

TRASFORMATORI

1. PRINCIPIO DI FUNZIONAMENTO

Il trasformatore è costituito da un anello (nucleo) di materiale ferromagnetico (tipicamente lamine sottili di acciaio al silicio) su cui sono avvolti due avvolgimenti in materiale conduttore (tipicamente rame): il “primario”, costituito da n_1 spire ed il “secondario” costituito da n_2 spire. Si tratta quindi di un doppio bipolo. Se il primario è alimentato da un generatore di tensione v_1 (“tensione primaria”), in modo tale che il primario sia percorso da una corrente i_1 (“corrente primaria”), nell’anello si stabilirà un campo magnetico (legge di Ampère). Dato che il nucleo è ferromagnetico si ha quindi in esso un campo di induzione magnetica (a cui corrisponde il flusso “principale” ϕ indicato in figura 1.1.a)^(#). Si noti che le linee del campo di induzione si concatenano anche con l’avvolgimento secondario; quindi, se ϕ varia nel tempo, per la legge di Faraday sarà indotta ai terminali del secondario una tensione v_2 (“tensione secondaria”). Se il secondario è connesso ad un carico (ad esempio un resistore), circolerà su di esso la corrente i_2 (“corrente secondaria”) che contribuirà anch’essa al flusso principale. Per la legge di Faraday si induce quindi una tensione anche sull’avvolgimento primario. Mediante il trasformatore è quindi possibile trasferire potenza elettrica dall’avvolgimento primario a quello secondario (o viceversa), senza fare ricorso ad alcun collegamento elettrico tra i due avvolgimenti; il trasferimento di potenza avviene attraverso il flusso principale che è presente nel nucleo del trasformatore e si concatena a entrambi gli avvolgimenti (sono pertanto flussi dispersi quelli che si concatenano ad un solo avvolgimento).

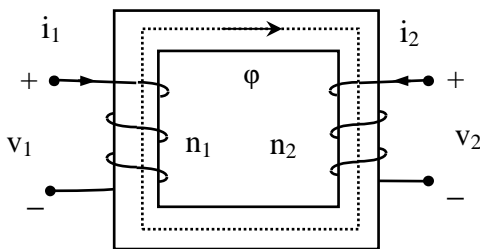


Figura 1.1.a - Schema di un trasformatore monofase.

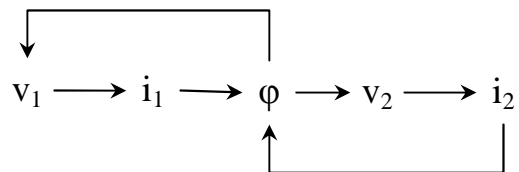


Figura 1.1.b - Principio di funzionamento del trasformatore.

Il nucleo magnetico del trasformatore consiste normalmente in un pacco di lamierini di acciaio al silicio, che presenta due forme costruttive comuni mostrate nelle figure 1.2.a e 1.2.b.

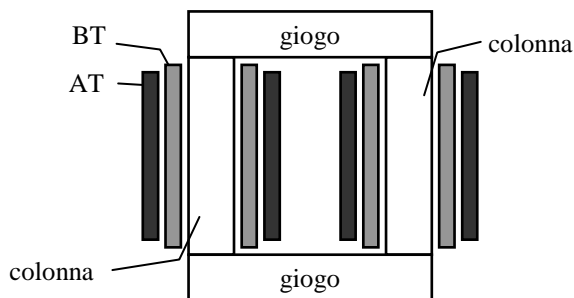


Figura 1.2.a - Nucleo a colonne

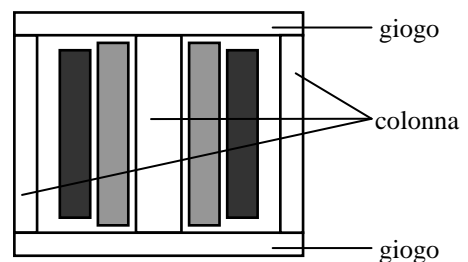


Figura 1.2.b - Nucleo a mantello

Nel tipo con nucleo a colonne ciascun avvolgimento è costituito da due bobine in serie, ciascuna avvolta su di una colonna del trasformatore. Nel tipo con nucleo a mantello, entrambi gli avvolgimenti sono avvolti sulla colonna centrale del nucleo. La configurazione a mantello minimizza il

^(#) Si dice flusso principale il flusso del campo di induzione magnetica attraverso una sezione normale alla linea d’asse del nucleo di materiale ferromagnetico.

flusso disperso, quella a colonne minimizza la quantità di lamierini utilizzati. Gli avvolgimenti primario e secondario possono essere:

- *concentrici* (figura 1.3.a): le colonne sono rivestite di materiale isolante; sul materiale isolante viene quindi posto l'avvolgimento a bassa tensione, che viene a sua volta rivestito di materiale isolante. Sul secondo strato di materiale isolante viene posto l'avvolgimento ad alta tensione. In un trasformatore monofase, ognuna delle due colonne porta metà delle spire. In un trasformatore trifase, ogni colonna porta una fase a bassa tensione e la fase ad alta tensione corrispondente.
- *a bobine alternate* (figura 1.3.b): sono ottenuti alternando gli avvolgimenti a bassa e ad alta tensione, che vengono separate mediante corone di materiale isolante.

Gli avvolgimenti a bobine alternate presentano un miglior accoppiamento magnetico; gli avvolgimenti concentrici consentono un miglior isolamento.

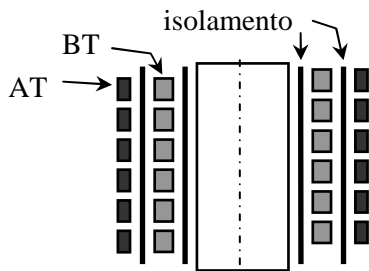


Figura 1.3.a. - Avvolgimenti concentrici

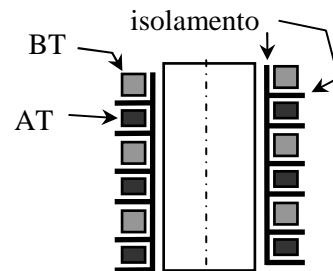


Figura 1.3.b. - Avvolgimenti a bobine alternate

La laminazione del nucleo magnetico si rende necessaria al fine di ridurre le perdite per correnti parassite. I gioghi sono normalmente a sezione rettangolare, mentre per le colonne si preferisce una sezione a "gradini" in modo da ridurre la lunghezza degli avvolgimenti (figura 2).

