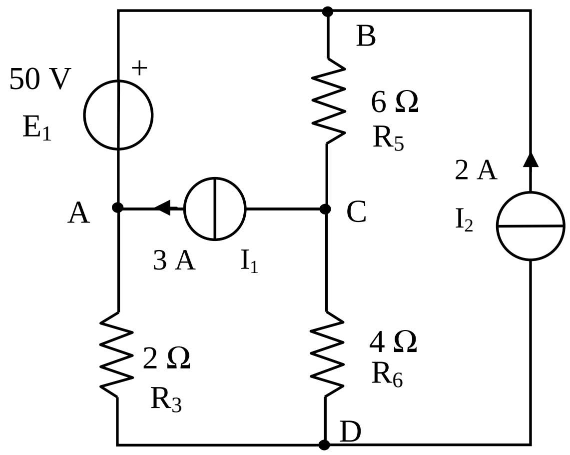
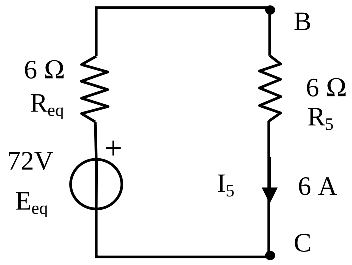
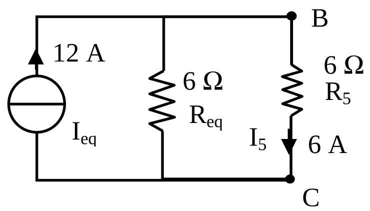
Esercizi sulle reti elettriche in corrente continua (parte 2)

Esercizio 13: Determinare gli equivalenti di Thevenin e di Norton del bipolo complementare al resistore R_5 nel circuito in figura e calcolare la corrente che circola attraverso il resistore R_5

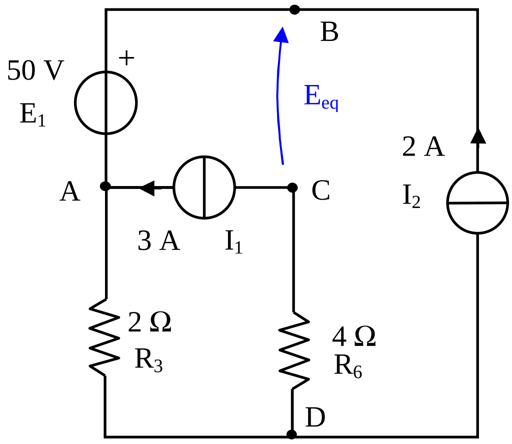


Soluzioni:





Soluzione:

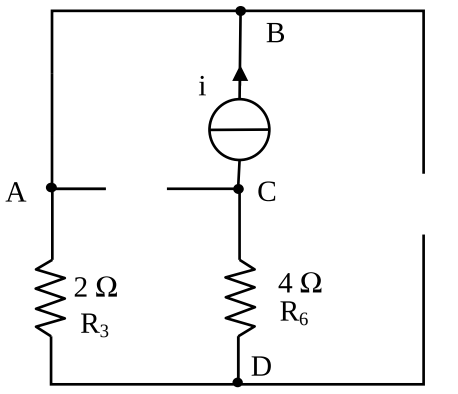


Il bipolo lineare di cui trovare l'equivalente di Thevenin è illustrato in figura. I terminali del bipolo sono B e C.

Per definizione, $E_{eq} = V_{BC}$ a vuoto, cioè supponendo che il bipolo sia collegato ad un circuito aperto. In tali condizioni le correnti sui rami ABD ad ACD sono definite dai generatori di corrente indipendenti. La corrente sul ramo AD si deduce applicando la LKC al nodo A (oppure D): $I_3 = I_1 + I_2 = 5A$. Applicando la LKT alla maglia BADCB si ha quindi:

$$0 = -V_{BC} + 50 + 2\, I_3 + 4\, I_1$$

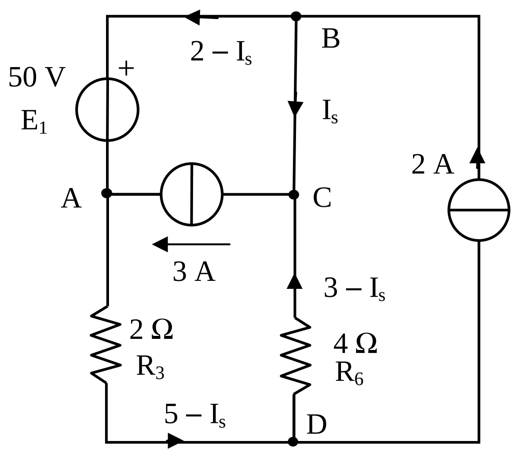
da cui $V_{BC} = 72$ V, e dunque $E_{eq} = 72$ V.



Per definizione, $R_{eq} = V_{BC} / i$ con i generatori indipendenti azzerati (dove i è la corrente circolante nel bipolo con il verso di riferimento associato alla tensione V_{BC}, e dunque entrante in B ed uscente da C). Nel circuito a sinistra si sono quindi spenti i generatori indipendenti ($E_1 = 0$, equivalente ad un cortocircuito, $I_2 = I_3 = 0$, equivalenti a circuiti aperti) e si sono collegati i terminali B e C ad un generatore di corrente esterno a corrente impressa i. Il circuito contiene la sola maglia BADCB. Applicando la LKT alla maglia si ha quindi: $0 = -V_{BC} + 2\, i + 4\, i$

da cui $V_{BC} = 6i$, e dunque $R_{eq} = 6\ \Omega$.

