## QUADRO GENERALE DELL'ELETTROMAGNETISMO

La figura 1 mostra in sintesi una suddivisione dell'elettromagnetismo in branche: si noti la prima suddivisione dell'elettromagnetismo in "**elettrostatica**" ed "**elettrodinamica**". Per definizione l'elettrostatica tratta fenomeni stazionari (come è implicito nell'annullarsi di tutte le derivate temporali), nei quali le cariche si mantengono in quiete (annullamento della densità di corrente). L'elettrodinamica, nella quale è previsto il movimento delle cariche, comprende l'elettrodinamica "stazionaria", in cui rimangono ancora nulle le derivate temporali, e la "non stazionaria", che rappresenta il caso generale in cui nessuna semplificazione viene introdotta. Tra queste due parti se ne inserisce una terza: l'elettrodinamica "quasi stazionaria", la cui definizione prevede una discriminazione preliminare fra le grandezze le cui derivate temporali devono ritenersi diverse da zero e quelle che invece possono essere trascurate con approssimazione sufficiente per le esigenze tecniche.

Un capitolo a parte è rappresentato dalla magnetostatica, in cui sono nulle le derivate temporali,e le cariche possono essere oppure no in moto. Benché tale regime si sovrapponga in parte all'elettrodinamica stazionaria, lo scopo principale della magnetostatica è lo studio del campo magnetico prodotto dalle correnti (supposte note) e non delle correnti stesse.

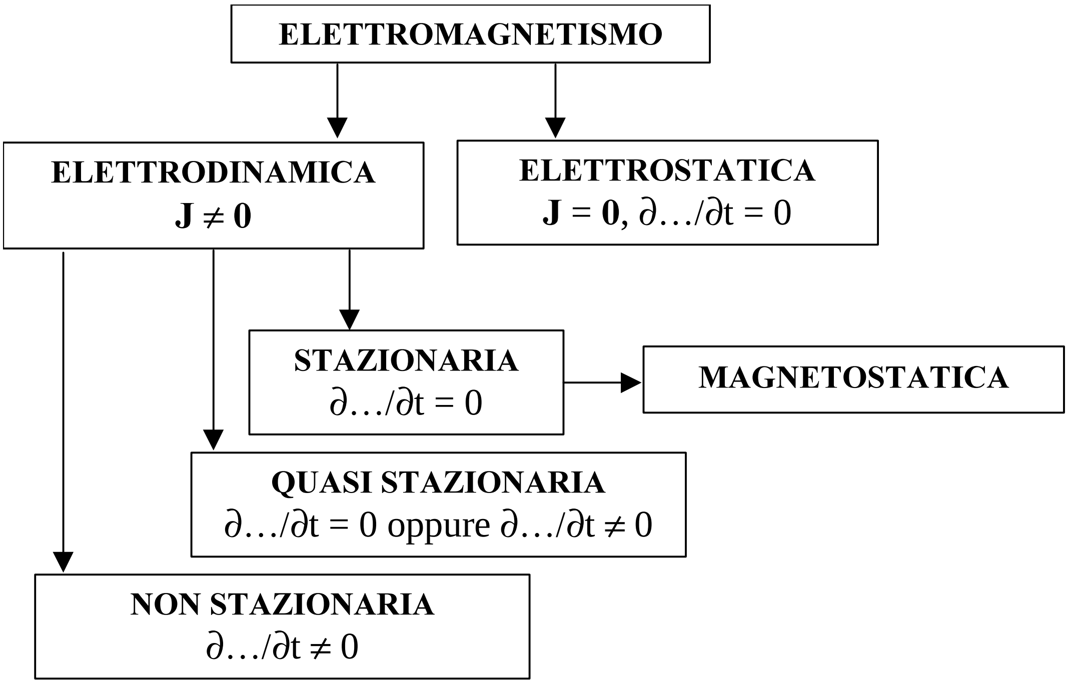



*Fig 1. Quadro generale dell'elettromagnetismo.*

# ELETTROSTATICA

Dal quadro precedente e dalla definizione si trae

Def.: $\mathbf{J} = \mathbf{0}$, $\partial\ldots/\partial t = 0$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \qquad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \qquad (2)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon\,\mathbf{E} \qquad (3)$$

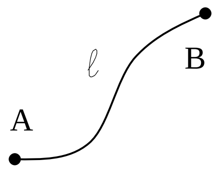
$$\sigma\mathbf{E} = 0 \quad ^{(*)} \qquad (4)$$

(*) Si supponga per ora nullo $\mathbf{E_i}$

**>> Potenziale V**

$$\text{rot}\,\mathbf{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = -\nabla V \qquad (5)$$

campo elettrico conservativo




$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V_A - V_B \qquad (6)$$

Il potenziale V(x, y, z) definito dalla (5) a meno di una costante si assume di regola uguale a zero all'infinito.

