

1. MAGNETOSTATICA

Nell'ambito della magnetostatica, il campo magnetico ed il campo di induzione magnetica soddisfano, sperimentalmente, le seguenti relazioni:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad \Leftrightarrow \quad \oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = i_c \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (1.2)$$

Per caratterizzare i materiali magnetici lineari si fa spesso uso della relazione tra la magnetizzazione $\mathbf{M}$ ed il campo magnetico $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (1.3)$$

dove χ_m , adimensionale, è detta *suscettività magnetica*. La relazione di legame materiale tra campo di induzione $\mathbf{B}$ e campo magnetico $\mathbf{H}$ si scrive usualmente tramite la permeabilità magnetica μ nel seguente modo:

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} \quad (1.4)$$

Il modello differenziale (1.1) - (1.2), accoppiato alla relazione di legame materiale, può essere risolto introducendo il *potenziale vettore* $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.5)$$

Sostituendo nella (1.4) e applicando l'operatore rotore ad entrambi i membri si ottiene:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \nabla \times \mathbf{H} + \mu_0 \nabla \times \mathbf{M}$$

Sostituendo la (1.1) e applicando l'identità vettoriale $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ si ottiene:

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \nabla \times \mathbf{M}$$

Come è noto dalla teoria dei campi, la (1.5) non è sufficiente a definire univocamente $\mathbf{A}$. Si impone pertanto la condizione aggiuntiva:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (1.6)$$

Risulta quindi:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} - \mu_0 \nabla \times \mathbf{M} \quad (1.7)$$

Le sorgenti di $\mathbf{A}$, e dunque di $\mathbf{B}$, sono dunque di due tipi: la densità di corrente di conduzione $\mathbf{J}$ ed il rotore della magnetizzazione. Si definisce *corrente di magnetizzazione* il vettore $\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}$:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 (\mathbf{J} + \mathbf{J}_m) \quad (1.8)$$

La (1.8) si dice *Equazione di Poisson vettoriale* ed ammette come unica soluzione la seguente:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d^3 r' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}_m(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d^3 r' \quad (1.9)$$

Si noti che la (1.9) è una soluzione solo se la magnetizzazione è nota. Nel caso assai comune in cui la magnetizzazione sia una funzione del campo magnetico, cioè $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{H})$, la (1.19) rappresenta soltanto una formulazione alternativa della (1.8).

2. PROPRIETÀ MAGNETICHE DEI MATERIALI

Diamagnetismo

In alcuni materiali (tra cui il rame) si ha una perfetta compensazione tra i momenti magnetici di ogni singolo atomo. In tal caso l'applicazione di un campo magnetico esterno anche molto intenso dà luogo ad una magnetizzazione indotta molto debole e smagnetizzante. Il comportamento è diamagnetico per cui la suscettività χ_m è negativa. Si tratta di suscettività molto piccole ed indipendenti dalla temperatura (dell'ordine di -10^{-5}).

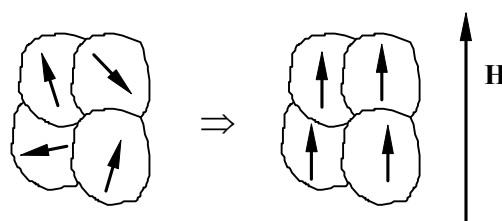
Paramagnetismo

Quando gli atomi o le molecole possiedono un momento magnetico proprio, l'azione di un campo esterno produce un allineamento parziale dei momenti secondo il verso del campo. Tale effetto magnetizzante è il risultato dell'equilibrio tra l'azione ordinatrice del campo e quella dell'agitazione termica. Se l'interazione magnetica tra atomi adiacenti è trascurabile, non si ha magnetizzazione spontanea a livello macroscopico: la suscettività magnetica χ_m è positiva ed ha valori molto modesti alla temperatura ambiente (dell'ordine di 10^{-3}). Essa decresce con la temperatura secondo la Legge di Curie: $\chi_m = C/T$. I materiali che si comportano così sono detti paramagnetici. Essi hanno dunque un comportamento lineare ed isotropo caratterizzato da una permeabilità relativa poco discosta dall'unità. Essi pertanto, come i materiali diamagnetici, modificano in modo inessenziale i campi prodotti "nel vuoto".

Ferromagnetismo

Quando gli atomi, gli ioni o le molecole possiedono un momento magnetico proprio e sono fortemente interagenti tra loro, gli aggregati risultanti sono ferromagnetici. L'esperienza mostra che in tal caso con campi esterni facilmente realizzabili si raggiunge la saturazione (cioè il parallelismo di tutti i dipoli magnetici) a temperatura ambiente. Si riscontrano inoltre vistosi fenomeni di magnetizzazione residua (in assenza di campo magnetico) e di isteresi. Per quanto riguarda la dipendenza dalla temperatura, a partire da un valore critico T_c della temperatura (**temperatura di Curie**) si ha un comportamento paramagnetico e quindi una suscettività magnetica che segue la Legge di Curie - Weiss: $\chi_m = C/(T - T_c)$. Questo insieme di proprietà, ma particolarmente quella di poter dar luogo ad intense magnetizzazioni con deboli campi applicati in materiali di ottimo comportamento meccanico - strutturale, rende il ferromagnetismo di fondamentale importanza per le applicazioni elettrotecniche.

