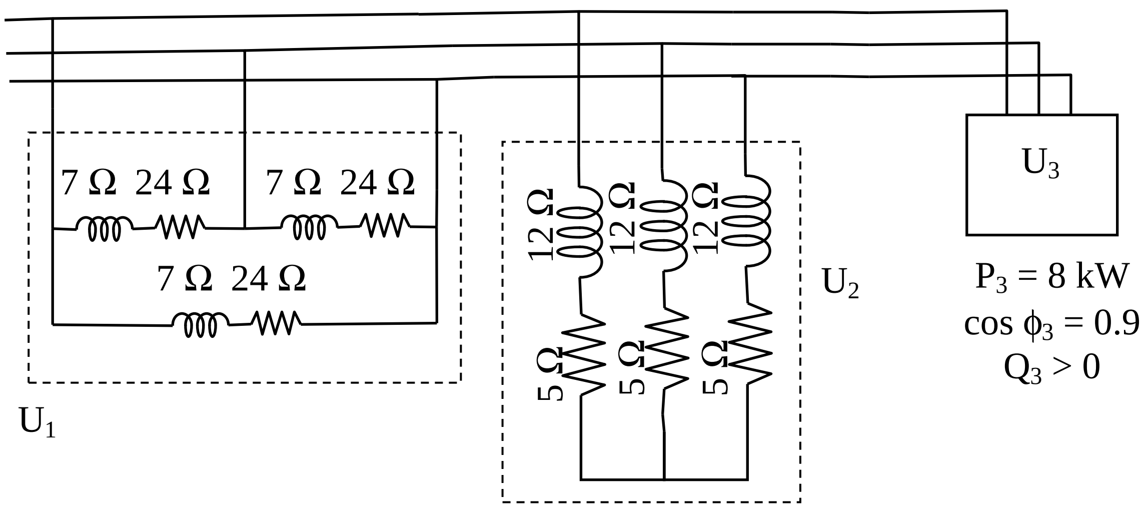
Esercizi sui sistemi trifase

Esercizio 1: Tre carichi, collegati ad una linea trifase che rende disponibile una terna di tensioni concatenate simmetrica e diretta (regime AC, frequenza 50 Hz, valore efficace 380V), sono costituiti come in figura. Calcolare le potenze attiva e reattiva assorbite dai carichi U_1 e U_2, il fattore di potenza del carico $U = U_1+U_2+U_3$ e la capacità necessaria a rifasare a $\cos \Phi = 0.9$ l'utilizzatore U con una terna di condensatori a triangolo.

Nota: sullo schema del circuito sono riportati direttamente i valori delle reattanze (ωL) alla frequenza di funzionamento.



Soluzione

I carichi U_1 ed U_2 sono, rispettivamente, un carico a triangolo equilibrato di impedenze $\underline{Z}_\Delta = 24 + 7\,j$ ed un carico a stella equilibrato di impedenze $\underline{Z}_Y = 5 + 12\,j$. Le potenze complesse assorbite sono pari a:

$\underline{N}_1 = 3(380)^2/(24 - 7j) = 16635 + 4852j \quad \Rightarrow \quad P_1 = 16.6$ kW, $Q_1 = 4.85$ kVAR

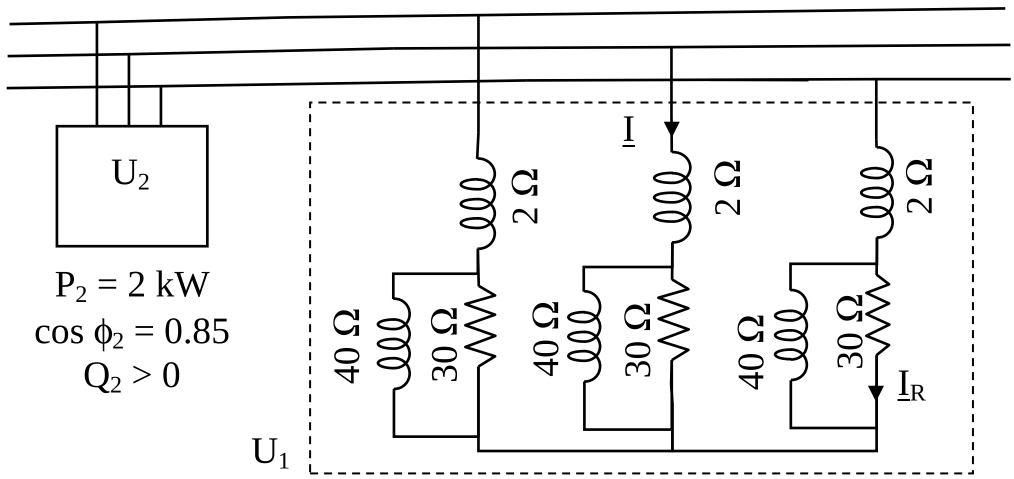
$\underline{N}_2 = 3(220)^2/(5 - 12j) = 4296 + 10310j \quad \Rightarrow \quad P_2 = 4.3$ kW, $Q_2 = 10.3$ kVAR