Dalla (6): ⟶ $$V_A = \int_A^\infty \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} \qquad (7)$$

Per la (7), il potenziale in un generico punto A è il "lavoro" del campo elettrico su una carica

## >> Equazione di Poisson

$$\left.\begin{aligned} &div\mathbf{D} = \rho \\ &\mathbf{E} = -\text{grad}\,V \\ &\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \end{aligned}\right\} \Rightarrow div\;\text{grad}V = -\frac{\rho}{\varepsilon} \;\Rightarrow\; \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad (8)$$

L'equazione di Poisson fornisce la soluzione V($\mathbf{r}$) relativa ad una data distribuzione di cariche fisse aventi una densità assegnata $\rho(\mathbf{r})$. La soluzione della (8), se le cariche sono disposte nel vuoto è data da:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d^3 r' \qquad (9)$$

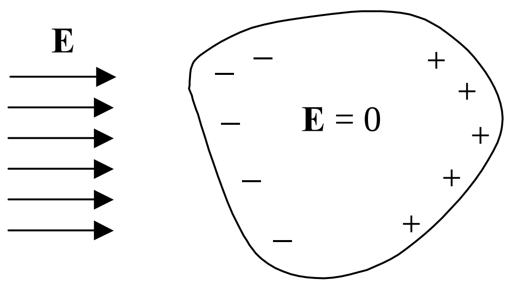
**>> Classificazione dei materiali in base alla conducibilità**

dalla (4): ⟶ $\sigma\,\mathbf{E} = 0$

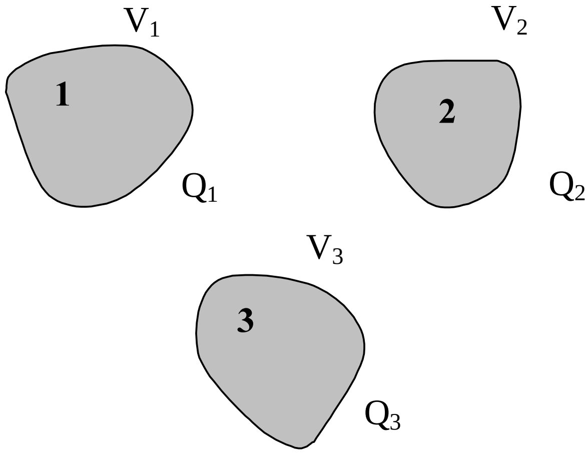
- $\sigma = 0$, $\mathbf{E} \neq 0$ (isolanti) (10)
- $\sigma \neq 0$, $\mathbf{E} = 0$ (conduttori) (11)

**>> Influenza elettrostatica**

È la reazione di un conduttore (eventualmente scarico) che in presenza di un campo elettrico esterno mette in evidenza cariche superficiali, distribuite in modo tale da annullare il campo elettrico all'interno del conduttore stesso (e anche nelle cavità eventualmente presenti: schermo elettrostatico).



### >> Campo all'esterno dei conduttori: Equazione di Laplace




Nella regione esterna ai conduttori, supposto $\rho = 0$, l'equazione di Poisson si semplifica nella:

$\nabla^2 V = 0$ (12) [Eq. Laplace]

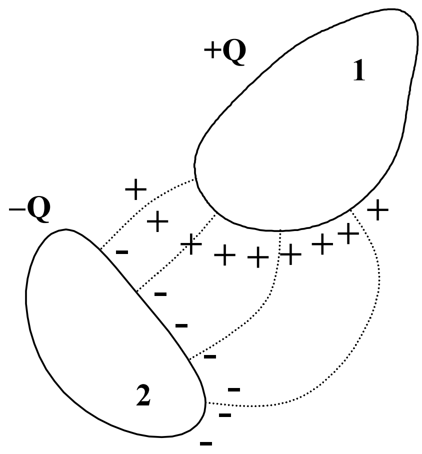
(V è una funzione armonica)