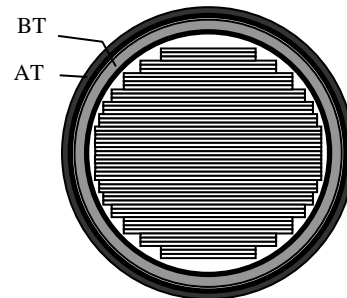


Figura 2 - sezione di una colonna del nucleo magnetico

2. IL TRASFORMATORE IDEALE

Se si suppone che

- 1) non vi siano perdite negli avvolgimenti (dette "perdite nel rame"),
- 2) non vi siano perdite nel nucleo ferromagnetico (dette "perdite nel ferro"),
- 3) tutte le linee del campo di induzione magnetica si concatenino ad entrambi gli avvolgimenti (equivalente ad assumere che non vi siano flussi dispersi) e che il materiale ferromagnetico abbia "permeabilità magnetica infinita",

è possibile dedurre il modello del "trasformatore ideale" come segue. Dalla legge di Faraday possiamo determinare le tensioni ai capi degli avvolgimenti primario e secondario come derivate temporali dei flussi concatenati agli avvolgimenti stessi ($v_1 = d\phi_{c1}/dt$, $v_2 = d\phi_{c2}/dt$ ^(*)). Inoltre, grazie all'ipotesi 3) i flussi concatenati sono ottenibili semplicemente moltiplicando i numeri di spire per il flusso principale ($\phi_{c1} = n_1\phi$, $\phi_{c2} = n_2\phi$). Si ottiene quindi $v_1 = n_1 d\phi/dt$, $v_2 = n_2 d\phi/dt$, da cui, effettuando il rapporto membro a membro, otteniamo la relazione tra le tensioni a primario e secondario (purché $d\phi/dt \neq 0$):

^(*) Il termine resistivo è trascurato grazie all'ipotesi 1). "Perdite nel rame nulle" significa infatti che la potenza dissipata per conduzione negli avvolgimenti è nulla, ovvero che la resistenza degli avvolgimenti è nulla.

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad (1)$$

L'equazione di accoppiamento magnetico tra primario e secondario si ottiene mediante la legge della circuitazione magnetica (o di Ampère) applicata alla linea d'asse dell'anello di materiale ferromagnetico. Grazie all'ipotesi 3) il campo magnetico nel materiale è trascurabile. Pertanto; con riferimento ai versi positivi indicati nella figura 1 si ottiene che la somma delle correnti concatenate alla linea è nulla^(o):

$$n_1 i_1 + n_2 i_2 = 0$$

Si ottiene quindi^(oo) la relazione tra le correnti a primario e secondario:

$$\frac{i_1}{i_2} = -\frac{n_2}{n_1} \quad (2)$$

Se si definisce il rapporto di trasformazione $K = n_1/n_2$, il trasformatore ideale, il cui simbolo è indicato nella figura 3, risulta definito dalle seguenti caratteristiche:

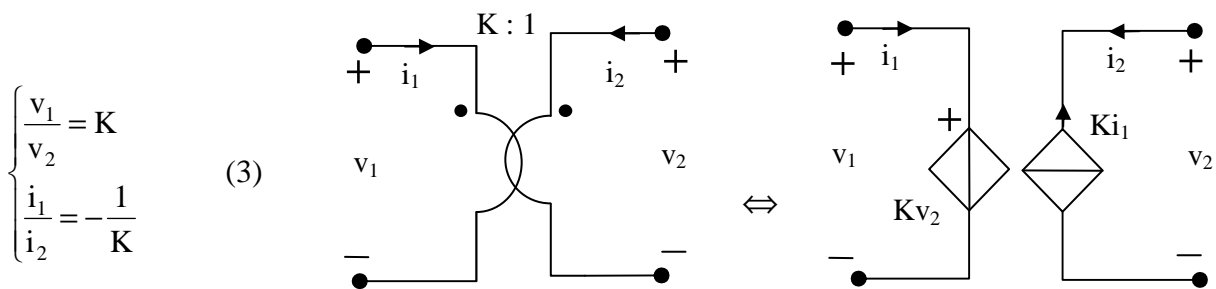


Figura 3 - Trasformatore ideale e circuito equivalente.

Si noti che in figura 3 una coppia di terminali è segnata con un punto, indicando quindi i versi di riferimento positivi delle tensioni e delle correnti per cui le equazioni costitutive (3) sono corrette. In figura 3 è mostrato inoltre uno dei possibili circuiti equivalenti del trasformatore ideale. Si noti anche che, poiché il trasformatore ideale è un componente ideale definito dalle (3), le relazioni tra tensioni e correnti a primario e secondario sono valide per tutte le forme d'onda e per tutte le frequenze (inclusa la continua).

Il trasformatore ideale gode delle due seguenti proprietà fondamentali:

1. Il trasformatore ideale non dissipa né accumula energia. Dalle (3) risulta evidente che la potenza assorbita dal trasformatore ideale è nulla; infatti, con riferimento ai versi di riferimento positivi delle tensioni e delle correnti definiti in figura 3, si ha

$$p(t) = v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) = (Kv_2(t))\left(-\frac{i_2(t)}{K}\right) + v_2(t)i_2(t) = -v_2(t)i_2(t) + v_2(t)i_2(t) = 0$$

Quindi la somma delle potenze assorbite a primario e secondario è complessivamente nulla, ovvero la potenza assorbita a primario dal trasformatore ideale ($p_1 = v_1 i_1$) risulta in ogni istante uguale a quella erogata al secondario ($p_2 = -v_2 i_2$). In particolare, con riferimento al regime sinu-

^(o) Se la permeabilità del materiale ferromagnetico costituente il nucleo fosse finita e costante, si otterrebbe la Legge di Hopkinson: $n_1 i_1 + n_2 i_2 = \mathcal{R}\Phi$

^(oo) Si noti che per definire tale relazione si è utilizzata l'ipotesi 2). Infatti per calcolare la corrente concatenata presente nella legge di Ampère sarebbe necessario tenere conto anche delle correnti circolanti nel nucleo (il materiale ferromagnetico è generalmente conduttore). Tuttavia, "perdite nel ferro nulle" implica che la potenza dissipata per conduzione nel materiale del nucleo è assente, ovvero che non ci sono correnti nel nucleo (la conducibilità del materiale ferromagnetico è zero).

soidale di frequenza f dalle (3) risulta $\underline{V}_1 = K\underline{V}_2$, $\underline{I}_2 = -K\underline{I}_1$ e quindi la potenza complessa assorbita a primario dal trasformatore ideale $\underline{N}_1 = \underline{V}_1(\underline{I}_1)^*$ risulta uguale a quella erogata al secondario $\underline{N}_2 = -\underline{V}_2(\underline{I}_2)^*$. Il trasformatore ideale cioè non assorbe né potenza attiva né potenza reattiva; risultano però mutati i parametri (tensione e corrente) con cui la energia elettrica viene assorbita a primario ed erogata a secondario: la tensione viene ridotta (od aumentata) di un fattore pari al rapporto di trasformazione del trasformatore K mentre la corrente viene aumentata (o diminuita) dello stesso fattore.

