

## OPERATORI DIFFERENZIALI VETTORIALI LINEARI DEL PRIMO ORDINE

Sia  $\Omega$  una regione nello spazio in cui, in ogni suo punto, sia definita una grandezza  $g$ . La regione  $\Omega$  si dice allora soggetta ad un campo. Un campo può essere scalare, vettoriale o tensoriale, a seconda che la grandezza  $g$  sia scalare, vettoriale o tensoriale. Generalmente il dominio di definizione di un campo è **connesso**. Un dominio si dice connesso quando, dati due punti qualsiasi ad esso appartenenti, esiste almeno una curva interamente contenuta nel dominio stesso che unisce i due punti. Un dominio connesso può essere:

- **a connessione lineare semplice:** quando, data una qualsiasi curva chiusa appartenente al dominio, esiste sempre almeno una superficie avente come contorno tale curva che sia interamente contenuta nel dominio stesso;
- **a connessione superficiale semplice:** quando qualsiasi superficie chiusa appartenente al dominio racchiude un volume interamente appartenente al dominio;
- **a connessione lineare multipla:** quando non è a connessione lineare semplice. Ad esempio, un toro (o un anello) è un dominio a connessione lineare multipla;
- **a connessione superficiale multipla:** quando non è a connessione superficiale semplice. Ad esempio, un guscio sferico è un dominio a connessione superficiale multipla.

Nel seguito, a meno che non sia diversamente specificato, si fa implicitamente riferimento a domini a connessione lineare e superficiale semplice. Infatti, non tutte le proprietà riportate nel seguito sono applicabili a domini a diverso grado di connessione.

**GRADIENTE:** è un operatore differenziale del primo ordine che si applica ad una generica grandezza scalare  $\varphi$ , e genera un vettore  $\nabla\varphi$  tale che:

$$\nabla\varphi \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial\varphi}{\partial n} \quad (1)$$

Il gradiente di  $\varphi$  è quindi un vettore diretto secondo la massima variazione di  $\varphi$  e perpendicolare alle superfici su cui  $\varphi$  è costante<sup>(o)</sup>. In coordinate cartesiane si ha:

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k} \quad (2)$$

Si è introdotto l'operatore (simbolico) differenziale del primo ordine **nabla**, definito in coordinate cartesiane come segue:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

Sia  $\mathbf{u} = \nabla\varphi$ . L'integrale di  $\mathbf{u}$  lungo una generica linea dipende unicamente dai valori che  $\varphi$  assume agli estremi di integrazione. Si ha infatti:

$$\int_A^B \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \nabla\varphi \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \frac{\partial\varphi}{\partial l} dl = \int_A^B d\varphi = \varphi_B - \varphi_A \quad (3)$$

Si ha anche (quando  $B \equiv A$  e quindi  $\varphi_B = \varphi_A$ ):

$$\oint \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (4)$$

<sup>(o)</sup> Si noti infatti che, definita una superficie  $\varphi(x, y, z) = \text{const.}$ , assumendo che  $\mathbf{t}$  sia un versore tangente a tale superficie, si ha  $0 = d\varphi/dt = \mathbf{t} \cdot \nabla\varphi$  e dunque il vettore gradiente, essendo perpendicolare a tutte le rette tangenti alla superficie nel punto di contatto, è perpendicolare alla superficie stessa nel medesimo punto.

Un campo vettoriale che goda di tale proprietà si dice **conservativo**. In un dominio linearmente connesso un campo conservativo può sempre essere espresso come gradiente di un opportuno potenziale scalare, definito a meno di una funzione a gradiente nullo (quindi una costante).

**DIVERGENZA:** La divergenza di un vettore  $\mathbf{u}$  in un punto P è definita come limite del rapporto tra flusso di  $\mathbf{u}$  attraverso la superficie S che racchiude l'elemento di volume nell'intorno di P ed il volume  $\tau$  dell'intorno al tendere di  $\tau$  a zero. Si può quindi scrivere:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} \equiv \nabla \cdot \mathbf{u} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \oint_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS$$

La divergenza è un operatore differenziale del primo ordine, che in coordinate cartesiane è definito come segue:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (5)$$

Sia  $\tau$  un dominio delimitato dalla superficie chiusa S in cui la grandezza vettoriale  $\mathbf{u}$  è continua assieme alle derivate delle sue componenti. Vale allora il **Teorema della divergenza** (o di Gauss), che si esprime come segue: *il flusso del vettore  $\mathbf{u}$  attraverso la superficie chiusa S è pari all'integrale della divergenza di  $\mathbf{u}$  sul volume  $\tau$  racchiuso in S*. Ovvero:

$$\oint_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{u} d\tau \quad (6)$$

Un vettore  $\mathbf{u}$  si dice **solenoidale** su un dominio  $\tau$  quando il flusso di  $\mathbf{u}$  attraverso qualsiasi superficie chiusa contenuta interamente in  $\tau$  è nullo, ovvero quando  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  ovunque in  $\tau$ .

