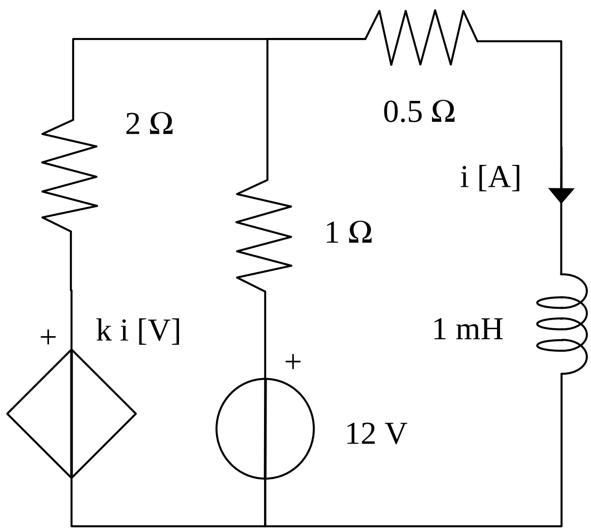
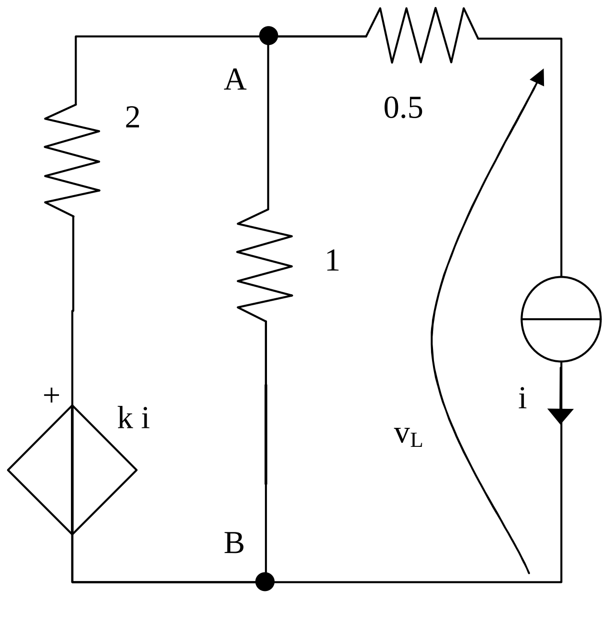
Esercizi sui circuiti in fase transitoria

Esercizio 1. Determinare la costante di tempo del circuito di figura per k = 0.5 Ω, 1.5 Ω, 3 Ω.

Soluzione:
τ = 1 ms, 1.5 ms, 6 ms.



Soluzione: Il circuito contiene un solo componente con memoria, cioè è un circuito del primo ordine. La caratteristica dell'induttore è L di/dt = v_L (induttanza L nota). È quindi necessario determinare la tensione sull'induttore (versi associati con la convenzione da utilizzatore) considerando nota la variabile di stato i. Inoltre il generatore indipendente presente nello schema può essere azzerato, in quanto contribuisce solo con termine costante alla v_L, ininfluente sulla costante di tempo.



Pertanto, nel circuito (unità SI) si è rappresentato l'induttore tramite un generatore indipendente di corrente a corrente impressa i e si è spento il generatore di tensione indipendente. Applicando la LKT alla maglia di destra si ha: $0 = -v_{AB}+0.5i+v_L$.

