

MAGNETOSTATICA E CIRCUITI MAGNETICI

Per poter affrontare lo studio delle macchine elettriche è necessario, oltre ai circuiti elettrici, conoscere anche i circuiti magnetici. Infatti l'interazione tra due o più avvolgimenti percorsi da corrente avviene grazie al campo di induzione magnetico che è generato dalle correnti e la cui variazione induce tensione sugli avvolgimenti stessi. I circuiti magnetici sono uno strumento semplice ed utile per descrivere tale interazione. Essi saranno introdotti, in analogia a quelli elettrici, dopo aver definito (nel passaggio dai campi ai circuiti) le condizioni in cui è possibile ottenere le tipiche variabili circuitali (tensione e corrente) e le leggi che esse devono soddisfare nella teoria dei circuiti (le Leggi di Kirchhoff) a partire dalle definizioni dei campi vettoriali tipici dell'elettromagnetismo e le leggi che essi devono soddisfare nella teoria dei campi (Equazioni di Maxwell). Estendendo l'analisi anche ai componenti elettrici è possibile collegare le caratteristiche di, ad esempio, resistore ed induttore alle proprietà dei materiali (conducibilità e permeabilità magnetica) e alla struttura (sezioni e lunghezze) del componente reale. La stessa procedura sarà poi in seguito estesa alle macchine elettriche, ma in direzione opposta. Ovvero si supporrà di conoscere la struttura, le proprietà dei materiali utilizzati ed il principio di funzionamento della macchina per dedurre il circuito equivalente e, dal suo studio, tutte le proprietà della macchina stessa.

1. DEFINIZIONI ED EQUAZIONI DI MAXWELL

Per la carica elettrica si suppongono valide le stesse ipotesi già introdotte per la teoria dei circuiti, ovvero oltre all'esistenza (e la misurabilità), l'associazione a portatori di carica dotati di massa. Questo significa che è possibile porre in movimento la carica elettrica (infatti, se la massa è non nulla, applicando una forza esterna al portatore di carica questo subirà una accelerazione, e quindi una velocità, non nulla). Il moto, o meglio lo spostamento, della carica elettrica richiede quindi energia (corrispondente al lavoro della forza esterna). Queste osservazioni giustificano le seguenti definizioni:

Definizione di campo elettrico e di induzione magnetica: si consideri la forza esercitata su una carica puntiforme in moto (Forza di Lorentz)

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

\mathbf{F} = forza agente sulla carica puntiforme [N]; q = carica elettrica [C]; \mathbf{v} = velocità della carica [m/s]; \mathbf{E} = campo elettrico [V/m]; \mathbf{B} = induzione magnetica [T].

La campo elettrico \mathbf{E} è definito come la forza \mathbf{F} per unità di carica agente su una carica puntiforme collocata nel punto in esame e ferma ($\mathbf{v} = 0$) rispetto all'osservatore in un riferimento inerziale. Supponendo noto \mathbf{E} , la forza $\mathbf{F} - q\mathbf{E}$ è pari a $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ (forza che è ortogonale a \mathbf{v} e che dunque non compie lavoro). Tale termine è utilizzato per definire l'induzione magnetica \mathbf{B} nel punto "attraversato" dalla carica q nell'istante considerato). La conoscenza di $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ non permette di determinare la componente di \mathbf{B} parallela a \mathbf{v} , quindi per determinare \mathbf{B} è necessaria almeno una coppia di misure nello stesso punto con velocità vettorialmente diverse.

Definizione di densità di carica (ρ). Si consideri un punto P dello spazio ed un elemento di volume τ centrato in P.

$$\rho = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta\tau}$$

ΔQ = carica elettrica presente in τ [C]; $\Delta\tau$ = volume di τ [m³].

Definizione di densità di corrente (\mathbf{J}). Si consideri un punto P dello spazio ed una superficie piana passante per P.

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q / \Delta t}{\Delta S}$$

\mathbf{n} = versore normale alla superficie; ΔS = area dell'elemento di superficie considerato centrato in P [m²]; ΔQ = carica elettrica che ha attraversato l'elemento di superficie nel verso individuato da \mathbf{n} [C]; Δt = intervallo di tempo considerato [s].

Definizione di polarizzazione (P). L'azione di un campo elettrico \mathbf{E} su un materiale (non conduttore) può essere descritta assumendo che ogni volumetto $\Delta\tau$ di materia divenga sede di un dipolo elettrico⁽¹⁾ con momento $\Delta\mathbf{p}$. Lo stato della materia polarizzata può quindi essere definito tramite la densità di dipoli elettrici.

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta\tau}$$

Definizione di magnetizzazione (M). L'azione di un campo di induzione \mathbf{B} su un materiale può essere descritta assumendo che ogni volumetto $\Delta\tau$ di materia divenga sede di un dipolo magnetico⁽²⁾ con momento infinitesimo $\Delta\mathbf{m}$. Lo stato della materia magnetizzata può quindi essere definito tramite la densità di dipoli magnetici.

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{m}}{\Delta\tau}$$

Definizione dello spostamento elettrico e del campo magnetico

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$$

\mathbf{D} = spostamento elettrico [C/m^2]; \mathbf{H} = campo magnetico [A/m]; ϵ_0 = costante dielettrica del vuoto ($8.854 \cdot 10^{-12} \text{ F}/\text{m}$); μ_0 = permeabilità magnetica del vuoto ($4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H}/\text{m} \cong 1.256 \cdot 10^{-6} \text{ H}/\text{m}$).

Spesso è possibile supporre che la polarizzazione elettrica sia proporzionale al campo elettrico e che la magnetizzazione sia proporzionale al campo magnetico (materiale lineare omogeneo isotropo):

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

dove χ_e , χ_m sono le suscettività elettrica e magnetica. In tal caso si ha:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$$

dove $\epsilon_r = 1 + \chi_e$ = costante dielettrica relativa; $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ = costante dielettrica; $\mu_r = 1 + \chi_m$ = permeabilità magnetica relativa; $\mu = \mu_r \mu_0$ = permeabilità magnetica.

EQUAZIONI DI MAXWELL (IN FORMA INTEGRALE)

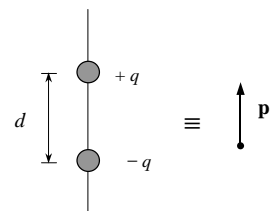
Legge di Ampère - Maxwell (legge della circuitazione magnetica): *la circuitazione del vettore campo magnetico lungo una linea chiusa qualsiasi è pari alla corrente totale concatenata con tale linea.*

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = i_c$$

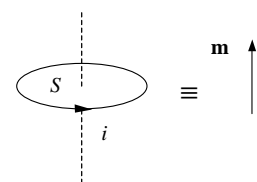
Legge di Faraday - Neumann - Lenz (legge della circuitazione elettrica): *la circuitazione del vettore campo elettrico lungo una linea chiusa qualsiasi è pari alla derivata temporale del flusso di induzione magnetica concatenato con tale linea cambiata di segno.*

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_c}{dt}$$

⁽¹⁾ Si consideri il sistema costituito da due cariche puntiformi di valore opposto, $+q$ e $-q$, situate nel vuoto ad una distanza d , e si consideri il limite al quale tende tale sistema quando d e q tendono rispettivamente a 0 e a $+\infty$, in modo tale che il prodotto qd tenda ad una quantità p finita e non nulla. Il sistema che si ottiene si chiama **dipolo elettrico**. Per caratterizzare il dipolo occorre individuare: 1) la *direzione* della retta sulla quale sono poste le due cariche; 2) il *verso* (da quella negativa a quella positiva); 3) il *valore* p . Occorre perciò un vettore \mathbf{p} detto **momento del dipolo elettrico**.



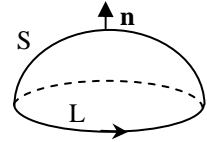
⁽²⁾ Si consideri il sistema costituito da una corrente i che percorre una spira circolare piana: sia S l'area della spira. Si consideri il limite al quale tende tale sistema quando S e i tendono rispettivamente a 0 e a $+\infty$, in modo tale che il prodotto iS tenda ad una quantità m finita e non nulla. Il sistema che si ottiene si chiama **dipolo magnetico**. Per caratterizzare il dipolo occorre individuare: 1) la giacitura del piano della spira, e ciò può farsi assegnando la *direzione* della normale al piano; 2) il *verso* della corrente i nella spira, e ciò può farsi assegnando un verso sulla direzione precedente: quello destrogiro rispetto al verso della corrente i ; 3) il *valore* m . Occorre perciò un vettore \mathbf{m} detto **momento del dipolo magnetico**.



La corrente concatenata i_c ed il flusso concatenato Φ_c sono definiti con riferimento ad una superficie S che ha come bordo la curva chiusa L . L'orientamento della superficie è dato dal vettore \mathbf{n} associato al verso di percorrenza di L , secondo la convenzione destrorsa (regola della vite destrorsa). La corrente concatenata i_c ed il flusso concatenato Φ_c non dipendono dalla superficie S , ma solo dalla curva L su cui tale superficie si appoggia.

$$i_c = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\Phi_c = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS$$



Si hanno inoltre (equazioni della divergenza):

- la **legge di Gauss**: il flusso dello spostamento elettrico attraverso una superficie chiusa qualsiasi è pari alla quantità di carica racchiusa in tale superficie.

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = Q$$

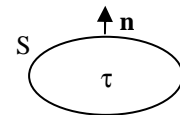
- la **solenoidalità del campo di induzione magnetica**: il flusso della induzione magnetica attraverso una superficie chiusa qualsiasi è nullo.

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

- la **legge di conservazione della carica**: il flusso della densità di corrente uscente da una superficie chiusa qualsiasi è pari alla derivata temporale della carica racchiusa in tale superficie.