2. Quando a secondario di un trasformatore ideale è collegato un resistore di resistenza R , il primario si comporta come un resistore di resistenza equivalente K^2R . Tale equivalenza è illustrata nella figura 4 e prende il nome di “riduzione da secondario a primario”. La dimostrazione è immediata:

$$v_1(t) = K v_2(t) = K [-R i_2(t)] = -KR [-K i_1(t)] = K^2 R i_1(t)$$

Analogamente, con riferimento al regime sinusoidale di frequenza f dalle (3) risulta anche che quando a secondario di un trasformatore ideale è collegato una impedenza \underline{Z} , il primario si comporta come una impedenza di valore $K^2\underline{Z}$.

$$\underline{V}_1(t) = K \underline{V}_2(t) = K [-\underline{Z} \underline{I}_2(t)] = -K\underline{Z} [-K \underline{I}_1(t)] = K^2 \underline{Z} \underline{I}_1(t)$$

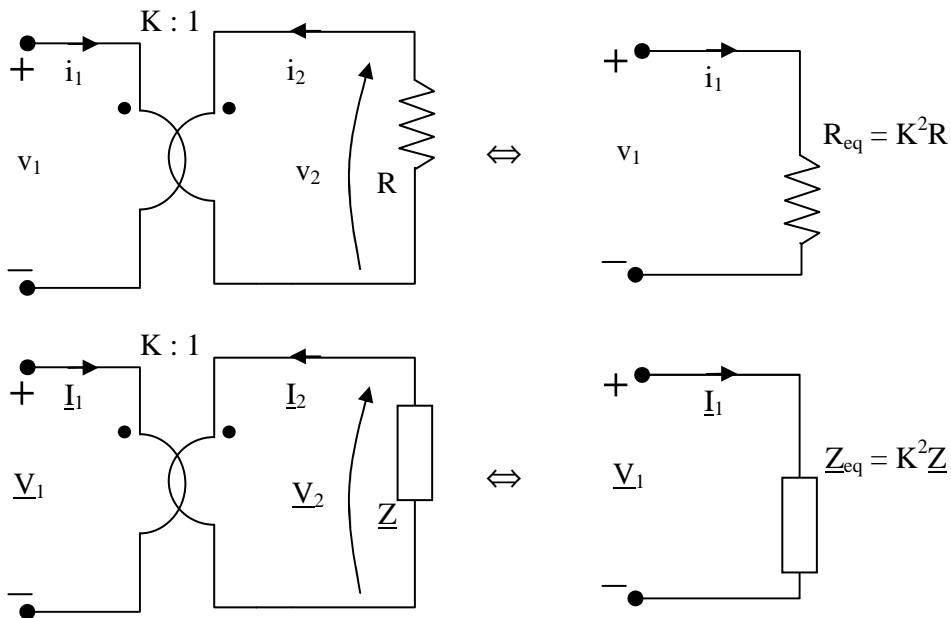


Figura 4 - Riduzione da secondario a primario.

3. INDUTTORI ACCOPPIATI LINEARI

Se si suppone che

- 1) non vi siano perdite negli avvolgimenti (dette “perdite nel rame”),
- 2) non si siano perdite nel nucleo ferromagnetico (dette “perdite nel ferro”),
- 3) il materiale ferromagnetico abbia permeabilità magnetica costante (materiale lineare),

è possibile dedurre il modello degli “induttori accoppiati lineari” come segue. Analogamente a quanto visto per il trasformatore ideale, dalla legge di Faraday possiamo determinare le tensioni ai capi degli avvolgimenti primario e secondario come derivate temporali dei flussi concatenati agli avvolgimenti stessi ($v_1 = d\phi_{c1}/dt$, $v_2 = d\phi_{c2}/dt$).

Inoltre, grazie alla linearità del materiale, i flussi concatenati sono ottenibili semplicemente come combinazioni lineari delle correnti a primario e secondario (sorgenti del campo magnetico):

$$\begin{cases} \phi_{c1} = L_1 i_1 + M i_2 \\ \phi_{c2} = M i_1 + L_2 i_2 \end{cases}$$

dove L_1 ed L_2 (misurati in H [Henry]) sono, rispettivamente i **coefficienti di auto induzione** del primario e del secondario ed M (misurata in H) è il **coefficiente di mutua induzione** tra i due avvolgimenti. Si intende sottolineare che i coefficienti di auto e mutua induzione dipendono esclusivamente dalla geometria e dalle caratteristiche magnetiche del materiale del nucleo.

Il doppio bipolo lineare “induttori accoppiati” (illustrato in figura 4) risulta quindi descritto dalle seguenti relazioni tensione-corrente:

$$\begin{cases} v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases} \quad (4)$$

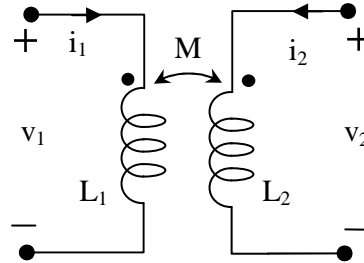


Figura 5 - Induttori accoppiati.

Si noti che in figura 5 una coppia di terminali è segnata con un punto, indicando quindi i versi di riferimento positivi delle tensioni e delle correnti per cui le equazioni costitutive (4) sono corrette. Si noti inoltre che, poiché gli induttori accoppiati sono un componente ideale definito dalle (4), le relazioni tra tensioni e correnti a primario e secondario sono valide per tutte le forme d’onda e per tutte le frequenze (inclusa la continua).