Dal punto di vista microscopico, i materiali ferromagnetici sono formati dall'aggregazione di innumerevoli "domini magnetici" o "domini di Weiss" delle dimensioni di $10^{-3} \div 10^{-6}$ m che sono composti da molecole o atomi che possiedono un momento magnetico proprio e sono allineati fra loro

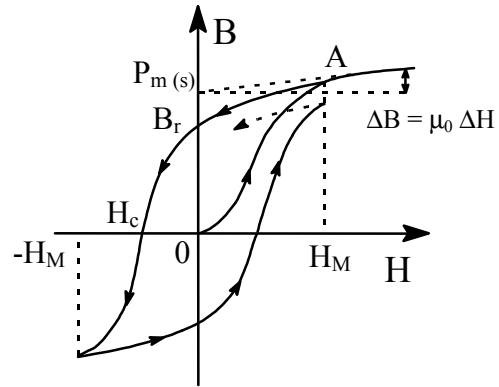


Domini di Weiss prima e dopo l'allineamento con il campo magnetico esterno

Se il materiale è allo stato nativo i momenti magnetici dei domini di Weiss sono orientati casualmente, producendo quindi una magnetizzazione macroscopicamente nulla. In presenza di un campo magnetico esterno, tuttavia, i momenti magnetici tendono ad allinearsi. Tale allineamento permane anche se il campo magnetico esterno è rimosso, dando origine ad una magnetizzazione residua. Tale effetto magnetizzante è il risultato dell'equilibrio statistico tra l'azione ordinatrice del campo e quella dell'agitazione termica. Aumentando la temperatura l'effetto dell'agitazione diventa sempre più sensibile, causando la completa smagnetizzazione quando si raggiunge la temperatura di Curie.

Per studiare i materiali ferromagnetici ci si basa, in concreto, sulle **caratteristiche di magnetizzazione**, cioè sui diagrammi che forniscono il valore in modulo e verso dell'induzione magnetica **B** in funzione del campo magnetico **H** per provini omogenei.

In figura è rappresentato un tipico processo di magnetizzazione. Il materiale sia allo stato nativo (smagnetizzato). Si distinguono una curva di prima magnetizzazione, (tratto OA) e, a partire da A un processo ciclico che non si richiude esattamente. Se il campo magnetico viene invertito ripetutamente tra i valori $\pm H_M$, l'evoluzione si assesta su cicli simmetrici di **isteresi**. Al variare di H_M varia l'ampiezza dei cicli.



Il raggiungimento della saturazione è evidenziato dal fatto che, per campi maggiori di H_M , l'incremento ΔB corrispondente ad un incremento ΔH è lo stesso che si avrebbe nel vuoto, cioè $\mu_0 \Delta H$. Il ciclo di isteresi che viene assunto come termine di paragone è quello descritto a partire dalla saturazione. I principali parametri usualmente considerati per la caratterizzazione dei legami B-H sono:

- le permeabilità relative differenziali valutate lungo la curva di prima magnetizzazione secondo la formula $\mu_{r(d)} = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{dB}{dH} \right)_{dH>0}$, in particolare quella iniziale ($B = 0, H = 0$) e quella massima;
- il valore della magnetizzazione di saturazione $P_m(s)$;
- l'induzione residua B_r che si ha quando il campo esterno viene portato a zero;
- il campo coercitivo H_c che è necessario applicare in verso opposto a B_r per ridurre a zero l'induzione;
- alcuni valori di energie specifiche del ciclo, quali l'area W_{ist} del ciclo oppure il valore del massimo del prodotto $|BH|$ lungo il ciclo.

L'area W_{ist} del ciclo di isteresi ha un significato particolare: è noto, dal Teorema di Poynting, che la variazione di densità di energia magnetica in seguito ad una variazione $d\mathbf{B}$ del campo di induzione è $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}$. Tale energia magnetica viene convertita in parte in energia conservativa ed in parte in energia dissipata (calore), secondo la relazione:

$$\int_{V_m} (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}) d\tau = dE_c + \delta E_d \quad (2.3)$$

Integrando la (2.3) su un ciclo di isteresi, si ottiene:

$$\int_{V_m} \oint (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}) d\tau = \oint dE_c + \oint \delta E_d = E_d \quad (2.4)$$

Se si considera la densità di energia dissipata (misurata in joule /ciclo·m³), la (2.4) diventa:

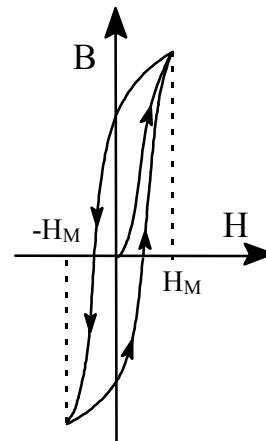
$$P_d = \oint (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}) = W_{ist} \propto B_M^{1.6} \quad (2.5)$$

La relazione di proporzionalità dell'area del ciclo di isteresi W_{ist} con una potenza del campo di induzione massimo B_M è specificata dalle Norme. L'esponente è solitamente compreso tra 1.6 e 2.

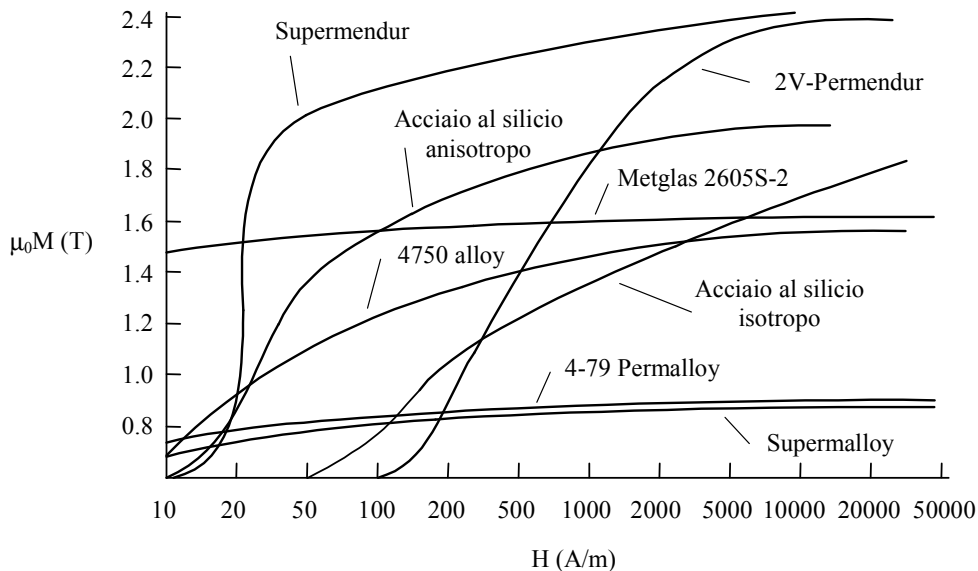
MATERIALI FERROMAGNETICI DOLCI

Un importante sottogruppo nei materiali ferromagnetici è dato dai **materiali ferromagnetici dolci** che sono caratterizzati da elevati valori della permeabilità e basso valore del campo coercitivo ($H_c < 10^3$ A/m) cui si collega il basso valore dell'area del ciclo di isteresi.

