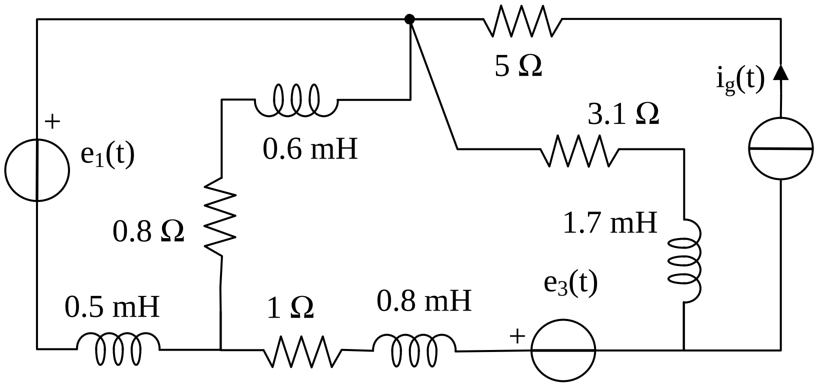
Esercizi sulle reti elettriche in corrente alternata (parte 2)

Esercizio 7: Verificare il bilancio delle potenze.

Nota. Il ramo costituito dal generatore di corrente in serie al resistore ha come caratteristica quella del generatore di corrente (la corrente di ramo è uguale alla corrente impressa). Quindi il ramo è equivalente al solo generatore di corrente e, per determinare la tensione sul ramo, si può ignorare la resistenza. Una volta determinata la tensione di ramo, per calcolare la tensione sul generatore si deve sottrarre (o sommare, dipende dal verso scelto per la tensione) dalla tensione di ramo la tensione sul resistore.



$e_1(t) = \sqrt{2}\, 15 \cos(\omega t)$ V, $e_3(t) = \sqrt{2}\, 8 \cos(\omega t)$ V, $\omega = 1000$ rad/s

$i_g(t) = -\sqrt{2}\, 5 \cos(\omega t + 0.9273\ [\text{rad}])$ A

Soluzione:

potenze assorbite:

$\underline{\mathbf{N}}_{Z1} = j100$

$\underline{\mathbf{N}}_{Z2} = 100+j75$

$\underline{\mathbf{N}}_{Z3} = 25+j20$

$\underline{\mathbf{N}}_{Z4} = 62+j34$

$\underline{\mathbf{N}}_{Z5} = 125$

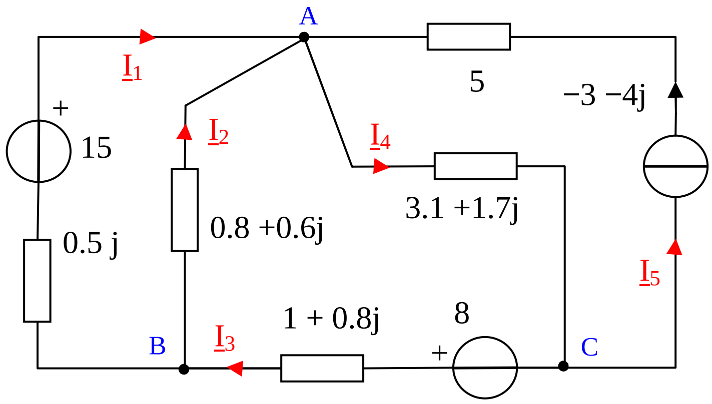
potenze erogate:

$\underline{\mathbf{N}}_{E1} = 150+j150$

$\underline{\mathbf{N}}_{E3} = 40$

$\underline{\mathbf{N}}_{g} = 122+j79$

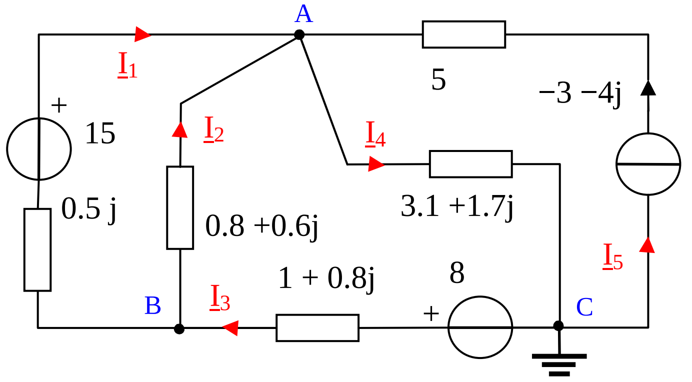
Soluzione: La pulsazione è $\omega = 1000$ rad/s. Le reattanze sono quindi $X_{L1} = 0.5\ \Omega$, $X_{L2} = 0.6\ \Omega$, $X_{L3} = 0.8\ \Omega$, ed $X_{L4} = 1.7\ \Omega$. I fasori delle tensioni impresse dai generatori sono $\underline{E}_1 = e_{1,eff} \exp(j\ \angle e_1) = 15 \exp(j0) = 15$ ed $\underline{E}_2 = 8 \exp(j0) = 8$. Il fasore della corrente impressa dal generatore è $\underline{I}_g = -\, i_{g,eff} \exp(j\ \angle i_g) = -\, 5 \exp(j\ 0.9273) = -\, 5 \cos(0.9273) - 5\, j\ \text{sen}(0.9273) = -\,(3 + 4j)$.



Il circuito equivalente nel dominio simbolico è rappresentato in figura (unità SI). Il circuito è costituito da R = 5 rami, N = 3 nodi e quindi R − N +1 = 3 maglie fondamentali. Per verificare il bilancio delle potenze è necessario calcolare le correnti su tutti i rami. Per scegliere il metodo di soluzione si noti che tutti i rami sono controllati in tensione e che tutti i rami tranne il 5 sono controllati in corrente.

Pertanto è possibile calcolare immediatamente quante variabili (ed equazioni) conterrà il sistema risolvente per ognuno dei metodi studiati. In particolare (per le variabili) si ha: 4 per il metodo delle correnti di maglia (R−N+1 = 3 correnti di maglia, 1 ramo non controllato in corrente) e 2 per il metodo delle tensioni di nodo (N−1 = 2 tensioni di nodo). Si noti tuttavia che si lascia nel coalbero il ramo contenente il generatore di corrente, una delle correnti di maglia sarà definita dalla sua caratteristica.

Metodo delle tensioni di nodo



Scelto C come riferimento ($\underline{E}_C = 0$) le correnti sui rami (con i versi indicati in figura) sono:

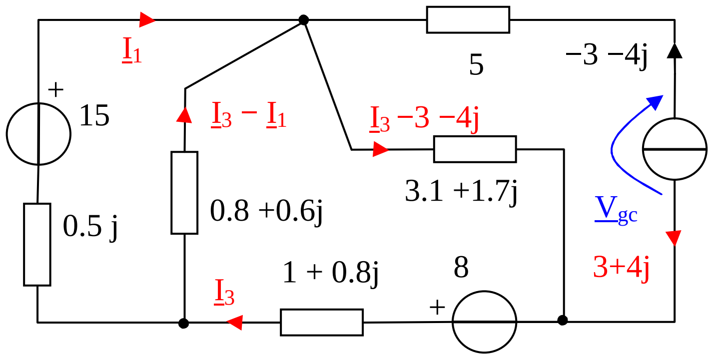
$$\underline{I}_1 = (\underline{E}_B - \underline{E}_A + 15)/(0.5j)$$
$$\underline{I}_2 = (\underline{E}_B - \underline{E}_A)/(0.8+0.6j)$$
$$\underline{I}_3 = (-\underline{E}_B + 8)/(1+0.8j)$$
$$\underline{I}_4 = \underline{E}_A/(3.1+1.7j)$$
$$\underline{I}_5 = -3-4j$$

Sostituendo nelle LKC per i nodi A e B si ottiene quindi il sistema risolvente:

$$\begin{cases} 0 = \underline{E}_A/(3.1+1.7j) - (\underline{E}_B - \underline{E}_A + 15)/(0.5j) - (\underline{E}_B - \underline{E}_A)/(0.8+0.6j) + 3 + 4j \\ 0 = (\underline{E}_B - \underline{E}_A + 15)/(0.5j) + (\underline{E}_B - \underline{E}_A)/(0.8+0.6j) - (-\underline{E}_B + 8)/(1+0.8j) \end{cases}$$

Si ottengono quindi 2 equazioni indipendenti nelle 2 incognite ($\underline{E}_A$, $\underline{E}_B$), la cui soluzione è data da: $\underline{\mathbf{E}}_A = 13 -9j$, $\underline{\mathbf{E}}_B = 3 -4j$. Quindi $\underline{I}_1 = 10 -10j$, $\underline{I}_2 = -5 +10j$, $\underline{I}_3 = 5 +0j$, $\underline{I}_4 = 2 -4j$ ed $\underline{I}_5 = -3 -4j$.

Metodo delle correnti di maglia



Applicando le LKC è possibile quindi dedurre le correnti su tutti i rami partendo da quelle presenti sullo schema (o definendone altre, se fosse necessario). In particolare, le LKC applicate sequenzialmente ai nodi permettono di definire le correnti su tutti i rami utilizzando 3+4j, $\underline{I}_1$ e $\underline{I}_3$ (correnti di maglia) e di conseguenza l'albero è costituito dai rami 2 e 4.

Si ha quindi, identificando le maglie fondamentali tramite le correnti di maglia (3+4j, $\underline{I}_1$ e $\underline{I}_3$):

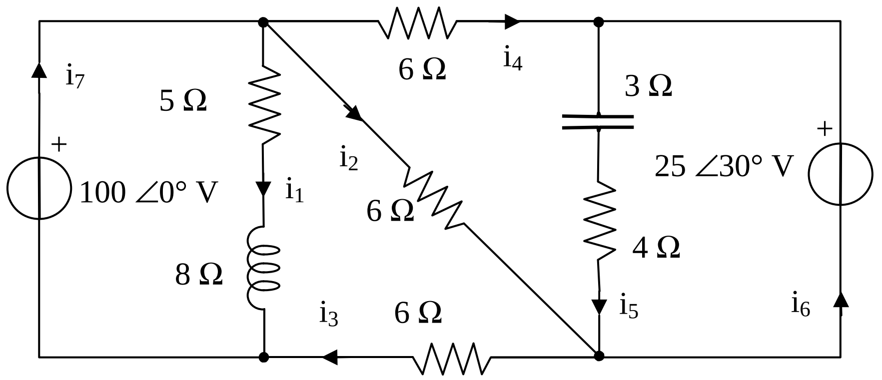
$$(R - N + 1 = 3\ \text{LKT}_{mf}) \qquad \begin{cases} \underline{V}_{gc} - (3.1+1.7j)(\underline{I}_3 - 3 - 4j) + 5(3+4j) = 0 \\ 0.5j\underline{I}_1 - 15 - (0.8+0.6j)(\underline{I}_3 - \underline{I}_1) = 0 \\ -8 + (1+0.8j)\underline{I}_3 + (0.8+0.6j)(\underline{I}_3 - \underline{I}_1) + (3.1+1.7j)(\underline{I}_3 - 3 - 4j) = 0 \end{cases}$$

Si ottengono quindi 3 equazioni indipendenti nelle 3 incognite ($\underline{V}_{gc}$, $\underline{I}_1$ e $\underline{I}_3$). Si noti inoltre che la prima equazione definisce $\underline{V}_{gc}$. Quindi per determinare le correnti su tutti i rami è sufficiente risolvere solo le ultime due: $\underline{I}_1 = 10 -10j$ ed $\underline{I}_3 = 5 +0j$. Infine $\underline{V}_{gc} = -2 -29j$.

<u>Potenze complesse</u> (assorbite dalle impedenze)		Potenze Attive	Potenze Reattive
$\underline{N}_{Z1} = 0.5j \times \lvert \underline{I}_1 \rvert^2 = 0 + 100j$	$\Rightarrow$	0 W	100 VAr
$\underline{N}_{Z2} = (0.8 + 0.6j) \times \lvert \underline{I}_2 \rvert^2 = 100 + 75j$	$\Rightarrow$	100 W	75 VAr
$\underline{N}_{Z3} = (1 + 0.8j) \times \lvert \underline{I}_3 \rvert^2 = 25 + 20j$	$\Rightarrow$	25 W	20 VAr
$\underline{N}_{Z4} = (3.1 + 1.7j) \times \lvert \underline{I}_4 \rvert^2 = 62 + 34j$	$\Rightarrow$	62 W	34 VAr
$\underline{N}_{Z5} = 5 \times \lvert 3 + 4j \rvert^2 = 125 + 0j$	$\Rightarrow$	125 W	0 VAr
<u>Potenze complesse</u> (erogate dai generatori)			
$\underline{N}_{E1} = \underline{E}_1 (\underline{I}_1)^* = 150 + 150j$	$\Rightarrow$	150 W	150 VAr
$\underline{N}_{E3} = \underline{E}_3 (\underline{I}_3)^* = 40 + 0j$	$\Rightarrow$	40 kW	0 VAr
$\underline{N}_{gc} = -\underline{V}_{gc} (3 + 4j)^* = 122 + 79j$	$\Rightarrow$	122 W	79 VAr

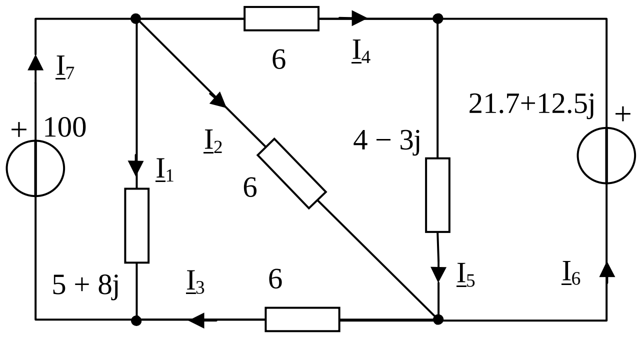
Esercizio 8: Determinare le correnti circolanti nei rami del circuito in figura.

Nota: sullo schema del circuito sono riportati direttamente i valori delle resistenze e delle reattanze associate agli induttori (ωL) e ai condensatori ($1/\omega C$ in modulo) alla frequenza di funzionamento, e i numeri complessi rappresentativi delle forme d'onda prodotte dai generatori di tensione ($A\angle\alpha = A\,e^{j\alpha}$).



Soluzione:
$\underline{I}_1 = 5.62 - j8.99$
$\underline{I}_2 = 6.76 + j0.695$
$\underline{I}_3 = 9.91 - j0.694$
$\underline{I}_4 = 3.15 - j1.39$
$\underline{I}_5 = 1.97 + j4.60$
$\underline{I}_6 = -1.19 + j5.99$
$\underline{I}_7 = 15.53 - j9.69$

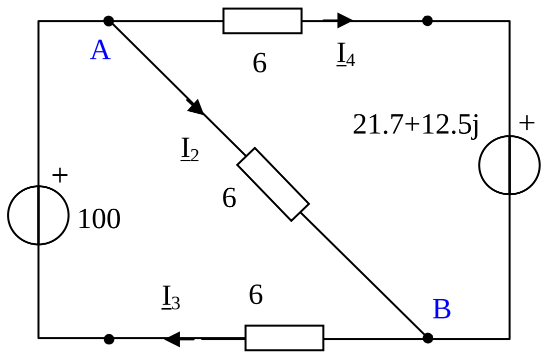
Soluzione: Le reattanze sono assegnate, quindi $X_L = 8\ \Omega$ ed $X_C = -3\ \Omega$. I fasori delle tensioni impresse dai generatori sono $\underline{E}_1 = e_{1,eff}\exp(j\angle e_1) = 100\exp(j0) = 100$ ed $\underline{E}_2 = e_{2,eff}\exp(j\angle e_2) = 25\exp(j30\times(\pi/180)) = 25\exp(j\pi/6) = 25\cos(\pi/6) + 25\,j\,\mathrm{sen}(\pi/6) = (25\sqrt{3} + 25j)/2 = 21.7 + 12.5j$. Passando al dominio simbolico il circuito si rappresenta come segue (unità SI):



Le correnti sui rami 1 e 5 sono determinabili direttamente dalle caratteristiche, essendo le impedenze soggette alle tensioni impresse dai generatori:

$\underline{I}_1 = 100/(5+8j) = 5.62 - 8.99j$
$\underline{I}_5 = (21.7 + 12.5j)/(4 - 3j) = 1.97 + 4.60j$

I paralleli tra generatori di tensione e impedenze hanno come caratteristiche quelle dei generatori di tensione (la tensione ai terminali è uguale alla tensione impressa). Quindi i paralleli sono equivalenti ai soli generatori di tensione. Si noti che le correnti sui generatori èquivalenti ($\underline{I}_3$ ed $\underline{I}_4$) sono diverse da quelle indicate nello schema iniziale ($\underline{I}_6$ ed $\underline{I}_7$). La relazione tra esse è deducibile applicando la LKC ad uno dei terminali di ogni parallelo: $\underline{I}_7 = \underline{I}_3 + \underline{I}_1$, $\underline{I}_6 = \underline{I}_5 - \underline{I}_4$.



Il circuito equivalente è mostrato a lato. Considerandolo come un parallelo di tre generatori reali, la tensione sul parallelo è determinabile utilizzando il Teorema di Millman:

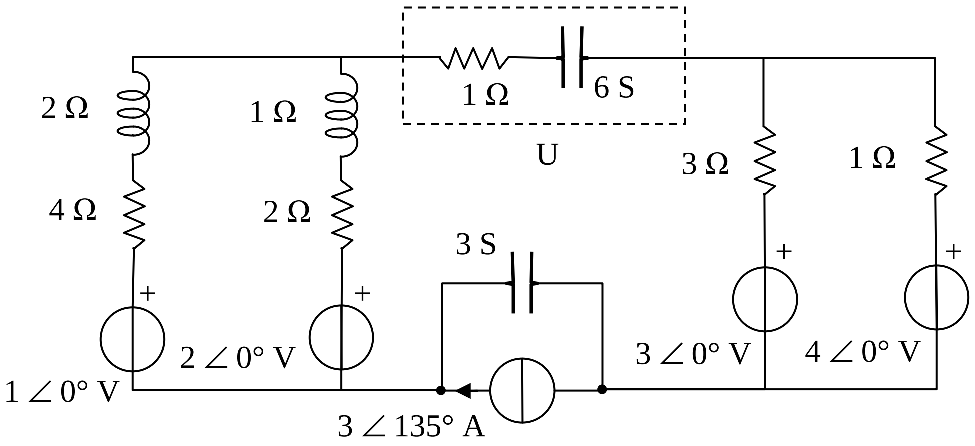
$$\underline{V}_{AB} = \frac{100/6 + (21.7 + 12.5j)/6}{1/6 + 1/6 + 1/6} = 40.6 + 4.17j$$

$\Rightarrow$ $\underline{I}_2 = \underline{V}_{AB}/6 = 6.76 + j0.695$,
$\underline{I}_3 = (100 - \underline{V}_{AB})/6 = 9.91 - j0.694$
$\underline{I}_4 = (\underline{V}_{AB} - 21.7 - 12.5j)/6 = 3.15 - j1.39$

Infine si ha $\underline{I}_6 = \underline{I}_5 - \underline{I}_4 = -1.19 + j5.99$ ed $\underline{I}_7 = \underline{I}_3 + \underline{I}_1 = 15.53 - j9.69$.

Esercizio 9: Calcolare la potenza attiva e la potenza reattiva assorbite dal carico U.

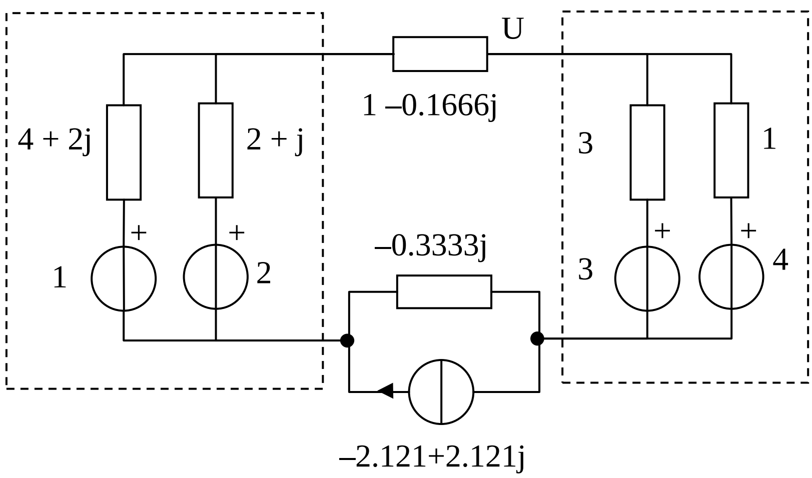
Nota: sullo schema del circuito sono riportati direttamente i valori delle reattanze associate agli induttori (ωL, in Ohm) e delle suscettanze associate ai condensatori (ωC, in Siemens) alla frequenza di funzionamento, ed i fasori delle tensioni impresse (in Volt) e delle correnti impresse (in Ampere) dei generatori indipendenti ($A\angle\alpha = A\,e^{j\alpha}$).



Soluzione:

P_U = 251 mW
Q_U = –42 mVAR

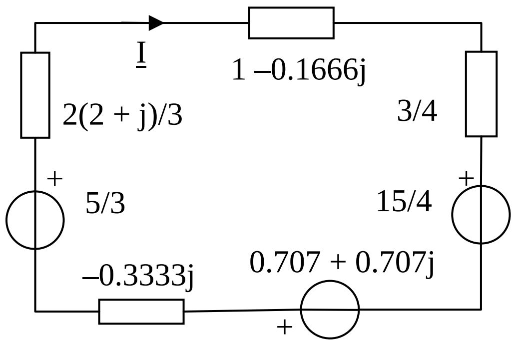
Soluzione: Nel passare al dominio simbolico, l'unica difficoltà è la valutazione del numero complesso rappresentativo della corrente impressa dal generatore di corrente: 135° × (π/180°) = 3π/4, quindi si ha, utilizzando l'identità di Eulero: $\underline{I}_g = 3 \exp(j3\pi/4) = 3 \cos(3\pi/4) + 3j \sin(3\pi/4) = (-3+3j)/\sqrt{2} = -2.121+2.121j$



Dato che viene richiesto soltanto di determinare le potenze assorbite dal bipolo U, si potrebbe determinare l'equivalente (di Thevenin o di Norton) del bipolo collegato ad U. In questo caso però è più semplice utilizzare le equivalenze note. In particolare il bipolo di Norton in basso ed i due bipoli laterali evidenziati (che hanno la stessa struttura) si possono sostituire con i rispettivi bipoli equivalenti di Thevenin.

Il primo caso è ovvio. Nel secondo caso, per definizione, a generatori indipendenti azzerati l'impedenza equivalente si riduce al parallelo delle due impedenze, mentre la tensione a vuoto è determinabile con il teorema di Millman. Effettuate le sostituzioni, il circuito da risolvere è quindi costituito da una sola maglia. Definita la corrente nel verso specificato in figura, il suo valore si determina applicando la LKT alla maglia:

$$(1 - 0.1666j)\,\underline{I} + 0.75\,\underline{I} + 3.75 - (0.7070 + 0.7070j) + (-0.3333j)\,\underline{I} - 1.667 + (1.333 + 0.6667j)\,\underline{I} = 0$$



Da cui $\underline{I} = -0.4326 + 0.2527j$.

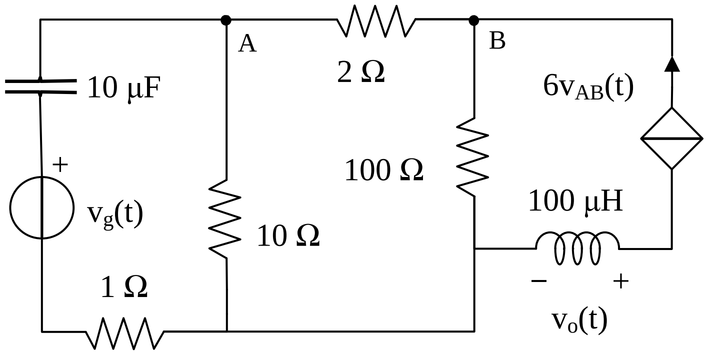
La potenza complessa assorbita da U vale dunque:

$\underline{N}_U = \underline{Z}_U\,|\underline{I}|^2 = (1 - 0.1666j)\,[(0.4326)^2 + (0.2527)^2] = 0.2510 - 0.0418j$

E le potenze attiva e reattiva assorbite da U sono:

$$P_U = 251 \text{ mW}, \quad Q_U = -42 \text{ mVAR}$$

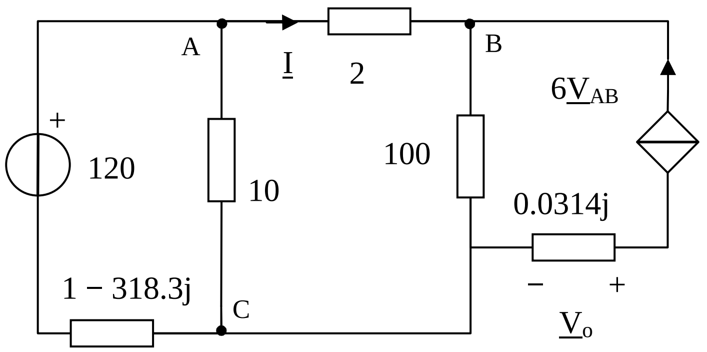
Esercizio 10: Calcolare il valore efficace della tensione $v_o(t)$. Il circuito è alimentato da un generatore di tensione sinusoidale $v_g(t)$ di frequenza 50 Hz e valore efficace 120 V. Si suppone che il circuito sia in regime AC.



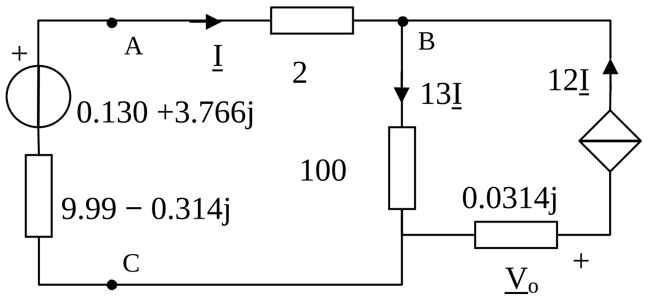
Soluzione:

$V_{o,\,eff.} = 1.08$ mV

Soluzione: La pulsazione è $\omega = 2\pi f = 314.16$ rad/s. Le reattanze sono quindi $X_L = \omega L = 314.16 \times 100 \times 10^{-6} = 0.0314\ \Omega$ ed $X_C = -1/(\omega C) = -1/(314.16 \times 10 \times 10^{-6}) = -318.3\ \Omega$. Il fasore della tensione impressa è $\underline{V}_g = v_{g,eff} \exp(j\ 0) = 120$ Passando al dominio simbolico il circuito si rappresenta come segue (unità SI):



Dato che si è interessati soltanto a determinare $\underline{V}_o$, è possibile sostituire il parallelo tra i nodi A e C con il suo equivalente di Thevenin:
$\underline{Z}_{eq} = 1/(1/10 + 1/(1-318.3j)) =$
$= 9.99 - 0.314j$
$\underline{E}_{eq} = (120/(1-318.3j))/(1/\underline{Z}_{eq}) =$
$= 0.130 + 3.766j$

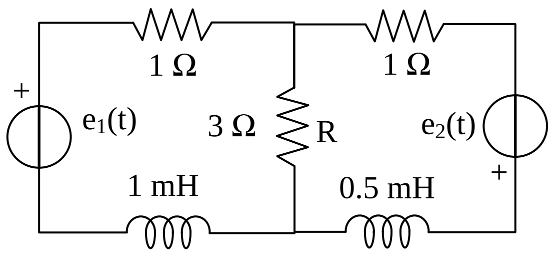


Inoltre, definendo la corrente $\underline{I}$, si ha $\underline{V}_{AB} = 2\underline{I}$, e quindi la corrente impressa dal generatore pilotato è $6\underline{V}_{AB} = 12\underline{I}$. Pertanto la corrente sul ramo centrale (applicando la LKC al nodo B) è $\underline{I} + 12\underline{I} = 13\underline{I}$. La corrente $\underline{I}$ si determina applicando la LKT alla maglia da essa definita:

$0 = (9.99 - 0.314j)\underline{I} - (0.130 + 3.766j) + 2\underline{I} + 100\,(13\underline{I}), \quad \Rightarrow \quad \underline{I} = 9.84 \times 10^{-5} + 2.87 \times 10^{-3}j.$
Infine $\underline{V}_o = -\,0.0314j\,(12\underline{I}) = 1.08 \times 10^{-3} - 3.07 \times 10^{-5}j$. Quindi $v_{o,eff} = |\underline{V}_o| = 1.08$ mV.

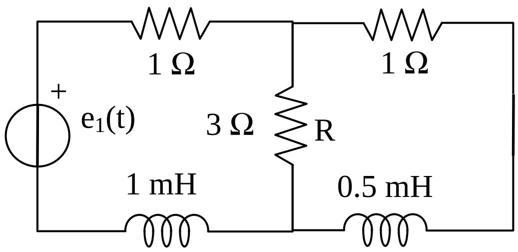
Esercizio 11: Calcolare la potenza istantanea assorbita dal resistore R.

Suggerimento: si utilizzi il principio di sovrapposizione degli effetti. Le reattanze nei due circuiti AC così ottenuti sono diverse; infatti le frequenze delle tensioni sinusoidali impresse dai generatori sono diverse.

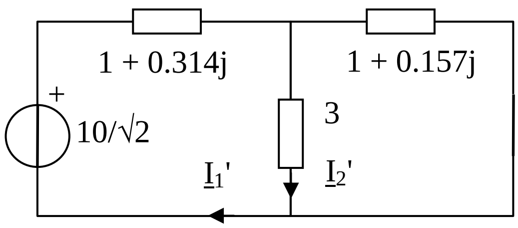


Dati:
$e_1(t) = 10 \cos(\omega t)$ V
$e_2(t) = 10 \cos(2\omega t)$ V
$f = 50$ Hz

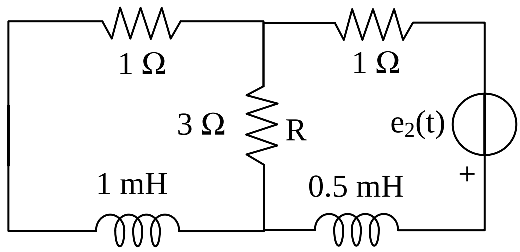
Soluzione: Dato che i generatori hanno tensioni impresse a frequenza diverse il circuito non è in regime sinusoidale, ma in regime periodico (il periodo è il minore tra 1/50 = 20 ms ed 1/100 = 10 ms, ossia T = 10 ms). Tuttavia, se si utilizza la sovrapposizione degli effetti, e quindi si annulla un generatore alla volta, i due circuiti da risolvere sono in regime AC (di conseguenza ogni variabile circuitale è la somma di due grandezze sinusoidali a 50 Hz e a 100 Hz rispettivamente).



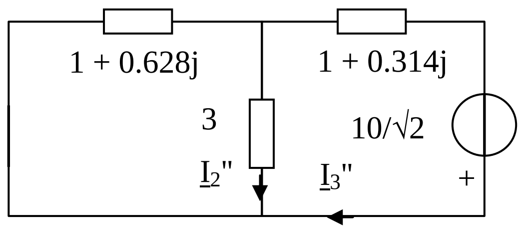
La tensione e_1 è sinusoidale alla frequenza di 50 Hz e il circuito è in regime AC a 50 Hz. Le reattanze sono $X_1 = 2\pi\ 50\ L_1 = 314.16 \times 10^{-3} = 0.314\ \Omega$ e $X_2 = 0.157\ \Omega$. Il circuito equivalente nel dominio simbolico è quindi:



L'impedenza equivalente del parallelo è:
$\underline{Z}_p' = 3(1 +0.157j)/(4 +0.157j) = 0.734 +0.088j$
Questa è in serie all'impedenza 1 +0.314j quindi l'equivalente serie è $\underline{Z}_s' = 1.734 +0.402j$.
Quindi la corrente sul resistore centrale è:
$\underline{I}_2' = \underline{V}_p'/3 = \underline{I}_1'\ \underline{Z}_p'/3 = (\underline{Z}_p'/3)(10/\sqrt{2})/\underline{Z}_s'$
$\underline{I}_2' = 0.988 - 0.108j = 0.994 \exp(-j\ 0.109)$
Tornando al dominio del tempo si ha:
$i_2'(t) = 0.994 \sqrt{2} \cos(\omega t - 0.109)$



La tensione e_2 è sinusoidale a frequenza 100 Hz e il circuito è in regime AC a 100 Hz.. Le reattanze sono $X_1 = 2\pi\ 100\ L_1 = 628.32 \times 10^{-3} = 0.628\ \Omega$ e $X_2 = 0.314\ \Omega$. Il circuito equivalente nel dominio simbolico è quindi:



L'impedenza equivalente del parallelo è:
$\underline{Z}_p'' = 3(1 +0.628j)/(4 +0.628j) = 0.804 +0.345j$
Questa è in serie all'impedenza 1 +0.314j quindi l'equivalente serie è $\underline{Z}_s''= 1.804 +0.659j$.
Quindi la corrente sul resistore centrale è:
$\underline{I}_2'' = \underline{V}_p''/3 = -\ \underline{I}_3''\ \underline{Z}_p/3 = -\ (\underline{Z}_p''/3)(10/\sqrt{2})/\underline{Z}_s''$
$\underline{I}_2'' = -\ (1.072 + 0.059j) = -\ 1.074 \exp(j\ 0.055)$
Tornando al dominio del tempo si ha:
$i_2''(t) = -\ 1.074 \sqrt{2} \cos(2\omega t + 0.055)$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti $i_2(t) = i_2'(t) + i_2''(t)$, pertanto:

$i_2(t) = 0.994 \sqrt{2} \cos(\omega t - 0.109) - 1.074 \sqrt{2} \cos(2\omega t + 0.055)$

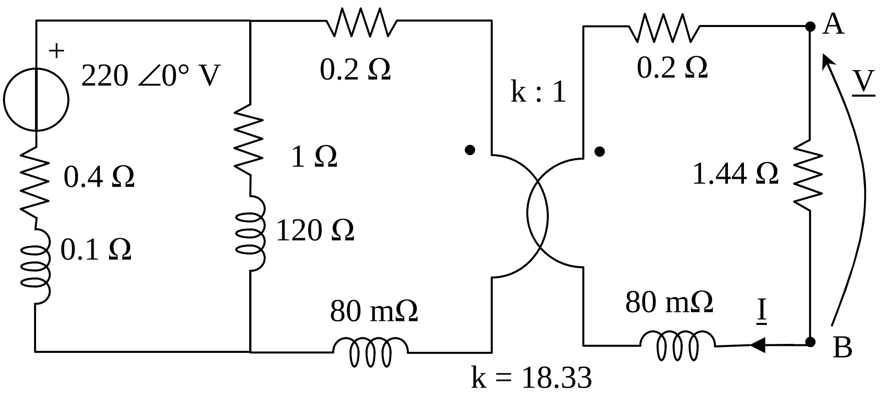
Infine la potenza istantanea assorbita da R è $p(t) = 3(i_2(t))^2$, pertanto:

$p(t) = 5.93 \cos^2 (\omega t - 0.109) + 6.92 \cos^2 (2\omega t + 0.055) - 12.8 \cos (\omega t - 0.109) \cos (2\omega t + 0.055)$

Si noti che la potenza media assorbita da R è pari alla somma delle potenze medie assorbite a 50 Hz e a 100 Hz. Infatti $2 \cos (\omega t - 0.109) \cos (2\omega t + 0.055) = \cos \{(2\omega t + 0.055) + (\omega t - 0.109)\} + \cos \{(2\omega t + 0.055) - (\omega t - 0.109)\} = \cos (3\omega t - 0.054) + \cos (\omega t + 0.164)$ che sono entrambe alternate (e quindi a valore medio nullo). Poiché il valore medio (su 20 ms) di $\cos^2()$ è ½, si ha $\langle p \rangle = 5.93 (½) + 6.92 (½) - 12.8 (0) = 6.43$ W.

Esercizio 12: Determinare valore efficace e fase della tensione tra i terminali A e B del circuito (in regime AC) in figura.

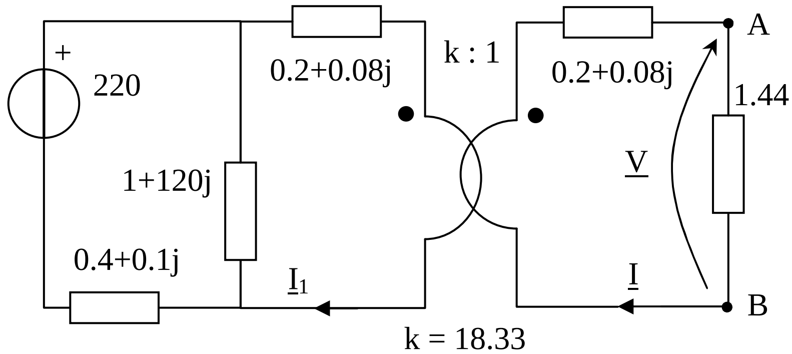
Nota: sullo schema del circuito sono riportati direttamente i valori delle resistenze e delle reattanze associate agli induttori (ωL) e ai condensatori (1/ωC in modulo) alla frequenza di funzionamento, e i numeri complessi rappresentativi (valori efficaci) delle forme d'onda prodotte dai generatori di tensione ($A\angle\alpha = A\,e^{j\alpha}$).
Suggerimento: si può utilizzare la formula per la riduzione del carico dal secondario al primario, oppure il circuito equivalente del trasformatore ideale.



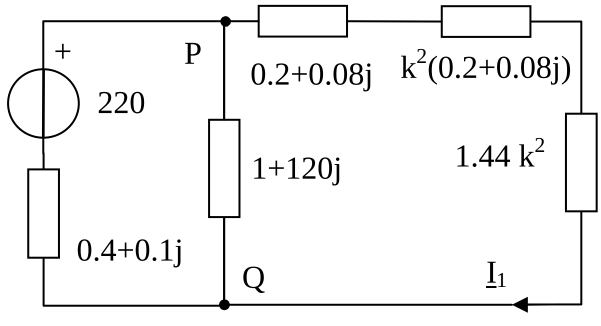
Soluzione:

$\angle \underline{V} = -\,0.046$ rad
$|\underline{V}| = 10.51$ V

Soluzione:
Le reattanze sono assegnate Il numero complesso rappresentativo della tensione impressa dal generatore è $\underline{V}_g = V_{g,eff}\exp(j\angle \underline{V}_g) = 220\exp(j0) = 220$. Passando dal dominio del tempo al dominio simbolico il circuito si rappresenta quindi come segue (tutte le grandezze sono espresse in unità SI):



I terminali A e B sono collegati a una impedenza 1.44+0j. Pertanto, con i versi dati, $\underline{V} = 1.44\underline{I}$. Inoltre le impedenze sul secondario del trasformatore ideale sono in serie e si possono riportare a primario moltiplicando per il quadrato del rapporto di trasformazione (k). Nel circuito equivalente (unità SI) compare quindi la corrente $\underline{I}_1$ sul primario del trasformatore. Con i versi scelti, si ha quindi $\underline{I} = k\,\underline{I}_1$.



Le tre impedenze sul ramo di destra sono in serie e quindi equivalenti ad una sola impedenza di valore:
$0.2+0.08j+(18.33)^2(0.2+0.08j)+(18.33)^2(1.44) =$
$= 551.2+26.96j$
Per determinare $\underline{I}_1$ è sufficiente conoscere la tensione $\underline{V}_{PQ}$, infatti $\underline{I}_1 = \underline{V}_{PQ}/(551.2+26.96j)$.

Per determinare la tensione $\underline{V}_{PQ}$ è possibile utilizzare il Teorema di Millman, da cui:

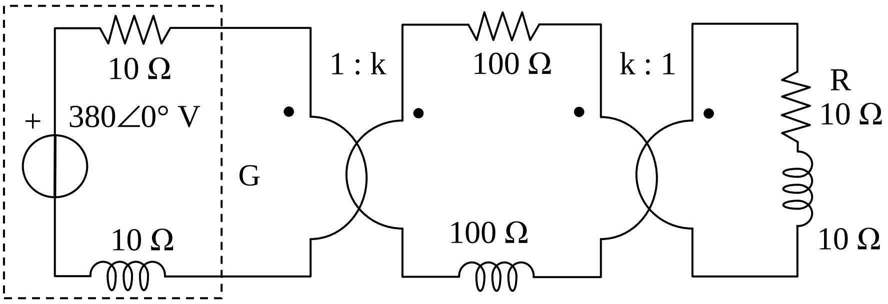
$$\underline{V}_{PQ} = \frac{\dfrac{220}{0.4+0.1j}}{\dfrac{1}{0.4+0.1j}+\dfrac{1}{1+120j}+\dfrac{1}{551.2+26.69j}} = 219.65+0.6975j \quad \Rightarrow \quad \underline{I}_1 = 0.3976-0.018j$$

Quindi I = (18.33)(0.3976–0.018j) = 7.29–0.33j. Il valore efficace di I è per definizione |I| = 7.3 A, mentre la fase, dato che il fasore è nel quarto quadrante, è ∠I = Arctan(–0.018/0.3976) = –0.046 rad (circa –3°). Per la tensione si ha immediatamente |V| = 1.44 |I| = 10.5 V e ∠V =∠I.

Esercizio 13: Calcolare il rapporto tra la potenza dissipata sul resistore R e la potenza attiva erogata dal generatore reale G per k = 1, k= 10 e k = 100. Si suppone che il circuito operi in regime AC.

Nota: sullo schema del circuito sono riportati direttamente i valori delle resistenze e delle reattanze associate agli induttori (ωL) alla frequenza di funzionamento, e i numeri complessi rappresentativi (valori efficaci) delle forme d'onda prodotte dai generatori ($A\angle\alpha = A\, e^{j\alpha}$).

Suggerimento: si può utilizzare la riduzione dal secondario al primario (due volte), oppure il circuito equivalente dei trasformatori ideali.

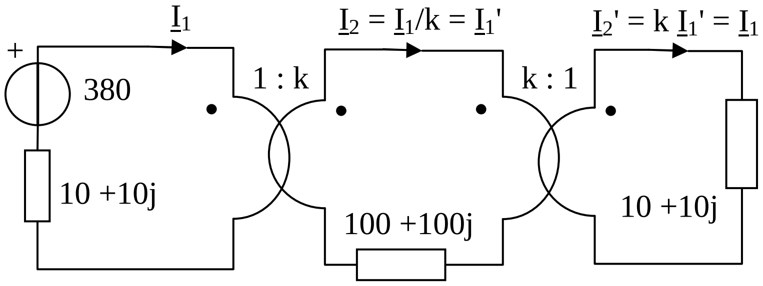


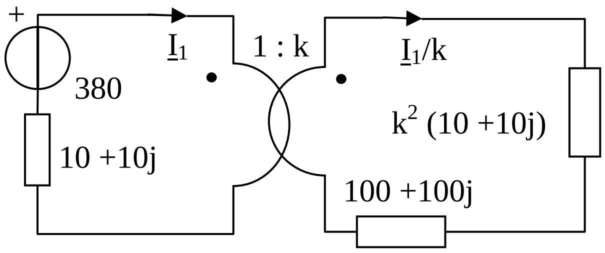
Soluzione (k =1):
$P_R/P_{G(e)}$ = 0.091

Soluzione (k =10):
$P_R/P_{G(e)}$ = 0.909

Soluzione (k =100):
$P_R/P_{G(e)}$ = 0.999

Soluzione: Se si introducono i circuiti equivalenti dei due trasformatori ideali si ottiene un circuito non connesso, costituito da tre maglie. Riconnesso il circuito tramite cortocircuiti, si ottiene un sistema risolvente contenete almeno tre equazioni, sia che si utilizzi il metodo delle tensioni di nodo sia che si utilizzi il metodo delle correnti di maglia. È decisamente più semplice utilizzare la riduzione da secondario a primario per semplificare il circuito.





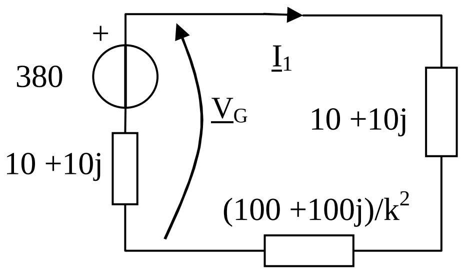
Utilizzando le caratteristiche dei due trasformatori si ha, con i versi indicati in figura per le correnti:

$$\underline{I}_1 = k\,\underline{I}_2 = k\,\underline{I}_1' = k\,(\underline{I}_2'/k) = \underline{I}_2'$$

Quindi, se si indica con $\underline{I}_1$ la corrente circolante sul generatore G, la stessa corrente circola anche sul resistore R. La corrente nella maglia centrale è invece $\underline{I}_1/k$.

L'impedenza (10+10j) a secondario del trasformatore a destra, ridotta a primario, è equivalente ad una impedenza k^2(10+10j), che si trova in serie all'impedenza (100+100j).

Riducendo a primario la serie, cioè moltiplicando per $(1/k)^2$, si ottiene un circuito equivalente costituito da una sola maglia su cui circola, come si è già osservato, la corrente $\underline{I}_1$.



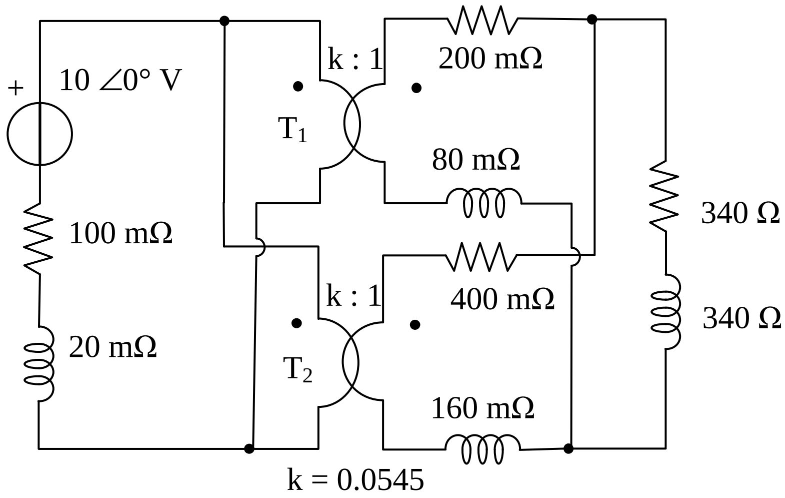
Applicando la LKT a tale maglia si ottiene dunque:

$$\underline{I}_1 = 380/(20+20j + (100+100j)/k^2)$$

La potenza attiva assorbita da R è $P_R = 10\ |\underline{I}_1|^2$. La potenza attiva erogata da G è $P_{G(e)} = \Re[\underline{V}_G \underline{I}_1^*]$ dove $\underline{V}_G = (10+10j + (100+100j)/k^2)\underline{I}_1$. Quindi $P_{G(e)} = (10 +100/k^2)\ |\underline{I}_1|^2$ e risulta $P_R/P_{G(e)} = 1/(1 +10/k^2)$. Infine, sostituendo k = 1, 10 e 100 si ottengono i valori richiesti: 1/11 ≅ 0.091, 1/1.1 ≅ 0.909 e 1/1.001 ≅ 0.999.

Esercizio 14: Determinare le potenze assorbite a primario dai trasformatori e verificare il bilancio delle potenze.

Nota: sullo schema del circuito sono riportati direttamente i valori delle resistenze e delle reattanze associate agli induttori (ωL) e ai condensatori (1/ωC in modulo) alla frequenza di funzionamento, e i numeri complessi rappresentativi delle forme d'onda prodotte dai generatori di tensione ($A\angle\alpha = A\ e^{j\alpha}$).
Suggerimento: si può utilizzare il circuito equivalente del trasformatore ideale.

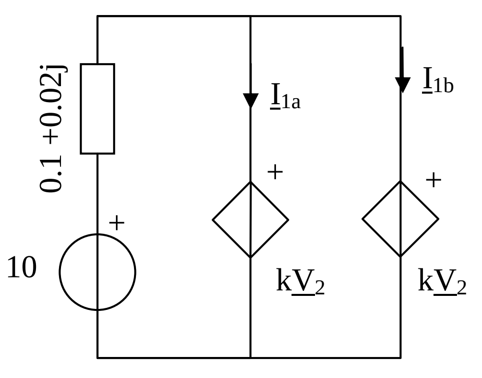


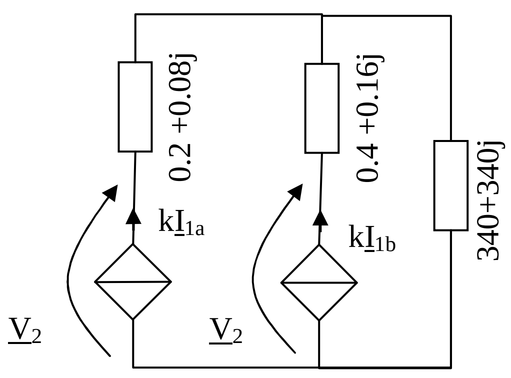
Soluzione:

$\underline{N}_{T1}$ = 29.3 + j 29.3
$\underline{N}_{T2}$ = 14.7 + j 14.7

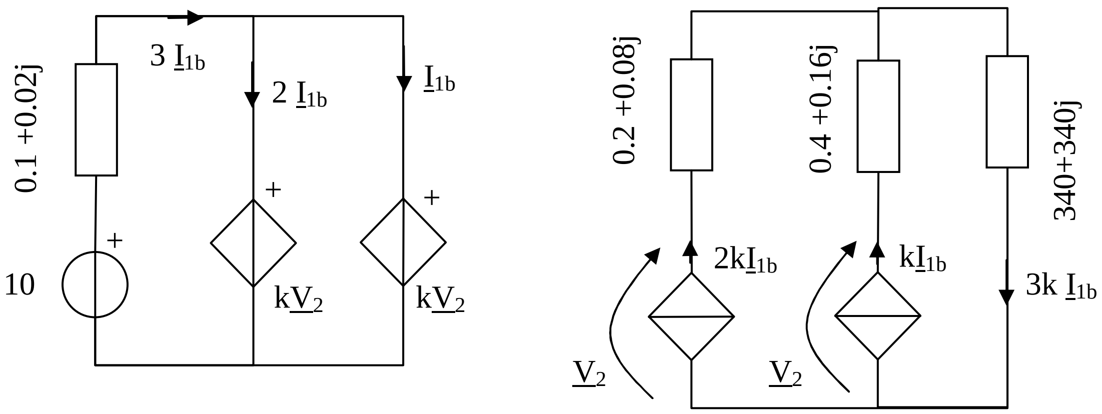
Soluzione:

Passando al dominio simbolico e sostituendo i circuiti equivalenti dei trasformatori ideali, si ottiene il seguente circuito non connesso (i versi di tensioni e correnti sono definiti dai terminali segnati con un punto sui trasformatori). Si noti che nel rappresentare i generatori di tensione si è utilizzata la condizione di parallelismo tra i primari (stessa tensione a primario). Visto che il rapporto di trasformazione è lo stesso, la tensione sarà quindi la stessa anche sui secondari; ed infatti si è utilizzato lo stesso simbolo $\underline{V}_2$ per entrambi.





Si sono indicate le correnti sui primari come $\underline{I}_{1a}$ ed $\underline{I}_{1b}$. Applicando la LKT alla maglia formata dai secondari si ha: $0 = -\underline{V}_2 + (0.2+0.08j)\,\underline{I}_{1a} - (0.4+0.16j)\,\underline{I}_{1b} + \underline{V}_2$. Semplificando si ha: $\underline{I}_{1a} = 2\,\underline{I}_{1b}$. Sostituendo nel circuito ed applicando le LKC ai nodi si ottiene il seguente circuito:



Le variabili circuitali sono quindi $\underline{V}_2$ ed $\underline{I}_{1b}$. Applicando le LKT a due maglie contenenti il generatore ed il carico, rispettivamente, si ha:

$$0 = -10 + (0.1 + 0.02j)\, 3\underline{I}_{1b} + k\underline{V}_2 \quad ; \quad 0 = -\underline{V}_2 + (0.4 + 0.16j)\, k\underline{I}_{1b} + (340 + 340j)\, 3k\underline{I}_{1b}$$

Risolvendo si ha quindi: $\underline{I}_{1b} = 1.614 - 1.497j$, $\underline{V}_2 = 173.0 + 6.457j$; e le potenze assorbite dai primari dei trasformatori sono:

Potenze complesse		Potenza Attiva	Potenza Reattiva
$\underline{N}_{1a} = \underline{V}_1 (\underline{I}_{1a})^* = k\underline{V}_2 (2\underline{I}_{1b})^* = 2\underline{N}_{1b} = 29.38 + 29.36i$	$\Rightarrow$	$P_{1a} = 29.4$ W	$Q_{1a} = 29.4$ VAR
$\underline{N}_{1b} = \underline{V}_1 (\underline{I}_{1b})^* = k\underline{V}_2 (\underline{I}_{1b})^* = 14.69 + 14.68j$	$\Rightarrow$	$P_{1b} = 14.7$ W	$Q_{1b} = 14.7$ VAR

Per quanto riguarda il bilancio delle potenze si possono omettere i trasformatori ideali che complessivamente assorbono potenza nulla (in quanto erogano a secondario la potenza assorbita a primario). Si ha quindi:

Potenze erogate dal generatore

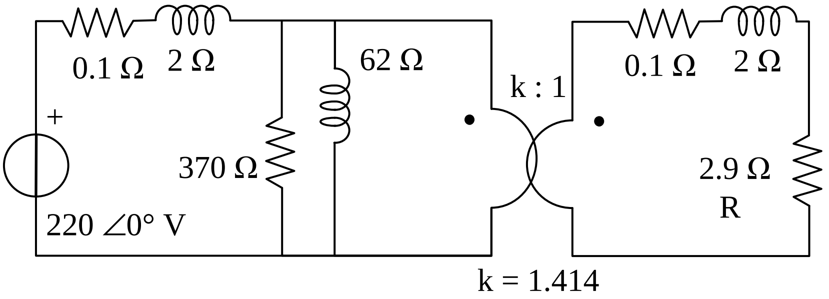
Potenza complessa		Potenza Attiva	Potenza Reattiva
$\underline{N}_g = 10\,(3\underline{I}_{1b})^* = 48.41 + 44.92i$	$\Rightarrow$	$P_g = 48.4$ W	$Q_g = 44.9$ VAR

Potenze assorbite dalle impedenze

Potenza complessa		Potenza Attiva	Potenza Reattiva
$\underline{N}_{Z1} = (0.1 + 0.02j)\, \lvert 3\underline{I}_{1b} \rvert^2 = 4.362 + 0.8723j$	$\Rightarrow$	$P_{Z1} = 4.4$ W	$Q_{Z1} = 0.9$ VAR
$\underline{N}_{Z2a} = (0.2 + 0.08j)\, \lvert 2k\underline{I}_{1b} \rvert^2 = 0.012 + 0.004j$	$\Rightarrow$	$P_{Z2a} = 12$ mW	$Q_{Z2a} = 4$ mVAR
$\underline{N}_{Z2b} = (0.4 + 0.16j)\, \lvert k\underline{I}_{1b} \rvert^2 = 0.006 + 0.002j$	$\Rightarrow$	$P_{Z2b} = 6$ mW	$Q_{Z2b} = 2$ mVAR
$\underline{N}_{ZL} = (340 + 340j)\, \lvert 3k\underline{I}_{1b} \rvert^2 = 44.04 + 44.04j$	$\Rightarrow$	$P_{ZL} = 44$ W	$Q_{ZL} = 44$ VAR

Le potenze (attiva e reattiva) complessivamente assorbite dalle impedenze sono quindi 48.4 W e 44.9 VAR, coincidenti con quelle erogate dal generatore.

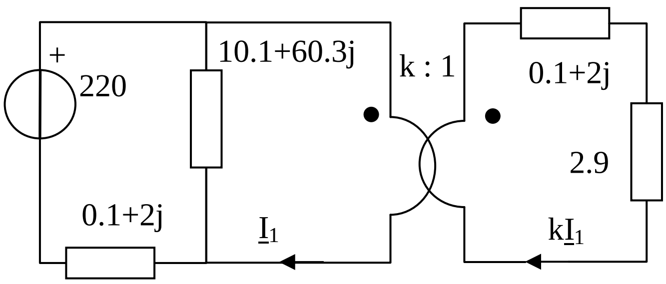
Esercizio 15a: Determinare la potenza attiva P_e erogata dal generatore indipendente di tensione e la potenza attiva P_R assorbita dal resistore R del circuito (in regime AC) in figura.



Soluzione:

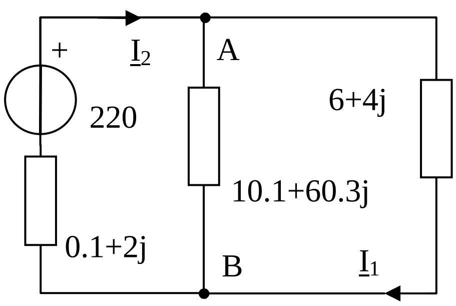
$P_e = 3.92$ kW
$P_R = 3.63$ kW

Soluzione: Le reattanze sono assegnate quindi le impedenze sono immediatamente deducibili. Le due impedenze in parallelo a primario del trasformatore sono equivalenti a $\underline{Z}_p = 370(62j)/(370 + 62j) = 10.1 + 60.3j$ Il numero complesso rappresentativo della tensione impressa dal generatore è $\underline{V}_g = 220 \exp(j0) = 220$. Passando dal dominio del tempo al dominio simbolico il circuito si rappresenta quindi come segue (unità SI):



Le impedenze sul secondario del trasformatore ideale sono in serie e si possono riportare a primario moltiplicando per il quadrato del rapporto di trasformazione ($k^2 \cong 2$). Con i versi scelti, detta $\underline{I}_1$ la corrente sul primario del trasformatore la corrente sul secondario è data da k $\underline{I}_1$. Dunque $P_R = 2.9\,|k\,\underline{I}_1|^2$.

Per determinare $\underline{I}_1$ è sufficiente conoscere la tensione $\underline{V}_{AB}$, infatti $\underline{I}_1 = \underline{V}_{AB}/(6+4j)$. La potenza attiva erogata dal generatore è data da $P_e = \Re[220\ \underline{I}_2^*]$. Anche per determinare $\underline{I}_2$ è sufficiente conoscere la tensione $\underline{V}_{AB}$, infatti $\underline{I}_2 = (220 - \underline{V}_{AB})/(0.1+2j)$.

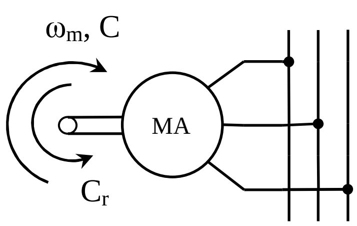


Per determinare la tensione $\underline{V}_{AB}$ è possibile utilizzare il Teorema di Millman, da cui:

$$\underline{V}_{AB} = \frac{220/(0.1+2j)}{\frac{1}{0.1+2j}+\frac{1}{10.1+60.3j}+\frac{1}{6+4j}} = 177.3 - 33.6j$$

Quindi $\underline{I}_1 = 17.9 - 17.5j$, $\underline{I}_2 = 17.8 - 20.5j$, e infine $P_R = 3.63$ kW e $P_e = 3.92$ kW.

Esercizio 15b: Il circuito in 15a rappresenta il circuito equivalente di una fase di una Macchina Asincrona trifase a 4 poli alimentata a 50 Hz da una rete trifase in AC. Valutare il rendimento η, lo scorrimento s, numero di giri n dell'albero e la coppia motrice C.



Soluzione: p = 2 (numero di coppie di poli), quindi la velocità di rotazione del campo è: $\omega_c = \omega/p = 2\pi\ 50/2 = 157$ rad/s (ovvero $n_c = (60/2\pi)\ \omega_c = 1500$ rpm). Lo scorrimento si può dedurre dalla relazione $R = R_2\,(1 - s)/s$ dove la resistenza della fase rotorica è (dal circuito) $R_2 = 0.1\ \Omega$. Quindi $2.9 = 0.1(1/s - 1)$, ovvero $s = 1/30$ (o, in percentuale, 3.3 %) Il numero di giri dell'albero è quindi $n = n_c\,(1 - s) = 1450$ rpm (ovvero $\omega_m = (2\pi/60)\ n = 151.8$ rad/s) La coppia motrice si determina dal bilancio di potenza: $C\,\omega_m = 3P_R$ da cui C = 71.8 Nm. Infine il rendimento è $\eta = (3P_R)/(3P_e) = 92.6$ %.