Assegnati i potenziali dei conduttori e soddisfatte le "condizioni di regolarità del potenziale all'infinito" (equivalenti di regola a non aver cariche all'infinito), resta individuato il potenziale $V(\mathbf{r})$ [Problema di Dirichlet] da cui è possibile dedurre dalla (5) il campo elettrico $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ e quindi, dalla forma integrale della legge di Gauss, le cariche presenti sui conduttori. Il problema inverso (assegnate le cariche presenti sui conduttori determinare i potenziali dei conduttori) è il Problema di Neumann. Vi è quindi un legame di linearità (data la linearità delle equazioni fin qui trattate) fra le cariche ed i potenziali dei conduttori

$$(13)\begin{cases} Q_1 = a_{11}V_1 + a_{21}V_2 + a_{31}V_3 \\ Q_2 = a_{12}V_1 + a_{22}V_2 + a_{32}V_3 \\ Q_3 = a_{13}V_1 + a_{23}V_2 + a_{33}V_3 \end{cases} \text{ ovvero } (14)\begin{cases} V_1 = b_{11}Q_1 + b_{21}Q_2 + b_{31}Q_3 \\ V_2 = b_{12}Q_1 + b_{22}Q_2 + b_{32}Q_3 \\ V_3 = b_{13}Q_1 + b_{23}Q_2 + b_{33}Q_3 \end{cases}$$

ove i coefficienti a e b dipendono dalla configurazione geometrica del sistema e dalla costante dielettrica del mezzo interposto (o dei mezzi interposti tra i conduttori).

### >> Condensatori




Condensatore è l'insieme di due conduttori posti in presenza l'uno dell'altro e molto distanti da qualsiasi altro conduttore (in modo da poterne trascurare l'influenza), aventi cariche uguali ed opposte. Dalle (14)

$$\begin{cases} V_1 = b_{11}Q_1 + b_{21}Q_2 \\ V_2 = b_{12}Q_1 + b_{22}Q_2 \end{cases}$$

Ma poiché $Q_2 = -Q_1 = Q$, sottraendo si ottiene:

$$V_1 - V_2 = (b_{11} + b_{22} - b_{12} - b_{21})Q \qquad (15)$$

È quindi possibile per la (15) dare la seguente definizione di **capacità** del condensatore

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} \qquad (16)$$

C dipende ovviamente dalla configurazione geometrica e dalla natura del mezzo interposto ($\varepsilon$).

## PROPRIETÀ ELETTRICHE DEI MATERIALI CONDUTTORI ED ISOLANTI

La resistività dei metalli varia con la temperatura secondo il coefficiente di proporzionalità $\alpha$: esso è positivo e costante fra circa −100°C e +150°C. La resistività alla temperatura T è data da:

$$\rho = \rho_0 \, [1+\alpha(T-T_0)]$$

La formula non è valida vicino allo zero assoluto (superconduttività) ed al punto di fusione; i conduttori non metallici hanno generalmente un coefficiente di temperatura negativo. Gli isolanti hanno pure un coefficiente di temperatura negativo e di valore non costante.

| materiale | resistività $\rho$ [n$\Omega$·m] | conducibilità $\sigma$ [MS/m] | coefficiente di temperatura $\alpha$ [m$\Omega$/($\Omega$·K)] (a 20°C) |
|---|---|---|---|
| Argento (99.9%) | 16 | 62.5 | 3.8 |
| Rame elettrolitico | 17.6 | 56.8 | 3.9 |
| Rame ricotto | 17.3 | 56.8 | 3.9 |
| Rame incrudito | 17.7 | 56.8 | 3.85 |
| Oro | 23.6 | 42.4 | 3.0 |
| Alluminio crudo | 28 | 35.7 | 4 |
| Zinco | 62 | 16.1 | 4.0 |
| Platino | 117 | 8.5 | 3.9 |
| Bronzo | 36 | 27.7 | 1.65 |
| Nickel | 136 | 13.8 | 5 |
| Ferro (99%) | 100 ÷ 150 | 6.7 ÷ 10 | 5.5 |
| Ghisa | 700 ÷ 1600 | 0.6 ÷ 1.4 | 2.0 ÷ 4.5 |
| Acciaio ( 0.1% C) | 200 | 5 | 4.2 |
| Acciaio ( 0.4% C) | 160 | 6.2 | 4.2 |
| Acciaio ( 1% Si) | 170 | 5.9 | - |
| Acciaio ( 2% Si) | 350 | 2.8 | - |
| Acciaio ( 4% Si) | 550 | 1.8 | - |
| Grafite | 4000 ÷ 20000 | 0.05 ÷ 0.25 | 0.4 |
| Carbone per spazzole | 20000 ÷ 100000 | 0.01 ÷ 0.05 | 0.4 |