I materiali di questo gruppo vengono impiegati laddove interessa limitare al massimo le correnti necessarie per produrre e controllare i flussi di induzione (nuclei di elettromagneti, nuclei di trasformatori, rotor e statori di macchine rotanti). I materiali di questo gruppo principalmente utilizzati sono il ferro e le sue leghe con nickel, cobalto e silicio, gli acciai a basso tenore di carbonio e le ferriti dolci.



Ciclo di isteresi per materiali ferromagnetici dolci



Caratteristiche di magnetizzazione di alcuni materiali dolci.

Il ferro commercialmente puro (ferro dolce) viene utilizzato nelle applicazioni in continua (nuclei di elettromagneti). Per applicazioni in alternata, ad esempio lamierini per motori, viene utilizzato preferibilmente acciaio a basso tenore di carbonio (Low Carbon) e acciaio al silicio a grani non orientati (isotropo) a causa della loro minore conducibilità. Questi due materiali sono in assoluto i più usati nel mondo (1÷2 Mton/anno). L'isotropia fa sì che le proprietà magnetiche non varino al variare della direzione del flusso magnetico e quindi che non si abbiano problemi particolari nelle operazioni di taglio e montaggio. Questi tipi di materiale sono usati per le macchine rotanti e solo eccezionalmente per i trasformatori. Diversi sono i tipi di lamiere laminate a caldo sia per quanto riguarda lo spessore (0.5 mm oppure 0.35 mm) sia soprattutto per il tenore di silicio che può andare dall'1% al 4.5%. Per i nuclei dei trasformatori (salvo quelli di piccola potenza), in cui il peso e l'efficienza sono importanti, viene utilizzato preferibilmente acciaio al silicio a grani orientati (anisotropo). L'anisotropia offerta dalle leghe Fe - Si a cristalli orientati, a differenza delle altre leghe, è tale da presentare per il flusso una sola direzione ottimale (quella di laminazione) per la quale le caratteristiche magnetiche sono molto buone e le perdite molto basse.

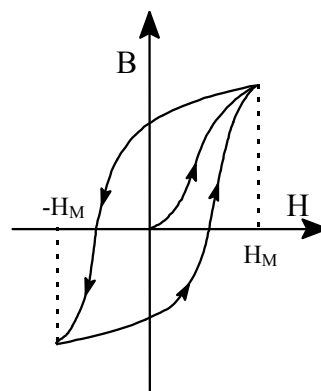
Per le applicazioni elettroniche (trasformatori ed induttori) a frequenza 1÷100 kHz sono solitamente utilizzate le leghe ferro - nickel (permalloys). Queste hanno sia una elevata permeabilità iniziale μ_i sia una duttilità sufficientemente elevata da potere formare strisce molto sottili. Le leghe ferro - cobalto, di solito con un 2% di Vanadio per migliorare la duttilità, sono utilizzate nelle applicazioni al alta temperatura a causa della loro elevata temperatura di Curie ($T_c \approx 980^\circ\text{C}$). Le leghe amorfe ferro - boro (vetri metallici) hanno una composizione del tipo $(\text{Fe, Co, Ni})_{80}(\text{B, C, Si})_{20}$ e sono ottenute per rapido raffreddamento del materiale fuso.

Le ferriti (dolci), a causa della loro conducibilità estremamente bassa, sono utilizzate per i nuclei di trasformatori ed induttori funzionanti a frequenza oltre 100 kHz. Le ferriti sono ossidi metallici sinterizzati (facilmente lavorabili) con la formula generale XFe_2O_4 . Nelle ferriti manganese - zinco X è una combinazione di Mn, Zn e Fe, mentre nelle ferriti nickel - zinco Mn è sostituito da Ni. Le ferriti MnZn hanno un capo di induzione di saturazione piuttosto elevato, ma anche una alta conducibilità, per cui sono utilizzate per applicazioni fino ad 1 MHz. Oltre 1 MHz si utilizzano solitamente le ferriti NiZn che hanno una conducibilità notevolmente più bassa.

MATERIALI FERROMAGNETICI DURI

Un altro importante sottogruppo nei materiali ferromagnetici è dato dai **materiali ferromagnetici duri** che sono caratterizzati da elevati valori della induzione residua e del campo coercitivo ($H_c > 10^4$ A/m) cui si collega l'elevato valore del prodotto $|BH|$ ottenuto nel 2° quadrante.

I materiali di questo gruppo vengono impiegati laddove interessa realizzare flussi magnetici costanti nel tempo e pertanto conviene ricorrere al magnetismo permanente invece che a circuiti percorsi da corrente.



Ciclo di isteresi per materiali ferromagnetici duri

I materiali magnetici duri commercialmente più importanti sono le ferriti (dure), le leghe ed i sinterizzati comprendenti terre rare e gli Alnico. Il mercato mondiale dei materiali magnetici duri nel 1990 è stato $1.5 \cdot 10^9$ US\$. Le quote di mercato sono state: 65% ferriti, 22% terre rare (18% composti di cobalto, 4% Nd - Fe - B), 11% Alnico, 2% altri.