Quindi $v_L = v_{AB} - 0.5i$. La tensione v_{AB} si può determinare direttamente applicando il teorema di Millman, oppure applicando la LKC al nodo A. In entrambi i casi si ha:

$$\frac{v_{AB}-ki}{2}+\frac{v_{AB}}{1}+i=0$$

Ovvero

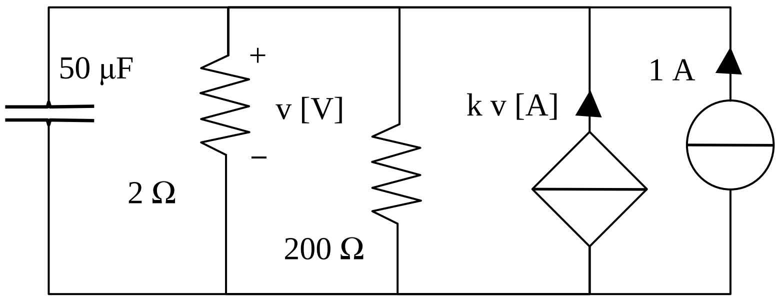
$$v_{AB}=\frac{\frac{ki}{2}-i}{\frac{1}{2}+1}=\frac{1}{3}(k-2)i$$

Quindi v_L = (0.333 k –1.166)i .Sostituendo nella caratteristica dell'induttore si ha

10^{-3} di/dt = (0.333 k –1.166)i $\quad\Rightarrow\quad$ di/dt = 10^{3} (0.333 k –1.166)i

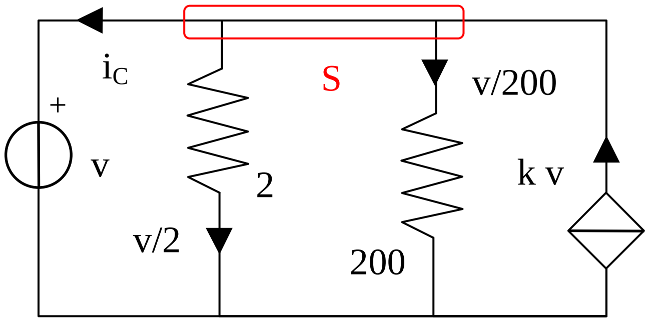
La matrice di stato è formata da un solo elemento, che coincide anche con il suo unico autovalore. Quindi $\lambda = 10^{3}$ (0.333 k –1.166) ed il circuito è stabile solo se 0.333 k –1.166 < 0 ovvero k < 3.5 Ω. La costante di tempo risulta pari a $\tau = 10^{-3}/(1.166 - 0.333\,k)$ che nei tre casi richiesti fornisce τ = 1 ms, 1.5 ms, 6 ms. (Si sarebbe giunti allo stesso risultato anche utilizzando la relazione $\tau = L/R_{eq}$ dove R_{eq} è la resistenza equivalente del bipolo collegato all'induttore).

Esercizio 2. Determinare la costante di tempo del circuito di figura per $k = 0.05$ S, 0.5 S.



Soluzione:
$\tau = 0.11$ ms, 10 ms.

Soluzione: Il circuito contiene un solo componente con memoria, cioè è un circuito del primo ordine. La caratteristica del condensatore è $C\, dv/dt = i_C$ (capacità C nota). È quindi necessario determinare la corrente sul condensatore (versi associati con la convenzione da utilizzatore) considerando nota la variabile di stato v. Inoltre il generatore indipendente presente nello schema può essere azzerato, in quanto contribuisce solo con termine costante alla i_C, ininfluente sulla costante di tempo.



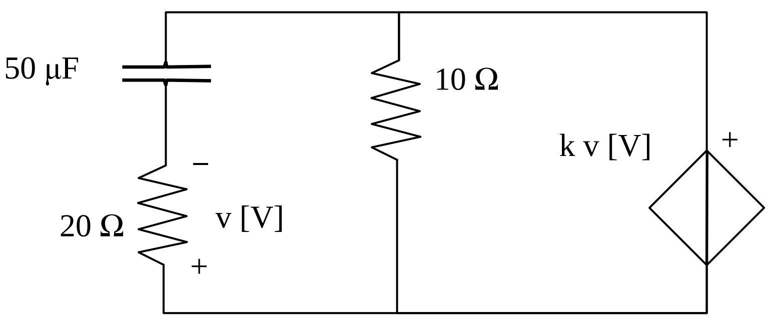
Pertanto, nel circuito (unità SI) si è rappresentato il condensatore tramite un generatore indipendente di tensione a tensione impressa v (coincidente con la variabile pilota del generatore pilotato) e si è spento il generatore di corrente indipendente. Applicando la LKC alla superficie chiusa S si ha: $0 = -kv + v/2 + v/200 + i_C$.
Quindi $i_C = (k - 0.505)v$.