Per quanto riguarda la determinazione del bipolo di Norton, il calcolo della resistenza equivalente è essenzialmente lo stesso (anche se, per rispettare le ipotesi del Teorema di Norton si dovrebbero collegare i terminali B e C ad un generatore di tensione esterno a tensione impressa v, determinare la corrente che circola attraverso il bipolo e infine determinare la resistenza equivalente come rapporto tensione/corrente)

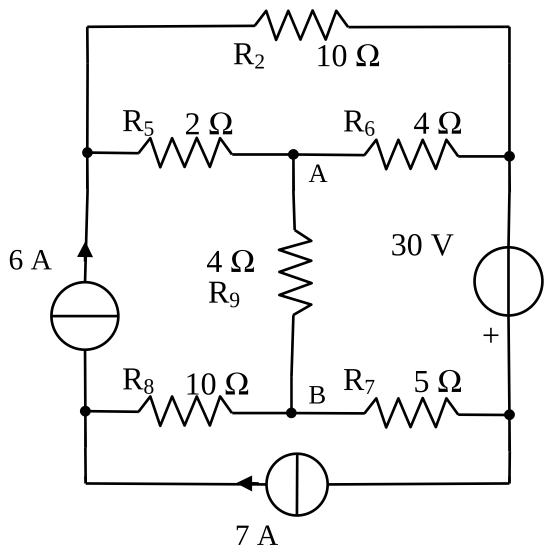


Infine, per definizione, I_{eq} è uguale alla corrente di cortocircuito, cioè supponendo che il bipolo sia collegato ad un cortocircuito (il verso con cui calcolare tale corrente è definito dal verso della corrente impressa nel bipolo di Norton). In tale condizione (vedi circuito a sinistra), detta I_s la corrente di cortocircuito, le correnti su tutti i rami sono definite applicando le LKC ai nodi. La corrente I_s si deduce applicando la LKT alla maglia definita da I_s (BCDAB). Si ha quindi:

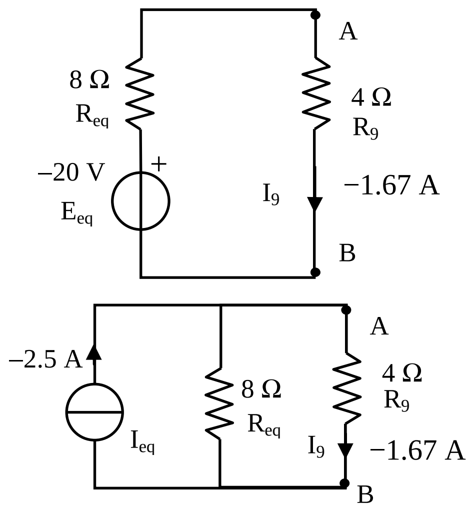
$0 = -4(3- I_s) -2(5- I_s) -50 = -72 + 6I_s$.

Quindi $I_s = 12A = I_{eq}$

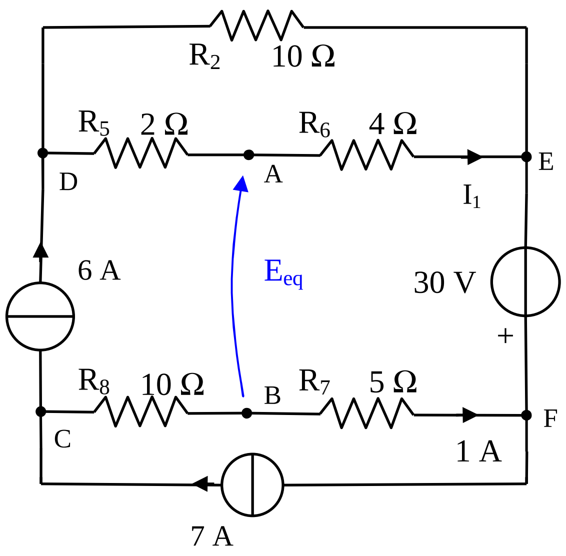
Esercizio 14: Determinare gli equivalenti di Norton e di Thevenin del bipolo complementare al resistore R_9 nel circuito in figura e calcolare la corrente che circola attraverso il resistore R_9



Soluzioni:



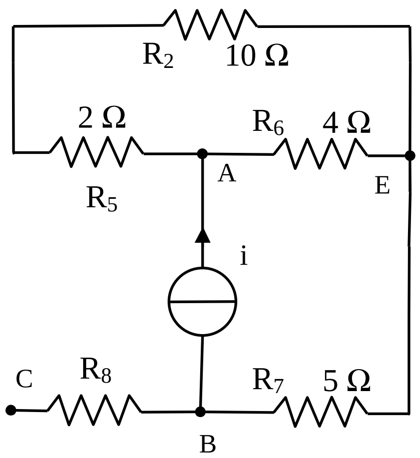
Soluzione:



Il bipolo lineare di cui trovare l'equivalente di Thevenin è illustrato in figura. I terminali del bipolo sono A e B. Per definizione, $E_{eq} = V_{AB}$ a vuoto, cioè supponendo che il bipolo sia collegato ad un circuito aperto. La corrente sulla serie tra R_7 ed R_8 si ottiene applicando la LKC al nodo C. La corrente sulla serie tra R_5 ed R_6 ($R_s = 2 + 4 = 6\ \Omega$) si ottiene dalla caratteristica $I_1 = V_{DE}/6$. Poiché R_s è in parallelo ad R_2 ($R_p = 10×6/(10 + 6) = 3.75\ \Omega$) e sul parallelo scorre la corrente di 6 A impressa da generatore di corrente, si ha $V_{DE} = R_p\, 6$. Pertanto $I_1 = 3.75$ A. Infine la tensione equivalente si trova applicando la LKT alla sequenza chiusa (BFEAB):

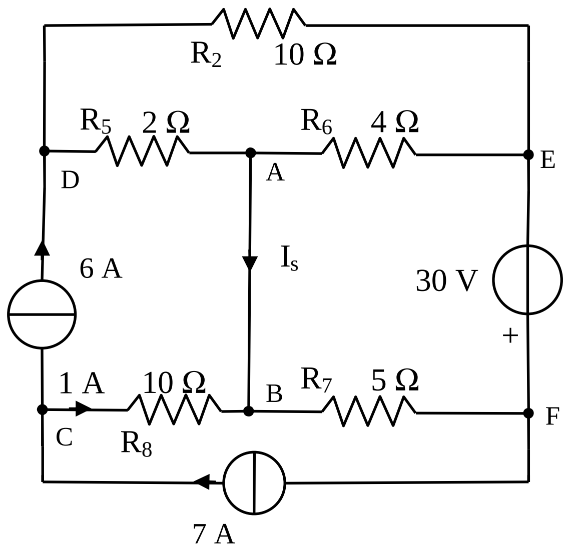
$$0 = 5×1 + 30 - 4\, I_1 + V_{AB}$$

Quindi $V_{AB} = -20\ V = E_{eq}$



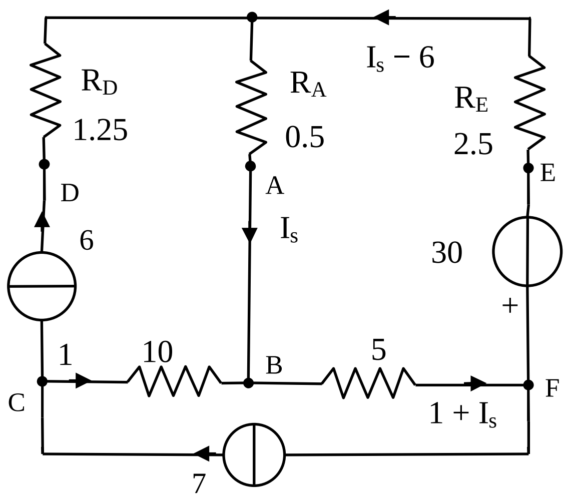
Per definizione, $R_{eq} = V_{AB} / i$ con i generatori indipendenti azzerati (dove i è la corrente circolante nel bipolo con il verso di riferimento associato alla tensione V_{AB}, e dunque entrante in A ed uscente da B). Nel circuito a sinistra si sono quindi spenti i generatori indipendenti e si sono collegati i terminali A e B ad un generatore di corrente esterno a corrente impressa i. Il nodo C è isolato (non è collegato a nessun altro terminale), quindi R_8 è percorso da corrente nulla (LKC al nodo C). I resistori R_5 ed R_2 sono in serie ($R_s = 2 + 10 = 12\ \Omega$). Poiché tale serie è collegata ai terminali A ed E, essa è in parallelo ad R_6 ($R_p = 12\times4/(12 + 4) = 3\ \Omega$). La serie tra i resistori R_p ed R_7 è collegata ai terminali A e B per cui $V_{AB} = (3 + 5)$ i, e dunque $R_{eq} = 8\ \Omega$.

Per quanto riguarda la determinazione del bipolo di Norton, il calcolo della resistenza equivalente è essenzialmente lo stesso (anche se, per rispettare le ipotesi del Teorema di Norton si dovrebbero collegare i terminali A e B ad un generatore di tensione).



La corrente di cortocircuito (la corrente impressa dal generatore di corrente nel bipolo di Norton) è già determinabile utilizzando l'equivalenza tra le due forme del generatore reale: $I_{eq} = E_{eq} / R_{eq} = -20/8 = -2.5$ A.

Se invece si utilizza la definizione, I_{eq} è uguale alla corrente di cortocircuito, cioè supponendo che il bipolo sia collegato ad un cortocircuito (il verso con cui calcolare tale corrente è definito dal verso della corrente impressa nel bipolo di Norton). In tale condizione (vedi circuito a sinistra), detta I_s la corrente di cortocircuito, il resistore R_8 è percorso da una corrente da 1 A (LKC al nodo C).