Con riferimento al regime sinusoidale di frequenza f le (4) possono essere scritte in termini di numeri complessi rappresentativi delle tensioni e delle correnti, come segue:

$$\begin{cases} \underline{V}_1 = j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2 \\ \underline{V}_2 = j\omega M \underline{I}_1 + j\omega L_2 \underline{I}_2 \end{cases}$$

Il doppio bipolo “induttori accoppiati” gode delle due seguenti proprietà fondamentali:

1. Il doppio bipolo “induttori accoppiati” è un componente con memoria in grado di immagazzinare energia magnetica. Dalle (4) risulta infatti che la potenza assorbita dagli induttori accoppiati, con riferimento ai versi di riferimento positivi delle tensioni e delle correnti definiti in figura 4, è data da:

$$\begin{aligned} p(t) &= v_1 i_1 + v_2 i_2 = L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + M i_1 \frac{di_2}{dt} + M i_2 \frac{di_1}{dt} + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 \right) + \frac{d}{dt} (M i_1 i_2) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right) = \frac{d}{dt} W_m \end{aligned}$$

Tale relazione mostra come tutta la potenza elettrica assorbita dagli induttori accoppiati vada ad incrementare il termine $W_m = L_1 i_1^2 / 2 + M i_1 i_2 + L_2 i_2^2 / 2$ che assume quindi il significato di energia magnetica accumulata negli induttori accoppiati (si noti che il primo ed il terzo termine coincidono con le energie magnetiche accumulate dagli induttori L_1 ed L_2 se fossero non accoppiati; il termine $M i_1 i_2$, che prende invece il nome di energia mutua, è quello che rende possibile trasferire potenza elettrica dall’avvolgimento primario a quello secondario, senza fare ricorso ad alcun collegamento elettrico tra i due avvolgimenti); tale energia, una volta immagazzinata, può essere interamente restituita ai componenti del circuito cui sono collegati gli induttori accoppiati durante un transitorio successivo. La potenza elettrica assorbita dagli induttori accoppiati può quindi assumere valori sia positivi che negativi.

Esiste una relazione notevole che lega i coefficienti di auto e mutua induzione: $|M| \leq \sqrt{L_1 L_2}$. Questa relazione è una conseguenza diretta del fatto che l’energia magnetica è sempre positiva. Infatti, con semplici passaggi si ottiene (ricordando che l’autoinduttanza è sempre positiva):

$$0 \leq W_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 = \frac{1}{2L_2} \left[(L_2 i_2 + M i_1)^2 + i_1^2 (L_1 L_2 - M^2) \right]$$

Quindi, dato che il primo termine della somma si può annullare per una opportuna scelta dei valori delle correnti, il secondo termine deve essere sempre positivo o nullo.

La mutua induttanza M è spesso espressa in funzione del coefficiente di accoppiamento k definito da: $k = M/\sqrt{L_1L_2}$. La relazione appena provata mostra quindi che $|k| \leq 1$, ovvero è impossibile ottenere un coefficiente di accoppiamento maggiore di uno. Quando $k = 0$, si ha $M = 0$, cioè non esiste accoppiamento magnetico fra gli induttori. Quando $k = 1$, si ha $|M| = \sqrt{L_1L_2}$, cioè l'accoppiamento magnetico fra gli induttori è perfetto.

2. Il doppio bipolo "induttori accoppiati" è equivalente ad un doppio bipolo costituito da un trasformatore ideale e da tre induttori (disaccoppiati) L_0 , L_{d1} ed L_{d2} . Per dimostrare tale equivalenza, illustrata in figura 6, è sufficiente verificare che relazioni tensione-corrente sono le stesse. Si ha infatti:

- Applicando la LKT a primario: $v_1 = L_{d1} \frac{di_1}{dt} + L_0 \frac{d}{dt}(i_1 - i_1')$
- Dalle caratteristiche (3) del Trasformatore ideale:
$$\begin{cases} L_0 \frac{d}{dt}(i_1 - i_1') = K \left(v_2 - L_{d2} \frac{di_2}{dt} \right) \\ i_1' = -\frac{1}{K} i_2 \end{cases}$$

Sostituendo l'ultima relazione nelle precedenti si ottiene quindi:
$$\begin{cases} v_1 = (L_0 + L_{d1}) \frac{di_1}{dt} + \frac{L_0}{K} \frac{di_2}{dt} \\ v_2 = \frac{L_0}{K} \frac{di_1}{dt} + \left(\frac{L_0}{K^2} + L_{d2} \right) \frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

Tali relazioni coincidono con le caratteristiche (4) degli induttori accoppiati se $L_1 = L_0 + L_{d1}$, $L_2 = L_{d2} + L_0/K^2$ ed $M = L_0/K$.

L'interpretazione fisica di tale equivalenza, è la seguente: L_{d1} ed L_{d2} sono le *induttanze di dispersione*, cioè le induttanze viste a primario ed a secondario dovute ai flussi dispersi, ovvero alle linee di campo magnetico che non si concatenano ad entrambi gli avvolgimenti. Infatti, per $k \rightarrow 1$, si ha $M^2 \rightarrow L_1L_2$, e quindi $L_{d1}, L_{d2} \rightarrow 0$. L_0 è detta *induttanza magnetizzante*: essa tiene conto del flusso principale, comune ad entrambi gli avvolgimenti.

Si supponga di voler costruire un trasformatore di alta qualità. Si sceglie un anello di materiale magnetico con una elevatissima permeabilità magnetica μ , quindi si avvolgono strettamente sull'anello le due bobine. Si supponga di utilizzare materiali a permeabilità μ crescente; allora, al crescere di μ si otterrebbero due effetti: i flussi dispersi diventerebbero sempre minori (per cui L_{d1} ed L_{d2} si ridurrebbero) e il flusso principale crescerebbe (per cui L_0 aumenterebbe). Pertanto, nel caso limite in cui $\mu \rightarrow \infty$, si avrebbe $L_{d1}, L_{d2} \rightarrow 0$ ed $L_0 \rightarrow \infty$. Con riferimento alla figura 6 è possibile vedere che si otterrebbe dunque il trasformatore ideale.