Sostituendo nella caratteristica del condensatore si ha

$$5\times10^{-5}\, dv/dt = (k - 0.505)v \quad \Rightarrow \qquad dv/dt = 2\times10^{4}\,(k - 0.505)v$$

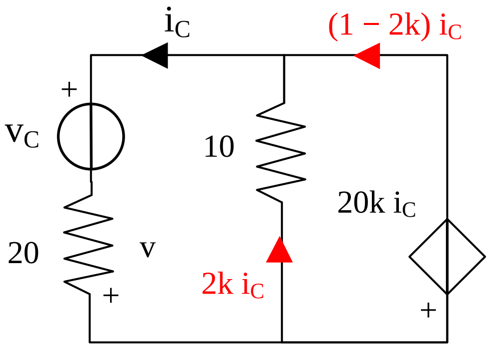
La matrice di stato è formata da un solo elemento, che coincide anche con il suo unico autovalore. Quindi $\lambda = 2\times10^4\,(k - 0.505)$ ed il circuito è stabile solo se $(k - 0.505) < 0$ ovvero $k < 0.505$ S. La costante di tempo risulta pari a $\tau = 10^{-3}/(10.1 - 20k)$ che nei casi richiesti fornisce $\tau = 0.11$ ms e 10 ms. (Si sarebbe giunti allo stesso risultato anche utilizzando la relazione $\tau = CR_{eq}$ dove R_{eq} è la resistenza equivalente del bipolo collegato al condensatore).

Esercizio 3. Determinare la costante di tempo del circuito di figura per $k = 1, 10, 100$.



Soluzione:
$\tau = 2$ ms, 11 ms, 101 ms.

Soluzione: Il circuito è del primo ordine. La caratteristica del condensatore è $C\, dv_C/dt = i_C$. È quindi necessario determinare la corrente sul condensatore considerando nota la variabile di stato v_C.



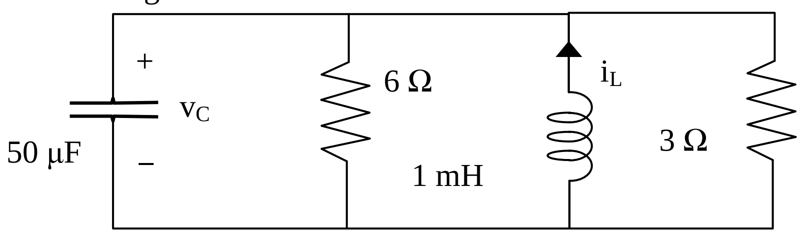
Pertanto, nel circuito (unità SI) si è rappresentato il condensatore tramite un generatore indipendente di tensione a tensione impressa v_C (la corrente sul condensatore ha il verso associato con la convenzione da utilizzatore) e si è cambiata la variabile pilota notando che $v = -20\ i_C$ (quindi $kv = -20\ k\ i_C$). Il resistore sul ramo centrale e soggetto alla tensione impressa dal generatore pilotato, quindi la corrente che lo attraversa è $20\ k\ i_C/10 = 2\ k\ i_C$. La corrente sul generatore pilotato si deduce applicando la LKC ad uno dei suoi terminali.