Nel vuoto e nell'aria la costante dielettrica ha il valore $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/m; negli altri mezzi ha valori variabili, che sono generalmente ottenuti valutando la costante dielettrica relativa $\varepsilon_r$ riferita a quella del vuoto ($\varepsilon = \varepsilon_0\, \varepsilon_r$).

| materiale | resistività $\rho$ [M$\Omega$·m] | costante dielettrica relativa, $\varepsilon_r$ | temperatura massima di lavoro [°C] | rigidità dielettrica K [MV/m] | densità $\rho_m$ [kg/m$^3$]] |
|---|---|---|---|---|---|
| Porcellana | $10^3 \div 10^7$ | 4.5 ÷ 6 | 1000 | 10 ÷ 12 | 2400 |
| Bachelite | $10^3 \div 10^4$ | 5 ÷ 7 | 130 | 10 ÷ 12 | 1600 |
| Carta secca | $10^3 \div 10^4$ | 1.6 ÷ 2.6 | 90 | 4 ÷ 6 | 820 |
| Vetro | $10^5 \div 10^8$ | 4.5 ÷ 10 | - | 30 ÷ 150 | 4500 |
| Mica | $10^6 \div 10^9$ | 5 ÷ 6 | 750 | 60 ÷ 200 | 2800 |
| Gomma | $10^6 \div 10^8$ | 2.3 ÷ 2.7 | 70 | 16 ÷ 50 | 1500 |
| Carta paraffinata | $10^8$ | 2.5 ÷ 4 | 90 | 10 ÷ 20 | 1100 |

La *rigidità dielettrica*, misurata in V/m, è l'intensità di campo (elettrico) necessaria a provocare la *scarica disruptiva* attraverso il dielettrico. Nei gas e nei liquidi la scarica provoca la volatilizzazione di una parte delle molecole, però al cessare della scarica il dielettrico si ricostituisce e riacquista le sue proprietà isolanti. Nei solidi la scarica porta alla distruzione del dielettrico che rimane perforato nelle zone di minore resistenza alla scarica.

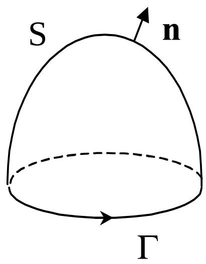
## 2. Elettrodinamica Stazionaria

Le condizioni che caratterizzano, per definizione, l'elettrodinamica stazionaria sono:

$$\mathbf{J} \neq \mathbf{0} \qquad (2.1) \qquad\qquad \frac{\partial \ldots}{\partial t} = 0 \qquad (2.2)$$

La (2.1), che deve intendersi verificata almeno in qualche punto dello spazio, indica la presenza di cariche in movimento (ossia di "correnti elettriche"). La (2.2), che si intende valida per ogni grandezza, indica la "stazionarietà" del regime. Introducendo la (2.2) nelle equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo, le semplificano nelle relazioni seguenti:

FORMA LOCALE — FORMA INTEGRALE




$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \oint_\Gamma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad \Leftrightarrow \quad \oint_\Gamma \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = i_c$$

EQUAZIONE DI CONTINUITÀ DELLA CARICA ELETTRICA

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

EQUAZIONI DELLA DIVERGENZA

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \Leftrightarrow \quad \oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = Q$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

EQUAZIONI DI LEGAME MATERIALE PER MEZZI LINEARI, OMOGENEI E ISOTROPI

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \qquad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \qquad \mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)$$