La potenza apparente del carico U_3 è $N_3 = P_3 / \cos \phi_3 = 8888$ VA, quindi la potenza reattiva è pari a $Q_3 = \sqrt{(N_3^2 - P_3^2)} = 3873$ VAR e, e la potenza complessa è pari a $\underline{N}_3 = 8000 + 3873\,j$. Per l'additività delle potenze, la potenza complessa assorbita dal carico $U = U_1+U_2+U_3$ è pari a $\underline{N} = \underline{N}_1 + \underline{N}_2 + \underline{N}_3 = 28930 + 19035\,j$. Quindi complessivamente i tre carichi assorbono $P = 28.9$ kW e $Q = 19$ kVAR con un fattore di potenza pari a: $\cos \Phi = P/|\underline{N}| = P/\sqrt{(P^2 + Q^2)} = 0.835$.

A parità di potenza attiva assorbita, se il carico U avesse un fattore di potenza 0.9 la potenza reattiva assorbita sarebbe $Q' = \sqrt{((P/0.9)^2 - P^2)} = 14$ kVAR, quindi il banco di condensatori deve assorbire una potenza $Q_C = Q' - Q = -5$ kVAR. Dato che i condensatori sono a triangolo $Q_C = -3\omega C_\Delta V^2$ e quindi risulta $C_\Delta = 3.69 \times 10^{-5}$ F $\cong 37\ \mu$F.

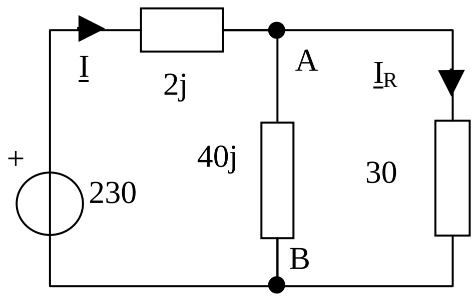
Esercizio 2: Due carichi, collegati ad una linea trifase che rende disponibile una terna di tensioni concatenate simmetrica e diretta (regime AC, frequenza 50 Hz, valore efficace 400 V), sono costituiti come in figura (sono indicate le reattanze a 50 Hz). Calcolare: il valore efficace della corrente $\underline{I}$, il valore efficace della corrente $\underline{I}_R$, il fattore di potenza del carico $U = U_1+U_2$, e la capacità C_Y necessaria a rifasare a $\cos \Phi = 0.9$ l'utilizzatore $U = U_1 + U_2$ con una terna di condensatori a stella.

Nota: sullo schema del circuito sono riportati direttamente i valori delle reattanze associate agli induttori (ωL) alla frequenza di funzionamento.
Suggerimento: visto che la stella è equilibrata ogni fase è soggetta alla corrispondente tensione principale di fase. Si può quindi fare riferimento al circuito equivalente per una fase.



Soluzione:
$|\underline{I}| = 9.1$ A
$|\underline{I}_R| = 7.3$ A
$\cos \Phi_U = 0.787$
$C_Y = 41\ \mu F$

Soluzione:



Il carico U$_1$ è un carico a stella equilibrato, pertanto la tensioni sulle tre fasi sono le tensioni principali di fase, con valore efficace $E = V/\sqrt{3} = 400/\sqrt{3} = 230$ V e fasi 0°, 120° e −120°. Si può quindi fare riferimento al circuito equivalente di una fase ($\underline{E}_{1,0} = 230 \exp(j0)$).