Alnico. Gli Alnico (Fe - Al - Ni - Co - Cu) sono divisi in due sottogruppi: gli alnico isotropi (1-4) che contengono fino al 20% di cobalto e gli alnico anisotropi (5-9) che contengono dal 20% al 40% di cobalto. L'anisotropia viene ottenuta per raffreddamento controllato del materiale fuso in presenza di un campo magnetico esterno. Questi materiali hanno un elevato prodotto $|B H|_{\max}$ ($40 \div 70$ kJ/m³), una elevata induzione residua ($0.7 \div 1.35$ T) e modesto campo coercitivo ($40 \div 160$ kA/m). Gli Alnico sono fragili e quindi sono solitamente prodotti per fusione o sinterizzazione. L'Alnico 5 è il materiale più diffuso di questa famiglia.

Ferriti. Le ferriti (dure) sono ossidi metallici sinterizzati (facilmente lavorabili) con la formula generale $\text{XFe}_{12}\text{O}_{19}$ dove X è solitamente Ba o Sr. A differenza degli Alnico, le ferriti hanno elevato campo coercitivo ($200 \div 300$ kA/m) ma bassa induzione residua ($0.4 \div 0.5$ T). Le ferriti di stronzio sono meno diffuse delle ferriti di bario a causa del loro costo più elevato, anche se il loro campo coercitivo è circa doppio. Le ferriti sono prodotte spesso in forma legata elastica o rigida (il legante è solitamente plastica o gomma). Le ferriti legate mostrano una notevole uniformità nelle proprietà magnetiche (importante per la produzione di serie) ed hanno il notevole vantaggio di non essere fra-

gili. Lo svantaggio fondamentale è che le proprietà magnetiche peggiorano notevolmente rispetto alle ferriti non legate (il prodotto $|B H|_{\max}$ si riduce del 50%).

Terre rare. I magneti permanenti contenenti samario sono diventati commercialmente disponibili negli anni 70. I magneti SmCo_5 hanno ottenuto in laboratorio ottime prestazioni ($B_r = 1\text{ T}$, $H_c = 3200\text{ kA/m}$, $|B H|_{\max} = 200\text{ kJ/m}^3$), ma le prestazioni commerciali sono leggermente più basse ($|B H|_{\max} = 130\div 160\text{ kJ/m}^3$). I magneti $\text{Sm}_2(\text{Co, Fe, Cu, Zr})_{17}$ hanno prestazioni commerciali anche migliori ($B_r = 1.1\text{ T}$, $H_c = 520\text{ kA/m}$, $|B H|_{\max} = 240\text{ kJ/m}^3$). Questi magneti sono prodotti con la tecnologia ceramica per sinterizzazione, ma anche in forma cristallina e mescolati a leganti plastici per migliorare le caratteristiche meccaniche. I magneti permanenti contenenti neodimio sono diventati commercialmente disponibili nel 1983. I magneti $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$ hanno ottenuto in laboratorio valori record del prodotto $|B H|_{\max} = 405\text{ kJ/m}^3$, ma le prestazioni commerciali sono leggermente più basse ($|B H|_{\max} = 160\div 300\text{ kJ/m}^3$). Eccetto che per la temperatura di Curie relativamente bassa (312°C), i magneti Nd - Fe - B sono decisamente superiori a tutti gli altri materiali magnetici duri disponibili attualmente.

I magneti permanenti sono principalmente utilizzati per motori ed altoparlanti. La figura 1 mostra il progresso avvenuto in questo secolo nel campo dei materiali magnetici. Per definire le proprietà dei magneti si utilizza solitamente il prodotto $|B H|_{\max}$. In particolare è evidente la crescita spettacolare avvenuta negli anni 70 nel campo dei sinterizzati comprendenti terre rare. La figura 2 mostra le curve di demagnetizzazione per alcuni materiali ferromagnetici duri.

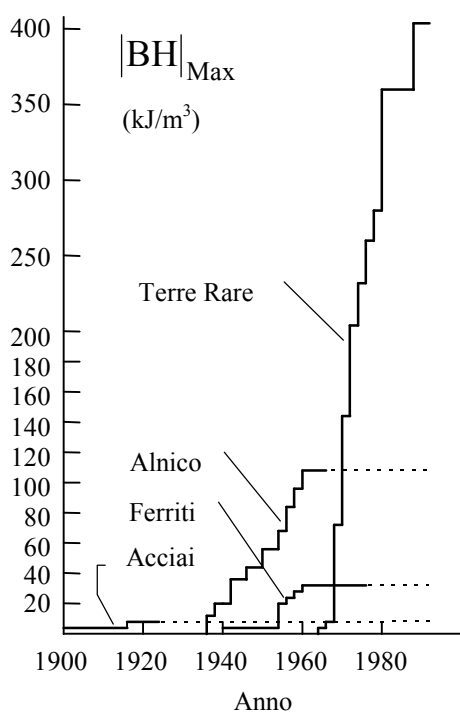


Figura 1.

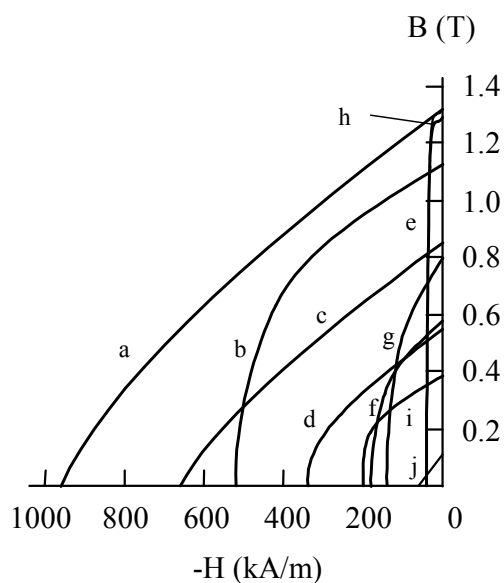


Figura 2. - Curve di demagnetizzazione per materiali ferromagnetici duri: a) $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$, b) $\text{Sm}(\text{Co, Cu, Fe, Zr})_{7.4}$, c) SmCo_5 , d) SmCo_5 legato, e) Alnico 5, f) Mn - Al - C, g) Alnico 9, h) Cr - Co - Fe, i) ferrite, j) ferrite legata.