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = -\frac{dQ}{dt}$$

La carica Q contenuta entro una superficie chiusa S (orientata tramite il vettore \mathbf{n} diretto verso l'esterno) si può calcolare con riferimento al volume τ che ha S come bordo: $Q = \int_{\tau} \rho d\tau$



Inoltre la **legge di Lorentz** fornisce la densità di forza elettromagnetica esercitata sulla densità di carica ρ e sulla densità di corrente \mathbf{J} .^(*)

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

Il problema elettrodinamico è completato introducendo le **equazioni di legame materiale**; se si considerano **mezzi lineari, omogenei** (indipendenza dalla posizione), e **isotropi** (indipendenza dalla direzione), le equazioni di legame materiale sono:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)$$

dove ϵ , μ e σ sono rispettivamente la **costante dielettrica**, la **permeabilità magnetica** e la **conduttività elettrica**. Si definisce inoltre la resistività ρ (misurata in $\Omega \cdot m$) come l'inverso della conduttività σ (misurata in S/m). La relazione tra densità di corrente e campo elettrico è detta **legge di Ohm in forma locale**. Il vettore \mathbf{E}_i che vi compare è il campo elettrico impresso. Tale vettore, essenziale per ottenere una circolazione di corrente, ha le dimensioni di una forza per unità di carica [N/C]: esercita azioni di forza sui portatori (dotati di massa) delle cariche elettriche tramite fenomeni non elettrici (a seconda dei casi di natura chimica, termica, meccanica, ecc.). I dispositivi entro cui hanno sede i fenomeni suddetti, sono denominati "generatori elettrici".

^(*) Utilizzare la legge di Lorentz per calcolare forze e coppie in una macchina elettrica è certamente possibile. Tuttavia, dato che di solito si utilizza un circuito equivalente per modellare una macchina elettrica, invece di dedurre (approssimativamente) i campi a partire da tensioni e correnti nel circuito per poi calcolare forze e coppie, è molto più semplice procedere utilizzando direttamente il bilancio delle potenze nel circuito. Infatti, per il teorema di Tellegen, la potenza elettrica media erogata dai generatori indipendenti è uguale alla somma delle potenze medie assorbite dagli altri componenti presenti nella rete. Nel caso di un motore elettrico parte di questi rappresenteranno perdite (ovvero potenza elettrica convertita in potenza termica nei resistori) ma uno o più componenti rappresenteranno invece la conversione di potenza elettrica in potenza meccanica (è qui che diviene essenziale il passaggio dai campi ai circuiti). Una volta nota la potenza meccanica erogata è quindi possibile dedurre la coppia motrice, se la macchina è rotante, dividendola per la velocità di rotazione dell'albero [vedi seguito].

Nei materiali conduttori (metalli) la resistività varia linearmente con la temperatura con un coefficiente di temperatura α : $\rho = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)]$, per $-50^\circ\text{C} < T < 150^\circ\text{C}$.

Materiale conduttore	ρ [$\text{n}\Omega\cdot\text{m}$]	σ [MS/m]	α [$\text{m}\Omega/(\Omega\cdot\text{K})$] (a 20°C)
Argento (99.9%)	16	62.5	3.8
Rame elettrolitico	17.6	56.8	3.9
Oro	23.6	42.4	3.0
Alluminio	28	35.7	4
Ferro (99%)	100 ÷ 150	6.7 ÷ 10	5.5
Ghisa	700 ÷ 1600	0.6 ÷ 1.4	2.0 ÷ 4.5
Acciaio (0.1% C)	200	5	4.2
Acciaio (0.4% C)	160	6.2	4.2
Acciaio (2% Si)	350	2.8	3.0 ÷ 5.0
Acciaio (4% Si)	550	1.8	3.0 ÷ 5.0
Grafite	4000 ÷ 20000	0.05 ÷ 0.25	0.4

Nei materiali isolanti (o dielettrici) ϵ_r ha un valore di qualche unità (nel vuoto è unitaria per definizione). Più rilevante è la **rigidità dielettrica** che è l'intensità K del campo elettrico che provoca la scarica attraverso l'isolante. Nei gas e nei liquidi la scarica provoca la ionizzazione di una parte delle molecole, però al cessare della scarica il dielettrico si ricostituisce e riacquista le sue proprietà isolanti (per l'aria secca $K \cong 3 \text{ MV}/\text{m}$). Nei solidi la scarica porta alla distruzione del dielettrico che rimane perforato (ed inutilizzabile).

Materiale isolante	ρ [$\text{G}\Omega\cdot\text{m}$]	ϵ_r	K [MV/m]
Porcellana	1 ÷ 10^4	4 ÷ 6	10 ÷ 12
Bachelite	1 ÷ 10	5 ÷ 7	10 ÷ 12
Carta secca	1 ÷ 10	2 ÷ 3	4 ÷ 6
Vetro	10^2 ÷ 10^5	4 ÷ 10	30 ÷ 150
Gomma	10^3 ÷ 10^5	2 ÷ 3	16 ÷ 50
Carta paraffinata	10^5	2 ÷ 4	10 ÷ 20

2. PASSAGGIO DALLA TEORIA DEI CAMPI ALLA TEORIA DEI CIRCUITI

Affinché un sistema elettrico reale sia modellabile come un "circuito elettrico a costanti concentrate" devono essere soddisfatte le seguenti condizioni:

1. deve essere possibile individuare, nella regione di spazio occupata dal sistema fisico reale, delle zone di spazio, dette componenti, in cui alcune grandezze elettromagnetiche (e le loro derivate temporali) possono assumere valori elevati. In particolare, deve essere possibile individuare:

- 1.a per ogni componente, i terminali attraverso i quali avviene lo scambio di carica elettrica tra un componente e l'altro;
- 1.b all'esterno dei componenti, le connessioni ideali tra i terminali.

2. all'esterno ai componenti (dove si trovano terminali e connessioni), si deve potere:

- 2.a trascurare la corrente di spostamento $\Rightarrow (\partial\mathbf{D}/\partial t) = 0$;
- 2.b trascurare la componente non conservativa del campo elettrico $\Rightarrow (\partial\mathbf{B}/\partial t) = 0$;
- 2.c assumere che la densità di corrente sia nulla ovunque, eccetto che nelle connessioni ideali.

L'approssimazione alla base del modello di circuito elettrico a costanti concentrate consiste dunque fondamentalmente nel considerare le derivate temporali di alcune grandezze diverse da zero soltanto in alcune regioni (componenti). Ogni componente così individuato (induttore, condensatore, etc.) può ritenersi responsabile, quasi per intero, di una proprietà che, a rigore, appartiene al sistema nel suo complesso (induttanza, capacità, etc.).

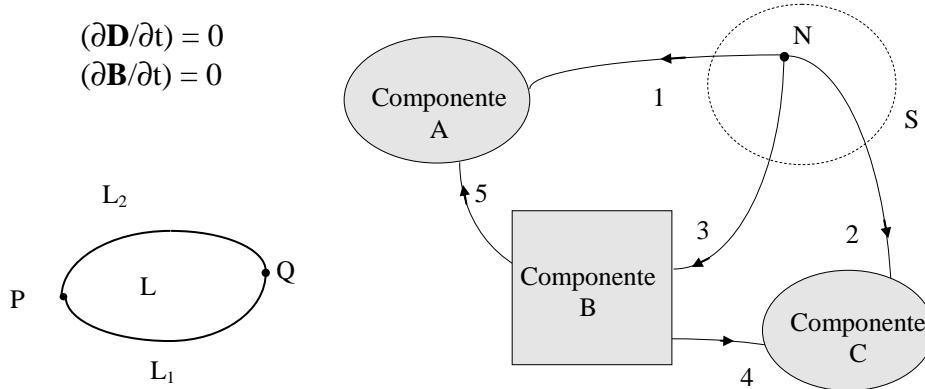
Il legame tra le variabili circuitali (tensioni e correnti) ed i campi sono ottenibili dalle definizioni. Dato che $i = dq/dt$, per la densità di corrente si ottiene $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = di/dS$ e quindi, integrando su una superficie S assegnata si ottiene:

$$i = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS$$

Inoltre, dato che $v_{BA} = dw_{A \rightarrow B}/dq$, esprimendo il lavoro delle forze esterne tramite la loro equilibrante (la forza di Lorentz) e dato che il termine dipendente dalla velocità non compie lavoro, si ottiene (evidenziando la dipendenza dalla linea l che congiunge i punti A e B):

$$v_{AB(l)} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Le ipotesi fatte permettono infine di dedurre le leggi di Kirchhoff dalle equazioni di Maxwell, come segue.



Lo spazio esterno ai componenti è una regione a connessione lineare semplice: presa una qualsiasi linea chiusa L che giace in tale regione, esiste almeno una superficie che si appoggia a tale linea che giace anch'essa tutta all'interno della regione considerata.

Poiché per ipotesi $(\partial \mathbf{B} / \partial t) = 0$ la derivata temporale del flusso concatenato è nulla e la Legge di Faraday, applicata alla linea chiusa L che contiene i punti P e Q , diventa:

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 = \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_Q^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Ne consegue che la tensione v_{PQ} non dipende dalla particolare linea tra P e Q ma unicamente dai punti P e Q (si dice che il campo elettrico è conservativo).

$$\int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = v_{PQ}$$

Nessun sistema elettrico reale verifica esattamente le ipotesi assunte per quello sopra descritto; tali ipotesi sono però soddisfatte con buona approssimazione per molti sistemi reali, per descrivere i quali si fa uso del modello "circuito elettrico a costanti concentrate". In particolare, per tali sistemi, la circuitazione del campo elettrico lungo una linea che congiunge due punti non è indipendente dalla linea scelta, ma la dipendenza risulta trascurabile a tutti gli effetti pratici. In tal caso, invece di parlare di "differenza di potenziale", per indicare l'approssimazione fatta, si preferisce parlare di tensione tra i due punti^(*).

Nelle ipotesi fatte è quindi possibile dedurre la **legge di Kirchhoff delle Tensioni** dalla legge di Faraday. Si consideri infatti sulla linea chiusa esterna ai componenti una sequenza di punti (nodi) 1, 2, 3 e si suddivide l'integrale sulla curva chiusa nella somma sui tratti 12, 23 e 31:

$$0 = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_2^3 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_3^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = v_{12} + v_{23} + v_{31}$$

Data l'arbitrarietà della linea e della suddivisione si può quindi affermare che per una qualsiasi sequenza chiusa di nodi la somma delle tensioni tra coppie ordinate di nodi successivi è nulla (LKT).