Si può trasformare il triangolo di resistori collegati ai terminali D, A e E. Le resistenze equivalenti sono date da:

$R_D = 10\times2/(10+2+4) = 1.25\ \Omega$

$R_A = 2\times4/(10+2+4) = 0.5\ \Omega$

$R_E = 10\times4/(10+2+4) = 2.5\ \Omega$

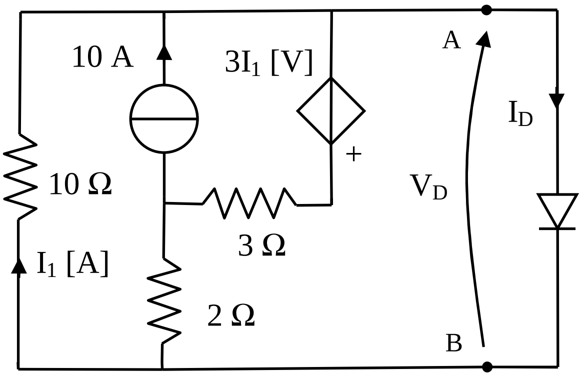
Le correnti su tutti i rami sono definite applicando le LKC ai nodi. La corrente I_s si deduce applicando la LKT alla maglia definita da I_s (BCDAB). Si ha quindi:

$0 = 0.5I_s + 5(1 + I_s) + 30 + 2.5(I_s - 6) = 20 + 8I_s$.

Quindi $I_s = -20/8 = -2.5\ \text{A} = I_{eq}$

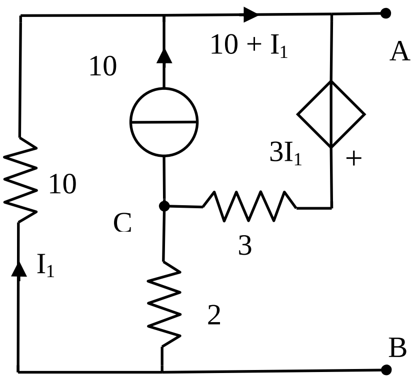
Esercizio 15: Determinare tensione e corrente alla porta AB del circuito in figura.

Suggerimento: utilizzare il circuito equivalente di Thevenin (o di Norton) del circuito a sinistra della porta AB.



Soluzione:
$V_D = 0$ V
$I_D = 6$ A

Soluzione:

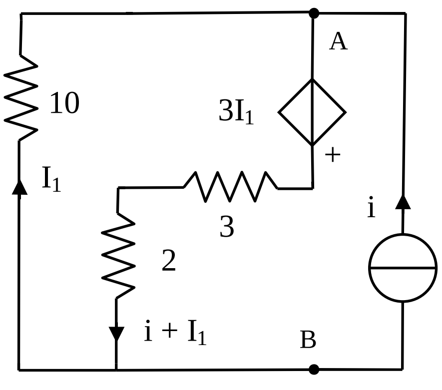


Il bipolo lineare di cui trovare l'equivalente di Thevenin è illustrato in figura (unità SI). I terminali del bipolo sono A e B. Per definizione, $E_{eq} = V_{AB}$ a vuoto. La corrente sul ramo contenente il generatore pilotato si deduce applicando la LKC al nodo C e, col verso scelto, è pari a $10 + I_1$. La tensione V_{AB} è la tensione ai terminali del resistore da 10 Ω e dunque $V_{AB} = -10\ I_1$. La corrente I_1 si deduce applicando la LKT alla maglia definita da I_1:

$$0 = -3\ I_1 + 3\ (10 + I_1) + 2\ I_1 + 10\ I_1$$

da cui $I_1 = -2.5$ A, e dunque $E_{eq} = 25$ V.

Per definizione, $R_{eq} = V_{AB}/i$ con i generatori indipendenti azzerati (dove i è la corrente circolante nel bipolo con il verso di riferimento associato alla tensione V_{AB}, e dunque entrante in A).



Nel circuito a sinistra si è quindi spento il generatore indipendente e si sono collegati i terminali A e B ad un generatore di corrente esterno a corrente impressa i. La corrente sul ramo contenente il generatore pilotato si deduce applicando la LKC al nodo A. Applicando la LKT alle due maglie del circuito si ha quindi:

$$0 = -V_{AB} - 3\ I_1 + 5\ (i + I_1)$$

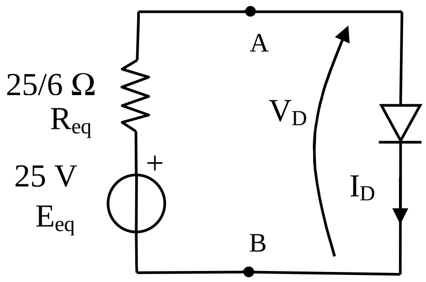
$$0 = 10\ I_1 - 3\ I_1 + 5\ (i + I_1)$$

da cui, supponendo nota la corrente i, si deduce

$$I_1 = -(5/12)\ i$$

$$V_{AB} = (25/6)\ i,$$

e dunque $R_{eq} = V_{AB}/i = 25/6$ Ω

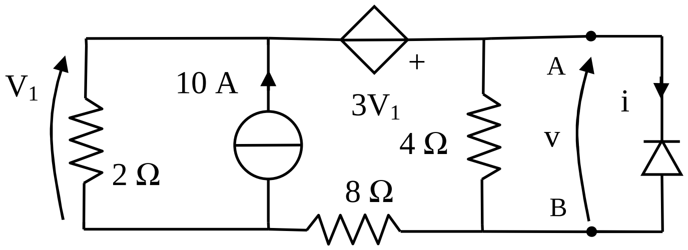


Sostituendo l'equivalente di Thevenin nel circuito iniziale si ha il circuito a sinistra, la cui soluzione è immediata se si considera che il diodo ideale, con i versi di riferimento scelti, è equivalente a:

- un circuito aperto se $V_D < 0$. (In tal caso $I_D = 0$ ma $V_D = 25$ V che è positiva e quindi inaccettabile).
- un cortocircuito se $I_D > 0$. (In tal caso $V_D = 0$ e la LKT sulla maglia fornisce $0 = -25 + (25/6)\ I_D$, da cui $I_D = 6$ A, che quindi è la soluzione cercata)

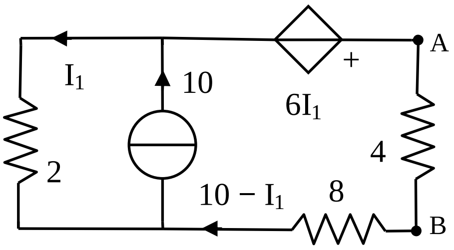
Esercizio 16: Determinare tensione e corrente alla porta AB del circuito in figura.

Suggerimento: utilizzare il circuito equivalente di Thevenin (o di Norton) del circuito a sinistra della porta AB. Attenzione: i versi di tensione e corrente indicati in figura sono opposti a quelli solitamente utilizzati per definire la caratteristica tensione-corrente del diodo.



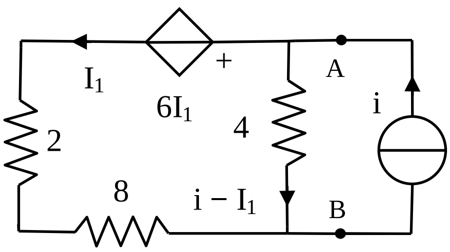
Soluzione:
$i = 0$ A
$v = 16$ V

Soluzione:



La figura a lato mostra il bipolo a vuoto. Si è utilizzata la caratteristica del resistore da 2 Ω per cambiare la variabile pilota del generatore pilotato: $V_1 = 2\ I_1$ quindi $3V_1 = 6\ I_1$. La corrente circolante sul ramo di destra si ottiene applicando la LKC ad uno dei terminali del generatore di corrente. La corrente I_1 si determina applicando la LKT alla maglia definita da I_1: $0 = 2\ I_1 - (8 + 4)(10 - I_1) + 6\ I_1$.
$I_1 = 120/20 = 6$ A, da cui $V_{AB} = 4(10 - I_1) = 16\ V = E_{eq}$

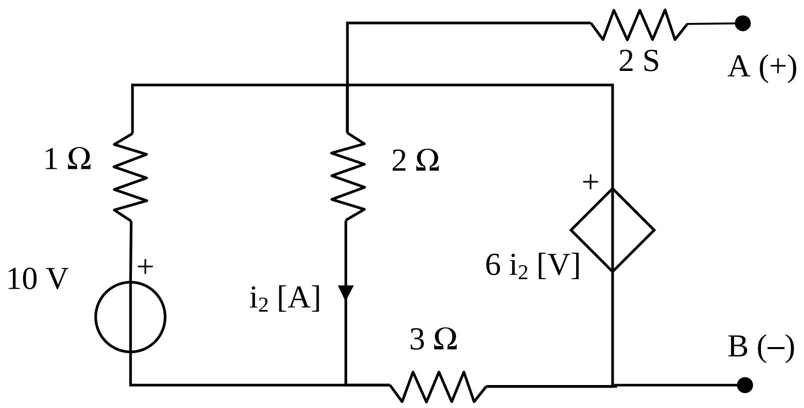
Questo è già sufficiente a determinare la soluzione del problema. Infatti la tensione tra anodo e catodo a vuoto è negativa ($V_{BA} = -16$ V), quindi il diodo è interdetto e la corrente è nulla.



In ogni caso, per determinare la resistenza equivalente del bipolo di Thevenin, si ha $R_{eq} = V_{AB}\ /i$ con i generatori indipendenti azzerati. Nel circuito a sinistra si è quindi spento il generatore indipendente e si sono collegati i terminali A e B ad un generatore di corrente esterno a corrente impressa i. La corrente circolante sul ramo centrale si ottiene applicando la LKC ad uno dei suoi terminali.