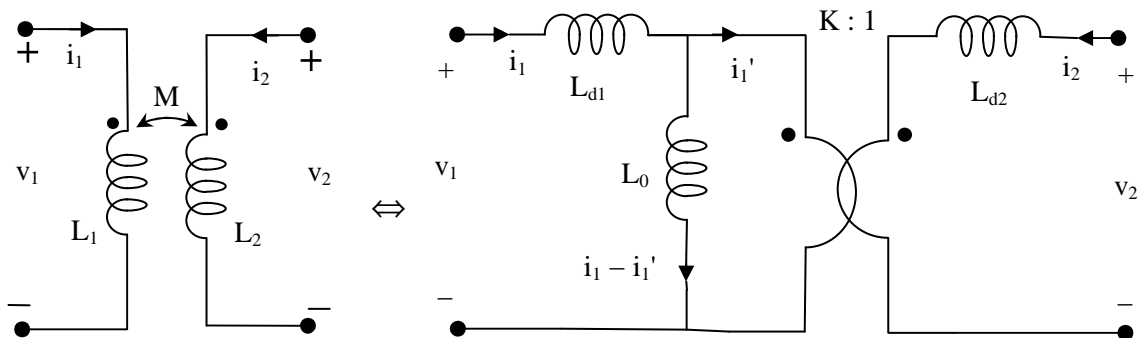


Figura 6

4. IL TRASFORMATORE REALE

Le perdite nel trasformatore reale possono classificarsi come segue:

- Le perdite per conduzione negli avvolgimenti, dette *perdite nel rame* (P_{cu}), sono perdite ohmiche e pertanto risultano dipendere dal quadrato della corrente che scorre nei conduttori stessi. I conduttori devono essere di bassa resistenza elettrica per ridurre le perdite e le cadute di tensione presentate dagli avvolgimenti. Il materiale più usato per i conduttori è il rame elettrolitico ricotto per le sue buone qualità meccaniche ed elettriche.
- Le *perdite nel ferro* (P_{fe}) per isteresi e per correnti parassite nel nucleo ferromagnetico. Infatti, poiché il nucleo è percorso da un flusso variabile ed il materiale ferromagnetico è tipicamente conduttore, anche nel nucleo si generano forze elettromotrici indotte, che danno luogo a delle correnti, dette parassite (o di Foucault). Per ridurre le correnti parassite si costruisce il nucleo con lamierini, infatti il lamierino spezza il percorso delle correnti parassite e le riduce. Le perdite per isteresi sono causate da fenomeni di “attrito” nella struttura cristallina del materiale ferromagnetico sottoposto ad un campo di induzione variabile. Per loro natura le perdite nel ferro dipendono quindi dalla variazione temporale dal campo di induzione all’interno del nucleo magnetico, e quindi fondamentalmente dalla tensione a primario o a secondario.

Il circuito elettrico rappresentato in figura 7 costituisce il circuito equivalente del trasformatore (a bassa frequenza); infatti, rispetto al circuito di figura 6 si è:

1. inserita le *induttanze di dispersione* (L_{d1} e L_{d2}) dovute ai flussi dispersi a primario e a secondario, ovvero alle linee di campo magnetico che si concatenano a un solo avvolgimento;
2. inserite le resistenze degli avvolgimenti di primario (R_1) e di secondario (R_2), per tener conto delle *perdite nel rame* ($P_{cu} = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2$);
3. inserita una resistenza (R_0) in parallelo all’induttanza magnetizzante, per tener conto delle *perdite nel ferro* ($P_{fe} = R_0 i_a^2$). Il valore di R_0 dipende dalla frequenza di funzionamento.

Il trasformatore “reale”, come quello ideale, è in grado di modificare i valori di tensione e corrente a secondario e a primario, ma, a differenza del trasformatore ideale, assorbe potenza sia attiva che reattiva. La potenza attiva viene dissipata (trasformata in calore) in parte negli avvolgimenti (per effetto Joule) ed in parte nel nucleo ferromagnetico (per effetto Joule e per isteresi). La potenza reattiva assorbita mantiene i flussi dispersi ed il flusso principale. La presenza di flussi dispersi introduce uno sfasamento tra la tensione primaria e la tensione secondaria, mentre l’induttanza magnetizzante finita comporta l’assorbimento a primario, anche nel funzionamento a vuoto (cioè col secondario aperto), di una corrente magnetizzante (I_μ).

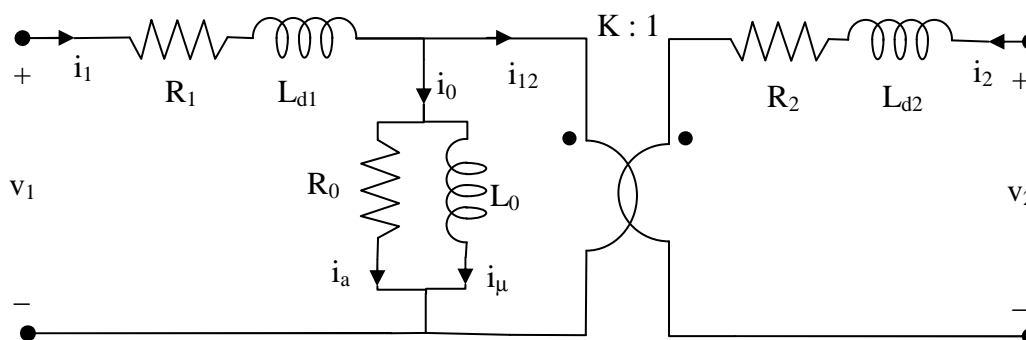


Figura 7. - Circuito equivalente del trasformatore reale (dominio del tempo).

Con riferimento al regime AC di frequenza f il circuito elettrico rappresentato nella figura 7 può essere descritto nel dominio simbolico introducendo le reattanze di dispersione ($X_{d1} = \omega L_{d1}$, $X_{d2} = \omega L_{d2}$) e la reattanza magnetizzante ($X_0 = \omega L_0$). In figura 8 sono indicate l’impedenza primaria $Z_1 =$

$R_1 + jX_{d1}$, l'impedenza secondaria $\underline{Z}_2 = R_2 + jX_{d2}$ e l'impedenza $\underline{Z}_0 = (R_0)/(jX_0)$ ottenuta dal parallelo delle impedenze R_0 e jX_0 .

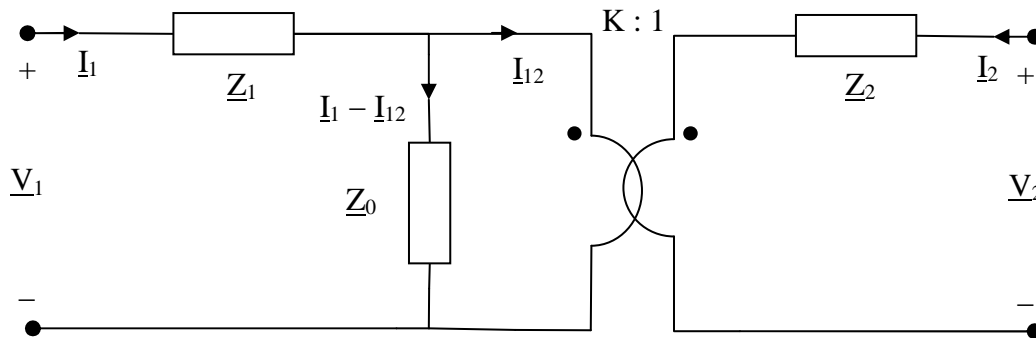


Figura 8 - Circuito equivalente del trasformatore reale in regime sinusoidale (dominio simbolico).