^(*) Infatti se il campo elettrico è conservativo allora è il gradiente di un potenziale scalare: $\mathbf{E} = -\nabla\phi$. Per la tensione tra i punti P e Q si ha quindi $v_{PQ} = \phi_P - \phi_Q$, ovvero la tensione tra due punti è uguale alla differenza tra i valori del potenziale scalare ϕ nei due punti.

Si consideri ora una superficie chiusa S qualsiasi che giace nello spazio esterno ai componenti, ad esempio quella che racchiude in nodo N . Poiché per ipotesi $(\partial \mathbf{D} / \partial t) = 0$ per la legge di Gauss la derivata temporale della carica entro S è nulla e la legge di conservazione della carica fornisce^(o): $\oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = 0$

Da questa si deduce direttamente **la legge di Kirchhoff delle correnti**. Si supponga, infatti, che la superficie chiusa S intersechi le connessioni (rami) 1, 2, 3 sulle sezioni S_1, S_2 , ed S_3 . Dato che per ipotesi all'esterno delle connessioni la densità di corrente è nulla, l'integrale sulla superficie S si suddivide nella somma degli integrali sulle sezioni S_1, S_2 , ed S_3 e dunque, per definizione, alla somma delle correnti che le attraversano.

$$0 = \oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_1} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_3} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = i_1 + i_2 + i_3$$

Data l'arbitrarietà di S si può quindi affermare che per ogni superficie chiusa che interseca unicamente le connessioni tra i componenti la somma algebrica delle correnti che attraversano la superficie è nulla (LKC). Si noti che il segno delle correnti è definito dalla concordanza del versore \mathbf{n} normale alla superficie con il verso scelto per le correnti sui rami; dato che solitamente si considera il versore esterno, si assumono positive le correnti uscenti e negative quelle entranti in S .

ELETTRODINAMICA STAZIONARIA E MAGNETOSTATICA

Le condizioni che definiscono l'elettrodinamica stazionaria sono $\mathbf{J} \neq 0$ e la condizione di "stazionarietà" $\partial / \partial t = 0$. Pertanto le equazioni di Maxwell si possono essere semplificate e disaccoppiate:

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (\text{EJ.1}) \qquad \qquad \qquad \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = i_c \quad (\text{BH.1})$$

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (\text{EJ.2}) \qquad \qquad \qquad \oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (\text{BH.2})$$

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) \quad (\text{EJ.3}) \qquad \qquad \qquad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (\text{BH.3})$$

Il sistema (EJ) è finalizzato allo studio dei fenomeni elettrodinamici stazionari, ovvero alla determinazione di \mathbf{J} assumendo noto \mathbf{E}_i . Viceversa, il sistema (BH) è finalizzato allo studio dei fenomeni magnetostatici, ovvero alla determinazione di \mathbf{B} assumendo nota \mathbf{J} . Le equazioni (EJ.2) e (BH.2) implicano che i tubi di flusso^(*) dei vettori \mathbf{J} e \mathbf{B} sono chiusi: a tali tubi viene dato il nome, rispettivamente, di "circuiti elettrici" e "circuiti magnetici".

^(o) Questa relazione è ottenibile anche direttamente dalla Legge di Ampère, considerando la superficie chiusa S suddivisa in due superfici S^+ ed S^- con lo stesso contorno Γ (se \mathbf{n} è la normale esterna ad S , S^+ ed S^- , i versi di percorrenza di Γ sono opposti per S^+ ed S^-). Applicando la Legge di Ampere ad S^+ ed S^- gli integrali di circuitazione hanno segni opposti; sommando membro a membro le circuitazioni si cancellano e la somma degli integrali su S^+ ed S^- della densità di corrente si rappresenta come un solo integrale sulla superficie chiusa S .

^(*) Si ricordi che un tubo di flusso di \mathbf{J} è definito come l'unione delle linee di campo \mathbf{J} che intersecano una data superficie aperta. In particolare le linee che attraversano il bordo di tale superficie definiscono la superficie laterale del tubo (ovvero \mathbf{J} è tangente alla superficie laterale del tubo). L'utilità del tubo di flusso è dovuta alla possibilità di identificarlo a priori, sulla base della conoscenza della geometria e delle proprietà dei materiali. Si consideri infatti un conduttore filiforme in rame (o di materiale conduttore), immerso in aria (o isolato). La conducibilità del rame è molto maggiore di quella dell'aria ($\sigma_{\text{Cu}} \gg \sigma_{\text{aria}}$); inoltre si può dimostrare che il campo elettrico tangenziale alla superficie di interfaccia rame/aria deve essere continuo. Quindi $J_{\text{Cu}} / \sigma_{\text{Cu}} = J_{\text{aria}} / \sigma_{\text{aria}}$ e dunque $J_{\text{Cu}} \gg J_{\text{aria}}$. La corrente circola quindi essenzialmente nel rame e si può identificare il conduttore con il tubo di flusso di \mathbf{J} .

Per un tubo di flusso di \mathbf{B} il ragionamento è del tutto analogo. Si consideri infatti un nucleo toroidale in ferro (o di materiale ferromagnetico dolce), immerso in aria. La permeabilità del ferro è molto maggiore di quella dell'aria ($\mu_{\text{Fe}} \gg \mu_0$); inoltre si può dimostrare che il campo magnetico tangenziale alla superficie di interfaccia ferro/aria deve essere continuo. Quindi $B_{\text{Fe}} / \mu_{\text{Cu}} = B_{\text{aria}} / \mu_0$ e dunque $B_{\text{Fe}} \gg B_{\text{aria}}$. Il flusso magnetico è confinato quindi essenzialmente nel ferro e si può identificare il nucleo toroidale con il tubo di flusso di \mathbf{B} .

Solitamente si considerano circuiti elettrici “filiformi” (tali cioè che le dimensioni di ogni sezione trasversale siano trascurabili rispetto alle dimensioni longitudinali del tubo) per i quali è lecito supporre \mathbf{J} uniforme sulla sezione trasversale S . Questo porta alla semplice relazione: $i = JS$. La corrente i è costante su tutte sezioni trasversali del circuito (per la LKC).

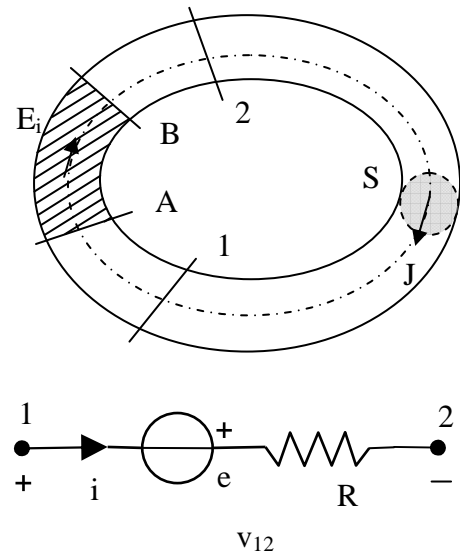
Integrando lungo il circuito in figura dalla sezione 1 alla sezione 2 (attraversando le sezioni A e B) la Legge di Ohm in forma locale $\mathbf{E} + \mathbf{E}_i = \mathbf{J}/\sigma$ si ottiene:

$$\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_1^2 \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = (JS) \int_1^2 \frac{d\mathbf{l}}{\sigma S} \Rightarrow v_{12} + e = R i$$

Questa relazione può quindi essere rappresentata tramite componenti circuitali. La grandezza R è detta resistenza ed è definita da:

$$R = \int_1^2 \frac{d\mathbf{l}}{\sigma S}$$

Se la sezione S e la conducibilità σ sono costanti, si ottiene $R = l/\sigma S$, dove l è la lunghezza del circuito tra 1 e 2.



Se le sezioni 1 e 2 coincidono $v_{12} = 0$ e quindi per avere corrente non nulla nel circuito è necessario che risulti diversa da zero la tensione impressa^(#) (e quindi anche \mathbf{E}_i). Se $\mathbf{E}_i = 0$ si ha invece $v_{12} = R i$, che prende il nome di Legge di Ohm.

3. PROPRIETÀ MAGNETICHE DEI MATERIALI

Nella materia la relazione che lega il campo magnetico \mathbf{H} (misurato in [A/m]) al campo di induzione magnetica \mathbf{B} (misurato in Tesla [T]) e alla magnetizzazione \mathbf{M} (misurata in [A/m]) è data da $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}$, dove μ_0 è la permeabilità magnetica del vuoto ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m). Nei materiali lineari, omogenei, isotropi e tempo-invarianti la magnetizzazione (cioè la densità di dipoli magnetici per unità di volume) è proporzionale al campo magnetico tramite la suscettività magnetica: $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$. In questo caso è possibile scrivere $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \chi_m \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$, dove $\mu_r = 1 + \chi_m$ è la permeabilità magnetica relativa del materiale e $\mu = \mu_0 \mu_r$ è la permeabilità magnetica materiale. I materiali si dividono in dia-, para- e ferro-magnetici a seconda della loro risposta al campo magnetico applicato:

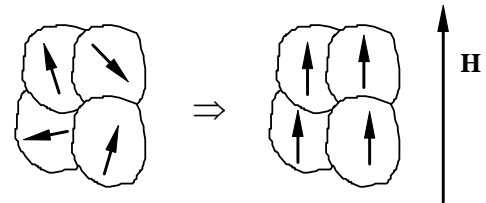
Diamagnetismo: In alcuni materiali (tra cui il rame) si ha una perfetta compensazione tra i momenti magnetici di ogni singolo atomo. In tal caso l'applicazione di un campo magnetico esterno anche molto intenso dà luogo ad una magnetizzazione molto debole e diretta in verso opposto al campo. La suscettività χ_m è quindi negativa. Si tratta di suscettività molto piccole ed indipendenti dalla temperatura (dell'ordine di -10^{-5}).