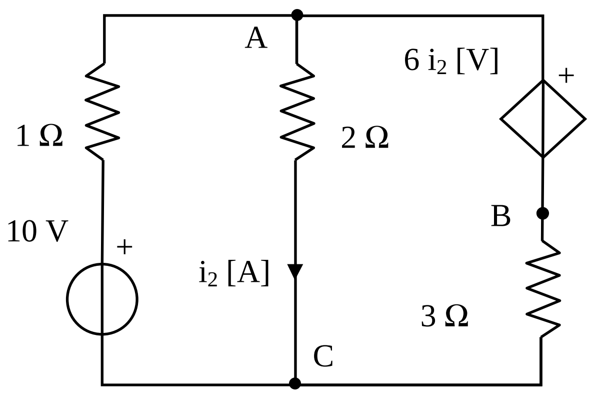
La corrente I_1 (in funzione di i, che si suppone nota) si determina applicando la LKT alla maglia definita da I_1: $0 = 6\ I_1 + (2 + 8)\ I_1 - 4(i - I_1)$. Quindi $I_1 = 4i/20 = i/5$, da cui $V_{AB} = 4(i - I_1) = 16i/5$. Pertanto $R_{eq} = V_{AB}\ /i = 16/5 = 3.2$ Ω.

Esercizio 17: Determinare l'equivalente di Thevenin del bipolo in figura.



Soluzione:
$R_{eq} = 0.5$ Ω
$E_{eq} = 36$ V

Soluzione:

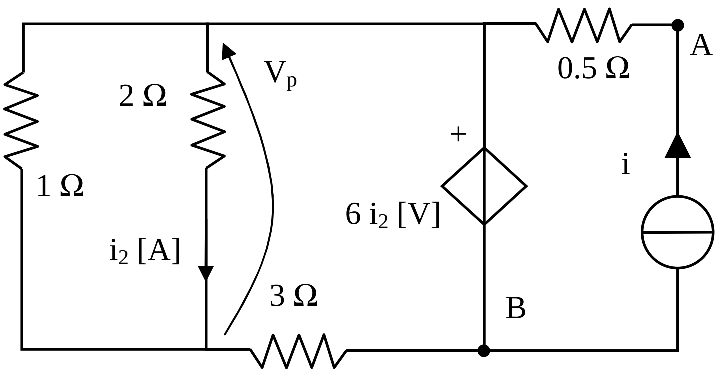


Per definizione, $E_{eq} = V_{AB}$ a vuoto (i terminali A e B sono collegati da un circuito aperto). Si può quindi risolvere il circuito a sinistra. Applicando il teorema di Millman si ha:

$$V_{AC} = \frac{\frac{10}{1} + \frac{0}{2} + \frac{6i_2}{3}}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{12}{11}\left(5 + i_2\right)$$

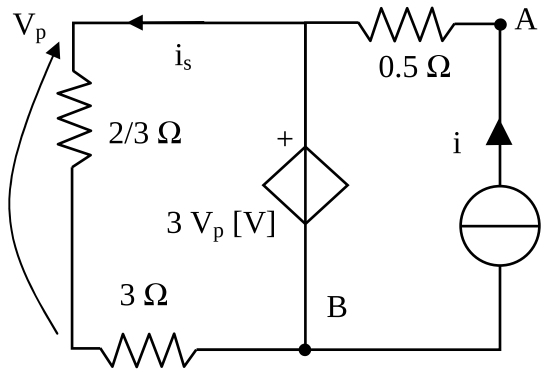
Inoltre la caratteristica del resistore sul ramo centrale fornisce: $V_{AC} = 2i_2$

Sostituendo e risolvendo si ha: $i_2 = 6$ A. Quindi, la tensione $V_{AB} = 6\ i_2 = 36$ V $= E_{eq}$.

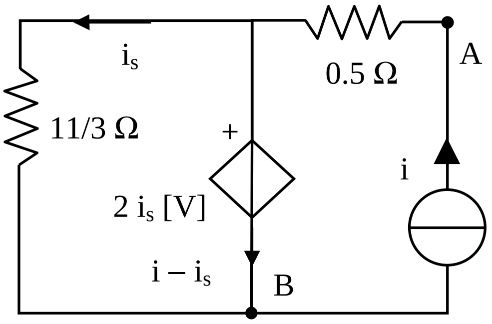


Per definizione, $R_{eq} = V_{AB}/i$ con i generatori indipendenti azzerati (dove i è la corrente circolante nel bipolo con il verso di riferimento associato alla tensione V_{AB}, e dunque entrante in A ed uscente da B). Nel circuito a sinistra si è quindi spento il generatore indipendente e si sono collegati i terminali A e B ad un generatore di corrente esterno a corrente impressa i.

I resistori da 1 e 2 Ω sono in parallelo (stessi terminali). Prima di sostituirli con un resistore equivalente (resistenza 2/3 Ω) si noti che è necessario esprimere la variabile pilota i_2 in termini di una variabile circuitale che sia presente nel circuito dopo la sostituzione (altrimenti la tensione impressa dal generatore pilotato non sarebbe calcolabile). In questo caso $i_2 = V_p/2$, quindi la tensione impressa dal generatore pilotato è $6\ i_2 = 3V_p$.



Nel circuito semplificato i due resistori a sinistra sono in serie (sono percorsi dalla stessa corrente i_s). Prima di sostituirli con un resistore equivalente (resistenza 11/3 Ω) si noti che è necessario esprimere la variabile pilota V_p in termini di una variabile circuitale che sia presente nel circuito dopo la sostituzione (altrimenti la tensione impressa dal generatore pilotato non sarebbe calcolabile). In questo caso $V_p = (2/3)\ i_s$, quindi la tensione impressa dal generatore pilotato è $3V_p = 2i_s$.