Applicando la LKT alla maglia di sinistra si ha: $0 = v_C + 20 i_C + 20 k i_C$. Quindi $i_C = -v_C/20(1 + k)$. Sostituendo nella caratteristica del condensatore si ha

$$5\times 10^{-5}\ dv_C/dt = -v_C/20(1+k) \qquad \Rightarrow \qquad dv_C/dt = -10^3\ v_C/(1+k)$$

La matrice di stato è formata da un solo elemento, che coincide anche con il suo unico autovalore. Quindi $\lambda = -10^3/(1 + k)$ed il circuito è stabile solo se $(1 + k) > 0$ ovvero $k > -1$. La costante di tempo risulta pari a $\tau = 10^{-3}(1 + k)$ che nei casi richiesti fornisce τ = 2 ms, 11 ms, 101 ms.

Esercizio 4. Determinare la matrice di stato (nell'ordine i_L, v_C) e la massima costante di tempo del circuito di figura.



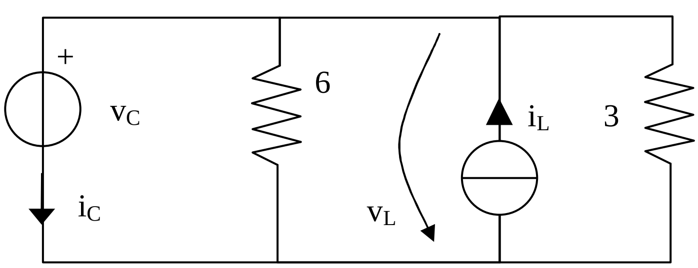
Soluzione:

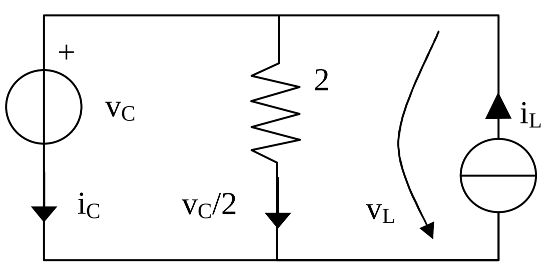
$$A = \left\| \begin{matrix} 0 & -1[\mathrm{Ss}^{-1}] \\ 20[\Omega \mathrm{s}^{-1}] & -10[\mathrm{s}^{-1}] \end{matrix} \right\| \times 10^3$$

τ_{max} = 0.36 ms.

Soluzione: Per determinare la matrice di stato è necessario definire le equazioni di stato del circuito. Le caratteristiche dell'induttore e del condensatore sono (l'induttanza L e la capacità C sono assegnate):

$$\begin{cases} L\dfrac{di_L}{dt} = v_L \\ C\dfrac{dv_C}{dt} = i_C \end{cases}$$





È quindi necessario determinare la tensione sull'induttore e la corrente sul condensatore considerando note le variabili di stato. Pertanto, nel circuito (unità SI) si sono rappresentati i componenti con memoria tramite generatori indipendenti.

Per risolvere il circuito si noti che i due resistori sono in parallelo. Sostituendo il resistore equivalente da 2 Ω (6×3/(6+3)) e notando che è collegato ai terminali del generatore di tensione, si deduce immediatamente la corrente circolante su di esso.

Applicando la LKC ad uno dei due nodi del circuito si ha quindi: $i_C = i_L - v_C/2$. Per quanto riguarda la tensione sull'induttore, la LKT mostra che: $v_L = -v_C$. Sostituendo nelle caratteristiche e passando alla notazione matriciale si ha quindi:

$$\begin{cases} 10^{-3}\dfrac{di_L}{dt} = -v_C \\ 5\cdot 10^{-5}\dfrac{dv_C}{dt} = i_L - 0.5 v_C \end{cases} \Rightarrow \frac{d}{dt}\begin{Bmatrix} i_L \\ v_C \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -10^3 \\ 2\cdot 10^4 & -10^4 \end{bmatrix}}_{[A]}\begin{Bmatrix} i_L \\ v_C \end{Bmatrix}$$