Paramagnetismo: Se gli atomi o le molecole possiedono un momento magnetico proprio, l'azione del campo esterno produce un allineamento parziale dei momenti secondo il verso del campo. Tale effetto magnetizzante è il risultato dell'equilibrio tra l'azione ordinatrice del campo e quella dell'agitazione termica. Se l'interazione magnetica tra atomi adiacenti è trascurabile, non si ha magnetizzazione spontanea a livello macroscopico: la suscettività χ_m è positiva ed ha valori molto modesti alla temperatura ambiente (dell'ordine di 10^{-3}). Essa decresce al crescere della temperatura secondo la Legge di Curie: $\chi_m = C/T$. Pertanto i materiali paramagnetici, come quelli diamagnetici, modificano in modo inessenziale i campi prodotti “nel vuoto” ($\mu_r \cong 1$, ovvero $\mu \cong \mu_0$).

^(#) Spesso indicata come forza elettro-motrice (f.e.m.). Il termine è ingannevole in quanto, come ogni tensione, è misurata in volt [V].

Ferromagnetismo: Quando gli atomi, gli ioni o le molecole possiedono un momento magnetico proprio e sono fortemente interagenti tra loro, è possibile raggiungere la saturazione (cioè il parallelismo di tutti i dipoli magnetici) a temperatura ambiente con campi esterni facilmente realizzabili. Ad esempio per ferro, nickel e cobalto si riscontrano vistosi fenomeni di magnetizzazione spontanea (in assenza di campo magnetico). Per quanto riguarda la dipendenza dalla temperatura, per $T > T_C$ (temperatura di Curie) si ha un comportamento paramagnetico e quindi una suscettività magnetica che segue la Legge di Curie - Weiss: $\chi_m = C/(T - T_C)$. Questo insieme di proprietà, ma particolarmente quella di poter dar luogo ad intense magnetizzazioni con deboli campi applicati in materiali di ottimo comportamento meccanico - strutturale, rende il ferromagnetismo di fondamentale importanza per le applicazioni.

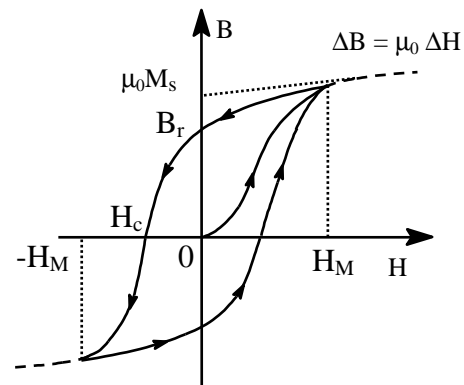
Dal punto di vista microscopico, i materiali ferromagnetici sono formati dall'aggregazione di innumerevoli "domini magnetici" o "domini di Weiss" delle dimensioni di $10^{-3} \div 10^{-6}$ m che sono composti da molecole o atomi che possiedono un momento magnetico proprio e sono allineati fra loro. Se il materiale è allo stato nativo i momenti magnetici dei domini di Weiss sono orientati casualmente, producendo quindi una magnetizzazione macroscopicamente nulla. In presenza di un campo magnetico esterno, tuttavia, i momenti magnetici tendono ad allinearsi. Tale allineamento permane anche se il campo magnetico esterno è rimosso, dando origine ad una magnetizzazione residua. Tale effetto magnetizzante è il risultato dell'equilibrio statistico tra l'azione ordinatrice del campo e quella dell'agitazione termica: aumentando la temperatura l'effetto dell'agitazione diventa sempre più sensibile, causando la completa smagnetizzazione quando si raggiunge la temperatura di Curie.



Domini di Weiss prima e dopo l'allineamento con il campo magnetico esterno

Per studiare i materiali ferromagnetici ci si basa, in concreto, sulle **caratteristiche di magnetizzazione**, cioè sui diagrammi che forniscono il valore in modulo e verso dell'induzione magnetica B in funzione del campo magnetico H per provini omogenei.

In figura è rappresentato un tipico processo di magnetizzazione. Il materiale sia allo stato nativo (smagnetizzato). Si distinguono una curva di prima magnetizzazione, (H crescente da 0 ad H_M) Se il campo magnetico viene invertito ripetutamente tra i valori $\pm H_M$, l'evoluzione si assesta su cicli simmetrici di **isteresi**. Al variare di H_M varia l'ampiezza dei cicli. Il raggiungimento della saturazione è evidenziato dal fatto che la caratteristica diventa lineare e reversibile. Ovvero, per campi maggiori di H_M , l'incremento ΔB corrispondente ad un incremento ΔH è lo stesso che si avrebbe nel vuoto, $\mu_0 \Delta H$.



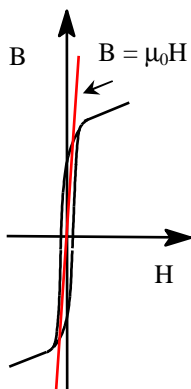
Il ciclo di isteresi che viene solitamente considerato è quello ottenuto a partire dalla saturazione. I principali parametri usualmente considerati per la caratterizzazione dei materiali sono:

- le permeabilità relative differenziali valutate lungo la curva di prima magnetizzazione secondo la formula $\mu_{r(d)} = dB/(\mu_0 dH)$, in particolare quella iniziale ($H = 0$) e quella massima;
- l'induzione residua B_r che si ha quando H viene riportato a zero dopo avere raggiunto H_M ;
- il campo coercitivo H_c che è necessario applicare per portare a zero l'induzione B ;
- il valore della magnetizzazione di saturazione M_s (o del campo di saturazione $B_s = \mu_0 M_s$);
- alcuni valori di energie specifiche del ciclo, quali l'area del ciclo W_{ist} oppure il valore del massimo del prodotto $|BH|$ nel 2° quadrante.

A causa del loro diverso utilizzo i materiali ferromagnetici sono ulteriormente distinti in materiali ferromagnetici dolci e duri:

I materiali ferromagnetici dolci sono caratterizzati da elevati valori della permeabilità e basso valore del campo coercitivo ($H_c < 10^3$ A/m) cui si collega il basso valore dell'area del ciclo di isteresi. Solitamente nelle applicazioni questi materiali sono modellati tramite la relazione lineare $B = \mu H$. Tale approssimazione è accettabile fino a quando non si raggiunge la saturazione ($|B| \approx B_s$). Tali materiali vengono impiegati dove interessa limitare al massimo le correnti necessarie per produrre e controllare i flussi di induzione (nuclei di elettromagneti, nuclei di trasformatori, rotor e statori di macchine rotanti). I materiali magnetici dolci principalmente utilizzati sono il ferro e le sue leghe con nickel, cobalto e silicio, gli acciai a basso tenore di carbonio e le ferriti (dolci).

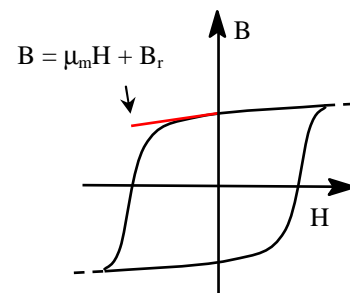
Il ferro dolce (commercialmente puro) è utilizzato nelle applicazioni DC (nuclei di elettromagneti, statori di macchine DC). Nelle macchine rotanti viene utilizzato solitamente acciaio al silicio (tipicamente al 3%) a grani non orientati. L'isotropia fa sì che le proprietà magnetiche non varino al variare della direzione del flusso e quindi che non si abbiano problemi nelle operazioni di taglio e montaggio dei lamierini. Per i nuclei dei trasformatori si preferisce usare acciaio al silicio a grani orientati (anisotropo) allo scopo di aumentare il rendimento. Le leghe ferro - nickel (permalloys), sono solitamente utilizzate per le applicazioni elettroniche (trasformatori ed induttori) a frequenza 1÷100 kHz per la loro elevata permeabilità e duttilità. Le leghe ferro - cobalto sono utilizzate nelle applicazioni al alta temperatura o ad alto campo. Le ferriti dolci (XFe_2O_4 , dove X è una combinazione di Mn (o Ni), Zn e Fe), facilmente lavorabili ed elettricamente isolanti, sono utilizzate per i nuclei di trasformatori ed induttori funzionanti ad alta frequenza.



Ciclo di isteresi per materiali ferromagnetici dolci e caratteristica lineare approssimata

	B_s [T]	H_c [A/m]	$\mu_{r,max} (\times 10^4)$	f [kHz]	T_c [°C]
Fe 99.9%	2	20-60	1-2	DC	770
Leghe Fe-Si	1.2-1.8	5-15	2-8	< 3	730
Leghe Ni-Fe	0.8	0.4-2	10-100	< 100	400
Leghe Co-Fe	2.3	160	0.5-2	< 1	950
Mn-Zn Ferrite	0.2-0.5	20-80	0.3-0.6	< 1000	250

I materiali ferromagnetici duri (o magneti permanenti) sono caratterizzati da elevati valori della induzione residua e del campo coercitivo ($H_c > 10$ kA/m) cui si collega l'elevato valore del prodotto $|BH|_{max}$. I materiali di questo gruppo vengono impiegati laddove interessa realizzare flussi magnetici costanti nel tempo e pertanto conviene ricorrere al magnetismo permanente invece che a circuiti percorsi da corrente (le perdite per conduzione sono assenti, quindi il rendimento è più elevato). I materiali magnetici duri più utilizzati sono gli Alnico, le ferriti (dure) e le leghe con terre rare (samario e neodimio).