<u>Tali equazioni possono essere separate in due sistemi disaccoppiati</u>, come segue:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \qquad (2.3) \qquad\qquad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \qquad (2.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \qquad (2.4) \qquad\qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad (2.7)$$

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) \qquad (2.5) \qquad\qquad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \qquad (2.8)$$

Il sistema (2.3), (2.4), (2.5) è finalizzato allo studio dei fenomeni elettrodinamici stazionari, ovvero alla determinazione della densità di corrente **J** assumendo come noti i campi impressi. Viceversa, il sistema (2.6), (2.7), (2.8) è finalizzato allo studio dei fenomeni magnetostatici, ovvero alla determinazione del campo magnetico **H** e del campo di induzione magnetica **B** assumendo come nota la densità di corrente. Le equazioni (2.4) e (2.7), nell'affermare la solenoidalità dei vettori **J** e **B**, implicano che i tubi di flusso dei vettori **J** e **B** sono necessariamente chiusi. A tali tubi di flusso viene dato il nome di "circuiti elettrici" e "circuiti magnetici", rispettivamente [o].

È opportuno notare che <u>nello studio dei circuiti elettrici non è necessario fare riferimento alla eventuale presenza di un campo magnetico</u>, in quanto tale presenza non influisce sullo studio delle

---

[o] Si noti che per quanto riguarda la $\nabla \cdot \mathbf{H}$, essa è in genere diversa da zero e quindi **H** non è in genere un vettore solenoidale. È semplice mostrarlo considerando che $0 = \nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\mu \mathbf{H}) = \mu \, \nabla \cdot \mathbf{H} + \mathbf{H} \cdot \nabla \mu$. Dato inoltre che la permeabilità magnetica è solitamente data come funzione del modulo del campo magnetico, cioè come $\mu = \mu\,(H)$, si può scrivere $\nabla \mu = (d\mu/dH)\, \nabla H$. Pertanto risulta $\nabla \cdot \mathbf{H} = -\,(d\mu/dH)\,(\mathbf{H} \cdot \nabla H)/\mu$. Tuttavia, <u>nel caso che la permeabilità di un mezzo si possa considerare costante</u> (ipotesi che spesso è sufficientemente corretta), $d\mu = 0$ e quindi anche $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$. Solo in questo caso sono definibili i tubi di flusso di **H**, che, ovviamente, coincidono con quelli di **B**.

correnti. Infatti, l'ipotesi iniziale di stazionarietà ha consentito di eliminare tutte le derivate temporali nelle equazioni generali e conseguentemente ha "annullato" il termine ($-\partial \mathbf{B}/\partial t$), unico possibile responsabile di una eventuale influenza del campo magnetico sulle correnti. È quindi possibile uno studio autonomo delle correnti cosiddette "continue", sulla sola base delle equazioni (2.3), (2.4) e (2.5). Dalla (2.3) si deduce che il campo elettrico è derivante da un potenziale scalare (cosi come in elettrostatica):

$$\mathbf{E} = -\nabla v \tag{2.9}$$

Come si è già affermato, un circuito elettrico è per definizione un tubo di flusso del vettore densità di corrente **J**. La solenoidalità di **J** garantisce la costanza del flusso di **J** attraverso una qualunque sezione del circuito. Poiché tale flusso è una corrente elettrica si conclude che ha senso parlare di "corrente i di un circuito elettrico" senza specificare a quale sezione si fa riferimento, in quanto la corrente si mantiene la stessa per tutte le sezioni:

$$J_1S_1 = J_2S_2 = i \tag{2.10}$$

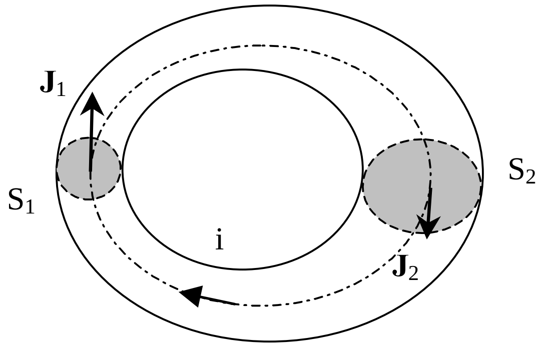


*Fig. 2.1*

Solitamente si considerano "circuito filiformi", tali cioè che le dimensioni relative ad una generica sezione trasversale ed il raggio di curvatura della linea d'asse siano trascurabili rispetto alle dimensioni longitudinali, per i quali è lecito supporre uniforme la distribuzione di **J** sulla sezione trasversale S. Questo porta ad una semplice relazione tra corrente i e modulo della densità di corrente:

$$i = JS$$

Si definisce ora la *forza elettromotrice* (f.e.m.) relativa alla linea d'asse del circuito elettrico come

$$e = \oint_C \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} \tag{2.11}$$