Se è possibile considerare lineare il materiale ferromagnetico di cui è costituito il nucleo del trasformatore, la riluttanza \mathcal{R} è costante nel tempo. In questo caso, supponendo che i_1 , i_2 , v_1 e v_2 siano grandezze sinusoidali isofrequenziali e utilizzando i fasori relativi alle grandezze indicate, si ottiene^(o):

$$\begin{aligned} \underline{V}_1 &= j\omega N_1 \underline{\Phi} + j\omega L_{d1} \underline{I}_1 + R_1 \underline{I}_1 \\ \underline{V}_2 &= j\omega N_2 \underline{\Phi} + j\omega L_{d2} \underline{I}_2 + R_2 \underline{I}_2 \\ 0 &= j\omega N_1 \underline{\Phi} - R_0 \underline{I}_a \\ \mathcal{R} \underline{\Phi} &= N_1 (\underline{I}_1 - \underline{I}_a) + N_2 \underline{I}_2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Le equazioni (4.1) costituiscono le **equazioni interne** del trasformatore mediante le quali è possibile descriverne il comportamento nella ipotesi di poter trascurare gli effetti dovuti alla non linearità del circuito magnetico. Quando ciò non sia possibile, le grandezze in gioco (tensioni, correnti e flusso) sono esprimibili mediante la loro serie di Fourier, caratterizzata da un'armonica fondamentale, relativa alla frequenza di alimentazione, e da armoniche superiori, relative a frequenze multiple intere della fondamentale.

Le (4.1) costituiscono un sistema di quattro equazioni complesse nelle sei incognite complesse \underline{V}_1 , \underline{V}_2 , \underline{I}_1 , \underline{I}_2 , \underline{I}_a , $\underline{\Phi}$. Affinché il problema risulti chiuso e sia quindi possibile calcolare il valore delle incognite è necessario scrivere altre due equazioni complesse che descrivano il collegamento del trasformatore col mondo esterno attraverso i terminali del primario e del secondario.

Nel caso in cui il primario sia alimentato da una rete a tensione assegnata ed il secondario sia chiuso su di una impedenza di carico (\underline{Z}_L), tali **equazioni esterne** hanno la seguente forma:

$$\begin{aligned} \underline{V}_1 &= \underline{E} \\ \underline{V}_2 &= -\underline{Z}_L \underline{I}_2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Riportando a primario l'impedenza \underline{Z}_2 si ottiene il circuito equivalente del trasformatore ridotto a primario illustrato in figura 9, in cui $\underline{Z}_{12} = K^2 \underline{Z}_2$ (si ricordi che in tale schema anche l'impedenza di carico collegata al secondario va moltiplicata per il quadrato del rapporto di trasformazione K). Analogamente è possibile considerare il circuito equivalente del trasformatore ridotto a secondario.

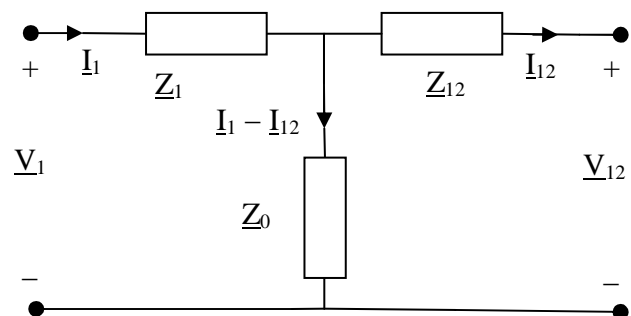


Figura 9. - circuito equivalente del trasformatore ridotto a primario.

^(o) Si noti che le prime tre delle (4.1) sono LKT applicate al circuito di Figura 7 (infatti $j\omega N_1 \underline{\Phi}$ e $j\omega N_2 \underline{\Phi}$ sono rispettivamente la tensione a primario e a secondario del trasformatore ideale). L'ultima delle (4.1) è interpretabile come LKC. Infatti $L_0 = N_1^2 / \mathcal{R}$ ed $j\omega L_0 \underline{I}_a = j\omega N_1 \underline{\Phi}$, quindi $\underline{I}_a = \mathcal{R} \underline{\Phi} / N_1$. Sostituendo si ottiene quindi $\underline{I}_a = \underline{I}_1 - \underline{I}_a + (N_2 / N_1) \underline{I}_2$, ovvero $\underline{I}_a + \underline{I}_a + \underline{I}_{12} = \underline{I}_1$.

I trasformatori sono costruiti in modo da ridurre il più possibile gli effetti di perdita; risulta quindi comprensibile come, normalmente, la tensione sulla impedenza \underline{Z}_1 risulti molto piccola (meno di qualche per mille) rispetto a quella su \underline{Z}_0 . Di conseguenza è possibile approssimare notevolmente la rete equivalente del trasformatore, senza introdurre un errore rilevante, applicando la tensione di alimentazione direttamente ai terminali di \underline{Z}_0 come mostrato nella figura 10.

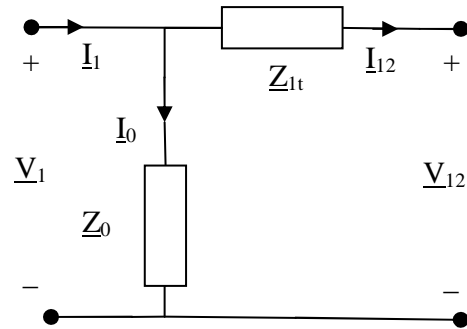


Figura 10. - circuito equivalente semplificato del trasformatore ridotto a primario.

In questo caso la corrente \underline{I}_0 assorbita da \underline{Z}_0 non dipende dal carico del trasformatore e coincide con la corrente assorbita a primario dal trasformatore nel funzionamento a vuoto, quando cioè il secondario è aperto ($\underline{I}_2 = 0$). Nell'ambito di tale approssimazione non è più necessario distinguere l'impedenza primaria \underline{Z}_1 da quella secondaria \underline{Z}_2 . Si ha infatti un'unica impedenza totale che può essere riferita a primario: $\underline{Z}_{1t} = R_{1t} + jX_{1t} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{12}$. Analogamente è possibile considerare il circuito equivalente semplificato del trasformatore con un'unica impedenza totale riferita a secondario (\underline{Z}_{2t}). I parametri che compaiono nel circuito equivalente semplificato (R_0 , X_0 , R_{1t} ed X_{1t}) possono essere determinati sperimentalmente mediante una prova a vuoto ed una prova in corto circuito.