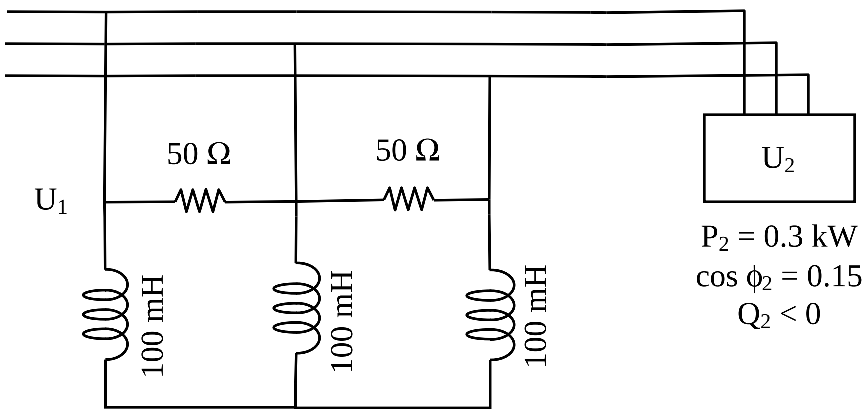
L'impedenza del parallelo è: $\underline{Z}_p = 30\times(40j)/(30+40j) = 19.2+14.4j$. Quindi la corrente $\underline{I}$ è data da: $\underline{I} = 230/(2j + \underline{Z}_p)$ e si ha $|\underline{I}| = 230/|2j + \underline{Z}_p| = 230/\sqrt{(19.2^2+16.4^2)} = 9.11$ A. La corrente $\underline{I}_R$ è data da: $\underline{I}_R = \underline{V}_{AB}/30 = \underline{Z}_p\underline{I}/30$. Quindi $|\underline{I}_R| = |\underline{Z}_p|\ |\underline{I}|/30 = 7.287$ A

La potenza complessa assorbita da U$_1$ è pari a: $\underline{N}_1 = 3(230)^2/(19.2 - 16.4j) = 4779 + 4082j$. La potenza apparente del carico U$_2$ è pari a: $N_2 = 2000/0.85 = 2353$ VA. Quindi $Q_2 = \sqrt{(2353^2 - 2000^2)} = 1240$ VAR e $\underline{N}_2 = 2000 + 1240j$. La potenza complessa assorbita da U è pari a: $\underline{N}_U = \underline{N}_1 + \underline{N}_2 = 6779 + 5322j$. Pertanto $\cos \Phi_U = P_U/|\underline{N}_U| = 6779/\sqrt{(6779^2 + 5322^2)} = 0.787$.

La potenza apparente del carico rifasato è pari a: $N' = 6779/0.9 = 7532$ VA. Quindi $Q' = \sqrt{(7532^2 - 6779^2)} = 3283$ VAR e la potenza reattiva che devono assorbire i condensatori è quindi $Q_C = Q' - Q_U = 3283 - 5322 = -2039$ VAR. Infine $Q_C = -3\omega C_Y E^2$, quindi: $C_Y = -Q_C/(3\omega E^2) = 2039/(3\times 314.16\times 230^2) = 4.09 \times 10^{-5}$ F = 40.9 μF

Esercizio 3: Calcolare il fattore di potenza del carico U$_1$ + U$_2$. I carichi sono alimentati da una rete trifase (in AC) simmetrica diretta con un valore efficace della tensione concatenata pari a 400 V alla frequenza di 50 Hz.

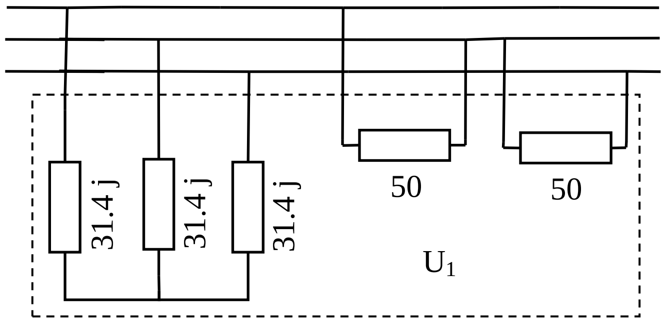
Suggerimento: si noti che i due resistori sono soggetti alla tensione concatenata.



Soluzione:

$\cos \Phi = 0.91$

Soluzione: Il carico U_1 non è un carico a stella né un carico a triangolo. Si può risolvere, nel dominio simbolico, rappresentando la rete tramite generatori a stella o a triangolo, per dedurre le correnti e le potenze assorbite. Oppure si possono utilizzare le trasformazioni stella-triangolo per determinare un carico equivalente a triangolo la cui soluzione è semplice (ogni impedenza è soggetta ad una tensione concatenata, quindi le correnti e le potenze complesse assorbite sono immediatamente calcolabili). Tuttavia è più semplice notare che, per come è costituito, U_1 può essere rappresentato come segue:



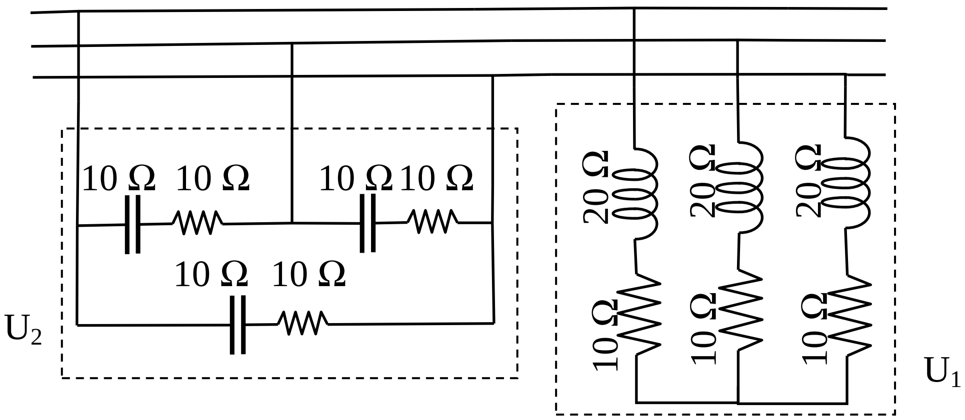
Il carico U_1 quindi è costituito da due resistori soggetti a tensioni concatenate (400 V) ed una stella equilibrata (3 reattanze uguali, $\omega L = 31.4\ \Omega$, soggette alle tensioni principali di fase $400/\sqrt{3} = 230$ V) Grazie all'additività delle potenze in AC, la potenza complessa assorbita da U_1 è pari a:

$$\underline{N}_1 = 2\frac{(400)^2}{50} + 3j\frac{(230)^2}{31.4} = 6400 + 5054j$$

Il carico U_2 è ohmico-capacitivo. $P_2 = 300$ W, $N_2 = 300/0.15 = 2000$ VA. La potenza reattiva assorbita è quindi $Q_2 = -\sqrt{(2000^2 - 300^2)} = -1977$ VAR ed $\underline{N}_2 = 300 - 1977\,j$. La potenza complessa assorbita è pari a: $\underline{N} = \underline{N}_1 + \underline{N}_2 = 6700 + 3077j$. Quindi $\cos\Phi = P/|\underline{N}| = 6700/\sqrt{(6700^2 + 3077^2)} = 0.91$.

Esercizio 4: Calcolare i fattori di potenza del carico U_1, del carico U_2 e del carico $U = U_1 + U_2$. I carichi sono alimentati da una rete trifase (in regime AC) simmetrica diretta.

Nota: sullo schema del circuito sono riportati direttamente i valori delle reattanze associate agli induttori (ωL) ed ai condensatori ($1/\omega C$ in modulo) alla frequenza di funzionamento.



Soluzione
$\cos\Phi_1 = 0.45$
$\cos\Phi_2 = 0.71$
$\cos\Phi = 0.84$

Soluzione: Il carico U_1 è un carico a stella equilibrato, pertanto la tensioni sulle tre fasi sono le tensioni principali di fase, con valore efficace $E = V/\sqrt{3}$. L'impedenza di ogni fase è $\underline{Z} = 10 + 20j$. Quindi la potenza complessa assorbita da U_1 è pari a: $\underline{N}_1 = 3E^2/\underline{Z}^* = V^2/\underline{Z}^* = V^2/(10 - 20j) = V^2(1+2j)/50$, da cui $P_1 = V^2/50$ ed $N_1 = V^2/\sqrt{500}$. E dunque $\cos\Phi_1 = P_1/N_1 = 1/\sqrt{5} = 0.447$ (si noti che il valore di V non influisce sul fattore di potenza: come nel caso monofase il $\cos\Phi$ dipende solo dal carico).