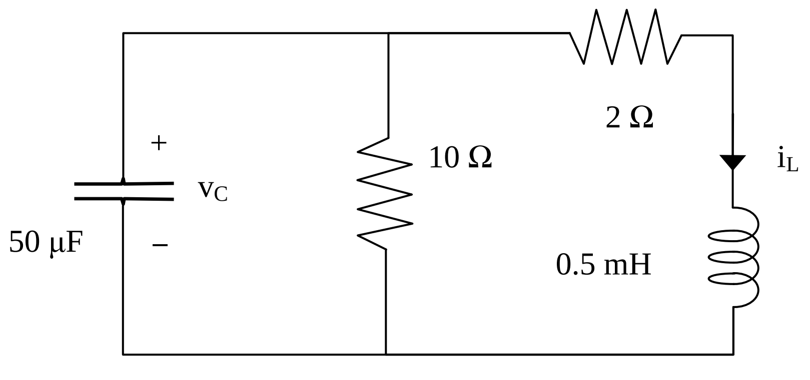
La matrice di stato [A] risulta quindi determinata. Le unità SI dei coefficienti si deducono dall'analisi dimensionale delle equazioni. Per la prima equazione di stato, detta X l'unità di misura incognita del secondo elemento della prima riga della matrice di stato e tenendo presente che corrente, tensione e tempo hanno come unità A, V e s, si ha: A/s = X V. Quindi X = A/(V s). Dato che il SI è razionale A/V = S e si ha infine X = S/s. Analogamente nella seconda equazione di stato, detta X l'unità di misura incognita del primo elemento della seconda riga della matrice di stato, si ha: V/s = X A. Quindi X = V/(A s). Dato che il SI è razionale V/A = Ω e si ha infine X = Ω/s. Per quanto riguarda il secondo elemento della seconda riga della matrice di stato, si ha: V/s = X V. Quindi X = 1/s = s^{-1} (questo ragionamento è identico per tutti gli elementi sulla diagonale principale della matrice di stato che quindi hanno sempre la stessa unità s^{-1}).

Infine, per determinare le costanti di tempo del circuito è necessario calcolare gli autovalori della matrice di stato, risolvendo il polinomio:

$$\det([A]-\lambda[I]) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} -\lambda & -10^3 \\ 2\cdot 10^4 & -10^4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + 10^4\lambda + 2\cdot 10^7 = 0$$

I due autovalori sono quindi $\lambda_1 = -2764$ e $\lambda_2 = -7236$, entrambi reali e negativi (quindi il circuito è stabile, come si poteva dedurre subito dall'assenza di generatori pilotati) e le costanti di tempo sono $\tau_1 = 0.362$ ms e $\tau_2 = 0.138$ ms.

Esercizio 5. Determinare la matrice di stato (nell'ordine i_L, v_C) e la massima costante di tempo del circuito di figura.

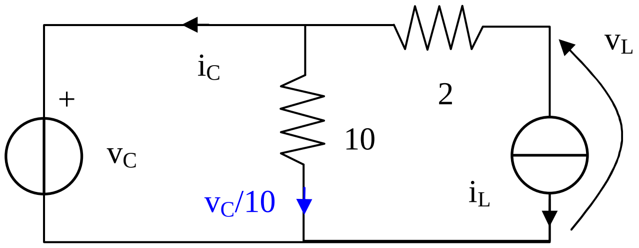


Soluzione:

$$A = \begin{Vmatrix} -4\left[s^{-1}\right] & 2\left[Ss^{-1}\right] \\ -20\left[\Omega s^{-1}\right] & -2\left[s^{-1}\right] \end{Vmatrix} \times 10^3$$

$\tau_{max} = 0.33$ ms.

Soluzione: è necessario determinare la tensione sull'induttore e la corrente sul condensatore considerando note le variabili di stato. Pertanto, nel circuito (unità SI) si sono rappresentati i componenti con memoria tramite generatori indipendenti.