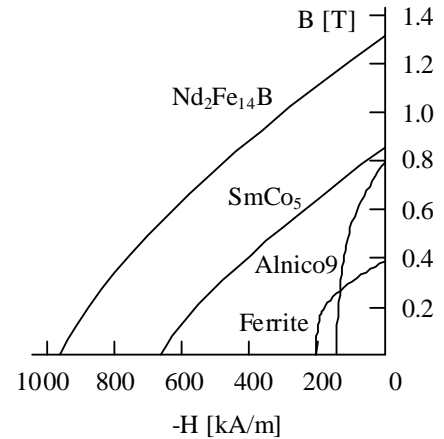


Ciclo di isteresi per materiali ferromagnetici duri

Gli Alnico (leghe Fe-Al-Ni-Co-Cu) hanno una elevata induzione residua ma un modesto campo coercitivo (si smagnetizzano facilmente). Gli Alnico sono fragili e quindi sono solitamente prodotti per sinterizzazione. Le ferriti dure ($XFe_{12}O_{19}$ dove X è solitamente Ba o Sr) hanno elevato campo coercitivo ma bassa induzione residua. Le ferriti sono prodotte spesso in forma legata (elastica o ri-

guida a seconda del legante). Le ferriti legate hanno il notevole vantaggio di non essere fragili, ma le prestazioni peggiorano notevolmente. I magneti permanenti samario-cobalto (Sm-Co) e neodimio-ferro-boro (Nd-Fe-B) hanno prestazioni (e costi) decisamente superiori. Questi magneti sono prodotti per sinterizzazione, ma anche in forma cristallina e mescolati a leganti plastici per migliorare le caratteristiche meccaniche e la lavorabilità.

	$ \mathbf{BH} _{\max}$ [kJ/m ³]	H_c [kA/m]	B_r [T]	T_c [°C]	Costo Relativo
Ferrite	28	200	0.4	450	1
Alnico	40	150	0.8	850	10
Nd-Fe-B	350	950	1.3	310	20
Sm-Co	160	650	0.9	720	100

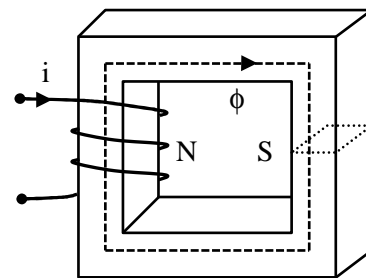


Curve di magnetizzazione per alcuni materiali ferromagnetici duri.

4. CIRCUITI MAGNETICI

La determinazione di un campo magnetico richiede, in generale, la soluzione delle equazioni di Maxwell insieme alle relazioni di legame materiale per i materiali presenti. In pratica tuttavia si adottano alcune semplificazioni al fine di ottenere soluzioni approssimate ma utili dal punto di vista ingegneristico. Pertanto l'analisi del campo tridimensionale è ridotta all'analisi di un circuito equivalente, che fornisce una soluzione accettabile nella maggior parte dei casi. L'ipotesi semplificativa introdotta è la conoscenza, a priori, della geometria del circuito magnetico, cioè del tubo di flusso del campo di induzione \mathbf{B} . Infatti, **un circuito magnetico, è una struttura composta per la maggior parte da materiale ad elevata permeabilità magnetica** che si suppone, per il momento, lineare. La presenza di materiale ad elevata permeabilità magnetica confina il flusso magnetico all'interno della struttura nello stesso modo in cui i materiali ad elevata conducibilità elettrica confinano la densità di corrente nei circuiti elettrici^(*).

Si consideri il circuito magnetico semplice rappresentato in figura, costituito da un nucleo ad anello di materiale ferromagnetico dolce (indicato usualmente come "ferro") con permeabilità costante molto maggiore di quella dell'aria circostante ($\mu \gg \mu_0$) e sezione S costante. L'eccitazione sia fornita da un avvolgimento formato da N spire percorse dalla corrente i .



Il *flusso magnetico* ϕ attraverso una superficie S è definito da: $\phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS$. L'unità di misura SI del flusso magnetico è il weber [Wb]. Grazie alla solenoidalità del campo di induzione e supponendo che esso sia confinato quasi interamente nel ferro, il flusso ϕ è costante attraverso una qualsiasi

^(*) Ipotizzare che il flusso sia confinato all'interno del nucleo ferromagnetico è equivalente a trascurare i "flussi dispersi". Con tale termine si indicano le linee di flusso uscenti dalla superficie laterale del nucleo, che hanno quindi una significativa estensione in aria.

sezione trasversale del nucleo. Dato che la sezione è costante (escludendo i vertici) è lecito assumere che \mathbf{B} sia uniforme sulla sezione. Questo porta^(**) alla semplice relazione $\phi = BS$.

Si definisce *forza magnetomotrice* (f.m.m.) relativa ad una qualsiasi linea chiusa C concatenata con le N spire di eccitazione che passi all'interno del materiale magnetico come la corrente concatenata a tale linea: $F = N i$.^(#) Per la legge di Ampère si ha quindi:

$$F = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \frac{\mathbf{B}}{\mu} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C (BS) \frac{dl}{\mu S} = \oint_C \phi \frac{dl}{\mu S} = \phi \oint_C \frac{dl}{\mu S} = \mathcal{R} \phi \quad (1)$$

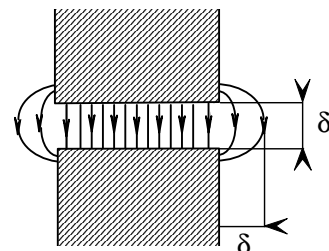
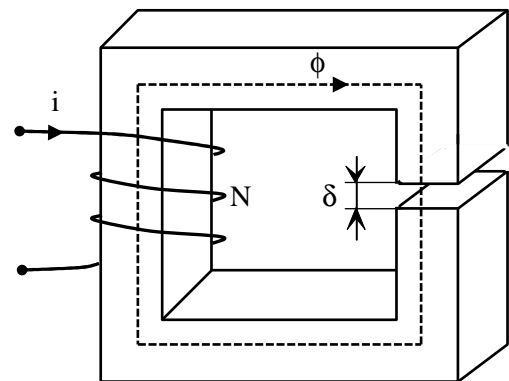
La relazione lineare tra f.m.m. e flusso appena ottenuta ($F = \mathcal{R} \phi$) è detta **Legge di Hopkinson** e rappresenta l'analogo della legge di Ohm ($V = RI$) per i circuiti magnetici. L'ipotesi che il campo di induzione magnetica sia confinato quasi interamente nel materiale permette di effettuare tutti i passaggi eccetto il primo per cui si è considerata l'equazione di legame materiale lineare $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$.

La grandezza \mathcal{R} che compare nella (1) è detta **riluttanza** del circuito ed è definita da:

$$\mathcal{R} = \oint_C \frac{dl}{\mu S} \quad (2)$$

L'unità di misura SI della riluttanza è H^{-1} (ossia l'inverso dell'Henry). Nel caso considerato, in cui la sezione S è uniforme e la permeabilità μ è costante, la riluttanza si può scrivere come $\mathcal{R} = l_{Fe}/\mu S$, dove l_{Fe} rappresenta la lunghezza della linea d'asse del nucleo.

Si consideri ora il circuito magnetico rappresentato nella figura a lato in cui è stato introdotto un traferro (in aria). Se la dimensione δ del traferro è piccola rispetto alle dimensioni della sezione, è possibile trascurare l'allargamento delle linee di campo (effetti di bordo) ed è possibile considerare il flusso ϕ costante anche attraverso il traferro.



Solitamente gli effetti di bordo vengono trascurati. Qualora però se ne voglia tenere conto, è possibile introdurre una sezione trasversale del traferro S_0 , aumentata rispetto ad S . Un semplice modo per ottenere S_0 è aggiungere ad S un orlo di spessore pari al traferro. Come si può notare in figura, oltre questa distanza le linee di campo sono molto deformate. Il campo di induzione nel traferro non è certamente uniforme, tuttavia si farà riferimento al valore medio B_0 del campo in aria come se il campo di induzione fosse uniforme sulla sezione S_0 . Si assume quindi che: $\phi = B_0 S_0$.

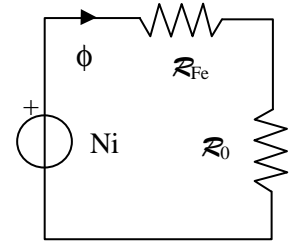
La riluttanza associata al nucleo con traferro è calcolabile applicando la (2):

$$\mathcal{R} = \oint_C \frac{dl}{\mu S} = \int_{\text{ferro}} \frac{dl}{\mu_{Fe} S} + \int_{\text{traferro}} \frac{dl}{\mu S} = \frac{l_{Fe}}{\mu_{Fe} S_{Fe}} + \frac{\delta}{\mu_0 S_0} = \mathcal{R}_{Fe} + \mathcal{R}_0$$

^(**) Si noti l'analogia con la relazione che lega la corrente alla densità di corrente nei circuiti elettrici: $i = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS \cong JS$.

^(#) La forza magneto-motrice si misura in [A] o [As] (amperspire) e ha questo nome per analogia con la forza elettromotrice (f.e.m) in un circuito elettrico (che è in realtà una tensione, e quindi si misura in [V]). Il termine "amperspire" è utilizzato spesso anche come sinonimo di f.m.m..

La legge di Hopkinson fornisce quindi $F = (\mathcal{R}_{Fe} + \mathcal{R}_0) \phi$. Tale equazione può essere interpretata come “LKT” applicata alla maglia di un circuito elettrico “equivalente” in cui al generatore indipendente è assegnata la f.m.m. impressa Ni, al simbolo del resistore è associata una riluttanza ed i rami sono “percorsi” dal flusso ϕ (vedi figura). La soluzione è immediata: $\phi = F/(\mathcal{R}_{Fe} + \mathcal{R}_0)$; tuttavia solitamente si trascura la riluttanza del ferro ($\mathcal{R}_{Fe} \ll \mathcal{R}_0$) e quindi si ha: $\phi \cong Ni/\mathcal{R}_0$.

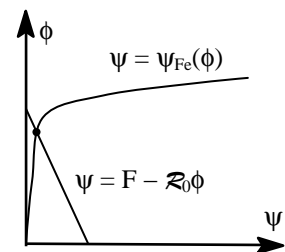


L’analogia tra le soluzioni di circuiti elettrici e magnetici può essere portata avanti per calcolare i flussi magnetici in configurazioni più complesse, purché sia sempre possibile individuare i tubi di flusso del campo di induzione. Valgono infatti per i circuiti magnetici leggi analoghe alle leggi di Kirchhoff applicate ai circuiti elettrici, purché sia possibile individuare senza ambiguità nodi, rami e maglie^(o). Si fa usualmente riferimento al circuito elettrico “equivalente” dalla cui risoluzione si deducono le grandezze di interesse. La soluzione così ottenuta risente delle due ipotesi fatte: 1) trascurare i flussi dispersi; 2) considerare i materiali lineari. Mentre la prima ipotesi non comporta grossi errori, la seconda è da ritenersi valida solo come prima approssimazione.