## NECESSITÀ DELL'ESISTENZA DEI CAMPI IMPRESSI

È possibile collegare la f.e.m. alla corrente. Dalla definizione:

$$e = \oint_C \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \frac{\mathbf{J}}{\sigma} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C (JS)\frac{dl}{\sigma S} = \oint_C i\frac{dl}{\sigma S} = i\oint_C \frac{dl}{\sigma S} = Ri \tag{2.12}$$

La relazione lineare tra f.e.m. e corrente appena ottenuta ($e$ =R i) è detta **Legge di Ohm**. La grandezza R che compare è detta *resistenza* del circuito ed è definita da:

$$R = \oint_C \frac{dl}{\sigma S} \tag{2.13}$$

La (2.10) mostra che, per avere corrente in un circuito è necessario, essendo sicuramente $R \neq 0$, che risulti diversa da zero la f.e.m. e cioè la circuitazione del campo impresso. Ne deriva il carattere "non conservativo" del campo impresso $\mathbf{E}_i$ e la necessità che sia diverso da zero, almeno in qualche parte del circuito, al fine di ottenere la circolazione della corrente i.

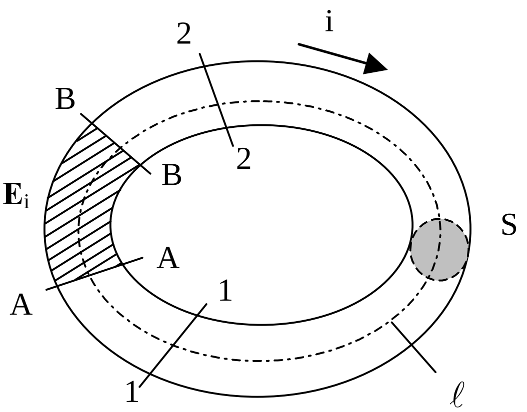
Nelle regioni in cui $\mathbf{E}_i \neq 0$ si hanno fenomeni di conversione dell'energia da altre forme (chimica, nucleare, solare, eolica, termica, meccanica, potenziale idraulica, ecc.) in elettrica: in quelle regioni in cui $\mathbf{E}_i \neq 0$ agiscono quindi forze elettriche (specifiche) di origine non elettromagnetica. Questi campi di forza non vanno confusi con le forze elettriche di origine elettromagnetica (forza di Lorentz, forze coulombiane, forze indotte dalla variazione temporale di **B**) le quali si manifestano anche nel vuoto.

I dispositivi all'interno dei quali hanno sede i suddetti fenomeni di conversione dell'energia, sono detti "generatori elettrici". Poiché il campo impresso non è solitamente distribuito lungo tutto il circuito, ma la sua presenza è limitata alla regione ove è inserito il generatore che "alimenta" il circuito, l'integrale che definisce la f.e.m. può essere limitato solo a tale regione. Nel seguito, salvo precisazione contraria, si farà l'ipotesi che il campo impresso risulti sensibilmente indipendente dalla corrente i del circuito e dai fenomeni ad essa connessi. Nell'ambito di tale ipotesi (solitamente soddisfatta) la f.e.m. è una caratteristica intrinseca del generatore.

## Legge di ohm per un tratto di circuito:

Integrando lungo il circuito in figura (dalla sezione 1 alla sezione 2, attraversando le sezioni A e B), la Legge di Ohm in forma locale

$$\mathbf{E} + \mathbf{E}_i = \frac{\mathbf{J}}{\sigma}$$




si ottiene:

$$\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_1^2 \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = (JS)\int_1^2 \frac{dl}{\sigma S}$$

$$\Rightarrow \qquad V_1 - V_2 + e = R\,i \qquad (15)$$

La (15) può quindi essere rappresentata simbolicamente in termini di componenti circuitali: