuoto, ovvero con i terminali collegati ad un circuito aperto che impone $\underline{I}_3 = 0$), è finalizzata alla determinazione della tensione \underline{E}_0 tra i terminali B' e C' e si può effettuare con uno qualsiasi dei metodi precedentemente illustrati. Ad esempio, utilizzando il metodo dei Tagli Fondamentali si ottiene il seguente sistema di $R - N + 1 + (\text{Numero di componenti non controllati in corrente}) = 5$ equazioni.

($R - N + 1 = 3$ equazioni LKT_m)

$$\begin{aligned} \underline{V}_1 + j\omega L(\underline{I}_s - \underline{I}_2) + \underline{V}_6 &= 0 \\ \underline{V}_2 - R(-\underline{I}_2) + \underline{E}_s - j\omega L(\underline{I}_s - \underline{I}_2) &= 0 \\ \underline{E}_0 - \underline{V}_6 - \underline{E}_s + R(-\underline{I}_2) &= 0 \end{aligned} \quad (28.i)$$

(equazione costitutive dei componenti non controllati in corrente)

$$\begin{aligned} \underline{I}_2 &= \beta(-\underline{I}_2) \\ \underline{V}_6 &= \alpha j\omega L(\underline{I}_s - \underline{I}_2) \end{aligned} \quad (28.ii)$$

Risolvendo le (28), supponendo $\beta \neq -1$, il valore della tensione \underline{E}_0 risulta essere:

$$\underline{E}_0 = \underline{E}_s + \alpha j\omega L \underline{I}_s \quad (29)$$

Infine il valore della corrente I_3 viene ottenuto risolvendo il circuito illustrato nella figura 8.g, ottenuto sostituendo il bipolo L con il suo equivalente di Thevenin. In questo caso, la corrente I_3 risulta essere:

$$I_3 = \frac{E_0}{\frac{1}{j\omega C} + Z_0} = \frac{E_s + \alpha j\omega L I_s}{\frac{1}{j\omega C} + \frac{R + \alpha \beta j\omega L}{1 + \beta}}$$

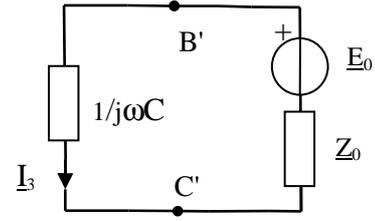


Figura 8.g

Teorema di Norton

Si può applicare il teorema di Norton alla soluzione del circuito di figura 8.b considerando come bipolo N il condensatore C e quindi come bipolo L l'insieme di tutti gli altri componenti del circuito (vedi figura 8.h). Il bipolo L' è quello indicato nella figura 8.e, mentre il valore della corrente I_0 viene calcolato risolvendo il circuito riportato nella figura 8.i (il bipolo L in cortocircuito). Infine il valore della corrente I_3 viene ottenuto risolvendo il circuito illustrato nella figura 8.j, ottenuto sostituendo il bipolo L con il suo circuito equivalente di Norton.

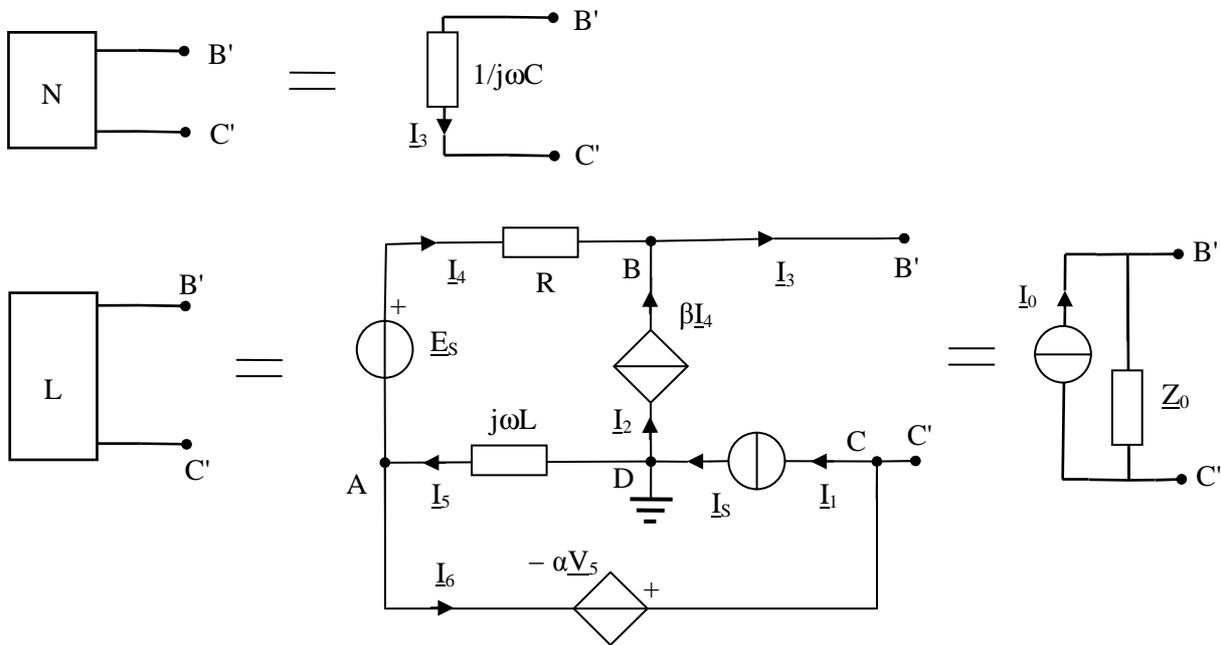


Figura 8.h

La soluzione del circuito di figura 8.e, finalizzata alla determinazione della impedenza equivalente del bipolo L', è già stata effettuata.

La soluzione del circuito di figura 8.i (bipolo L cortocircuitato, ovvero con i terminali collegati ad un cortocircuito che impone $V_{BC} = 0$), finalizzata alla determinazione della corrente I_0 tra i terminali B' e C' si può effettuare con uno qualsiasi dei metodi precedentemente illustrati. Ad esempio, utilizzando il metodo dei Tagli Fondamentali si ottiene il seguente sistema di $R - N + 1 + (\text{Numero di componenti non controllati in corrente}) = 5$ equazioni.

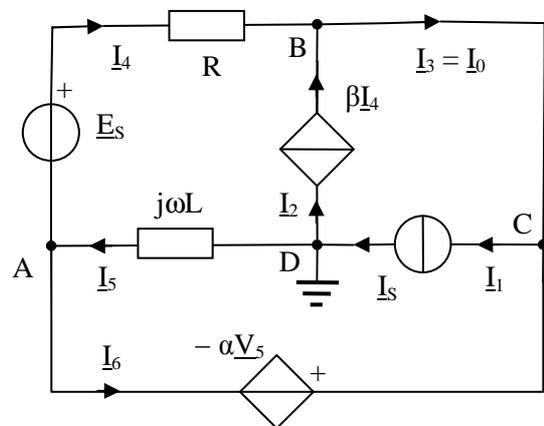


Figura 8.i

$$\begin{aligned}
 (R - N + 1 = 3 \text{ equazioni LKT}_m) \quad & \underline{V}_1 + j\omega L(\underline{I}_S - \underline{I}_2) + \underline{V}_6 = 0 \\
 & \underline{V}_2 - R(\underline{I}_0 - \underline{I}_2) + \underline{E}_S - j\omega L(\underline{I}_S - \underline{I}_2) = 0 \\
 & -\underline{V}_6 - \underline{E}_S + R(\underline{I}_0 - \underline{I}_2) = 0
 \end{aligned} \tag{30.i}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{equazione costitutive dei componenti non} & \underline{I}_2 = \beta(\underline{I}_0 - \underline{I}_2) \\
 \text{controllati in corrente}) & \underline{V}_6 = \alpha j\omega L(\underline{I}_S - \underline{I}_2)
 \end{aligned} \tag{30.ii}$$

Risolvendo le (30) il valore della corrente \underline{I}_0 risulta essere:

$$\underline{I}_0 = \frac{\underline{E}_S + \alpha j\omega L \underline{I}_S}{R + \alpha \beta j\omega L} = \frac{\underline{E}_S + \alpha j\omega L \underline{I}_S}{Z_0} \tag{31}$$

Infine si ha il valore di \underline{I}_3 risolvendo il circuito in figura 8.j, ottenuto sostituendo il bipolo L con il suo equivalente di Norton. In questo caso \underline{I}_3 risulta essere:

$$\underline{I}_3 = j\omega C \frac{\underline{I}_0}{j\omega C + \frac{1}{Z_0}} = \frac{Z_0 \underline{I}_0}{Z_0 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\underline{E}_S + \alpha j\omega L \underline{I}_S}{\frac{1}{j\omega C} + \frac{R + \alpha \beta j\omega L}{1 + \beta}}$$

[La soluzione è immediata notando che $\underline{I}_3 = j\omega C \underline{V}_{BC}$. La tensione tra B e C è data da $\underline{V}_{BC} = \underline{I}_0 / \underline{Y}_{//}$, dove $\underline{Y}_{//}$ è l'ammettenza del parallelo che è la somma delle ammettenze dei due rami: $\underline{Y}_{//} = j\omega C + 1/Z_0$]

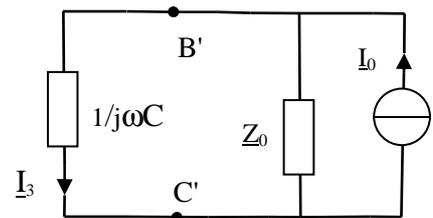


Figura 8.j

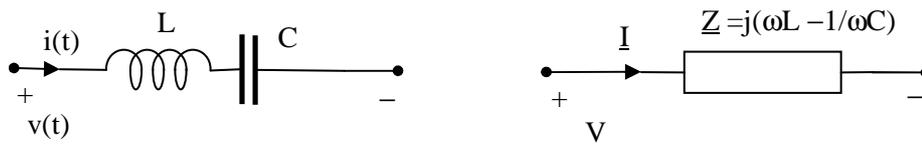
4. RISONANZA ED ANTIRISONANZA

A differenza della resistenza, solitamente positiva, la reattanza può essere positiva o negativa a seconda del carattere induttivo o capacitivo dell'impedenza considerata. Questo può portare a risultati non intuitivi nelle reti in AC. Si consideri infatti la serie L-C in figura. Nel dominio simbolico è equivalente ad una impedenza $\underline{Z} = jX$, dove $X = \omega L - 1/\omega C$.

Si riconosce che, per L e C fissate, esiste una pulsazione ω_0 per cui la reattanza si annulla:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{32}$$

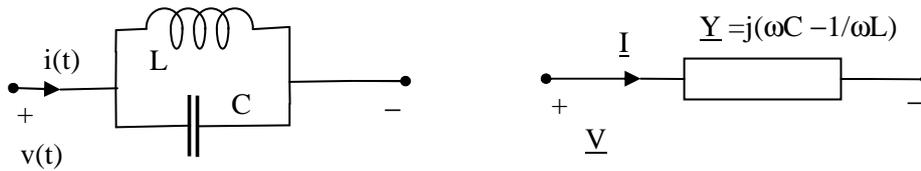
La pulsazione ω_0 è detta **pulsazione di risonanza**. Quindi per $\omega = \omega_0$ l'impedenza equivalente del bipolo è nulla ed il bipolo stesso ha come caratteristica $\underline{V} = 0$ cioè è equivalente ad un cortocircuito.



In pratica tuttavia induttori e condensatori reali hanno sempre effetti parassiti dissipativi. Quindi, fissato il modulo della tensione di alimentazione, per $\omega = \omega_0$ la corrente è massima in modulo (e finita) e $\varphi = 0$. In condizioni di risonanza il comportamento del circuito è resistivo, poiché le reattanze induttiva e capacitiva si compensano a vicenda. Per $\omega < \omega_0$, la reattanza capacitiva prevale su quella induttiva, e $\varphi < 0$. Viceversa, per $\omega > \omega_0$ la reattanza induttiva prevale su quella capacitiva e $\varphi > 0$.

Si consideri ora il parallelo L-C in figura. Nel dominio simbolico è equivalente al parallelo delle due ammettenze $\underline{Y}_L = 1/\underline{Z}_L = 1/(j\omega L) = -j/\omega L$ ed $\underline{Y}_C = 1/\underline{Z}_C = 1/(1/j\omega C) = j\omega C$. L'ammettenza equivalente del parallelo è la somma delle ammettenze dei due rami: $\underline{Y}_{//} = j\omega C - j/\omega L$. Calcolandone l'inversa è quindi possibile esprimere l'impedenza equivalente del parallelo nella forma: $\underline{Z} = jX$, dove $X = -1/(\omega C - 1/\omega L)$. Si riconosce che, per L e C fissate, esiste una pulsazione ω_0 per cui la reattanza è infinita: è data dalla (32). Tale pulsazione ω_0 è detta **pulsazione di antirisonanza**. Quindi

per $\omega = \omega_0$ l'ammettenza equivalente del bipolo è nulla ed il bipolo stesso ha come caratteristica $\underline{I} = 0$, cioè è equivalente ad un circuito aperto.



In condizioni di antirisonanza e fissato il modulo della tensione di alimentazione, anche se la corrente \underline{I} è nulla le correnti \underline{I}_L e \underline{I}_C risultano diverse da zero: $\underline{I}_L = -\underline{I}_C = -j\underline{V}\sqrt{C/L}$. Si instaura cioè un regime periodico di scambio energetico tra il condensatore e l'induttore.

5. POTENZE IN REGIME AC

L'utilizzatore U in figura è soggetto alla tensione sinusoidale:

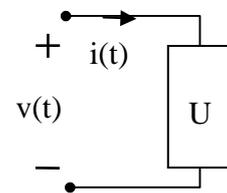
$$v(t) = V_M \cos(\omega t)$$

e percorso dalla corrente sinusoidale:

$$i(t) = I_M \cos(\omega t - \varphi)$$

La potenza istantanea assorbita è dunque:

$$p(t) = v(t) i(t)$$



La corrente $i(t)$ può essere scomposta nelle due componenti i_a e i_r , dette rispettivamente corrente **attiva** e **reattiva**. La corrente attiva è quindi la componente della corrente in fase con la tensione, mentre la corrente reattiva è la componente in quadratura. Si può dunque scrivere:

$$i_a(t) = I_M \cos(\omega t) \cos\varphi$$

$$i_r(t) = I_M \sin(\omega t) \sin\varphi$$

$$i = i_a + i_r$$

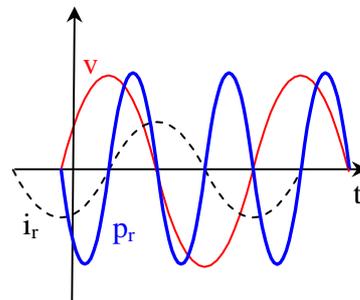
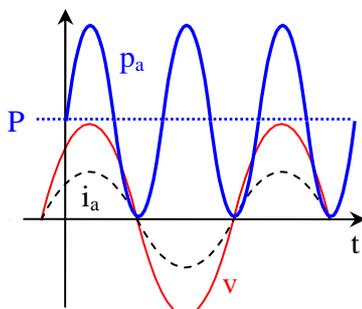
La potenza istantanea diventa quindi:

$$p(t) = v(t) i_a(t) + v(t) i_r(t) = p_a(t) + p_r(t)$$

Le grandezze p_a e p_r , dette rispettivamente **potenza istantanea attiva** e **potenza istantanea reattiva**, sono calcolabili come segue^(o) e sono mostrate in figura:

$$p_a(t) = v(t) i_a(t) = V_M I_M \cos\varphi \cos^2(\omega t) = \frac{V_M I_M}{2} \cos\varphi [1 + \cos(2\omega t)] \quad (33)$$

$$p_r(t) = v(t) i_r(t) = V_M I_M \sin\varphi \sin(\omega t) \cos(\omega t) = \frac{V_M I_M}{2} \sin\varphi \sin(2\omega t) \quad (34)$$



La potenza istantanea attiva non cambia mai segno, e rappresenta quindi un flusso unidirezionale di energia (per unità di tempo). Il suo integrale su un periodo T è quindi, di norma, diverso da zero.

Si definisce **potenza attiva** (o potenza media) P il valore medio in un periodo dalla potenza istantanea:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \quad (35)$$

^(o) Si ricordi che $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$; $\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1$.

È immediato verificare che il valore medio della potenza istantanea coincide col valore medio della potenza attiva istantanea: infatti, la potenza reattiva istantanea è una grandezza sinusoidale e, di conseguenza ha valore medio nullo. Si ha quindi:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p_a(t) dt = \frac{V_M I_M}{T} \cos \varphi \int_0^T \cos^2(\omega t) dt = \frac{V_M I_M}{2} \cos \varphi$$

E, introducendo i valori efficaci di corrente e tensione: $P = VI \cos \varphi$ (36)

La potenza attiva è quindi valutabile come il prodotto del valore efficace della tensione, il valore efficace della corrente e del **fattore di potenza** $\cos \varphi$. Dato che è la media della potenza istantanea, ne assume anche l'unità di misura, il watt [W].

La **potenza complessa** \underline{N} è definita dalla seguente relazione: $\underline{N} = \underline{V} \underline{I}^*$ (37)

dove \underline{I}^* è il complesso coniugato di \underline{I} . Si ha quindi: $\underline{N} = V e^{j\alpha_v} I e^{-j\alpha_i} = VI e^{j\varphi}$

e, ricordando l'identità di Eulero: $\underline{N} = VI \cos \varphi + j VI \sin \varphi$ (38)

Risulta così provato, per la (36), che la parte reale della potenza complessa è pari alla potenza attiva: $\Re[\underline{N}] = P = VI \cos \varphi$.

La parte immaginaria della potenza complessa è detta **potenza reattiva**: $Q = \Im[\underline{N}] = VI \sin \varphi$ (39)

La potenza complessa è quindi esprimibile come: $\underline{N} = P + j Q$ (40)

Dalla (39) si può notare che un bipolo assorbe potenza reattiva solo quando la corrente è sfasata rispetto alla tensione ($\varphi \neq 0$), ed è quindi presente una componente reattiva della corrente stessa. Ciò avviene quando il componente è in grado di immagazzinare energia senza dissiparla, come in un induttore od in un condensatore. La potenza reattiva è quindi un indicatore di uno scambio di energia (per unità di tempo) tra componenti con memoria e/o generatori. La sua unità di misura è il Volt-Ampere-Reattivo [VAR].

Il modulo N della potenza complessa è detto **potenza apparente** (misurata in Volt-Ampere [VA]):

$$N = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (41)$$

Sostituendo le definizioni di P e Q si ottiene anche $N = VI$. Questo permette di ottenere la definizione del fattore di potenza in termini di potenze (invece che come coseno dello sfasamento tra tensione e corrente):

$$\cos \varphi = \frac{P}{N} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

Si consideri ora un generico ramo di circuito caratterizzato da un'impedenza \underline{Z} . Tenendo conto della legge di Ohm simbolica, la (37) può essere riscritta come segue:

$$\underline{N} = \underline{Z} \underline{I} \underline{I}^* = \underline{Z} I^2 = R I^2 + j X I^2 \quad (42)$$

Confrontando la (42) con la (39) e la (40) si ottiene:

$$P = R I^2 \quad (43)$$

$$Q = X I^2 \quad (44)$$

In base alla definizione di valore efficace si ricava subito che la potenza attiva è pari alla media su un periodo della potenza dissipata sulla resistenza R , che assorbe energia senza restituirla. La potenza reattiva dipende invece dalla reattanza, cioè dai componenti in grado di immagazzinare energia (elettrostatica nei condensatori, magnetica negli induttori) e di restituirla. Si noti che, mentre la P è sempre positiva (se $R > 0$), il segno di Q dipende dalla reattanza prevalente nel ramo. Q è quindi positiva per reattanze induttive ($Q = \omega L I^2$ per una reattanza induttiva), e negativa per reattanze capacitive ($Q = -I^2/\omega C$ per una reattanza capacitiva).

ADDITIVITÀ DELLE POTENZE

Dalle equazioni (3) ed (4) segue, come corollario del Teorema di Tellegen, l'additività delle potenze in regime sinusoidale. Infatti, per un dato circuito, preso un qualsiasi vettore di fasori di tensioni di ramo $\underline{\mathbf{V}}$, che soddisfi le LKT per quel circuito, ed un vettore di fasori di correnti di ramo $\underline{\mathbf{I}}$, che soddisfi le LKC per quel circuito, vale la seguente relazione:

$$\underline{\mathbf{V}}^T \underline{\mathbf{I}}^* = 0 \quad (45)$$

Infatti, si ha

$$\underline{\mathbf{V}}^T \underline{\mathbf{I}}^* = (\mathbf{A}^T \underline{\mathbf{E}})^T \underline{\mathbf{I}}^* = \underline{\mathbf{E}}^T \mathbf{A} \underline{\mathbf{I}}^* = \underline{\mathbf{E}}^T (\mathbf{A} \underline{\mathbf{I}})^* = \underline{\mathbf{E}}^T \mathbf{0} = 0$$

Se si applica la (45) considerando i vettori di fasori delle tensioni e delle correnti effettivamente presenti nel circuito, si ottiene la relazione (46) che, sulla base della definizione (37), mostra come la somma delle potenze complesse assorbite da tutti i rami del circuito risulti sempre nulla.

$$\underline{\mathbf{V}}^T \underline{\mathbf{I}}^* = \sum_k \underline{\mathbf{V}}_k \underline{\mathbf{I}}_k^* = \sum_k \underline{\mathbf{N}}_k = 0 \quad (46)$$

Eguagliando a zero le parti reali e le parti immaginarie della (46) e utilizzando la (40) si ottengono le seguenti relazioni:

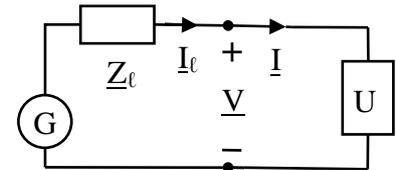
$$\sum_k \underline{\mathbf{P}}_k = 0, \quad (47)$$

Le (47) e (48) esprimono il fatto che la sia la somma delle potenze attive, sia la somma delle potenze reattive, assorbite da tutti i rami del circuito sono sempre nulle^(*).

$$\sum_k \underline{\mathbf{Q}}_k = 0. \quad (48)$$

6. RIFASAMENTO

In figura è rappresentato un circuito in AC in cui un generatore di tensione G alimenta, tramite una linea ℓ , un utilizzatore U . La linea è schematizzata mediante una impedenza $\underline{\mathbf{Z}}_\ell = \mathbf{R}_\ell + j \mathbf{X}_\ell$. Alla resistenza di linea è associata una potenza dissipata per conduzione: $P_d = \mathbf{R}_\ell I_\ell^2$. Dato che $\underline{\mathbf{I}}_\ell = \underline{\mathbf{I}}$ si ha anche $P_d = \mathbf{R}_\ell I^2$.



Esistono utilizzatori che, essendo caratterizzati da un fattore di potenza ($\cos\varphi$) basso necessitano di elevati valori di corrente per assorbire la potenza nominale per cui sono stati progettati. Infatti, dalla (36) si ha $I = P/V\cos\varphi$. Quindi tanto minore è il fattore di potenza, tanto maggiore è, a parità di tensione e potenza attiva assorbita, la corrente. Lo scopo del rifasamento è quello di diminuire la potenza dissipata nella linea (che aumenta quadraticamente al crescere della corrente) riducendo l'assorbimento di potenza reattiva del carico^(*). Concretamente il rifasamento dell'utilizzatore si ottiene ponendo in parallelo ad esso una reattanza con cui possa scambiare potenza reattiva (evitando quindi che lo scambio di potenza reattiva avvenga tra carico e generatore). Il tipo di reattanza dipende dallo sfasamento dell'utilizzatore: occorre un condensatore se $\varphi > 0$, un induttore se $\varphi < 0$.

^(*) Questo non è vero per le potenze apparenti, infatti $\sum_k \underline{\mathbf{N}}_k = \sum_k |\underline{\mathbf{N}}_k| \neq |\sum_k \underline{\mathbf{N}}_k| = 0$

^(*) Il rifasamento del carico è imposto dal gestore della rete elettrica se il fattore di potenza (medio mensile) è inferiore a 0.7. Vi sono inoltre tipicamente clausole contrattuali che obbligano l'utente al pagamento di una penale se il fattore di potenza (medio mensile) è inferiore a 0.9. Nessun intervento è richiesto invece se il fattore di potenza (medio mensile) è superiore a 0.9.

Si faccia riferimento al caso più frequente in cui $\varphi > 0$ (carico ohmico-induttivo^(**)). Tenendo conto che $\underline{I}_\ell = \underline{I} + \underline{I}_C$ e $\underline{I}_C = j\omega C \underline{V}$ si vede come sia possibile ridurre in maniera considerevole la corrente di linea aumentando il valore della capacità C . La presenza del condensatore in parallelo ad U rende in teoria possibile annullare lo sfasamento φ' del parallelo condensatore - utilizzatore (rifasamento completo). In realtà il rifasamento completo è raramente necessario; è sufficiente che $\cos(\varphi') \geq 0.9$. Per determinare il corrispondente valore di C , si consideri che dalla (36) e dalla (39) si ha:

$$Q = P \tan\varphi \quad (49)$$

$$Q + Q_C = P \tan\varphi' \quad (50)$$

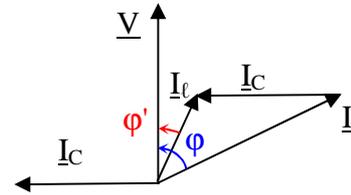
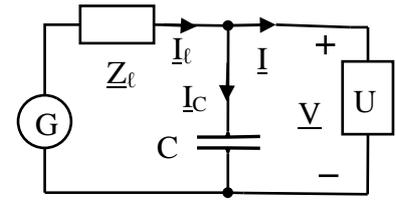
dove P , Q , Q_C sono rispettivamente la potenza attiva assorbita dal utilizzatore, la potenza reattiva assorbita dall'utilizzatore e la potenza reattiva assorbita dalla capacità. La (50) è stata ottenuta tenendo conto che la potenza attiva assorbita dal condensatore è nulla.

Sottraendo membro a membro la (49) dalla (50) si ottiene:

$$Q_C = P (\tan\varphi' - \tan\varphi)$$

Tenendo conto che $Q_C = X_C I_C^2 = -I_C^2/\omega C = -(\omega C V)^2/\omega C = -\omega C V^2$, si ricava quindi:

$$C = \frac{P}{\omega V^2} (\tan\varphi - \tan\varphi') \quad (51)$$



^(**) Quindi un carico ohmico-induttivo assorbe, oltre a ad una potenza attiva positiva, una potenza reattiva positiva ($Q > 0$), ossia resistenza e reattanza dell'impedenza equivalente sono positive. Viceversa, un carico ohmico-capacitivo assorbe una potenza reattiva negativa ($Q < 0$), ossia la reattanza dell'impedenza equivalente è negativa.