5. PROVE A VUOTO ED IN CORTO CIRCUITO

La **prova a vuoto** viene eseguita alimentando il primario con la sua tensione nominale e mantenendo il secondario in circuito aperto. Facendo riferimento alla rete equivalente semplificata di figura 10 risulta nulla la corrente \underline{I}_{12} , di conseguenza si ottiene:

$$R_0 = \frac{V_{10}^2}{P_0}$$

dove V_{10} è la tensione (valore efficace) primaria, I_{10} è la corrente (valore efficace) primaria e P_0 è la potenza attiva assorbita a primario.

$$X_0 = \frac{V_{10}^2}{\sqrt{(V_{10} I_{10})^2 - P_0^2}}$$

La **prova in cortocircuito** viene effettuata alimentando il primario del trasformatore con il secondario in cortocircuito (chiuso su un amperometro a impedenza trascurabile).

La tensione primaria deve essere tale che la corrente a secondario (misurata dall'amperometro) sia pari al valore nominale (in valore efficace). Tale valore della tensione viene chiamato tensione di cortocircuito (V_{1c}) e risulta essere pari ad un frazione (< 10 %) della tensione nominale primaria. Per i valori tipici dei parametri del trasformatore risulta $|\underline{Z}_0| \gg |\underline{Z}_{1t}|$ e quindi, nel funzionamento in cortocircuito, è possibile considerare la rete equivalente semplificata del trasformatore mostrata in figura 11 (rete di Kapp).

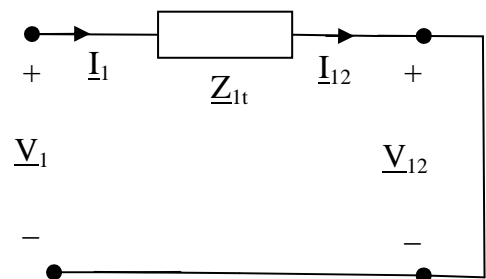


Figura 11. - Rete di Kapp

Con riferimento a tale semplificazione risulta quindi:

dove V_{1c} è la tensione (valore efficace) primaria, I_{1c} è la corrente (valore efficace) primaria e P_c è la potenza attiva assorbita a primario. Tali grandezze possono essere misurate mediante l'inserzione a primario di un voltmetro, un amperometro ed un wattmetro.

$$R_{1t} = \frac{P_c}{I_{1c}^2}$$

$$X_{1t} = \frac{\sqrt{(V_{1c} I_{1c})^2 - P_c^2}}{I_{1c}^2}$$

6. RENDIMENTO CONVENZIONALE DEL TRASFORMATORE

Il trasformatore assorbe potenza elettrica dal primario ed eroga potenza elettrica al secondario; tale trasformazione avviene in presenza di perdite (nel rame e nel ferro). Il rendimento del trasformatore (η) viene quindi definito come il rapporto tra la potenza attiva erogata a secondario (P_{2e}) e la potenza attiva assorbita a primario (P_{1a}); indicando con P_d la potenza dissipata (trasformata in calore) all'interno del trasformatore risulta:

$$\eta = P_{2e}/P_{1a} = P_{2e}/(P_{2e} + P_d)$$

La determinazione sperimentale di tale grandezza è difficoltosa per varie ragioni. In primo luogo, sarebbe necessaria una prova in condizioni nominali (con costi crescenti al crescere della potenza richiesta). In secondo luogo, non essendo presenti parti rotanti nel trasformatore, il rendimento è molto elevato (può essere superiore al 99 %) e piccoli errori nella misura delle potenze assorbita ed erogata possono produrre un errore notevole sul rendimento. Per ovviare a tali inconvenienti viene definito un rendimento convenzionale del trasformatore (η_{conv}). Le norme stabiliscono dettagliatamente le modalità del calcolo del rendimento convenzionale a seconda del carico che il trasformatore deve alimentare; facendo riferimento ad un carico resistivo ($\cos \varphi = 1$) che assorbe la potenza nominale del trasformatore si ha:

$$\eta_{conv} = \frac{A_n}{A_n + P_{Cu} + P_{Fe}} \quad (5)$$

Nella (5) A_n è la potenza apparente nominale del trasformatore, che è indicata sui dati di targa del trasformatore stesso, P_{Cu} sono le perdite nel rame, valutate mediante la prova in cortocircuito, e P_{Fe} sono le perdite nel ferro, valutate mediante la prova a vuoto. Nella prova in cortocircuito le perdite per effetto Joule negli avvolgimenti, sono largamente predominanti rispetto a quelle nel ferro e quindi la potenza attiva assorbita durante tale prova rappresenta la potenza che viene dissipata nel rame, a parità di correnti negli avvolgimenti, quindi $P_{Cu} = P_c$. In realtà è necessario tenere conto della variazione della resistenza degli avvolgimenti al variare della temperatura degli stessi e quindi le norme fissano le modalità del calcolo di P_{Cu} a partire dalla misura di P_c . Nella prova a vuoto risultano invece trascurabili le perdite negli avvolgimenti, visto che il secondario non è percorso da corrente ed il primario è percorso solo dalla corrente a vuoto (che è una frazione abbastanza piccola della corrente nominale). Quindi la potenza attiva assorbita durante la prova, eseguita alla tensione nominale, rappresenta la potenza dissipata nel ferro durante il funzionamento nominale ($P_{Fe} = P_0$).