**ROTORE:** si definisce rotore di un vettore  $\mathbf{u}$  un vettore tale che, in ogni punto, il suo flusso attraverso un elemento di superficie qualsiasi S sia uguale alla circuitazione di  $\mathbf{u}$  lungo il contorno  $\Gamma$  dell'elemento stesso. Si ha quindi, passando al limite del rapporto tra la circuitazione C e la superficie S al tendere di S a zero:

$$(\operatorname{rot} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \equiv (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \frac{dC}{dS}$$

Il rotore (o rotazionale) è quindi un operatore differenziale del primo ordine, ed in coordinate cartesiane è definito come segue:

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} \equiv \nabla \times \mathbf{u} = \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (7)$$

Vale inoltre il **Teorema di Stokes**: *il flusso del vettore  $\nabla \times \mathbf{u}$  attraverso la superficie S è pari alla circuitazione di  $\mathbf{u}$  lungo la curva  $\Gamma$  che ne è il bordo*. Cioè:

$$\int_S \nabla \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} \quad (8)$$

Da ciò si deduce subito che:

- i flussi di  $\nabla \times \mathbf{u}$  attraverso due superfici qualsiasi che abbiano lo stesso contorno  $\Gamma$  è uguale. Il rotore è quindi un vettore solenoidale. Vale cioè l'identità:

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{u} = 0 \quad (9)$$

- se in un dominio linearmente connesso  $\nabla \times \mathbf{u} = 0$  ovunque, il vettore  $\mathbf{u}$  è conservativo<sup>(\*)</sup>. Viceversa, se  $\mathbf{u}$  è conservativo,  $\nabla \times \mathbf{u} = 0$  ovunque. Vale cioè l'identità:

$$\nabla \times \nabla \phi = 0 \quad (10)$$

- si dimostra che se  $\mathbf{u}$  è solenoidale in un dominio a connessione superficiale semplice, può sempre essere espresso come rotore di un opportuno potenziale vettoriale, definito a meno di una funzione irrotazionale (e quindi conservativa).

### CAMPI CONSERVATIVI E CAMPI SOLENOIDALI

| Campi conservativi                                                                                               | Campi solenoidali                                                                                                                                              |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\nabla \times \mathbf{u} = 0$                                                                                   | $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$                                                                                                                                  |
| L'integrale di $\mathbf{u}$ lungo una curva aperta dipende solo dagli estremi di integrazione.                   | Il flusso di $\mathbf{u}$ attraverso una superficie aperta dipende solo dal contorno della superficie.                                                         |
| La circuitazione di $\mathbf{u}$ lungo una curva chiusa è nulla.                                                 | Il flusso di $\mathbf{u}$ attraverso una superficie chiusa è nullo.                                                                                            |
| $\mathbf{u} = \nabla \phi$                                                                                       | $\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{A}$                                                                                                                        |
| La funzione $\phi$ è un potenziale scalare definito a meno di una costante:                                      | La funzione $\mathbf{A}$ è un potenziale vettore definito a meno di un gradiente.                                                                              |
| $\phi = \phi^* + \text{cost.}$                                                                                   | $\mathbf{A} = \mathbf{A}^* + \nabla \phi$                                                                                                                      |
| cioè a meno di una funzione a gradiente nullo.                                                                   | cioè a meno di una funzione a rotore nullo.                                                                                                                    |
| $\phi$ viene determinato in ogni punto fissando ad arbitrio il suo valore in un punto di riferimento arbitrario. | $\mathbf{A}$ viene determinato in ogni punto imponendo la condizione di compatibilità ("gauge"), ad esempio quella di Coulomb: $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ . |

Si conclude che un campo conservativo (o lamellare) è descritto da un potenziale scalare  $\phi$ , mentre un campo solenoidale è descritto da un potenziale vettore  $\mathbf{A}$ .

#### •Campi conservativi:

si consideri un campo conservativo, descritto dalla funzione vettoriale  $\mathbf{u}$  e funzione del punto  $\mathbf{P}$ , che soddisfa il seguente sistema:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{u} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = f(\mathbf{P}) \end{cases} \quad (11)$$

Ricordando le proprietà dei campi conservativi, il sistema (11) si può scrivere come segue:

$$\nabla \cdot \nabla \phi = f(\mathbf{P}) \quad (12)$$

Introducendo l'operatore differenziale del secondo ordine **nabla quadro**, definito come segue:

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (13)$$

<sup>(\*)</sup> Si noti che l'ipotesi che il dominio sia a connessione lineare semplice è essenziale. In caso contrario un campo irrotazionale non è necessariamente conservativo, come prova il seguente esempio. Si consideri il campo, definito in tutto lo spazio eccetto l'asse  $z$ ,  $\mathbf{u} = (y \mathbf{i} - x \mathbf{j}) / \sqrt{x^2 + y^2}$ . Come è immediato verificare,  $\mathbf{u}$  è irrotazionale. Tuttavia  $\mathbf{u}$  non è conservativo. Infatti, calcolando la circuitazione di  $\mathbf{u}$  sulla circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine, si ottiene (sostituendo le coordinate cartesiane con coordinate cilindriche):

$$\oint \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \oint \frac{y dx - x dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta (-\sin \theta d\theta) - \cos \theta (\cos \theta d\theta)}{\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}} = -\int_0^{2\pi} d\theta = -2\pi \neq 0$$

(detto anche **laplaciano**) la (12) si riscrive:

$$\nabla^2 \varphi = f(\mathbf{P}) \quad (14)$$

La (14), nota come **equazione di Poisson scalare**, consente di calcolare il potenziale  $\varphi$  e, conseguentemente, il campo  $\mathbf{u}$ , una volta assegnata la funzione  $f(\mathbf{P})$ .

#### •Campi solenoidali:

sia dato ora un campo solenoidale, descritto dalla funzione vettoriale  $\mathbf{u}$  e funzione del punto  $\mathbf{P}$ , che soddisfa il seguente sistema:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{F}(\mathbf{P}) \end{cases} \quad (15)$$

Tenendo presente che un campo solenoidale può essere ricavato da un potenziale vettore, il sistema (15) potrà essere riscritto come segue:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{F}(\mathbf{P}) \Rightarrow \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{F}(\mathbf{P}) \quad (16)$$

La (16) costituisce la definizione dell'operatore  $\nabla^2 \mathbf{A}$ . In coordinate cartesiane tale operatore assume la seguente forma:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = (\nabla^2 A_x) \mathbf{i} + (\nabla^2 A_y) \mathbf{j} + (\nabla^2 A_z) \mathbf{k} \quad (17)$$

Il potenziale vettore è determinato a meno di una funzione irrotazionale. L'indeterminazione viene eliminata imponendo che  $\mathbf{A}$  sia solenoidale.

La risultante equazione (18) è un **equazione di Poisson vettoriale**, che si può scomporre nelle tre equazioni scalari (19).

$$-\nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{F}(\mathbf{P}) \quad (18)$$

$$\begin{cases} \nabla^2 A_x = -F_x(\mathbf{P}) \\ \nabla^2 A_y = -F_y(\mathbf{P}) \\ \nabla^2 A_z = -F_z(\mathbf{P}) \end{cases} \quad (19)$$

#### •Campi armonici:

Quando un campo è sia conservativo che solenoidale in un certo dominio, dalla (14) e dalla (18) si ottiene:

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = 0 \\ \nabla^2 \mathbf{A} = 0 \end{cases} \quad (20)$$

Le (20) si dicono **equazioni di Laplace**, rispettivamente scalare e vettoriale. Una funzione che soddisfi l'equazione di Laplace si dice **armonica**. Esempi di funzioni armoniche sono:

- sia  $r$  la distanza del generico punto da un punto fisso detto  $P_0$ , la funzione  $1/r$  è armonica in tutto lo spazio tranne in  $P_0$ .
- siano  $r_i$  le distanze del generico punto da  $n$  punti fissi  $P_i$ ,  $k_i$  delle costanti, la funzione  $\sum_{i=1}^n k_i/r_i$  è armonica in tutto lo spazio tranne nei punti  $P_i$ .
- allo stesso modo, la funzione  $\int_{\tau} k/r \, d\tau$  è armonica al di fuori del dominio  $\tau$ .

#### CAMPI QUALSIASI: TEOREMA DI CLEBSH

Si consideri ora un campo non conservativo e non solenoidale, descritto dalla funzione vettoriale  $\mathbf{u}$  che soddisfa il seguente sistema:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{F}(\mathbf{P}) \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = f(\mathbf{P}) \end{cases} \quad (21)$$

Si dimostra (Teorema di Clebsch) che “un campo vettoriale  $\mathbf{u}$  è sempre decomponibile in ogni punto in due componenti  $\mathbf{u}_s$  e  $\mathbf{u}_c$ , rispettivamente solenoidale e conservativa”. Infatti si supponga che:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_s + \mathbf{u}_c \quad (22)$$

dove:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{u}_c = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_c = f(\mathbf{P}) \end{cases} \quad (23)$$

Allora risulta anche:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{u}_s = \nabla \times (\mathbf{u} - \mathbf{u}_c) = \nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{F}(\mathbf{P}) \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_s = \nabla \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_c) = 0 \end{cases} \quad (24)$$

Esprimendo  $\mathbf{u}_c$  come gradiente di un potenziale scalare  $\phi$  e  $\mathbf{u}_s$  come rotore di un potenziale vettore  $\mathbf{A}$ , si può allora scrivere:

$$\mathbf{u} = -\nabla\phi + \nabla \times \mathbf{A} \quad (25)$$

e i due potenziali scalare e vettoriale saranno determinati da:

$$\nabla^2\phi = -f(\mathbf{P}) \quad (26.a)$$

$$\nabla^2\mathbf{A} = -\mathbf{F}(\mathbf{P}) \quad (26.b)$$

### RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA DEI CAMPI

#### ▪ Campi scalari

La struttura di un campo scalare  $\phi$  può essere visualizzata mediante le cosiddette *superfici di livello*. Si consideri un generico punto  $P_0$  ed il valore  $\phi_0$  ivi assunto dalla  $\phi$ : il luogo di tutti i punti in corrispondenza dei quali la  $\phi$  assume lo stesso valore definisce una superficie (*superficie di livello*) la cui espressione analitica, in coordinate cartesiane è:

$$\phi(x, y, z) = \phi_0$$

Se la  $\phi$  è continua e derivabile due volte e se non esistono punti in cui il gradiente di  $\phi$  si annulla, per ogni punto passa una ed una sola superficie di livello: pertanto la conoscenza di tutte le superfici di livello, contrassegnate dai corrispettivi valori, permette di descrivere completamente il campo. Questo tipo di rappresentazione risulta particolarmente utile quando il campo è definito in una regione bidimensionale: in tal caso, infatti, è possibile definire le *linee di livello* su tale piano.

#### ▪ Campi vettoriali

Dato un campo scalare  $\mathbf{u}$  (supposto definito in tutto lo spazio), si dice *linea di campo* (o di flusso) ogni linea che sia tangente in ogni suo punto  $P$  al vettore  $\mathbf{u}(P)$ . Per ogni punto dello spazio passa una ed una sola linea di campo. Pertanto, la mappa delle linee di campo fornisce un modo per visualizzare la struttura del campo vettoriale. Essa consente, infatti, di individuare subito in ogni punto la direzione ed il verso del vettore  $\mathbf{u}$  (nessuna informazione fornisce invece sul modulo del campo).

Il tracciamento delle linee di flusso di un campo assegnato non è sempre facile. Si consideri infatti un campo vettoriale  $\mathbf{u}$ , rappresentato in componenti cartesiane da  $(u_x, u_y, u_z)$ . Sia  $\Gamma$  la linea di flusso passante per il punto  $P_0$  di coordinate  $(x_0, y_0, z_0)$  detto  $ds$  la lunghezza elementare del tratto di curva, la condizione di tangenza nel generico punto  $P$  di  $\Gamma$  di coordinate  $(x, y, z)$  è data da:

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z} = \frac{ds}{u}$$

Data infine una linea chiusa  $L$  non coincidente con alcuna linea di flusso del campo, l'insieme delle linee di flusso passanti per tutti i punti di  $L$  individua una superficie  $S$  a struttura tubolare, che prende il nome di *tubo di flusso* associato alla linea  $L$ .