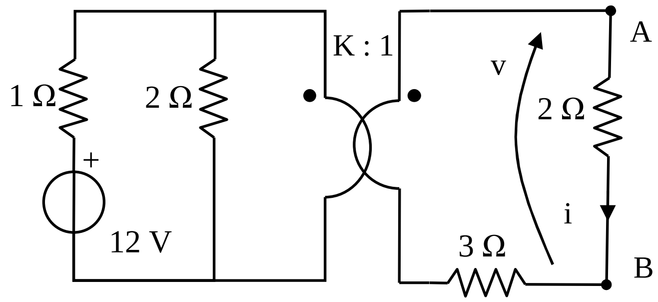
Applicando la LKC al nodo B si ottiene quindi la corrente sul ramo centrale.

Applicando la LKT alla maglia a sinistra si ottiene: $(11/3)i_s - 2i_s = 0$. Quindi: $i_s = 0$

Infine: $R_{eq} = V_{AB}/i = (0.5i+2i_s)/i = 0.5\ \Omega$

Esercizio 18: Determinare la tensione e la corrente tra i terminali A e B del circuito in figura con K = 1, K = 10 e K = 100.

Suggerimento: si può utilizzare il circuito equivalente del trasformatore ideale, oppure la formula per la riduzione del carico dal secondario al primario.

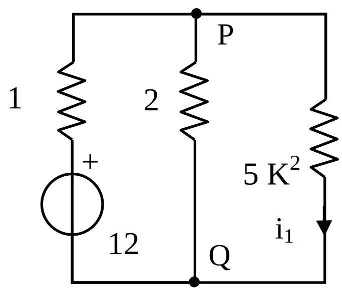


Soluzione (K = 1):
i = 1.412 A; v = 2.824 V

Soluzione (K = 10):
i = 159.8 mA; v = 319.6 mV

Soluzione (K = 100):
i = 16 mA; v = 32 mV

Soluzione: I terminali A e B sono collegati a un resistore da 2 Ω. Pertanto, con i versi dati, v = 2i. Inoltre i resistori sul secondario del trasformatore ideale sono in serie e si possono riportare a primario moltiplicando per il quadrato del rapporto di trasformazione (K). Nel circuito equivalente a sinistra (unità SI) compare quindi la corrente i_1 sul primario del trasformatore. Con i versi scelti, si ha quindi $i = Ki_1$.



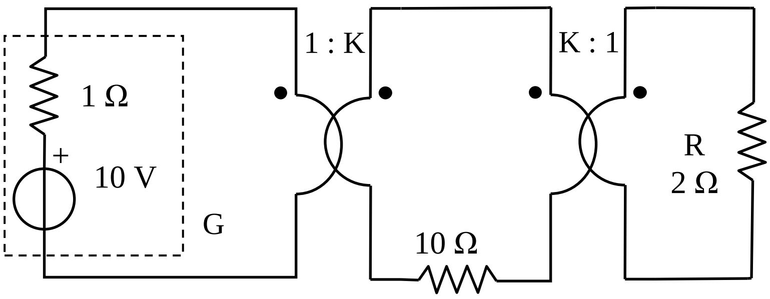
Per determinare i_1 è sufficiente conoscere la tensione V_{PQ}, infatti $i_1 = V_{PQ}/(5K^2)$. Per determinare la tensione V_{PQ} è possibile utilizzare il Teorema di Millman, da cui:

$$V_{PQ} = \frac{12}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{5K^2}} \quad \Rightarrow \quad i_1 = \frac{12}{\frac{15K^2}{2}+1} \quad \Rightarrow \quad i = \frac{24K}{15K^2+2}$$

Sostituendo i valori K = 1, 10, 100, si ottengono le correnti richieste (in A).

Esercizio 19: Determinare la potenza assorbita dal resistore R e la potenza erogata dal generatore reale G (nei casi K = 1, K = 10 e K = 100).

Suggerimento: si può utilizzare il circuito equivalente dei trasformatore ideali, oppure la formula per la riduzione del carico dal secondario al primario (due volte).