7. TRASFORMATORI TRIFASE

Per trasferire energia elettrica tra due reti trifase a differenti tensioni, si può ricorrere a tre trasformatori monofase opportunamente collegati tra loro. Nella figura 12 è mostrata una possibile disposizione dei tre trasformatori monofase. In questo caso, gli avvolgimenti primari sono collegati a stella, così come quelli secondari. I tre circuiti magnetici di figura 12 sono equivalenti ad un unico trasformatore ottenuto fondendo in un'unica colonna le tre colonne prive di avvolgimenti dei trasformatori monofase (figura 13). La colonna centrale del circuito magnetico raffigurato in figura 13 è percorsa da un flusso:

$$\Phi' = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$$

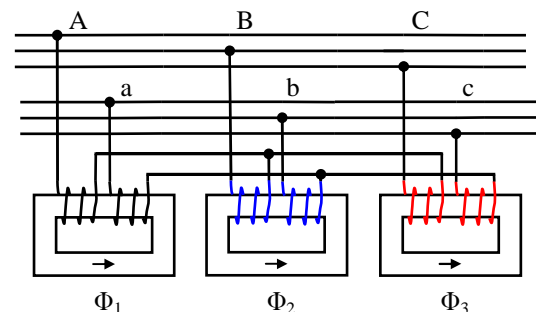


Figura 12. - Banco di tre trasformatori monofase (collegamento stella-stella).

dove Φ_1 , Φ_2 e Φ_3 sono i flussi relativi a ciascun trasformatore. Se poi tali flussi costituiscono una terna simmetrica, la loro somma è nulla, e la colonna centrale può venire soppressa (figura 14).

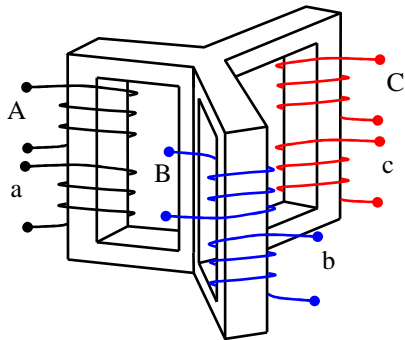


Figura 13. - Trasformatore trifase equivalente al banco di tre trasformatori monofase.

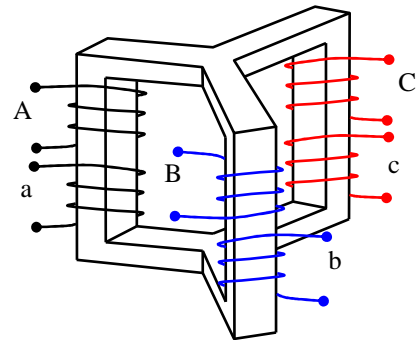


Figura 14. - Trasformatore trifase con nucleo simmetrico.

La configurazione illustrata nella figura 14 presenta delle difficoltà costruttive ed un ingombro tale che di solito si preferisce adottare un nucleo complanare (figura 15). Utilizzando tale disposizione si introduce nella terna dei flussi magnetici una dissimmetria che peraltro risulta di norma trascurabile.

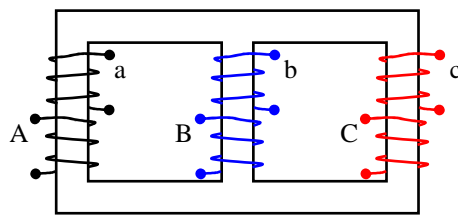
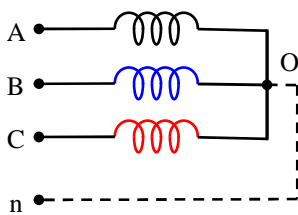
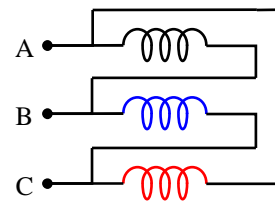


Figura 15. - Trasformatore trifase con nucleo complanare.

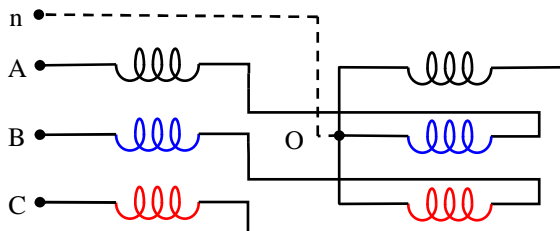
COLLEGAMENTI DELLE FASI



collegamento a stella: gli avvolgimenti hanno un morsetto in comune O (centro stella). Si rendono così disponibili due valori di tensione: la tensione concatenata, tra due terminali, e la tensione principale di fase tra uno dei terminali ed il centro stella.



collegamento a triangolo: la fine di un avvolgimento è connesso con l'inizio del successivo. Il collegamento a triangolo rende disponibile un solo valore di tensione, quello della tensione concatenata.



collegamento a zig-zag: è usato solitamente per il collegamento delle fasi del secondario alle reti trifase con neutro (con le fasi di primario a stella). Gli avvolgimenti di ogni fase vengono divisi in due parti e collegate come mostrato in figura. Utilizzando tale collegamento si rendono disponibili due valori di tensione. Il vantaggio del collegamento a zig-zag con filo neutro è dovuto al fatto che eventuali squilibri del carico si risentono meno sul circuito primario.

Il **rapporto di trasformazione** di un trasformatore trifase (K) viene definito come il rapporto tra il valore efficace delle tensioni concatenate corrispondenti alle coppie di morsetti omologhi primari e secondari, relativo al funzionamento a vuoto del trasformatore (trascurando quindi le cadute di tensione interne del trasformatore): $K = V_{AB}/V_{ab}$. Il rapporto di trasformazione, che nei trasformatori monofase è pari al rapporto n_1/n_2 , dipende, nel caso di un trasformatore trifase, anche dai tipi di collegamenti delle fasi primarie e secondarie. Alcuni esempi sono riportati nella tabella.

Seguendo le Norme CEI, la **classificazione dei trasformatori** trifase segue il seguente criterio: il collegamento a stella viene indicato con Y al primario e con y al secondario; il collegamento a triangolo viene indicato con D al primario e con d al secondario; il collegamento a zig-zag viene indicato con z al secondario. Lo sfasamento tra due tensioni principali di fase corrispondenti, trascurando gli effetti dissipativi, è sempre un multiplo di 30°; dividendo tale sfasamento per 30° si individua il gruppo di appartenenza del trasformatore (un numero intero da 0 a 11). Ad esempio, Dy5 denota un trasformatore trifase con primario a triangolo, secondario a stella e gruppo di appartenenza 5 (sfasamento 150° tra tensioni di fase di primario e di secondario).

Collegamento		V_{AB}/V_{ab} $\left(K = \frac{n_1}{n_2}\right)$					Spost. ang.	Gruppo	Denom. conv.
prim.	sec.		primario	secondario	primario	secondario			
stella	stella	K					0°	0	Yy0
triang.	triang.	K					0°	0	Dd0
triang.	stella	$\frac{K}{\sqrt{3}}$					330°	11	Dy11
							150°	5	Dy5
stella	triang.	$K\sqrt{3}$					330°	11	Yd11
							150°	5	Yd5
stella	zig-zag	$\frac{2K}{\sqrt{3}}$					330°	11	Yz11