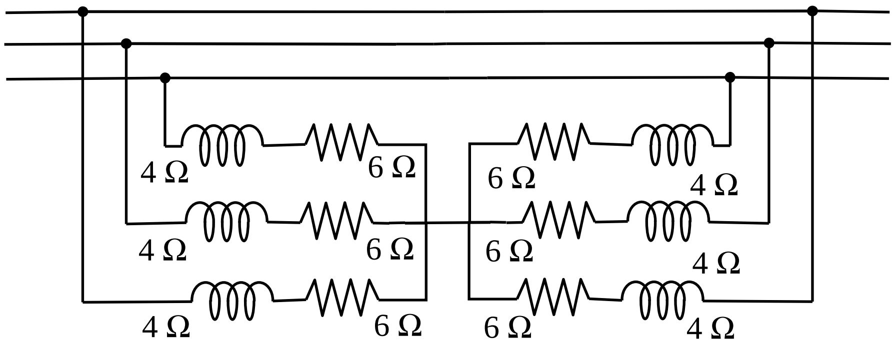
Il carico U_2 è un carico a triangolo equilibrato, pertanto la tensioni sulle tre impedenze $\underline{Z}_\Delta = 10 - 10j$ sono le tensioni concatenate, con valore efficace V. Quindi la potenza complessa assorbita da U_2 è pari a: $\underline{N}_2 = 3V^2/\underline{Z}_\Delta^* = 3V^2/(10 + 10j) = 3V^2(1 - j)/20$, da cui $P_2 = 3V^2/20$ ed $N_1 = 3V^2/\sqrt{200}$. E dunque $\cos\Phi_2 = P_2/N_2 = 1/\sqrt{2} = 0.707$.

Infine la potenza complessa assorbita dai due carichi è pari a: $\underline{N} = \underline{N}_1 + \underline{N}_2 = V^2(0.02+0.04j) + V^2(0.15-0.15j) = V^2(0.17-0.11j)$. Quindi $\cos\Phi = P/|\underline{N}| = 0.17/\sqrt{(0.17^2 + 0.11^2)} = 0.84$. (si noti che ovviamente $|\underline{N}| = 0.2025V^2 = |\underline{N}_1 + \underline{N}_2| \neq |\underline{N}_1| + |\underline{N}_2| = 0.0447V^2 + 0.2121V^2 = 0.2568V^2$)

Esercizio 5: Calcolare il fattore di potenza del carico illustrato. La rete trifase (in regime AC) è simmetrica diretta.

Nota: sullo schema del circuito sono riportati direttamente i valori delle reattanze associate agli induttori (ωL) alla frequenza di funzionamento.

Suggerimento: semplificare il circuito notando che i rami delle due stelle sono a due a due collegati in parallelo.

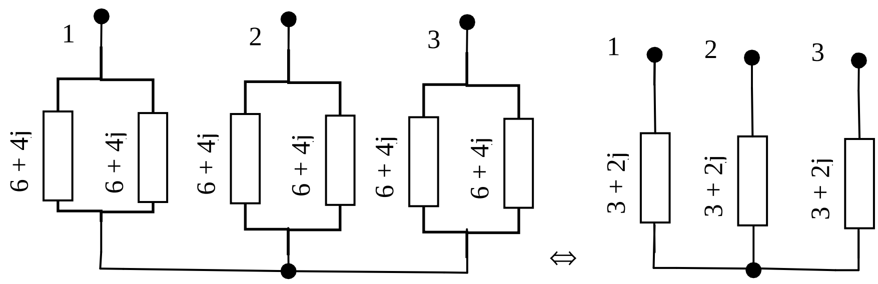


Soluzione:

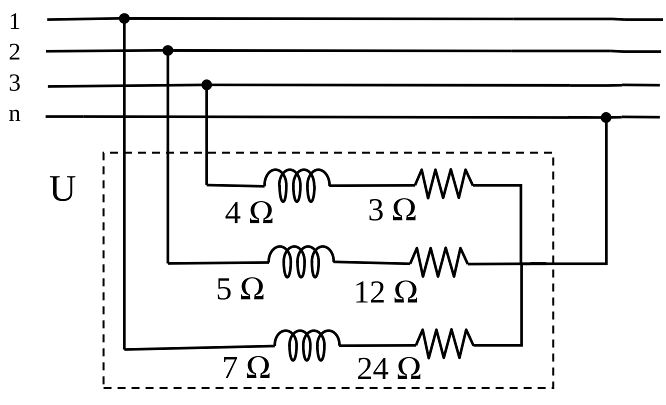
cos Φ = 0.832

Soluzione: In figura si rappresenta il carico trifase (nel dominio simbolico) evidenziando i collegamenti in parallelo fra le impedenze. A destra è mostrato lo stesso carico in cui si sono sostituiti ai paralleli le impedenze equivalenti. Il carico trifase è quindi costituito da una terna di impedenze a stella dello stesso valore. Il carico è quindi equilibrato e la potenza complessa assorbita è:

$$\underline{N} = \frac{3E^2}{3-2j} = \frac{3E^2}{13}(3+2j) \;\Rightarrow\; P = \frac{9E^2}{13},\; N = \frac{3E^2}{\sqrt{13}} \;\Rightarrow\; \cos\Phi = \frac{P}{N} = \frac{3}{\sqrt{13}} = 0.832$$



Esercizio 6: Calcolare i valori efficaci delle correnti su ogni fase del carico di figura, le potenze attiva e reattiva assorbite ed il fattore di potenza. La rete trifase con neutro (in AC) è simmetrica diretta con un valore efficace della tensione concatenata pari a 380 V alla frequenza di 50 Hz.



Soluzione:

$|\underline{I}_1|$ = 8.8 A
$|\underline{I}_2|$ = 16.9 A
$|\underline{I}_3|$ = 44 A

P = 11.1 kW
Q = 9.7 kVAr

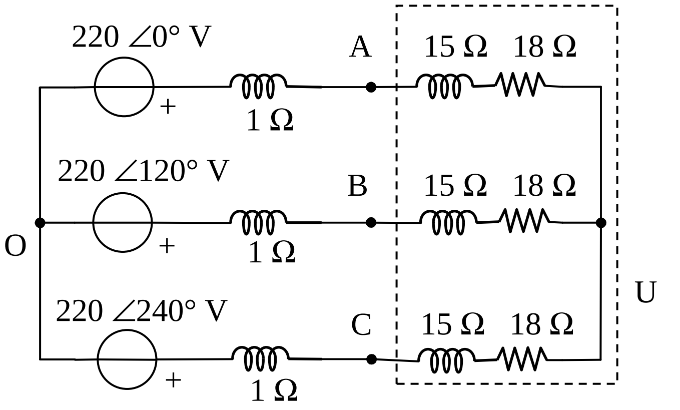
cos Φ = 0.75

Soluzione:

Ogni impedenza del carico è collegata tra una fase ed il neutro. Pertanto sono soggette alle tensioni principali di fase, con valore efficace $E = V/\sqrt{3} = 380/\sqrt{3} = 220$ V. Quindi i valori efficaci delle correnti sono: $|\underline{I}_1| = 220/|24+7j| = 220/\sqrt{(24^2+7^2)} = 8.8$ A, $|\underline{I}_2| = 220/|12+5j| = 220/\sqrt{(12^2+5^2)} = 16.9$ A, $|\underline{I}_3| = 220/|3+4j| = 220/\sqrt{(3^2+4^2)} = 44$ A. Grazie all'additività delle potenze in AC, la potenza complessa assorbita da U è pari a $\underline{N} = \underline{N}_1 + \underline{N}_2 + \underline{N}_3 = 220^2/(24-7j) + 220^2/(12-5j) + 220^2/(3-4j) = 11100 + 9720j$. Quindi P = 11.1 kW, Q = 9.72 kVAR. Infine $\cos\Phi = P/\sqrt{(P^2+Q^2)} = 0.752$.

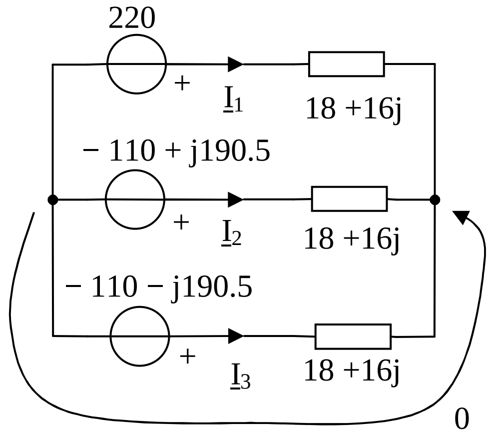
Esercizio 7a: Il circuito in figura è in regime AC alla frequenza di 50 Hz. Calcolare modulo e fase (in gradi) della tensione v_{AO} e la potenza attiva P_U assorbita dal carico U.

Nota: sullo schema del circuito sono riportati direttamente i valori delle reattanze associate agli induttori (ωL) alla frequenza di funzionamento.



Soluzione:

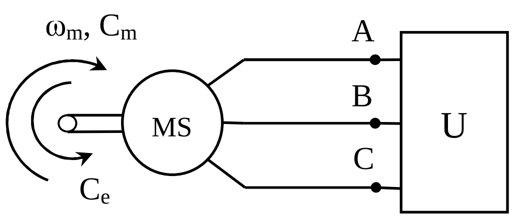
V_{AO} = 214 V
$\angle v_{AO} = -1.83°$
P_U = 4.51 kW



Soluzione: Considerando il circuito equivalente (nel dominio simbolico) si nota che le tensioni impresse dai generatori formano una terna con lo stesso valore efficace e sfasate di 120°. Pertanto si possono considerare come tensioni principali di fase, con valore efficace E = 220 V. Dato che le impedenze su ogni fase sono uguali, la tensione tra i centri stella dei generatori e delle impedenze è nulla (è sufficiente applicare il Teorema di Millman). Pertanto i valori efficaci delle correnti sono uguali fra loro: $|\underline{I}_1| = |\underline{I}_2| = |\underline{I}_3|$ = 220/|18+16j| = 9.135 A. Il carico è equilibrato e la potenza complessa assorbita è $\underline{N} = 3\,(18+15j)\,|\underline{I}_1|^2$ = 4510 + 3760j e dunque P_U = 4.51 kW.

Per determinare $\underline{V}_{AO}$ è sufficiente utilizzare la caratteristica del ramo AO: $\underline{V}_{AO} = 220 - j\underline{I}_1$
La corrente e data da: $\underline{I}_1$ = 220/(18+16j) = 6.83 − 6.07j. Quindi $\underline{V}_{AO}$ = 213.9 − j 6.83 e modulo e fase sono rispettivamente V_{AO} = 214 V, $\angle\underline{V}_{AO} = -\,1.83°$.

Esercizio 7b: Il circuito di cui sopra rappresenta il circuito equivalente di un generatore sincrono trifase (trascurando le perdite) che alimenta un carico trifase equilibrato U. Supponendo che la macchina sia a 4 poli, calcolare l'angolo di carico δ e la coppia resistente C_e.



Soluzione:

δ = 1.83°
C_e = 28.7 Nm

Soluzione: L'angolo di carico è definito da $\delta = \angle\underline{E}_0 - \angle\underline{V}$., dove $\underline{E}_0$ è la tensione a vuoto e $\underline{V}$ la tensione sulla fase (stesso verso). In questo caso $\underline{E}_0 = 220\,\angle 0°$ V e $\underline{V} = \underline{V}_{AO} = 214\,\angle -1.83°$ V. Pertanto δ = 0 − (− 1.83°) = 1.83°. Dato che l'angolo di carico è positivo(δ > 0) la macchina sincrona funziona in effetti da generatore e la coppia elettromagnetica è resistente. La potenza meccanica assorbita all'albero dalla macchina quindi viene trasformata in potenza elettrica attiva erogata al carico (a meno delle perdite, che però sono state trascurate).

I poli sono 4 quindi p = 2 (numero di coppie). La velocità di rotazione dell'albero è: $\omega_m = \omega/p = 2\pi\,50/2$ = 157 rad/s (ovvero $n = (60/2\pi)\,\omega_m$ = 1500 rpm). La coppia resistente si può determinare tramite il bilancio di potenza ($C_e\,\omega_m = P_U$ da cui $C_e = P_U/\omega_m$ = 28.7 Nm) oppure utilizzando la relazione $C_e = (3p/\omega)(VE_0/X_s)\,\mathrm{sen}\delta = (3/157)(214\times 220/1)\,\mathrm{sen}(1.83°)$ = 28.7 Nm.