La corrente sul ramo centrale si deduce notando che il resistore da 10 Ω è soggetto alla tensione v_C. Applicando la LKC ad uno dei suoi terminali si ha: $i_C + i_L + v_C/10 = 0$ e quindi

$$i_C = -\, i_L - v_C/10$$

Applicando la LKT alla maglia di destra si ha: $0 = -\, v_L - 2\, i_L + v_C$. Quindi $v_L = -2\, i_L + v_C$. Sostituendo nelle caratteristiche e passando alla notazione matriciale si ha quindi:

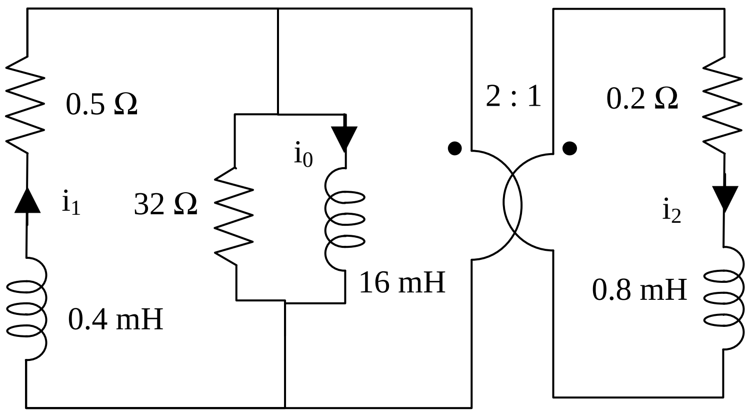
$$\begin{cases} 5\cdot 10^{-4}\dfrac{di_L}{dt} = -2i_L + v_C \\ 5\cdot 10^{-5}\dfrac{dv_C}{dt} = -i_L - 0.1v_C \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\begin{Bmatrix} i_L \\ v_C \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -4\cdot 10^3 & 2\cdot 10^3 \\ -2\cdot 10^4 & -2\cdot 10^3 \end{bmatrix}}_{[A]}\begin{Bmatrix} i_L \\ v_C \end{Bmatrix}$$

La matrice di stato [A] risulta quindi determinata. Le unità SI dei coefficienti si deducono dall'analisi dimensionale delle equazioni. Per determinare le costanti di tempo del circuito è necessario calcolare gli autovalori della matrice di stato, risolvendo il polinomio:

$$\det([A]-\lambda[I]) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} -4\cdot 10^3 - \lambda & 2\cdot 10^3 \\ -2\cdot 10^4 & -2\cdot 10^3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + 6\cdot 10^3\lambda + 4.8\cdot 10^7 = 0$$

I due autovalori sono quindi $\lambda_1 = -\, 3000 + 6245j$ e $\lambda_2 = -\, 3000 - 6245j$, complessi coniugati con parti reali negative (quindi il circuito è stabile, come si poteva dedurre subito dall'assenza di generatori pilotati) e la costante di tempo è $\tau =$ 0.33 ms (è una sola dato che gli autovalori hanno la stessa parte reale e quindi $\lambda_{1.2} = -\, 1/\tau \pm j\,\Omega$).

Esercizio 6. Determinare la matrice di stato del circuito di figura (nell'ordine i_0,i_1,i_2).

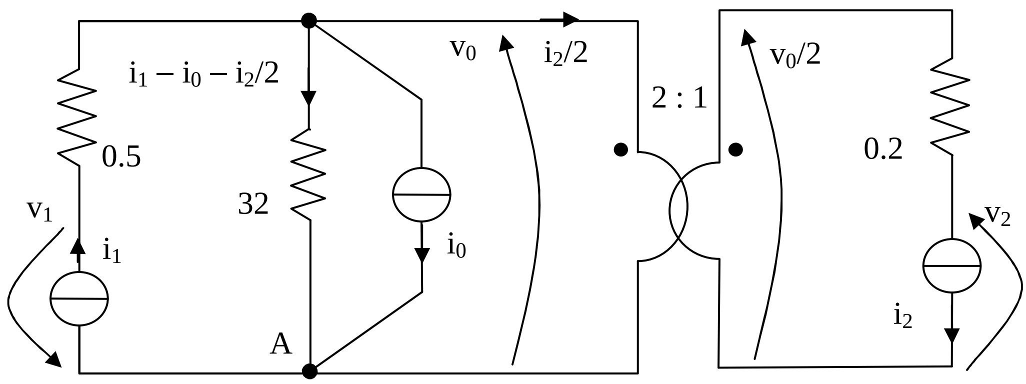


Soluzione:

$$A = \begin{Vmatrix} -2.00 & 2.00 & -1.00 \\ 80.00 & -81.25 & 40.00 \\ -20.00 & 20.00 & -10.25 \end{Vmatrix} \times 10^3 \left[s^{-1}\right]$$

Soluzione: Per determinare la matrice di stato è necessario definire le equazioni di stato del circuito. Le caratteristiche degli induttori sono indicate a destra (le induttanze L_0, L_1 ed L_2 sono assegnate). E' quindi necessario determinare le tensioni sugli induttori (versi associati con la convenzione da utilizzatore) considerando note le variabili di stato (le correnti i_0, i_1 ed i_2). Pertanto, nel circuito (unità SI) si sono rappresentati gli induttori tramite generatori indipendenti di corrente.

$$\begin{cases} L_0\dfrac{di_0}{dt} = v_0 \\ L_1\dfrac{di_1}{dt} = v_1 \\ L_2\dfrac{di_2}{dt} = v_2 \end{cases}$$



Dato che la tensione sul primario del trasformatore ideale e la corrente sul secondario sono già definite, si possono dedurre la corrente sul primario e la tensione sul secondario utilizzando le caratteristiche del trasformatore ideale. Inoltre, applicando la LKC al nodo A si può dedurre la corrente circolante sul resistore da 32 Ω. Per calcolare la tensione v_0 si noti che è la tensione sul resistore da 32 Ω. Quindi utilizzando la caratteristica del resistore si ha: $v_0 = 32\,(i_1 - i_0 - i_2/2)$, ovvero $v_0 = -32i_0 + 32i_1 - 16i_2$. Per calcolare la tensione v_1 si applica la LKT sulla maglia a sinistra: $0 = v_1 + 0.5\, i_1 + 32\,(i_1 - i_0 - i_2/2)$, ovvero $v_1 = 32i_0 - 32.5i_1 + 16i_2$). Per calcolare la tensione v_2 si applica la LKT sulla maglia a destra: $0 = -v_0/2 + 0.2\, i_2 + v_2$, ovvero $v_2 = -16i_0 + 16i_1 - 8.2i_2$). Sostituendo nelle caratteristiche e passando alla notazione matriciale si ha quindi:

$$\begin{cases} 16\cdot 10^{-3}\dfrac{di_0}{dt} = -32i_0 + 32i_1 - 16i_2 \\ 0.4\cdot 10^{-3}\dfrac{di_1}{dt} = 32i_0 - 32.5i_1 + 16i_2 \\ 0.8\cdot 10^{-3}\dfrac{di_2}{dt} = -16i_0 + 16i_1 - 8.2i_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{d}{dt}\begin{Bmatrix} i_0 \\ i_1 \\ i_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2\cdot 10^3 & 2\cdot 10^3 & -10^3 \\ 80\cdot 10^3 & -81.25\cdot 10^3 & 40\cdot 10^3 \\ -20\cdot 10^3 & 20\cdot 10^3 & -10.25\cdot 10^3 \end{bmatrix}}_{[A]} \begin{Bmatrix} i_0 \\ i_1 \\ i_2 \end{Bmatrix}$$

Le unità SI dei coefficienti della matrice di stato [A] si deducono dall'analisi dimensionale delle equazioni (s^{-1}, infatti moltiplicando le correnti in A definisce per le derivate rispetto al tempo delle correnti l'unità corretta: A/s).