3. CIRCUITI MAGNETICI

La determinazione di un campo magnetico richiede, in generale, la soluzione delle equazioni di Maxwell insieme alle relazioni di legame materiale per i materiali presenti. Il problema quindi coinvolge i vettori $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$ e $\mathbf{B}$ e gli operatori che compaiono sono spaziali e temporali. Dato che nella pratica la soluzione esatta spesso non è ottenibile, si sono studiate alcune semplificazioni al fine di ottenere soluzioni approssimate ma utili dal punto di vista ingegneristico. Pertanto **l'analisi del campo tridimensionale è ridotta all'analisi di un circuito equivalente**, che fornisce una soluzione accettabile nella maggior parte dei casi. L'ipotesi semplificativa introdotta è la conoscenza, a priori, della geometria del **circuito magnetico**, cioè del tubo di flusso del campo di induzione $\mathbf{B}$. Infatti, **un circuito magnetico, è una struttura composta per la maggior parte da materiale ad elevata permeabilità magnetica** che si suppone, per il momento, lineare. La presenza di materiale ad elevata permeabilità magnetica confina il flusso magnetico all'interno della struttura nello stesso modo in cui i materiali ad elevata conducibilità elettrica confinano la densità di corrente nei circuiti elettrici.

Si consideri il circuito magnetico semplice rappresentato nella figura 3. Si supponga che il materiale che compone il circuito abbia permeabilità molto maggiore di quella dell'aria circostante ($\mu \gg \mu_0$). La sezione S del materiale sia uniforme. L'eccitazione sia fornita da un avvolgimento formato da N spire percorse dalla corrente i . A causa della permeabilità elevata è possibile supporre che il campo di induzione magnetica sia confinato quasi interamente nel materiale.

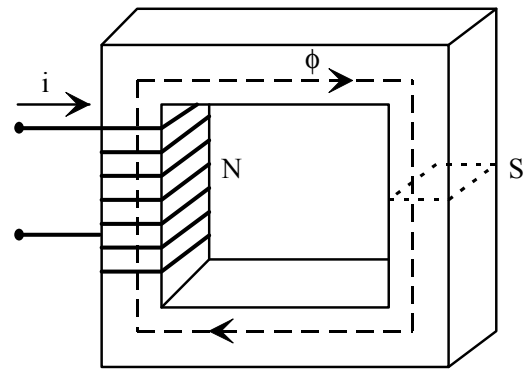


Figura 3.

Il *flusso magnetico* ϕ attraverso una superficie S è definito da: $\phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS$

Grazie alla solenoidalità di $\mathbf{B}$ e alla supposizione fatta sopra, il flusso magnetico ϕ sarà costante attraverso una qualsiasi sezione normale del materiale. Dato che la sezione è costante (escludendo i vertici) sarà lecito assumere che $\mathbf{B}$ sia uniforme sulla sezione. Questo porta ad una semplice relazione tra flusso magnetico ϕ e modulo dell'induzione magnetica B :

$$\phi = B \cdot S$$

Si definisce ora la *forza magnetomotrice* (f.m.m.) relativa ad una qualsiasi linea chiusa C concatenata con le N spire di eccitazione che passi all'interno del materiale magnetico come la corrente totale che si concatena con tale linea: $F = N i$.

Si ha quindi per la legge di Ampere: $F = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$

È possibile collegare la f.m.m. al flusso magnetico. Dalla definizione:

$$F = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \frac{\mathbf{B}}{\mu} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C (BS) \frac{d\mathbf{l}}{\mu S} = \oint_C \phi \frac{d\mathbf{l}}{\mu S} = \phi \oint_C \frac{d\mathbf{l}}{\mu S} = \mathcal{R} \phi \quad (3.1)$$

La relazione lineare tra f.m.m. e flusso magnetico appena ottenuta ($F = \mathcal{R} \phi$) è detta **Legge di Hopkinson** e rappresenta l'analogo della legge di Ohm ($V = RI$) per i circuiti magnetici. La supposizione che il campo di induzione magnetica sia confinato quasi interamente nel materiale permette di

effettuare tutti i passaggi eccetto il primo per cui si è considerata l'equazione di legame materiale lineare $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$. La grandezza $\mathcal{R}$ che compare è detta *riluttanza* del circuito ed è definita da:

$$\mathcal{R} = \oint_c \frac{dl}{\mu S} \quad (3.2)$$

Nel caso di figura, in cui la sezione S è uniforme e la permeabilità μ è costante, la riluttanza si può scrivere:

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu S}$$

dove l rappresenta la lunghezza della linea di flusso media nel materiale magnetico.

Si consideri ora il circuito magnetico rappresentato nella figura 4 in cui è stato introdotto un traferro. **Se la dimensione δ del traferro è piccola rispetto alle dimensioni della sezione normale, è possibile trascurare gli effetti di bordo.** In questo modo si trascura l'allargamento delle linee di campo ed è possibile considerare il flusso ϕ continuo anche attraverso il traferro.

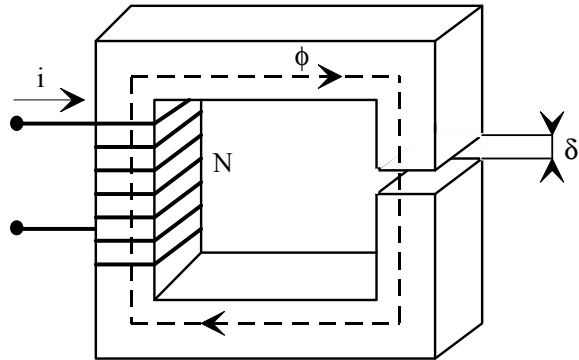


Figura 4.

Solitamente gli effetti di bordo vengono trascurati. Qualora però se ne voglia tenere conto, è possibile introdurre una sezione trasversale del traferro S_0 , aumentata rispetto ad S . Un semplice modo per ottenere S_0 è aggiungere ad S un orlo di spessore pari al traferro. Come si può notare dalla figura 5, oltre questa distanza le linee di campo sono molto deformate. Il campo di induzione nel traferro non è certamente uniforme, tuttavia si farà riferimento al valore medio B_0 del campo in aria come se il campo di induzione fosse uniforme sulla sezione S_0 .

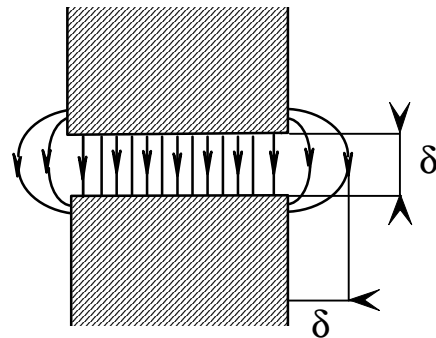


Figura 5.

Si intende ora calcolare la riluttanza associata al circuito rappresentato nella figura 4. Dalla eq.(3.2):

$$\mathcal{R} = \oint_c \frac{dl}{\mu S} = \int_{\text{materiale magnetico}} \frac{dl}{\mu S} + \int_{\text{traferro}} \frac{dl}{\mu S} = \frac{l_f}{\mu S} + \frac{\delta}{\mu_0 S_0} = \mathcal{R}_f + \mathcal{R}_0$$

La legge di Hopkinson fornisce quindi: $F = (\mathcal{R}_f + \mathcal{R}_0) \phi$

Risolvendo questa equazione per il flusso si ottiene quindi: $\phi = \frac{F}{\mathcal{R}_f + \mathcal{R}_0}$

L'analogia tra le soluzioni di circuiti elettrici e magnetici può essere portata avanti per ottenere soluzioni semplici per i flussi magnetici in configurazioni anche molto complesse, purché sia sempre possibile individuare a priori i tubi di flusso di $\mathbf{B}$. **Valgono infatti per i circuiti magnetici leggi analoghe alle leggi di Kirchhoff, purché sia possibile individuare senza ambiguità nodi, rami e maglie.** In generale quindi, definite la geometria e le caratteristiche del circuito magnetico, si intro-

duce il circuito elettrico equivalente dalla cui risoluzione si deducono, grazie all'analogia, le grandezze di interesse per il circuito magnetico. **La soluzione così ottenuta risente delle due ipotesi fatte: 1) trascurare i flussi dispersi; 2) considerare tutti i materiali lineari.** Mentre l'ipotesi (1) non comporta grossi errori, l'ipotesi (2) è da ritenersi valida solo come prima approssimazione. In realtà l'impiego nei circuiti magnetici dei materiali ferromagnetici comporta di dovere tenere in conto in modo adeguato delle loro complesse caratteristiche.

È possibile estendere al caso non lineare la teoria dei circuiti magnetici: come si è visto la curva di prima magnetizzazione non è reversibile, tuttavia generalmente quando si ha a che fare con materiali magneticamente dolci, si può fare riferimento ad essa nel ruolo di curva su cui si appiattisce il ciclo di isteresi. Questo è possibile poiché i materiali ferromagnetici dolci sono caratterizzati da cicli di isteresi molto stretti ed allungati. Spesso in luogo della curva di prima magnetizzazione si fa riferimento alla curva di magnetizzazione normale definita come luogo dei vertici dei cicli di isteresi simmetrici.

Si consideri nuovamente il circuito magnetico di figura 4, in cui si voglia tenere conto della non linearità del materiale. Sia assegnata dunque la caratteristica B-H del materiale nella forma $H=H(B)$. Si mantenga invece l'ipotesi di assenza di flussi dispersi che consente di definire a priori il tubo di flusso di **B**. È necessario dunque individuare la funzione (che si chiamerà caratteristica del circuito magnetico) che lega il flusso ϕ che attraversa una qualsiasi sezione trasversale del tubo alla forza magnetomotrice $F=NI$ generata dall'avvolgimento di eccitazione.

La determinazione della caratteristica del circuito magnetico è assai semplice nel caso in cui il nucleo sia omogeneo, la sezione costante e il traferro di piccolo spessore. Si ottiene infatti:

$$F = \int_{\text{Ferro}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\text{traferro}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H(B_{\text{Fe}})l_{\text{Fe}} + \frac{B_0}{\mu_0} \delta = H\left(\frac{\phi}{S}\right)l_{\text{Fe}} + \frac{\phi}{\mu_0 S_0} \delta = \psi_f(\phi) + \mathcal{R}_0 \phi$$

Questa relazione lega la f.m.m. di eccitazione con una funzione non lineare del flusso ϕ . La tensione magnetica nel materiale $\psi(\phi)$ è facilmente ottenibile dalla caratteristica $H(B)$ che viene assegnata solitamente tramite un grafico sperimentale.

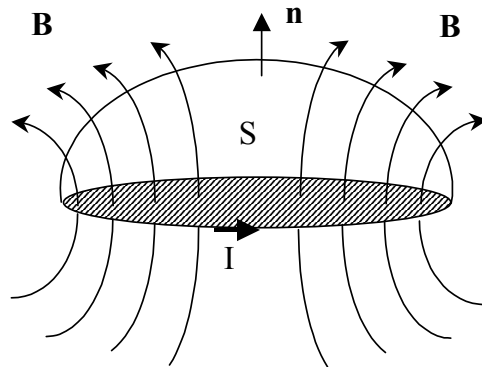
4. COEFFICIENTI DI AUTO E MUTUA INDUZIONE

In assenza di altre sorgenti, si può immaginare il campo di induzione **B** dovuto a una corrente **I**, che si suppone, per semplicità, circolante in un conduttore filiforme. In un mezzo lineare, omogeneo e isotropo (quale ad esempio il vuoto), il campo di induzione è, inoltre, proporzionale alla corrente. Sia il campo di corrente nel conduttore che quello di induzione magnetica sono solenoidali: le rispettive linee di flusso dovranno, pertanto, essere chiuse e **concatenate** le une con le altre.

In particolare, esiste una relazione di proporzionalità fra la corrente **I** ed il flusso di induzione concatenato con la linea che rappresenta il circuito entro il quale circola la corrente (vedi figura):

$$\Phi = L I \quad [4.1]$$

Il coefficiente di proporzionalità **L** è noto come **coefficiente di autoinduzione** o, più semplicemente, **autoinduttanza** del circuito. Per le convenzioni assunte, l'autoinduttanza **L** ha segno intrinsecamente positivo e valore che dipende dalla geometria del circuito e dalle proprietà del mezzo; le sue dimensioni sono di “flusso diviso una corrente”: nel SI è espresso da $\text{Wb/A} = \text{Henry [H]}$. Nel caso in cui la corrente **I** circoli in un conduttore massiccio la definizione stessa dell'autoinduttanza risulta decisamente più complessa.



Sia dato ora un sistema costituito da due circuiti quasi filiformi indicati rispettivamente con C_1 e C_2 . Supponiamo che nel primo circoli una corrente I_1 (valutata in base a un verso di riferimento arbitrariamente prefissato) e che nel secondo invece non circoli corrente. Fissiamo arbitrariamente un verso positivo su γ_2 , asse di C_2 , e detta S_2 una qualunque superficie aperta che abbia tale linea come orlo, orientiamone la normale $\mathbf{n}_2$ mediante la regola della mano destra. Vogliamo determinare il flusso del campo magnetico prodotto da I_1 concatenato con γ_2 . Ragionando come per il coefficiente di autoinduzione, risulta

$$\Phi_{21} = M_{21} I_1 \quad [4.2]$$

dove Φ_{21} rappresenta il flusso, concatenato con γ_2 , prodotto da I_1 , e M_{21} un fattore di proporzionalità avente le dimensioni di un induttanza (e misurabile quindi come L , in Henry), denominato **coefficiente di mutua induzione** del primo circuito sul secondo. M_{21} può essere maggiore o minore di zero a seconda dell'orientamento dei circuiti. Nella figura, ad esempio, l'andamento delle linee vettoriali di $\mathbf{B}$ prodotte da una corrente I_1 positiva, è tale che nei punti della superficie S_2 , $\mathbf{B}$ e $\mathbf{n}_2$ hanno verso contrario, per cui $\Phi_{21} < 0$. In questo caso il coefficiente di mutua induzione M_{21} è negativo. Se, ferma restando l'orientazione del primo circuito, si invertisse quella del secondo, e di conseguenza il verso positivo della normale a S_2 , il flusso Φ_{21} , prodotto dalla stessa corrente I_1 , risulterebbe positivo e tale sarebbe anche il coefficiente M_{21} .

Consideriamo ora una situazione simmetrica rispetto alla precedente, in cui cioè circoli corrente solo nel circuito C_2 . Ragionando come sopra si ottiene

$$\Phi_{12} = M_{12} I_2 \quad [4.3]$$

dove Φ_{12} rappresenta il flusso concatenato con C_1 prodotto da I_2 , e M_{12} è il coefficiente di mutua induzione del secondo circuito sul primo.

Si può dimostrare che $M_{21} = M_{12}$, cosicché è lecito parlare di un unico coefficiente di mutua induzione M tra i due circuiti.

Si dice che due circuiti orientati sono mutuamente accoppiati se per una corrente i_1 circolante nel primo si concatena con il secondo. Il calcolo dei coefficienti di auto e mutua induzione si può effettuare con riferimento ai flussi concatenati con ognuno di essi:

$$\Phi_{c,1} = L_1 i_1 + M i_2$$

$$\Phi_{c,2} = M i_1 + L_2 i_2$$

e pertanto:

$$L_1 = \left. \frac{\Phi_{c,1}}{i_1} \right|_{i_2=0}$$

$$M = \left. \frac{\Phi_{c,1}}{i_2} \right|_{i_1=0} = \left. \frac{\Phi_{c,2}}{i_1} \right|_{i_2=0}$$

$$L_2 = \left. \frac{\Phi_{c,2}}{i_2} \right|_{i_1=0}$$

In assenza di flussi dispersi, il calcolo dei coefficienti di auto e mutua induzione si può effettuare con riferimento al circuito magnetico individuato dal flusso ϕ che concatena entrambi gli avvolgimenti di N_1 ed N_2 spire, rispettivamente.. Infatti, il flusso totale concatenato con ognuno di essi vale:

$$\Phi_{c,1} = N_1 \phi$$

$$\Phi_{c,2} = N_2 \phi$$

Dalla legge di Hopkinson applicata al circuito magnetico si ottiene peraltro: $N_1 i_1 + N_2 i_2 = \mathcal{R} \phi$ e dunque risulta:

$$L_1 = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}} \quad M = \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} \quad L_2 = \frac{N_2^2}{\mathcal{R}}$$

5. FENOMENI DI PERDITA NEL FERRO

Un materiale ferromagnetico soggetto ad un flusso magnetico variabile nel tempo è sede di correnti parassite dette **correnti di Focault**. Facendo riferimento alla figura 5.1 il fenomeno può essere spiegato intuitivamente: ogni sezione del materiale perpendicolare al campo magnetico può essere immaginata come una serie di circuiti elettrici concentrici, ai quali è concatenato un flusso magnetico variabile nel tempo. Ciascuno dei circuiti elementari è quindi sede di una forza elettromotrice indotta e quindi di una corrente. Tale corrente è dannosa per due motivi:

- genera un campo magnetico di reazione che si oppone al campo magnetico forzante,
- è inevitabilmente associata a delle perdite per effetto Joule.