È possibile estendere al caso non lineare la teoria dei circuiti magnetici: come si è visto la curva di prima magnetizzazione non è reversibile, tuttavia generalmente quando si ha a che fare con materiali dolci, si può fare riferimento ad essa nel ruolo di curva su cui si appiattisce il ciclo di isteresi^(*). Infatti, si consideri nuovamente il circuito magnetico con traferro in cui si voglia tenere conto della non linearità del materiale. Sia assegnata dunque la caratteristica di magnetizzazione del ferro (curva $B_{Fe}-H_{Fe}$). Si mantenga invece l’ipotesi di assenza di flussi dispersi che consente di definire a priori il tubo di flusso di \mathbf{B} . È necessario dunque individuare la relazione che lega il flusso $\phi = B_{Fe}S_{Fe} = B_0S_0$ alla f.m.m. $F = Ni$ generata dall’avvolgimento. Se il nucleo è omogeneo, la sezione costante e il traferro di piccolo spessore, la legge di Ampère fornisce:

$$F = \int_{\text{ferro}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\text{traferro}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_{Fe} l_{Fe} + \frac{B_0}{\mu_0} \delta = H_{Fe} l_{Fe} + \frac{\phi}{\mu_0 S_0} \delta = \psi_{Fe}(\phi) + \mathcal{R}_0 \phi$$

La soluzione (il flusso ϕ) si ottiene dall’intersezione tra la curva $\psi = \psi_{Fe}(\phi)$, che è facilmente ottenibile dalla caratteristica di magnetizzazione del ferro tramite un cambio di scala (moltiplicando il campo magnetico per l_{Fe} e il campo di induzione per S_{Fe}) e la retta $\psi = F - \mathcal{R}_0 \phi$.



^(o) Per dedurre lo schema circuitale è sufficiente considerare le linee d’asse del circuito magnetico. Determinati parametri del circuito (i valori di riluttanze e f.m.m. sono immediati, il verso delle f.m.m. si deduce con la regola della vite destrorsa applicata alle correnti negli avvolgimenti) si possono assegnare arbitrariamente i versi dei flussi sui rami. Le “LKT” sulle maglie sono quindi in effetti leggi di Hopkinson. Le “LKC” ai nodi rappresentano la solenoidalità di \mathbf{B} . di fatto una volta ottenuto il circuito equivalente, questo si può risolvere con uno qualsiasi dei metodi utilizzabili per i circuiti elettrici (privi di memoria). Per evitare ambiguità si utilizza di solito la lettera ψ per le “tensioni magnetiche” che non hanno nessun significato fisico.

^(*) Spesso in luogo della curva di prima magnetizzazione si fa riferimento alla curva di magnetizzazione normale definita come luogo dei vertici dei cicli di isteresi simmetrici (al variare del campo magnetico massimo applicato).

Nel caso si utilizzi un magnete permanente, è possibile eliminare l'avvolgimento di eccitazione. Si consideri infatti il circuito magnetico rappresentato in figura, costituito da un nucleo ad anello in ferro a sezione costante S_{Fe} in cui è inserito un traferro di spessore δ . L'eccitazione sia fornita da un magnete permanente di lunghezza l_m , sezione S_m e con induzione residua B_r diretta verticalmente.

Il *flusso magnetico* ϕ attraverso ogni sezione del circuito magnetico è costante, quindi:

$$\phi = B_{Fe} S_{Fe} = B_0 S_0 = B_m S_m$$

La legge di Ampère, applicata alla linea d'asse del circuito, fornisce:

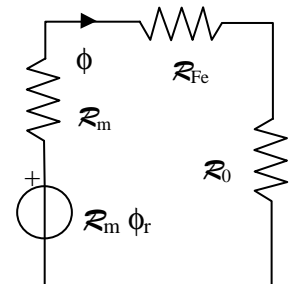
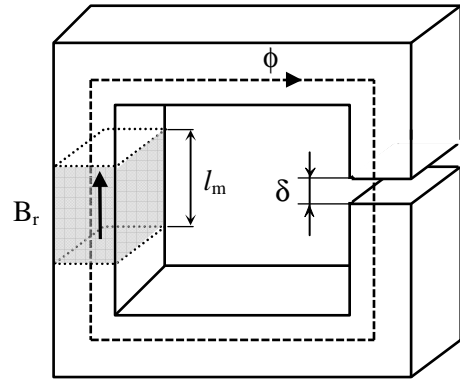
$$0 = \int_{\text{magnete}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\text{ferro}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\text{traferro}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_m l_m + H_{Fe} l_{Fe} + H_0 \delta$$

Sostituendo le relazioni B-H per ferro ($H_{Fe} = B_{Fe}/\mu_{Fe}$, valida fino a quando non si raggiunge la saturazione $|B_{Fe}| \approx B_{s, Fe}$), traferro ($H_0 = B_0/\mu_0$) e magnete (approssimazione lineare $H_m = (B_m - B_r)/\mu_m$, valida nel 2° quadrante fino a che non si raggiunge il valore del campo coercitivo $|H_m| \approx H_{c, m}$) ed esprimendo i campi di induzione tramite il flusso si ottiene:

$$0 = \frac{B_m - B_r}{\mu_m} l_m + \frac{B_{Fe}}{\mu_{Fe}} l_{Fe} + \frac{B_0}{\mu_0} \delta = \frac{\phi}{\mu_m S_m} l_m - \frac{B_r S_m}{\mu_m S_m} l_m + \frac{\phi}{\mu_{Fe} S_{Fe}} l_{Fe} + \frac{\phi}{\mu_0 S_0} \delta = (\mathcal{R}_m + \mathcal{R}_{Fe} + \mathcal{R}_0) \phi - \mathcal{R}_m \phi_r$$

dove si è posto $\phi_r = B_r S_m$, che è il flusso prodotto dall'induzione residua nel magnete^(*).

Si ottiene quindi una relazione del tutto analoga alla legge di Hopkinson: $\mathcal{R}_m \phi_r = (\mathcal{R}_m + \mathcal{R}_{Fe} + \mathcal{R}_0) \phi$. Tale equazione può essere interpretata come "LKT" applicata alla maglia di un circuito elettrico "equivalente" in cui al generatore indipendente è assegnata la grandezza impressa $\mathcal{R}_m \phi_r$ (vedi figura). La soluzione è immediata: $\phi = \mathcal{R}_m \phi_r / (\mathcal{R}_m + \mathcal{R}_{Fe} + \mathcal{R}_0)$. Trascurando la riluttanza del ferro si ha: $\phi \cong \phi_r / (1 + \mathcal{R}_0/\mathcal{R}_m)$. Infine, se si assume $S_m \cong S_0$ e $\mu_m \cong \mu_0$ si ottiene: $\phi \cong \phi_r / (1 + \delta/l_m)$.



La sostituzione degli avvolgimenti DC con magneti permanenti, a parità di flusso, è una scelta costruttiva piuttosto comune nelle macchine elettriche. Il vantaggio principale è legato alla maggiore semplicità di realizzazione e funzionalità (in particolare se il circuito è mobile si eliminano i contatti striscianti e la relativa necessità di manutenzione) ed al maggior rendimento (sono assenti le perdite per conduzione nell'avvolgimento). Lo svantaggio è che si perde la possibilità di variare il flusso agendo sulla corrente e quindi la macchina è meno controllabile. Infine, in fase di progetto è necessario assicurarsi che il magnete non si smagnetizzi nel tempo (a causa della temperatura o per eventuali campi alternati che causerebbero cicli di isteresi minori).

^(*)Questa semplice analisi mostra anche la ragione per cui si utilizza $|HB|_{\max}$ come cifra di merito dei materiali ferromagnetici duri. Infatti, moltiplicando le relazioni $B_0 S_0 = B_m S_m$ e $H_0 \delta \cong -H_m l_m$ (ottenuta trascurando il contributo del ferro), si ottiene $H_0 B_0 \delta S_0 \cong |H_m B_m| l_m S_m$. Definito il volume del magnete $\tau_m = l_m S_m$, e sostituendo $H_0 = B_0/\mu_0$, $B_0 = \phi/S_0$ ed $\mathcal{R}_0 = \delta/\mu_0 S_0$ si ha dunque $\mathcal{R}_0 \phi^2 \cong |HB|_m \tau_m$. Pertanto, fissati ϕ ed \mathcal{R}_0 , al variare del materiale magnetico duro, il volume (ed il costo) del magnete permanente è minimo se il prodotto $|HB|$ del materiale è massimo.

5. COEFFICIENTI DI AUTO E MUTUA INDUZIONE

Si consideri il campo di induzione \mathbf{B} dovuto a una corrente I circolante in un conduttore filiforme. In un mezzo lineare, omogeneo e isotropo (come il vuoto), il campo di induzione è proporzionale alla corrente. Sia la densità di corrente nel conduttore che il campo di induzione magnetica sono solenoidali: le rispettive linee di flusso dovranno, pertanto, essere chiuse e **concatenate** le une con le altre.

In particolare, esiste una relazione di proporzionalità fra la corrente I ed il flusso di induzione concatenato con la linea che rappresenta il circuito entro il quale circola la corrente (vedi figura; il verso di \mathbf{n} è determinato da quello di I tramite la regola della vite destrorsa):

$$\Phi_c = L I$$

Il coefficiente di proporzionalità L è noto come **coefficiente di autoinduzione** o, più semplicemente, autoinduttanza del circuito. Con le consuete convenzioni sui versi, l'autoinduttanza L ha segno intrinsecamente positivo e valore che dipende dalla geometria del circuito e dalle proprietà del mezzo; le sue dimensioni sono di "flusso diviso una corrente": nel SI è espresso da $\text{Wb/A} = \text{Henry [H]}$. Nel caso in cui la corrente I circoli in un conduttore massiccio la definizione stessa dell'autoinduttanza risulta decisamente più complessa.

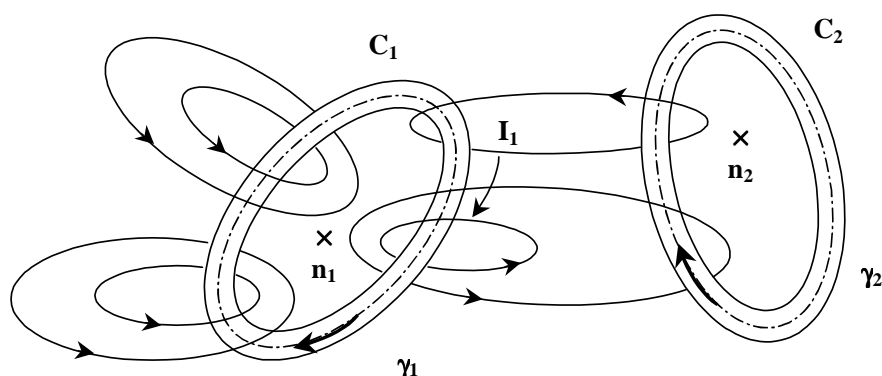
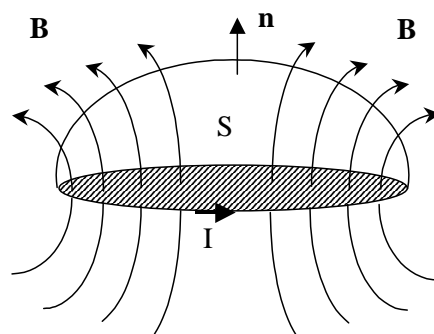
Sia dato ora un sistema costituito da due circuiti quasi filiformi indicati rispettivamente con C_1 e C_2 . Supponiamo che nel primo circoli una corrente I_1 (valutata in base a un verso di riferimento arbitrariamente prefissato) e che nel secondo invece non circoli corrente. Fissiamo arbitrariamente un verso positivo su γ_2 , asse di C_2 , e detta S_2 una qualunque superficie aperta che abbia tale linea come orlo, orientiamone la normale \mathbf{n}_2 mediante la regola della vite destrorsa. Vogliamo determinare il flusso del campo magnetico prodotto da I_1 concatenato con γ_2 . Ragionando come per il coefficiente di autoinduzione, risulta

$$\Phi_{21} = M_{21} I_1$$

dove Φ_{21} rappresenta il flusso, concatenato con γ_2 , prodotto da I_1 , e M_{21} un fattore di proporzionalità avente le dimensioni di un induttanza (e misurabile quindi come L , in Henry), denominato **coefficiente di mutua induzione** del primo circuito sul secondo. M_{21} può essere positivo o negativo a seconda dell'orientamento dei circuiti. Nella figura, ad esempio, l'andamento delle linee vettoriali di \mathbf{B} prodotte da una corrente I_1

positiva, è tale che nei punti della superficie S_2 , \mathbf{B} e \mathbf{n}_2 hanno verso contrario, per cui $\Phi_{21} < 0$. In questo caso il coefficiente di mutua induzione M_{21} è negativo. Se, ferma restando l'orientazione del primo circuito, si invertisse quella del secondo, e di conseguenza il verso positivo della normale a S_2 , il flusso Φ_{21} , prodotto dalla stessa corrente I_1 , risulterebbe positivo e tale sarebbe anche il coefficiente M_{21} .

Consideriamo ora una situazione simmetrica rispetto alla precedente, in cui cioè circoli corrente solo nel circuito C_2 . Ragionando come sopra si ottiene



$$\Phi_{12} = M_{12}I_2$$

dove Φ_{12} rappresenta il flusso concatenato con C_1 prodotto da I_2 , e M_{12} è il coefficiente di mutua induzione del secondo circuito sul primo. Si può dimostrare che $M_{21} = M_{12}$, cosicché è lecito parlare di un unico coefficiente di mutua induzione M tra i due circuiti.

Il calcolo dei coefficienti di auto e mutua induzione si può effettuare con riferimento ai flussi concatenati con ognuno di essi:

$$\Phi_{c,1} = L_1 i_1 + M i_2$$

$$\Phi_{c,2} = M i_1 + L_2 i_2$$

e pertanto:

$$L_1 = \left. \frac{\Phi_{c,1}}{i_1} \right|_{i_2=0}$$

$$M = \left. \frac{\Phi_{c,1}}{i_2} \right|_{i_1=0} = \left. \frac{\Phi_{c,2}}{i_1} \right|_{i_2=0}$$

$$L_2 = \left. \frac{\Phi_{c,2}}{i_2} \right|_{i_1=0}$$

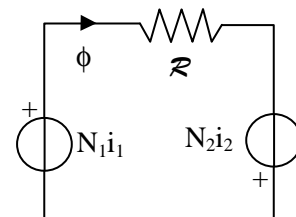
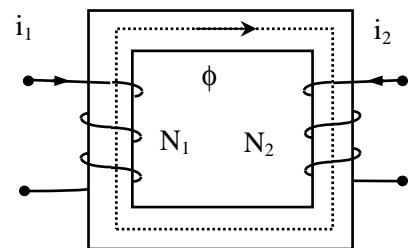
In assenza di flussi dispersi, il calcolo dei coefficienti di auto e mutua induzione si può effettuare con riferimento al circuito magnetico individuato dal flusso ϕ che concatena entrambi gli avvolgimenti (di N_1 ed N_2 spire, rispettivamente). Infatti, il flusso totale concatenato con ognuno di essi vale^(*):

$$\Phi_{c,1} = N_1 \phi$$

$$\Phi_{c,2} = N_2 \phi$$

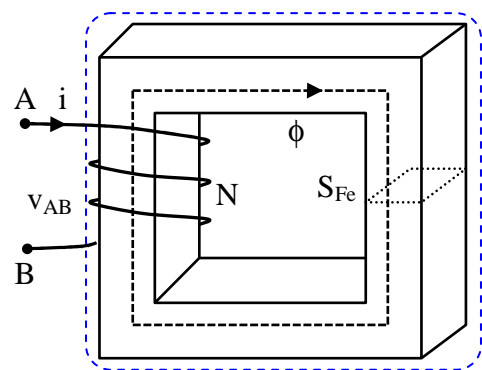
Dalla legge di Hopkinson applicata al circuito magnetico si ottiene peraltro: $N_1 i_1 + N_2 i_2 = \mathcal{R} \phi$, e dunque risulta, applicando le definizioni in questo caso:

$$L_1 = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}} \quad M = \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} \quad L_2 = \frac{N_2^2}{\mathcal{R}}$$



INDUTTORE REALE

Si consideri nuovamente il circuito magnetico rappresentato in figura. Si supponga che il materiale ferromagnetico che compone il circuito magnetico sia lineare con permeabilità molto maggiore di quella dell'aria circostante ($\mu_{Fe} \gg \mu_0$). Si suppone che la sezione S_{Fe} del nucleo magnetico sia uniforme e la linea d'asse del nucleo magnetico abbia lunghezza l_{Fe} . L'eccitazione sia fornita da un avvolgimento in rame (conducibilità σ_{Cu}) formato da N spire (reciprocamente isolate) percorse dalla corrente i . Si suppone che la sezione S_{Cu} dell'avvolgimento sia uniforme e la linea d'asse dell'avvolgimento abbia lunghezza l_{Cu} .



^(*) Si noti che il verso positivo dei flussi concatenati agli avvolgimenti è definito dal verso della corrente (come le f.m.m.) mentre il verso del flusso (o dei flussi) nel circuito magnetico è arbitrario. Nel valutare i flussi concatenati è necessario tenerne conto. Ad esempio, se si cambia il verso di ϕ in questo esempio i flussi concatenati vanno valutati come $\Phi_{c,1} = -N_1\phi$ e $\Phi_{c,2} = -N_2\phi$. Tuttavia anche la legge di Hopkinson cambia: $N_1 i_1 + N_2 i_2 = -\mathcal{R} \phi$, e dunque i coefficienti di auto e mutua induzione risultano immutati.

Si vuole determinare la caratteristica tensione-corrente del dispositivo, in modo da poterlo rappresentare tramite uno schema circuitale. A tal fine si consideri la legge di Faraday applicata alla linea chiusa costituita dalla linea d'asse dell'avvolgimento (da A a B, all'interno dell'avvolgimento) unita ad una linea che collega B ad A all'esterno del componente. Si ha quindi:

$$\underbrace{\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}_{\text{nell'avvolgimento}} + \underbrace{\int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}_{\text{all'esterno}} = -\frac{d\Phi_c}{dt}$$

Nel primo dei due integrali il campo elettrico è valutato sulla linea d'asse dell'avvolgimento (cioè nel rame), per cui vale la legge di Ohm in forma locale $E = J/\sigma_{Cu}$. Se l'avvolgimento si assume filiforme si ha inoltre $J = i/S_{Cu}$. Pertanto:

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \frac{J}{\sigma_{Cu}} dl = i \int_A^B \frac{dl}{\sigma_{Cu} S_{Cu}} = i \frac{l_{Cu}}{\sigma_{Cu} S_{Cu}} = Ri$$

dove si è posto $R = l_{Cu}/(\sigma_{Cu} S_{Cu})$. Il secondo integrale è all'esterno del componente (dove si suppongono valide le condizioni per il passaggio dalla teoria dei campi alla teoria dei circuiti) e dunque risulta:

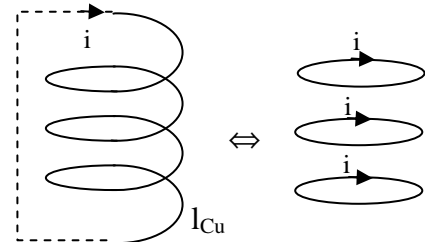
$$\int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = v_{BA} = -v_{AB}$$

Sostituendo si ha quindi: $Ri - v_{AB} = -\frac{d\Phi_c}{dt} \Rightarrow v_{AB} = Ri + \frac{d\Phi_c}{dt}$

Questa relazione, pur contenendo la corrente i e la tensione v_{AB} , non è ancora la caratteristica tensione-corrente cercata. Infatti il flusso concatenato Φ_c non è una variabile circuitale.

Per esprimere Φ_c in funzione della corrente si noti che, per definizione, il campo di induzione andrebbe integrato sulla superficie aperta avente come bordo la linea chiusa definita in figura. Tuttavia è usuale approssimare l'avvolgimento come N spire chiuse. Quindi si ha:

$$\Phi_c \cong N\phi$$



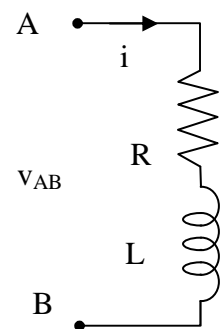
Dalla legge di Hopkinson applicata al circuito magnetico (trascurando l'effetto delle correnti parassite ed i flussi dispersi) si ottiene peraltro: $Ni = \mathcal{R} \phi$, dove la riluttanza \mathcal{R} è definita da $\mathcal{R} = l_{Fe}/(\mu_{Fe} S_{Fe})$, e dunque risulta:

$$\Phi_c \cong N\phi = N^2 i/\mathcal{R} = Li$$

dove $L = N^2/\mathcal{R} = N^2 \mu_{Fe} S_{Fe}/l_{Fe}$. Sostituendo si ottiene infine: $v_{AB} = Ri + L \frac{di}{dt}$

Pertanto un avvolgimento costituito da N spire finemente avvolte sopra un nucleo toroidale di materiale ferromagnetico dolce, qualora l'intensità della corrente che lo percorre non sia troppo elevata (in modo da non portare in saturazione il materiale ferromagnetico), può essere modellato come un resistore ed un induttore collegati in serie. Il bilancio di potenza si ottiene immediatamente moltiplicando la caratteristica per la corrente i .

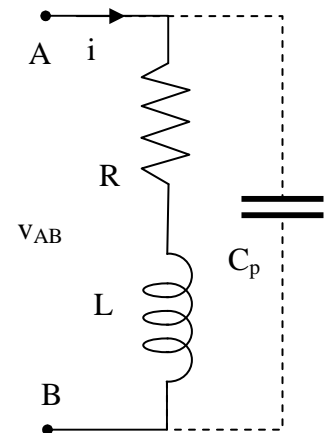
$$v_{AB} i = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right)$$



Quindi l'energia elettrica assorbita dall'induttore reale (integrale nel tempo della potenza assorbita $v_{AB}i$), viene in parte trasformata in energia termica per effetto Joule (integrale nel tempo di Ri^2) ed in parte immagazzinata nel campo magnetico presente all'interno del nucleo ferromagnetico ($Li^2/2$). Tale energia viene chiamata energia magnetica.

Il modello circuitale R-L serie dell'induttore reale è accettabile se è utilizzato in un circuito funzionante a bassa frequenza (inferiore a qualche kHz). Tuttavia, all'aumentare della frequenza diventa sempre più significativa la densità di corrente di spostamento ($\partial \mathbf{D}/\partial t$), che è stata trascurata nello scrivere la legge di Hopkinson. Per tenerne conto, si inserisce quindi in parallelo alla serie R-L una capacità parassita C_p (può essere presente in parallelo anche un resistore R_p).

Trascurando la resistenza R , si può individuare una pulsazione di (anti)risonanza il cui valore risulta: $\omega_0 = 1/\sqrt{LC_p}$. A pulsazioni superiori a quella di risonanza ha il sopravvento la capacità parassita ed il componente assume un comportamento ohmico-capacitivo.

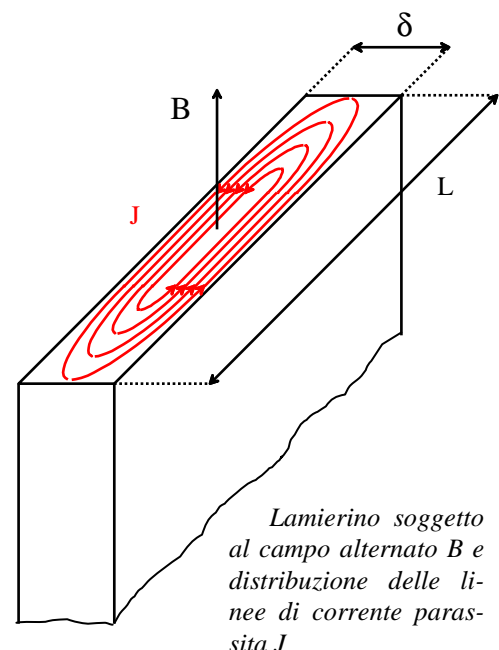


6. PERDITE NEL FERRO

Le perdite (con questo termine si intende la potenza elettrica trasformata in potenza termica durante ogni variazione di stato di un sistema elettromagnetico) nei materiali ferromagnetici dolci soggetti ad un campo di induzione variabile nel tempo (tipicamente alternato) si dividono in perdite per correnti parassite (o di Foucault) e perdite per isteresi.

Le **perdite per correnti parassite** sono dovute al fatto che, con l'eccezione delle ferriti, i materiali ferromagnetici sono anche conduttori. Per la legge di Faraday un flusso magnetico variabile nel tempo causa un campo elettrico indotto. Se il materiale è conduttore, per la legge di Ohm (in forma locale) al campo elettrico è associata una densità di corrente. Tale corrente è detta parassita in quanto dannosa per due motivi: genera un campo magnetico di reazione che si oppone al campo magnetico forzante, ed è inevitabilmente associata a perdite per conduzione.

La determinazione analitica della densità di corrente parassita è possibile solo per geometrie molto semplici. E' tuttavia possibile tramite un'analisi qualitativa determinare la dipendenza della densità di corrente parassita (e delle perdite) dai dati del problema. Si consideri a tale scopo un lamierino di materiale ferromagnetico dolce di spessore δ immerso in un campo di induzione magnetica uniforme, variabile nel tempo con legge sinusoidale con valore efficace B e frequenza f . Dalla legge di Faraday si ottiene, integrando sul perimetro della sezione $(2L + 2\delta) E \approx \omega B L \delta$, dove E è il valore efficace del campo elettrico sinusoidale indotto ed $\omega = 2\pi f$. Se $\delta \ll L$, si ottiene quindi $E \approx \omega B \delta / 2$. La densità di corrente parassita sarà quindi anch'essa sinusoidale e di valore efficace pari a $J = \sigma E \approx \sigma \omega B \delta / 2$. Alla densità di corrente J corrisponde una densità di potenza dissipata $J^2/\sigma \approx \sigma \omega^2 B^2 \delta^2 / 4$ (in W/m^3). Dividendo per la densità di massa si ottiene la potenza dissipata per correnti parassite per unità di massa $P_{cp} = k_{cp} f^2 \delta^2 (B_M)^2$ in $[W/kg]$. Si deduce immediatamente che per ridurre le perdite per correnti parassite conviene utilizzare lamiere sottili. Infatti tutti i circuiti magnetici presenti nei dispositivi in AC (nuclei dei trasfor-



matori, statori e rotori di macchine rotanti) sono realizzati non come blocchi massicci ma sovrappo-
nendo lamierini isolati. L'isolamento è ottenuto con carte impregnate, vernici o film di ossidi o sili-
cati. La scelta dello spessore utilizzato dipende dal compromesso tra perdite accettabili e semplicità
costruttiva; di solito δ è dell'ordine dei decimi di mm ($0.3 \div 0.5$ mm).

Le **perdite per isteresi** sono legate alla irreversibilità del ciclo di isteresi. Infatti si può dimostrar-
e che l'area del ciclo di isteresi w_{ist} rappresenta la densità di energia dissipata nel materiale ferro-
magnetico in un ciclo. A tal fine è sufficiente calcolare la potenza media assorbita dall'induttore
reale durante un ciclo, supponendo nulle le altre fonti di perdite (resistenza nulla dell'avvolgimento
e correnti parassite nel ferro assenti):

$$P_{ist} = \frac{1}{T} \int_0^T v_i dt = f \int_{1 \text{ ciclo}} i d\Phi_c = f \int_{1 \text{ ciclo}} Ni d\phi$$

Supponendo uniformi i campi nel nucleo ferromagnetico $Ni = H_{Fe} l_{Fe}$ (dalla legge di Ampere) e $\phi =$
 $B_{Fe} S_{Fe}$. Detto $\tau_{Fe} = l_{Fe} S_{Fe}$, il volume del materiale ferromagnetico, la potenza media assorbita è quin-
di:

$$P_{ist} = f \tau_{Fe} \oint H_{Fe} dB_{Fe} = f \tau_{Fe} w_{ist}$$

dove w_{ist} è l'area del ciclo di isteresi (che quindi rappresenta la densità di energia dissipata per iste-
resi in un ciclo, misurata in [joule/ciclo·m³]). Solitamente si suppone una relazione di proporzionali-
tà tra l'area del ciclo di isteresi w_{ist} e una potenza del massimo del campo di induzione B_M , con un
esponente compreso tra 1.6 e 2 (formula di Steinmetz). Dividendo per il volume e la densità di mas-
sa del ferro si ottiene la potenza dissipata per isteresi per unità di massa: $P_{ist} = k_{ist} f (B_M)^{1.6}$ in
[W/kg].

Concludendo, le perdite nei circuiti magnetici (convenzionalmente dette **perdite nel ferro**) per
isteresi e per correnti parassite dipendono dall'induzione massima B_M , dalla frequenza f , dallo spes-
sore δ e dalla qualità dei lamierini secondo la relazione $C_p = k_{ist} f (B_M)^{1.6} + k_{cp} f^2 \delta^2 (B_M)^2$. Tale **ci-
fra di perdita** C_p tiene conto delle perdite nel ferro per unità di massa come somma di quelle per
isteresi e di quelle per correnti parassite. I coefficienti k_{ist} e k_{cp} dipendono dal materiale e dal tipo di
lamierino (in particolare dalle lavorazioni meccaniche che ha subito), oltre che dall'unità di misura
delle varie grandezze.