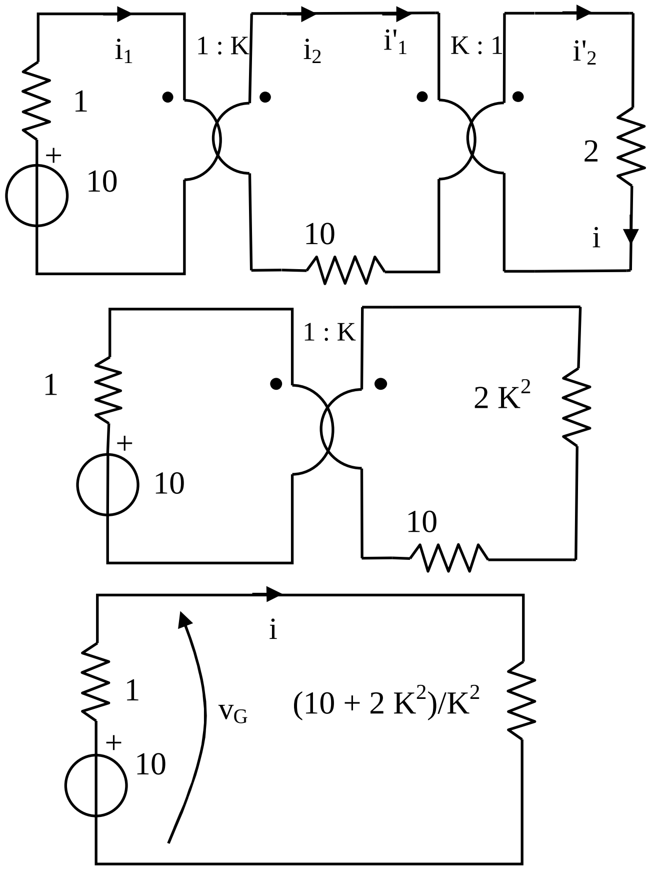


Soluzione (K = 1):
$p_R = 1.183$ W, $p_{G(e)} = 7.101$ W

Soluzione (K = 10):
$p_R = 20.81$ W, $p_{G(e)} = 21.85$ W

Soluzione (K = 100):
$p_R = 22.21$ W, $p_{G(e)} = 22.22$ W

Soluzione: Se si introducono i circuiti equivalenti dei due trasformatori ideali si ottiene un circuito non connesso, costituito da tre maglie. Riconnesso il circuito tramite cortocircuiti, si ottiene un sistema risolvente contenete almeno tre equazioni, sia che si utilizzi il metodo delle tensioni di nodo sia che si utilizzi il metodo delle correnti di maglia. È decisamente più semplice utilizzare la riduzione da secondario a primario per semplificare il circuito.



Utilizzando le caratteristiche dei due trasformatori si ha, con i versi indicati in figura per le correnti:

$$i_1 = K\ i_2 = K\ i'_1 = K\ (i'_2/K) = i'_2$$

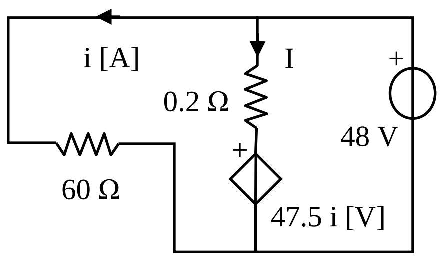
Quindi, se si indica con i la corrente circolante sul resistore R, la stessa corrente circola anche sul generatore G. La corrente nella maglia centrale è invece i/K.

Il resistore da 2 Ω, ridotto a primario, è equivalente ad un resistore con resistenza $2K^2$, che si trova in serie al resistore da 10 Ω. Sommando e riducendo a primario, cioè moltiplicando per $(1/K)^2$, si ottiene un circuito equivalente costituito da una sola maglia su cui circola, come si è già osservato, la corrente i. Applicando la LKT a tale maglia si ottiene dunque:

$$i = 10/(3 + 10/K^2)$$

La potenza assorbita da R è $p_R = 2\ i^2$. La potenza erogata da G è $p_{G(e)} = i\ v_G = i(10 - i)$. Sostituendo i valori K = 1, 10, 100, si ottengono le potenze richieste (in W).

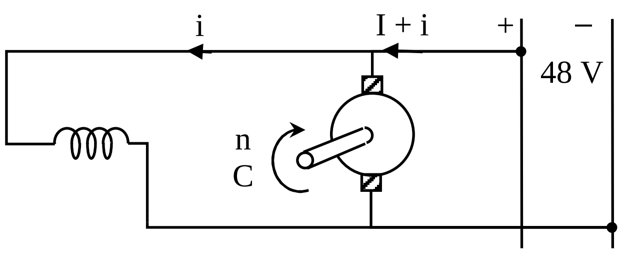
Esercizio 20a: Determinare il valore delle correnti i e I del circuito in figura, la potenza P_e erogata dal generatore indipendente e la potenza P_u assorbita dal generatore pilotato.



Soluzione: i = 0.8 A, I = 50 A, P_e = 2.44 kW, P_u = 1.90 kW

Soluzione: La soluzione è immediata se si nota che il resistore da 60 Ω è soggetto alla tensione impressa da generatore di tensione indipendente. Quindi, tramite la caratteristica del resistore, si ottiene i = 48/60 = 0.8 A. La tensione impressa dal generatore pilotato diventa quindi 47.5 i = 38 V. Quindi, dalla la caratteristica del ramo centrale, si ottiene 48 = 0.2 I +38 e quindi I = 50 A.
Infine, la corrente sul generatore indipendente si ottiene applicando la LKC ad uno dei terminali del generatore stesso: I + i = 50.8 A (circolante dal terminale negativo a quello positivo del generatore). Le potenze richieste sono quindi P_e = 48(I + i) = 2.44 kW e P_u = (47.5 i) I = 1.9 kW.

Esercizio 20b: Il circuito di cui sopra rappresenta il circuito equivalente di un motore DC con eccitazione in parallelo in condizioni di funzionamento a regime. Valutare il rendimento e la coppia motrice supponendo che nel punto di lavoro la velocità di rotazione sia 1000 rpm.



Soluzione: Rendimento
$\eta = P_u/P_e = 77.9\ \%$

Velocità angolare del rotore:
$\omega_m = 2\pi n/60 = 104.7$ rad/s

Coppia motrice
$C = P_u/\omega_m = 18.1$ Nm