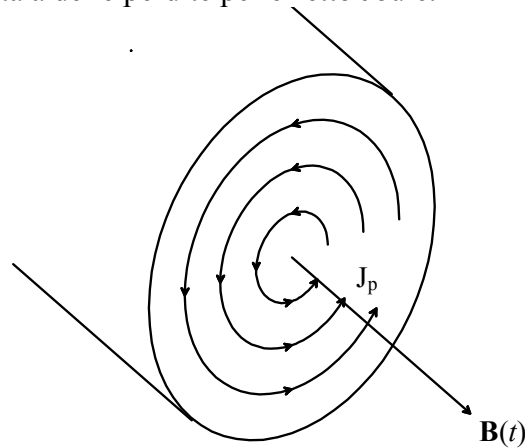


Figura 5.1. - Correnti indotte in un materiale ferromagnetico

Si consideri ora il lamierino di spessore δ di materiale ferromagnetico in figura 5.2, immerso in un campo magnetico uniforme diretto come l'asse z e variabile nel tempo con legge sinusoidale:

$$\mathbf{B}(x, y, z, t) = k B_M \cos(\omega t) \quad (5.1)$$

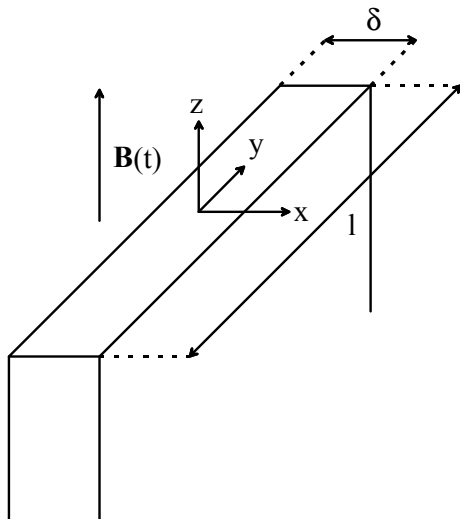


Figura 5.2.a

Lamierino in un circuito magnetico

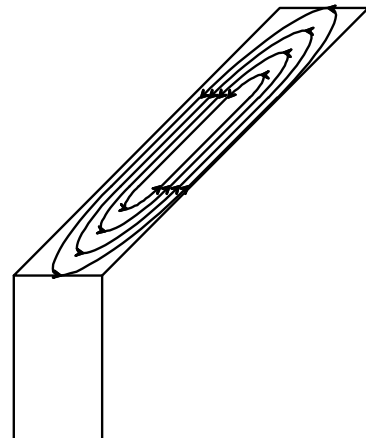


Figura 5.2.b

Distribuzione delle linee di corrente di Focault

Dalla legge di Faraday-Lenz $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ si ottiene:

$$\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = \omega B_M \sin(\omega t) \quad (5.2)$$

Supponendo ora che $l \gg \delta$, e trascurando gli effetti di bordo, (considerando cioè solo la zona centrale della sezione rettangolare, si può scrivere:

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$$

e quindi, dalla (5.2):

$$E_y = \omega B_M x \sin(\omega t) + c$$

Per considerazioni di simmetria la costante c è nulla. Si ottiene quindi:

$$E_y = \omega B_M x \sin(\omega t) \quad (5.3)$$

$$J_y = \sigma E_y = \sigma \omega B_M x \sin(\omega t) \quad (5.4)$$

Alla densità di corrente parassita J_y corrisponde una densità di potenza dissipata pari a:

$$w_J(x, t) = \sigma [\omega B_M x \sin(\omega t)]^2$$

che mediata sullo spessore δ e sul periodo $T = 2\pi / \omega$ fornisce la densità di potenza media dissipata per correnti parassite:

$$w_{cp} = \frac{1}{\delta T} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \int_0^T w(x, t) dx dt = \sigma \frac{\omega^2 B_M^2 \delta^2}{24}, [\text{watt} / \text{m}^3] \quad (5.5)$$

Dalla (5.5) si deduce immediatamente che per ridurre le perdite per correnti parassite conviene utilizzare, per la costruzione del nucleo del trasformatore, lamiere magnetiche sottili ($\delta = 0.3 \div 0.5$ mm), isolate l'una dall'altra da un foglio di materiale isolante (carte speciali, vernici sintetiche, film di silicato di sodio). Le lamiere sono costituite da ferro dolce con percentuali intorno al 3 ÷ 4% di silicio: la presenza del silicio lascia pressoché inalterate le caratteristiche magnetiche del ferro, e ne diminuisce la conducibilità, riducendo ulteriormente le perdite per correnti parassite.

Alle perdite per effetto delle correnti parassite vanno aggiunte le **perdite per isteresi**. La formula di Steinmetz fornisce la densità di energia dissipata per isteresi nel nucleo magnetico (W_{ist}):

$$W_{ist} = k_{ist} B_M^{1.6}, [\text{joule} / \text{m}^3 \cdot \text{ciclo}] \quad (5.6)$$

dove B_M è il campo d'induzione magnetica massimo del ciclo. Introducendo la frequenza f si ottiene un'espressione per la densità di potenza dissipata per unità di tempo (P_{ist}):

$$P_{ist} = k_{ist} B_M^{1.6} f, [\text{watt} / \text{m}^3] \quad (5.7)$$

La densità di potenza dissipata nel materiale ferromagnetico soggetto ad un campo d'induzione sinusoidale è quindi dato dalla somma delle potenze dissipate per isteresi e per correnti parassite:

$$P_f = P_{ist} + P_{cp} = k_{ist} f B_M^{1.6} + k_{cp} \delta^2 f^2 B_M^2, [\text{watt} / \text{m}^3]. \quad (5.8)$$

È possibile riferire le perdite all'unità di peso:

$$p_f = k'_{ist} f B_M^{1.6} + k'_{cp} \delta^2 f^2 B_M^2, [\text{watt} / \text{kg}] \quad (5.9)$$

con: $k'_{ist} = k_{ist} / \rho$, $k'_{cp} = k_{cp} / \rho$, ρ = densità del materiale ferromagnetico [m^3 / kg]. Commercialmente le lamiere in materiale ferromagnetico sono caratterizzate dalla **cifra di perdita**, definita come la potenza dissipata per kg di materiale con $B_M = 1$ T e $f = 50$ Hz. Dalla cifra di perdita, tramite la (5.9) è possibile ottenere un'indicazione delle perdite per qualsiasi induzione magnetica e frequenza.