

Progetto Nazionale MURST 2005
TECNOLOGIE INNOVATIVE AD ALTO RENDIMENTO NEL
RISCALDAMENTO AD INDUZIONE PER TRATTAMENTI TERMICI
DI BILLETTE E NASTRI DI ALLUMINIO

Sottoprogetto Unità di BOLOGNA
RISCALDAMENTO AD INDUZIONE DI BILLETTE DI ALLUMINIO
MEDIANTE ROTAZIONE IN CAMPI MAGNETICI
STAZIONARI PRODOTTI DA MAGNETI SUPERCONDUTTIVI

Marco Breschi, Massimo Fabbri, Antonio Morandi, Pier Luigi Ribani
Dipartimento di Ingegneria Elettrica, Università di Bologna
Viale Risorgimento 2, 40136, Bologna, Italia
marco.breschi@mail.ing.unibo.it
massimo.fabbri@mail.ing.unibo.it
antonio.morandi@mail.ing.unibo.it
pierluigi.ribani@mail.ing.unibo.it

Sommario Questo documento descrive il modello numerico tridimensionale, sviluppato dall'unità di Bologna, per lo studio del processo di riscaldamento ad induzione di billette di alluminio rotanti in un campo di induzione stazionario, generato da avvolgimenti esterni. Viene descritto il modello matematico che consente di calcolare, assegnata la distribuzione del campo di induzione, la densità di corrente, la potenza assorbita e la temperatura in ogni punto della billetta rotante ad ogni istante, oltre alle perdite per convezione ed irraggiamento. I risultati numerici sono ottenuti attraverso un codice di calcolo sviluppato in linguaggio FORTRAN, la cui caratteristiche input/output sono dettagliatamente descritte. La validazione dei risultati è stata effettuata attraverso il confronto con risultati analitici relativi al caso di billetta infinitamente lunga e con i risultati di codici commerciali per alcuni casi particolari. La relazione riporta un'analisi preliminare del processo di riscaldamento relativamente ad una configurazione degli avvolgimenti di eccitazione che produce un campo di induzione uniforme sulla billetta. In appendice sono riportate infine le soluzioni analitiche del problema elettromagnetico e termico utilizzate, nonché le caratteristiche fisiche dell'alluminio.

Indice

1.	Introduzione	3
2.	Modello matematico.....	5
	2.1 Problema elettromagnetico	
	2.2 Problema termico	
	2.3 Procedura di soluzione del problema dinamico accoppiato	
3.	Codice di calcolo.....	13
4.	Validazione del modello	16
	4.1 Creazione della mesh e Analisi di convergenza	
	4.2 Validazione del modello elettromagnetico mediante soluzione analitica	
	4.3 Validazione del modello termico mediante codice commerciale	
5.	Risultati numerici.....	23
6.	Appendice A: soluzioni analitiche	34
	6.1 Equivalenza formale tra gli approcci lagrangiano ed euleriano	
	6.2 Soluzione del problema elettromagnetico	
	6.3 Soluzione del problema termico	
7.	Appendice B: Proprietà dell'alluminio	50
8.	Bibliografia	53

1. Introduzione

Il riscaldamento a induzione di billette o nastri metallici destinati alla lavorazione industriale avviene mediante esposizione ad un campo magnetico variabile, appositamente prodotto attraverso un avvolgimento operante in corrente alternata. La dissipazione per effetto Joule, causata dalle correnti indotte all'interno del pezzo sotto trattamento, ne produce il riscaldamento. Tale tecnica è in uso nei processi di manifattura industriale come alternativa al riscaldamento mediante forni a combustibile fossile.

Il rendimento del processo di riscaldamento a induzione risulta molto alto quando applicato a metalli dotati di permeabilità magnetica elevata e resistività elettrica sensibilmente superiore a quella del materiale con cui si realizza l'avvolgimento induttore (rame); tipico è il caso degli acciai, il cui trattamento consente rendimenti superiori al 90%. Quando si considerano invece metalli non ferrosi come rame, alluminio e le loro leghe, caratterizzati da deboli proprietà magnetiche e da una bassa resistività, il rendimento subisce una drastica riduzione; in questo caso una considerevole quota di energia è dissipata all'interno dello stesso avvolgimento induttore e ceduta, senza possibilità di recupero, al fluido di raffreddamento.

Un riscaldatore a induzione per metalli non ferrosi presenta, a parità di taglia, un rendimento paragonabile a quello di un forno a combustibile, ma il consumo della fonte energetica primaria e le conseguenti emissioni inquinanti risultano più onerosi perché occorre considerare il rendimento del sistema di produzione e trasmissione dell'energia elettrica, che non supera il 50%. Ciononostante la tecnica di riscaldamento a induzione è largamente in uso nei processi di manifattura industriale ed è preferibile rispetto al riscaldamento mediante forni a combustibile, perché risulta veloce, sicura e priva di emissione inquinanti in sede e garantisce una migliore qualità del prodotto finito e inoltre consente di operare sottovuoto o in atmosfera controllata. È importante altresì considerare che i recenti orientamenti politici in materia di tutela dell'ambiente incentivano lo sviluppo di tecnologie per la produzione di energia elettrica da fonti rinnovabili. In questo scenario il maggiore utilizzo dell'energia elettrica nel processo produttivo, tramite l'adozione di sistemi di riscaldamento a induzione ad alto rendimento, costituisce una diretta opportunità di uso efficiente delle fonti rinnovabili nelle applicazioni industriali.

Nei moderni sistemi di riscaldamento ad induzione per metalli non ferrosi, operanti a frequenze industriali e con valori del campo magnetico nell'ordine dei 0.7 T, il rendimento non supera il 50%. Il costo annuale della potenza elettrica dissipata in un impianto da 1 MW è nell'ordine dei 100000 \$. Il dispendio energetico che si verifica nel processo di riscaldamento risulta particolarmente critico nel caso dell'alluminio, vista la crescente penetrazione di questo materiale nella produzione industriale. Infatti, grazie alle vantaggiose proprietà fisiche e alla elevata possibilità di riciclaggio, l'uso dell'alluminio, delle sue leghe e dei suoi compositi diviene sempre più diffuso anche nei settori automobilistico, meccanico, dei trasporti e delle grandi strutture civili, oltre che nei tradizionali settori aeronautico, elettrico e dei beni di consumo domestici. I prodotti finali in alluminio sono ottenuti a partire da lingotti o billette ottenuti in fonderia che vengono preriscaldati ad una temperatura di 450-500 °C prima di subire una specifica lavorazione (estrusione, laminazione, stampaggio). Durante tale fase il controllo del profilo di temperatura indotto nel pezzo in lavorazione è cruciale per garantire la qualità del prodotto finale ed evitare

scarti di materiale. La quantità di energia impiegata nei processi di riscaldamento per la trasformazione post-produzione dell'alluminio risulta quindi ingente, e lo sviluppo di tecnologie di riscaldamento ad alto rendimento produrrebbe notevoli ricadute in campo economico e ambientale.

Nei sistemi di riscaldamento ad induzione dell'alluminio un aumento del rendimento è conseguibile mediante un accurata progettazione dell'avvolgimento induttore, adottando configurazioni a più strati, ma il margine di miglioramento ottenibile è esiguo (pochi punti percentuali). Esiste un limite intrinseco nel rendimento del riscaldamento a induzione dell'alluminio, legato al fatto che le sue proprietà elettriche e magnetiche sono paragonabili a quelle del materiale con cui si realizza l'avvolgimento induttore (rame). Un miglioramento sostanziale si otterrebbe sostituendo al materiale convenzionale dell'induttore un materiale superconduttore, dotato di resistività elettrica in AC sensibilmente inferiore a quella dell'alluminio. Allo stato attuale di sviluppo, i materiali superconduttori presentano dissipazioni di potenza non trascurabile nel loro esercizio in corrente alternata. Tali perdite, tenuto conto del fattore di penalizzazione dovuto alla refrigerazione (le tipiche temperature di esercizio di questi materiali non superano i 77 K), introducono nel sistema una dissipazione complessiva paragonabile con quella che si verifica nei riscaldatori tradizionali. Il costo capitale di un tale riscaldatore è di molto superiore a quello di un riscaldatore convenzionale, di conseguenza la sua applicazione non è conveniente se il risparmio energetico è troppo esiguo. Il progresso nello sviluppo di superconduttori a basse perdite AC di prima e seconda generazione (nastrini in BSCCO con matrice in argento e nastrini compositi in YBCO rispettivamente) potrebbe però rendere conveniente la sua applicazione nel breve/medio termine. Una tecnica innovativa ad alto rendimento per il riscaldamento a induzione di billette di alluminio che può essere messa a punto nel breve termine e indipendentemente dai progressi della tecnologia dei materiali prevede l'utilizzo di superconduttori operanti in corrente continua. L'idea consiste nel far ruotare, mediante un motore di trascinamento, la billetta da riscaldare all'interno del campo magnetico stazionario, prodotto da un magnete superconduttore e orientato ortogonalmente o parallelamente all'asse della billetta. Nel caso di orientamento parallelo, affinché l'induzione sia possibile il profilo di campo deve essere non assial-simmetrico nel sistema di riferimento cilindrico solidale con la billetta (la billetta e il solenoide induttore devono essere disassati) e deve possedere un certo gradiente in direzione radiale. Le correnti indotte alla superficie della billetta generano una coppia resistente che si oppone alla rotazione e riscaldano la billetta stessa per effetto Joule. Si ha così la conversione dell'energia meccanica fornita dal motore in energia termica; poiché nell'esercizio in corrente continua le perdite all'interno del magnete superconduttore sono nulle, il rendimento del riscaldatore coincide col rendimento del motore elettrico utilizzato per mantenere in rotazione la billetta, che per potenze nell'ordine del MW supera il 90 % [Runde2002], [Runde2003], [Magnusson2003a], [Magnusson2003b], [Magnusson2003c], [Hiltunen2005], [Magnusson2005].

2. Modello matematico

2.1 Problema Elettromagnetico

Consideriamo il sistema schematicamente riportato in figura 2.1.1, costituito da un corpo cilindrico conduttore (billetta) rotante con velocità angolare ω costante in una regione in cui è presente un campo magnetico stazionario $\mathbf{B}^{\text{ext}}$ prodotto da bobine esterne.

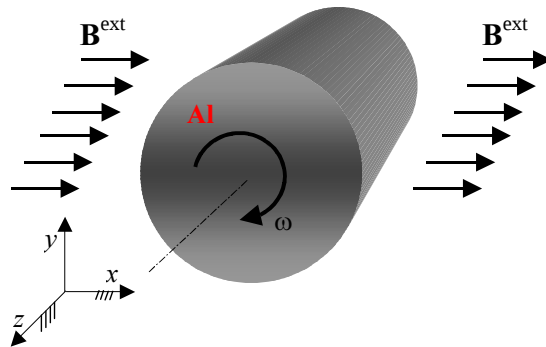


Figura 2.1.1 – Schema di principio del sistema proposto.

In condizioni di regime, ossia al termine della fase di avviamento in cui si verificano i transitori meccanico, elettromagnetico e termico, la distribuzione di corrente all'interno della billetta, espressa rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale solidale col laboratorio, risulta stazionaria. In queste condizioni sussiste la seguente relazione per il campo elettrico $\mathbf{E}$ all'interno della billetta

$$(2.1) \quad \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

Introducendo il potenziale elettrico scalare ϕ dalla (2.1) otteniamo

$$(2.2) \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi$$

La relazione che lega la densità di corrente $\mathbf{J}$ al campo elettrico locale $\mathbf{E}$ è esprimibile come

$$(2.3) \quad \mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

dove il termine $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ rappresenta la forza elettromotrice indotta di origine mozionale ¹. Sostituendo la (2.3) nella (2.2) otteniamo

¹ Applicando il teorema di Poynting ad una superficie chiusa che racchiude la billetta si ottiene il seguente bilancio energetico

$$(2.4) \quad -\nabla\varphi = \rho \mathbf{J} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

A questo punto è conveniente scomporre l'induzione magnetica totale $\mathbf{B}$ in ogni punto della billetta nel contributo $\mathbf{B}^{\text{ext}}$ prodotto dalle correnti che circolano nelle bobine esterne e nel contributo $\mathbf{B}^{\text{int}}$ prodotto dalle correnti che circolano all'interno della billetta, i.e.

$$(2.5) \quad -\nabla\varphi + \mathbf{v} \times \mathbf{B}^{\text{ext}} = \rho \mathbf{J} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}^{\text{int}}$$

Esprimendo la velocità del generico punto che occupa la posizione $\mathbf{x}$ attraverso il prodotto vettoriale tra la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ e la posizione stessa otteniamo

$$(2.6) \quad -\nabla\varphi + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{B}^{\text{ext}} = \rho \mathbf{J} - (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{B}^{\text{int}}$$

Introduciamo adesso la suddivisione del volume occupato dalla billetta in numero finito N_E di elementi tridimensionali. Sia N_C il numero di facce della suddivisione che possono essere attraversate da corrente (ossia tutte le facce meno quelle poste sul contorno). Assumiamo che la densità di corrente $\mathbf{J}$ sia uniforme in ogni elemento. Attraverso un procedimento di minimo errore è possibile esprimere il vettore $\mathbf{J}$ in funzione del vettore $\mathbf{i}$ delle N_C correnti che attraversano la facce della discretizzazione mediante la seguente relazione lineare

$$(2.7) \quad \mathbf{J} = [\mathbf{K}] \mathbf{i}$$

dove la matrice $[\mathbf{K}]$ è una matrice sparsa dipendente dal punto e uniforme per elementi, cioè i suoi elementi non cambiano per tutti i punti $\mathbf{x}$ appartenenti al medesimo elemento geometrico della discretizzazione.

Consideriamo ora l'equazione (2.6); integrando entrambi i membri lungo un percorso che congiunge i centri $\mathbf{x}_h$ e $\mathbf{x}_k$ di due elementi adiacenti, passante per il centro della faccia condivisa e orientato da $\mathbf{x}_h$ a $\mathbf{x}_k$ si ottiene

$$(2.8) \quad -\int_{\mathbf{x}_h}^{\mathbf{x}_k} \nabla\varphi \cdot d\mathbf{x} + \int_{\mathbf{x}_h}^{\mathbf{x}_k} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{B}^{\text{ext}} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{x}_h}^{\mathbf{x}_k} \rho \mathbf{J} \cdot d\mathbf{x} - \int_{\mathbf{x}_h}^{\mathbf{x}_k} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{B}^{\text{int}} \cdot d\mathbf{x}$$

Applicando alcune manipolazioni algebriche alla (2.8) si ottiene

$$(2.9) \quad \varphi(\mathbf{x}_h) - \varphi(\mathbf{x}_k) + \mathbf{B}^{\text{ext}} \cdot \int_{\mathbf{x}_h}^{\mathbf{x}_k} d\mathbf{x} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) = \int_{\mathbf{x}_h}^{\mathbf{x}_k} \rho \mathbf{J} \cdot d\mathbf{x} - \mathbf{B}^{\text{int}} \cdot \int_{\mathbf{x}_h}^{\mathbf{x}_k} d\mathbf{x} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})$$

Utilizzando l'equazione (2.7) la (2.9) può essere riscritta nella seguente forma concisa

$$\int_{\tau_{\text{billet}}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{J} \times \mathbf{B} \, d\tau = \int_{\tau_{\text{billet}}} \frac{\mathbf{J}^2}{\sigma} \, d\tau$$

Tale equazione stabilisce che il lavoro meccanico compiuto sulla billetta è integralmente convertito in calore per effetto Joule al suo interno.

$$(2.10) \quad \varphi_h - \varphi_k + \omega v^{\text{ext}} = \mathbf{r}_{hk}^t \mathbf{i} - \omega \mathbf{m} \mathbf{e}_{hk}^t \mathbf{i}$$

dove ω è il modulo della velocità angolare, $\mathbf{m} \mathbf{e}_{hk}$ è il vettore dei coefficienti delle forze elettromotrici mozionali e l'apice t denota l'operatore di trasposizione. L'equazione (2.10) può essere interpretata come l'equazione dei bilancio delle tensioni del ramo circuitale rappresentato in figura in cui sono presenti un termine resistivo (dissipativo), un generatore di tensione indipendente che schematizza il contributo della forza elettromotrice mozionale associata al campo prodotto dalle bobine esterne e un generatore di tensione controllato che schematizza il contributo della forza elettromotrice mozionale associata al campo prodotto dalle correnti che circolano all'interno della billetta [Morandi2002], [Morandi2004], [Fabbri2004].

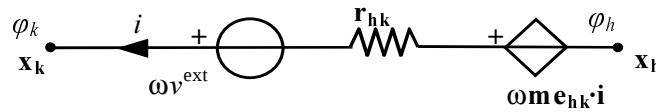


Figura 2.1.2 – Interpretazione circuitale della (10)

Un'equazione del tipo (2.10) può essere associata ad ognuna delle N_C facce della mesh che discretizza il volume in cui circola la corrente. L'insieme delle N_C equazioni indipendenti può essere scritto nella seguente forma matriciale

$$(2.11) \quad [\mathbf{A}]^t \boldsymbol{\varphi} + \omega \mathbf{v}^{\text{ext}} = [\mathbf{R}] \mathbf{i} - \omega [\mathbf{M} \mathbf{E}] \mathbf{i}$$

dove $[\mathbf{A}]$ è la matrice di incidenza ramo-nodo del grafo orientato ottenuto associando un nodo ad ognuno dei centri degli N_E elementi della discretizzazione e un ramo ad ognuno degli N_C percorsi di integrazione orientati (ognuno di essi associato ad una faccia percorsa da corrente). Nella costruzione della matrice si esclude un nodo scelto ad arbitrio al quale si assegna il ruolo di nodo di riferimento e gli si attribuisce un potenziale elettrico nullo. Il vettore $\boldsymbol{\varphi}$ rappresenta l'insieme degli $N_E - 1$ potenziali in tutti i nodi meno quello di riferimento.

Dalla solenoidalità del vettore $\mathbf{J}$ si ricava inoltre che la somma algebrica delle correnti attraverso tutte le facce di un singolo elemento risulta nulla; tale proprietà fornisce un ulteriore insieme di $N_E - 1$ equazioni indipendenti nelle correnti incognite che può essere scritto utilizzando la matrice di incidenza $[\mathbf{A}]$ nella seguente forma concisa

$$(2.12) \quad [\mathbf{A}] \mathbf{i} = \mathbf{0}$$

Dalle equazioni (2.11) e (2.12) segue che l'intero volume occupato dalla billetta può essere schematizzato attraverso una rete elettrica equivalente avente N_C rami e N_E nodi. Le incognite circuitali sono le N_C correnti attraverso le facce e gli $N_E - 1$ potenziali in tutti i nodi meno quello di riferimento. Il sistema risolvibile della rete elettrica può essere scritto come

$$(2.13) \quad \begin{pmatrix} [\mathbf{A}] & \mathbf{0} \\ [\mathbf{R}] - \omega[\mathbf{ME}] & -[\mathbf{A}]^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \omega \mathbf{v}^{\text{ext}} \end{pmatrix}$$

Il sistema (2.13), lineare nelle incognite $\mathbf{i}$ e φ , non può essere risolto autonomamente perché non tutti i suoi parametri sono determinabili; infatti, sebbene le matrici $[\mathbf{A}]$ e $[\mathbf{ME}]$ nonché il vettore $\mathbf{v}^{\text{ext}}$ siano deducibili, una volta scelta la discretizzazione, esclusivamente sulla base delle dimensioni geometriche della billetta e delle bobine esterne (e della corrente in esse circolante), per la determinazione della matrice $[\mathbf{R}]$ dei coefficienti resistivi è necessario conoscere la distribuzione di temperatura all'interno della billetta in quanto il parametro resistività ρ che compare all'interno dell'equazione è dipendente da questa. Per evidenziare tale circostanza è opportuno riscrivere il sistema (2.13) nella seguente forma

$$(2.14) \quad \begin{pmatrix} [\mathbf{A}] & \mathbf{0} \\ [\mathbf{R}(\mathbf{T})] - \omega[\mathbf{ME}] & -[\mathbf{A}]^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \omega \mathbf{v}^{\text{ext}} \end{pmatrix}$$

dove $\mathbf{T}$ è il vettore delle temperature nei centri degli elementi.

2.2 Problema Termico

Il problema elettromagnetico finora descritto non può essere risolto se non è nota la distribuzione della temperatura (T) all'interno della billetta a causa della dipendenza da T della resistività del materiale. Per il calcolo della distribuzione di temperatura consideriamo la relazione di conservazione dell'energia espressa in forma locale come

$$(2.15) \quad \gamma c \frac{\partial}{\partial t} T + \nabla \cdot \mathbf{q} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$$

dove $\mathbf{q}$ è la densità di flusso termico e γ e c sono la densità di massa e il calore specifico del materiale rispettivamente; entrambi questi parametri dipendono in generale dalla temperatura. Si trascura tuttavia la dipendenza da T della densità di massa. La densità di flusso $\mathbf{q}$ può essere espressa in funzione della temperatura attraverso la legge di Fourier:

$$(2.16) \quad \mathbf{q} = -\nabla \int_{T_0}^T k dT$$

dove k rappresenta la conducibilità termica e T_0 un valore di riferimento arbitrario.

Assumiamo lo scambio termico con l'ambiente esterno che si verifica sul contorno della billetta avvenga sia per convezione che per irraggiamento e sia quindi esprimibile come

$$(2.17) \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} = h(T - T_{\text{far}}) + \varepsilon \sigma_0 (T^4 - T_{\text{far}}^4)$$

dove h e ε rappresentano il coefficiente di scambio termico e l'emissività, rispettivamente, e sono in generale dipendenti dalla temperatura, σ_0 rappresenta la costante di Stefan-Boltzmann e T_{far} rappresenta la temperatura di equilibrio lontano dalla billetta.

Consideriamo ora la suddivisione del volume occupato dalla billetta in numero finito N_E di elementi tridimensionali già introdotta per la discretizzazione del problema elettromagnetico. Assumiamo che all'interno di ogni elemento i della suddivisione la temperatura sia uniforme con valore pari T_i . Tale assunzione costituisce una approssimazione tanto più accettabile quanto più ridotte sono le dimensioni degli elementi. Integrando l'equazione di Fourier (2.16) lungo un percorso che congiunge i centri $\mathbf{x}_h$ e $\mathbf{x}_k$ di due elementi adiacenti e assumendo che il vettore $\mathbf{q}$ lungo il percorso di integrazione sia orientato parallelamente al segmento che congiunge i due vertici ed abbia modulo uguale al rapporto tra il flusso termico Q_{hk} attraverso la faccia condivisa e l'area S_{hk} della faccia stessa, si ottiene

$$(2.18) \quad \frac{Q_{hk}}{S_{hk}} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_h\| = - \int_{T_h}^{T_k} k dT$$

dove T_h e T_k sono le temperature dei due elementi. Un'equazione del tipo (2.18) può essere scritta per ognuna delle N_C facce interne della discretizzazione; l'insieme completo delle equazioni di questo tipo può essere espresso nella seguente forma concisa

$$(2.19) \quad \mathbf{Q}_I = [\mathbf{G}_I] \mathbf{T}$$

dove $\mathbf{T}$ è il vettore delle temperature degli elementi della discretizzazione, $\mathbf{Q}_I$ è il vettore dei flussi termici attraverso le facce interne e $[\mathbf{G}_I]$ è una matrice di coefficienti dipendenti dal vettore $\mathbf{T}$ e dimensionalmente omogenei con una conduttanza termica.

Integrando l'equazione (2.17) sulla superficie occupata dalla generica faccia j , posta sul contorno della billetta e appartenente all'elemento i avente temperatura al centro T_i , otteniamo

$$(2.20) \quad Q_j = h(T_i - T_{far}) + \varepsilon \sigma_0 (T_i^4 - T_{far}^4)$$

dove si è assunto che la temperatura sulla faccia j sia uguale a quella al centro dell'elemento i e i parametri h ed ε sono valutati in corrispondenza della temperatura T_i . Un'equazione del tipo (2.20) può essere scritta per ognuna delle N_B facce poste sul contorno della discretizzazione; l'insieme completo delle equazioni di questo tipo può essere espresso nella seguente forma concisa

$$(2.21) \quad \mathbf{Q}_B = [\mathbf{G}_B] \mathbf{T} - \mathbf{g}_B(\mathbf{T}, T_{far})$$

dove $\mathbf{Q}_B$ è il vettore dei flussi termici attraverso le facce al contorno e $[\mathbf{G}_B]$ è una matrice sparsa di coefficienti dipendenti dal vettore $\mathbf{T}$ e dimensionalmente omogenei con una conduttanza termica, $\mathbf{g}_B$ è un vettore i cui elementi dipendono da $\mathbf{T}$ e T_{far} . Le equazioni (2.19) e (2.21) stabiliscono un insieme di equazione che lega il vettore $\mathbf{Q}$ dei flussi termici attraverso tutte le facce della discretizzazione al vettore $\mathbf{T}$ delle temperature nei centri degli elementi, i.e.

$$(2.22) \quad \mathbf{Q} = \mathbf{F}(\mathbf{T}, T_{far})$$

Integrando la legge di conservazione dell'energia (2.15) sul dominio occupato dal generico elemento i della discretizzazione otteniamo

$$(2.23) \quad \gamma_i c_i \frac{d}{dt} T_i V_i + \sum_{j=1}^{NF_i} Q_j = \rho J_i^2 V_i$$

dove V_i è il volume dell' i -esimo elemento, NF_i è il numero delle sue facce, Q_j è il flusso termico attraverso j -esima faccia e J_i è il modulo della densità di corrente assunta uniforme sull'elemento ed esprimibile in funzione del vettore $\mathbf{i}$ delle correnti che circolano attraverso le facce della discretizzazione. I parametri resistività elettrica ρ_i e calore specifico c_i sono valutati in corrispondenza della temperatura T_i . Assemblando le equazioni del tipo (2.23) relative a tutti gli elementi otteniamo

$$(2.24) \quad \gamma[\mathbf{C}(\mathbf{T})] \frac{d}{dt} \mathbf{T} + [\mathbf{A}]\mathbf{Q} = \mathbf{P}(\mathbf{i}, \rho(\mathbf{T}))$$

dove $[\mathbf{C}]$ è la matrice diagonale dei prodotti $\gamma_i c_i V_i$, dimensionalmente omogenei con una capacità termica, dipendente dal vettore $\mathbf{T}$, $[\mathbf{A}]$ è la matrice di incidenza faccia-elemento della discretizzazione adottata. Sostituendo l'equazione (2.22) nella (2.24) si ottiene infine l'equazione di stato del problema termico

$$(2.25) \quad \gamma[\mathbf{C}(\mathbf{T})] \frac{d}{dt} \mathbf{T} = -[\mathbf{A}]\mathbf{F}(\mathbf{T}, T_{far}) + \mathbf{P}(\mathbf{i}, \rho(\mathbf{T}))$$

Le equazioni accoppiate (2.14) e (2.25), noto il valore iniziale delle temperature nei centri degli elementi, consentono di risolvere il problema dinamico accoppiato elettromagnetico-termico, ossia consentono di determinare, secondo la procedura descritta nella sezione successiva, l'evoluzione della distribuzione della densità di corrente e della temperatura all'interno della billetta [Fabbri2005a], [Fabbri2005b].

2.3 Procedura di soluzione del problema dinamico accoppiato

Le equazioni accoppiate (2.14) e (2.25) costituiscono un sistema algebrico-differenziale di $N_C + 2N_E - 1$ equazioni in altrettante incognite rappresentate dalle N_C correnti attraverso le facce della discretizzazione, dagli $N_E - 1$ potenziale nei centri degli elementi meno uno assunto come nodo di riferimento e dalle N_E temperature nei centri degli elementi. Tale sistema consente di calcolare l'evoluzione della distribuzione di corrente e di temperatura all'interno della billetta rotante se è noto lo stato termico iniziale. Consideriamo infatti un generico istante t_0 in cui, a partire da una condizione di quiete in cui non circola nessuna corrente, la billetta viene messa in rotazione con velocità ω all'interno del campo magnetico prodotto dalle bobine esterne e trascuriamo il transitorio meccanico, supponiamo cioè che il tempo necessario alla billetta per portarsi alla velocità di regime sia trascurabile. Sia $\mathbf{T}_0$ il vettore delle temperature all'istante iniziale, i.e.

$$(2.26) \quad \mathbf{T}(t_0) = \mathbf{T}_0$$

Sia inoltre $\mathbf{i}_0 = \mathbf{0}$ il vettore delle correnti all'istante iniziale, i.e.

$$(2.27) \quad \mathbf{i}(t_0) = \mathbf{i}_0 = \mathbf{0}$$

Ci proponiamo di calcolare i valori $\mathbf{i}(t_0 + \Delta t)$ e $\mathbf{T}(t_0 + \Delta t)$ dei vettori delle correnti e delle temperature rispettivamente all'istante $t_0 + \Delta t$. Assumiamo che l'ampiezza dell'intervallo di integrazione Δt sia molto maggiore della più grande tra le costanti di tempo caratteristica del problema elettromagnetico; sotto tale ipotesi si può ritenere che la distribuzione di corrente all'interno della billetta raggiunga immediatamente il valore di regime calcolabile attraverso la (2.14), i.e.

$$(2.28) \quad \begin{pmatrix} [\mathbf{A}] & \mathbf{0} \\ [\mathbf{R}(\mathbf{T}(t_0))] - \omega[\mathbf{ME}] & -[\mathbf{A}]^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i}(t_0 + \Delta t) \\ \varphi(t_0 + \Delta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \omega \mathbf{v}^{\text{ext}} \end{pmatrix}$$

Assumiamo ora che durante l'intervallo di integrazione la resistività sia costante in ogni elemento della mesh e abbia il valore corrispondente alla locale temperatura. Assumiamo inoltre che durante l'intervallo Δt la densità di potenza sia costante in ogni elemento della mesh e abbia valore $\mathbf{P}_{\text{med}}$ dato dalla media dei valori corrispondenti alle distribuzioni di corrente $\mathbf{i}(t_0)$ e $\mathbf{i}(t_0 + \Delta t)$, i.e.

$$(2.29) \quad \mathbf{P}_{\text{med}} = \frac{1}{2} [\mathbf{P}(\mathbf{i}(t_0), \rho(\mathbf{T}(t_0))) + \mathbf{P}(\mathbf{i}(t_0 + \Delta t), \rho(\mathbf{T}(t_0)))]$$

Sotto le ipotesi introdotte il vettore delle temperature all'istante $t_0 + \Delta t$ può essere determinate risolvendo il seguente problema di Cauchy

$$(2.30) \quad \begin{cases} \mathbf{T}(t_0) = \mathbf{T}_0 \\ \gamma[\mathbf{C}(\mathbf{T})] \frac{d}{dt} \mathbf{T} = -[\mathbf{A}] \mathbf{F}(\mathbf{T}, T_{\text{far}}) + \mathbf{P}_{\text{med}} \end{cases} \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta t$$

A questo punto è necessario introdurre un criterio di verifica dell'accuratezza dei risultati ottenuti nell'ambito dell'intervallo di tempo considerato; poiché il sistema (2.28) è valido solo nell'ipotesi che la resistività ρ si mantenga costante durante l'intervallo di integrazione la soluzione può essere accettata solo se è verificata la condizione

$$(2.31) \quad 100 \frac{\rho(\mathbf{T}(t_0 + \Delta t)) - \rho(\mathbf{T}(t_0))}{\rho(\mathbf{T}(t_0))} \leq \Delta \rho_{\text{max} \%}$$

dove $\Delta \rho_{\text{max} \%}$ è un parametro arbitrario da cui dipende l'accuratezza della soluzione. Se la condizione (2.31) non è verificata, l'intervallo di integrazione Δt scelto non è accettabile e la soluzione del sistema (2.30) deve essere ricalcolata con un l'intervallo di integrazione $\Delta t'$ ridotto rispetto al precedente e definito come

$$(2.32) \quad \Delta t' = \alpha \Delta t$$

dove α è un parametro arbitrario minore di 1.

Al fine di ridurre il tempo di calcolo occorre considerare anche che se la variazione di resistività che interviene al termine del Δt scelto è contenuta al di sotto di un certo valore, allora l'intervallo di integrazione scelto è troppo cautelativo e nel passo successivo può essere allargato; quantitativamente, se si verifica la condizione

$$(2.33) \quad 100 \frac{\rho(T(t_0 + \Delta t)) - \rho(T(t_0))}{\rho(T(t_0))} \leq \Delta \rho_{\min \%}$$

dove $\Delta \rho_{\min \%}$ è un parametro arbitrario, convenientemente minore di $\Delta \rho_{\max \%}$ per non innescare instabilità nella procedura, l'intervallo di integrazione $\Delta t'$ da adoperare nel passo successivo può essere definito come

$$(2.34) \quad \Delta t' = \beta \Delta t$$

dove β è un parametro arbitrario maggiore di 1.

3. Il codice di calcolo

Il modello numerico descritto nelle precedenti sezioni è implementato mediante un codice di calcolo sviluppato in linguaggio FORTRAN. I dati di input sono acquisiti dal codice attraverso il file “*input_data.txt*” di seguito descritto.

I dati geometrici della billetta vengono immessi nella sezione “geometric data of the conducting region”. Si prevede la possibilità di trattare sia geometrie tubolari che cilindriche; nell’ultimo caso il parametro RRI_EM deve essere posto uguale a zero.

```
=====
geometric data of the conducting region
0.0D-3          !inner radius          RRI_EM
100.0D-3        !outer radius          RRE_EM
1000.0D-3       !height                HEIGHT_EM
=====
```

La regione conduttiva viene suddivisa in un numero N_SECTIONS di sezioni in direzione assiale; Ogni sezione viene scomposta in direzione radiale in un numero N_LAYERS di strati concentrici. Inoltre ogni anello è suddiviso lungo la direzione azimutale in un numero N_SECTORS di settori di uguale apertura. Maggiori dettagli relativi alla creazione della mesh sono riportati nella sezione 4.1. I parametri N_SECTIONS, N_LAYERS e N_SECTORS della suddivisione vengono immessi nella sezione “data of the mesh of the conducting region”:

```
=====
data of the mesh of the conducting region
16      !N_SECTORS
7       !N_LAYERS
11      !N_SECTIONS
=====
```

Se la geometria della billetta oppure la mesh utilizzata non sono variate rispetto alla corsa eseguita precedentemente non è necessario aggiornare i coefficienti geometrici del problema elettrico, con un notevole risparmio in termini di tempo di calcolo. Tale informazione viene trasmessa al codice mediante la seguente sezione.

```
=====
are the mesh or the geometry of the electric problem
modified with respect to the last run?
0       !I_MOD_EM          (1=yes)
=====
```

Sottoprogetto Unità di BOLOGNA

I dati geometrici degli avvolgimenti che impongono il campo esterno vengono immessi nella sezione “data of the inducing coil” e “data of the tape”

```
=====
number of inducing coils
6                !NCOILS
=====
data of the inducing coils
COIL1      COIL2      COIL3      COIL4      COIL5      COIL6
625.0D-3   -625.0D-3   150.0D-3   -150.0D-3   150.0D-3   -150.0D-3   !XXLC
0.0D0      0.0D0      0.0D0      0.0D0      0.0D0      0.0D0      !YYLC
0.0D0      0.0D0      -500.0D-3   -500.0D-3   500.0D-3   500.0D-3   !ZZLC
1.571D0    1.571D0    1.571D0    1.571D0    1.571D0    1.571D0    !FSTEAL
1.571D0    1.571D0    1.571D0    1.571D0    1.571D0    1.571D0    !SNDEAL
1300.0D-3  1300.0D-3    40.0D-3    40.0D-3    40.0D-3    40.0D-3    !RML
200.0D-3   200.0D-3    25.0D-3    25.0D-3    25.0D-3    25.0D-3    !SZL
100.0D-3   100.0D-3    15.0D-3    15.0D-3    15.0D-3    15.0D-3    !SRL
=====
applied fields (centers of the coils)
COIL1      COIL2      COIL3      COIL4      COIL5      COIL6
0.10D0     0.1D0     0.0D0     0.0D0     0.0D0     0.0D0      !B_APPLIED
=====
```

Per il lancio di una simulazione è necessario inoltre specificare la temperatura iniziale, il tempo di simulazione, l'intervallo di integrazione iniziale, la massima temperatura ammissibile (raggiunta la quale la simulazione si interrompe) e la velocità angolare. I parametri della procedura di soluzione del problema dinamico accoppiato descritta nella sezione 2.3 sono specificati nella sezione “parameters of the numerical solution procedure”. In particolare il parametro RES_PERC_VAR_MAX corrisponde al valore $\Delta\rho_{\max\%}$ della relazione (31), il parametro RES_PERC_VAR_MIN corrisponde al valore $\Delta\rho_{\min\%}$ della relazione (33), il parametro REDUCTION_FACTOR corrisponde al valore α della relazione (32) e il parametro ENLARGEMENT_FACTOR corrisponde al parametro β della relazione (34). Si specifica inoltre l'intervallo di integrazione massimo ammissibile ai fine dell'immagazzinamento dei risultati. Il codice assume automaticamente il periodo di rotazione della billetta come intervallo di integrazione minimo ammissibile. Durante la simulazione il codice immagazzina, all'istante di simulazione corrente, lo stato elettrico (ossia i vettori $\mathbf{i}$ e φ) e lo stato termico (vettore $\mathbf{T}$) nei files “*iandfi_0.txt*”, e “*temperature_0.txt*” rispettivamente.

Sottoprogetto Unità di BOLOGNA

È possibile fare in modo che la simulazione che si desidera effettuare assuma lo stato finale prodotto dalla simulazione precedente come stato iniziale ponendo uguale ad 1 il parametro I_INITIAL_STATE.

```
=====
initial temperature
300.0D0          !INITIAL_TEMPERATURE
=====
parameters of the simulation
1.0D4            !TIME_FINAL
1.0D0            !DELTA_TIME_EM (initial)
=====
admissible temperature
773.15D0         !TEMP_ADMISSIBLE
=====
angular velocity
0.0D0            !ANGULAR_VELOCITY(1) (rpm)
0.0D0            !ANGULAR_VELOCITY(2) (rpm)
2000.0D0         !ANGULAR_VELOCITY(3) (rpm)
=====
parameters of the numerical solution procedure
1.0D0            !RES_PERC_VAR_MIN          (percentage variation)
3.0D0            !RES_PERC_VAR_MAX          (percentage variation)
20.0D0           !DELTA_TIME_MAX            (maximum time step)
0.5D0            !REDUCTION_FACTOR          (reduction factor)
1.2D0            !ENLARGEMENT_FACTOR        (enlargement factor)
=====
do you have a non trivial initial solution? (1=yes)
0                !I_INITIAL_STATE
=====
```

Al termine della simulazione il codice produce i seguenti file di output

- file “*Tminmax_Jzmax_Ptot.txt*”: ogni riga di questo file contiene l’istante corrente di simulazione, le temperature minima e massima all’interno della billetta, il salto termico assoluto, la massima densità di corrente in direzione assiale e la potenza totale iniettata nella billetta.

- file “*J_Q_T.txt*”: questo file immagazzina, per ogni istante di simulazione, le tre componenti della densità di corrente, la potenza termica dissipata e la temperatura di ogni elemento della discretizzazione. Gli elementi sono individuati attraverso l’indice con cui sono identificati nel programma e attraverso le coordinate del centro.

- file “*iandfi_0.txt*”: questo file è composto da una sola riga che contiene l’ultimo istante di simulazione, le correnti che circolano attraverso le facce della discretizzazione e i potenziali elettrici in tutti i nodi meno quello di riferimento.

- file “*temperature_0.txt*”: questo file è composto da una sola riga che contiene l’ultimo istante di simulazione e le temperature nei centri degli elementi (stato termico corrente).

4. Validazione del modello

4.1 Creazione della mesh e analisi di convergenza

La regione conduttiva viene suddivisa in un numero $N_SECTIONS$ di sezioni in direzione assiale; al fine di generare una discretizzazione più fitta nella regione superficiale della billetta dove la distribuzione di corrente è caratterizzata da una maggiore variabilità nello spazio, la profondità delle sezioni varia secondo una serie esponenziale di ragione modificabile attraverso i parametri interni del codice. Ogni sezione viene scomposta in direzione radiale in un numero N_LAYERS di strati concentrici. Analogamente al caso delle sezioni anche la profondità degli strati varia secondo una serie esponenziale di ragione modificabile attraverso i parametri interni del codice. Inoltre ogni anello è suddiviso lungo la direzione azimutale in un numero $N_SECTORS$ di settori di uguale apertura, ognuno dei quali contiene un elemento prismatico a base triangolare al vertice e $N_LAYERS - 1$ elementi prismatici a base quadrangolare (trapezia).

I risultati numerici presentati in questa relazione sono stati ottenuti attraverso una mesh composta da 1232 elementi, suddivisi in 11 sezioni in direzione assiale, 7 strati in direzione radiale e 16 settori in direzione azimutale, come mostrato schematicamente nelle figure 4.1.1 e 4.1.2.

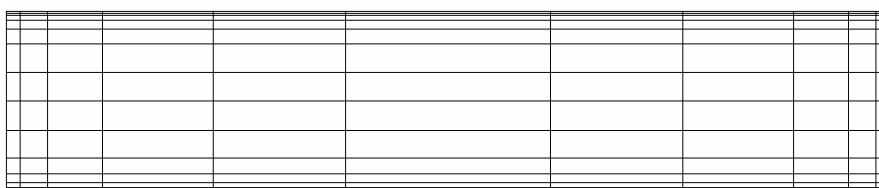


Figura 4.1.1 – Vista laterale della mesh 16-7-11.

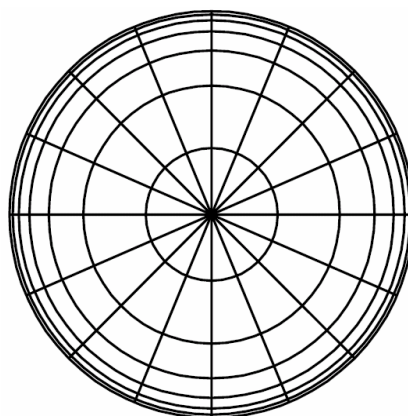


Figura 4.1.2 – Vista frontale della mesh 16-7-11.

Tale mesh consente di ottenere la convergenza della soluzione numerica del problema accoppiato elettromagnetico-termico. A titolo di esempio nella tabella 4.1.1 è riportato, in funzione del numero di elementi della mesh usata per la simulazione, il valore di regime

$J_z^{\max}$ della componente assiale massima della corrente che si stabilisce nella sezione centrale della billetta rotante con velocità 5000 rpm in un campo magnetico uniforme di 0.3 T trasversale all'asse. La resistività è supposta indipendente dalla temperatura per cui il problema elettromagnetico e quello termico sono disaccoppiati. Nella sigla che identifica la mesh sono riportati nell'ordine il numero di settori azimutali, il numero di strati radiale e il numero di sezioni assiali. Dalla tabella si deduce il valore di $J_z^{\max}$ non varia sensibilmente al crescere del numero degli elementi al di sopra del valore adottato. Si noti che il caso esaminato ($n=5000$ rpm) è al limite dell'intervallo di velocità di interesse pratico ed è il più critico dal punto di vista della convergenza a causa del notevole addensamento di corrente in prossimità della superficie alle alte velocità.

Tabella 4.1.1 – Analisi di convergenza ($B = 0.3$ T, $n = 5000$ rpm)

mesh	numero elementi	$J_z^{\max}$ [A/m ²]
12-3-11	396	3.78E+07
12-5-11	660	5.73E+07
16-7-9	1008	6.30E+07
16-7-11	1232	6.40E+07

4.2 Validazione del modello elettromagnetico mediante soluzione analitica

La figura 4.2.1 mostra la distribuzione della componente assiale, calcolata numericamente, della corrente che si stabilisce nella sezione centrale di una billetta avente raggio $R=100$ mm e lunghezza $L=1000$ mm, rotante con velocità assegnata $n=1000$ rpm in un campo magnetico uniforme $B = 0.3$ T trasversale all'asse. Per il calcolo si è assunto un valore di resistività ρ indipendente dalla temperatura e pari a $2.8 \cdot 10^{-8}$ Ωm . Tale valore corrisponde alla resistività dell'alluminio a temperatura ambiente. La figura 4.2.2 mostra la distribuzione della componente assiale, calcolata analiticamente, della corrente nella sezione centrale di una billetta di lunghezza infinita e di raggio $R=100$ mm rotante con lo stessa velocità all'interno dello stesso campo magnetico. Per il calcolo si è assunto lo stesso valore di resistività del caso precedente.

Le figure 4.2.3 e 4.2.4 mostrano le medesime quantità delle figure 4.2.1 e 4.2.2 rispettivamente, per una velocità di rotazione $n = 5000$ rpm a parità di campo applicato.

Dal confronto tra le figure si evince un ottimo accordo tra i risultati numerici e i risultati analitici relativi al caso piano per entrambi i valori di velocità considerati. Tali valori costituiscono gli estremi dell'intervallo di velocità di interesse pratico esaminato in fase preliminare. La differenza quantitativa è attribuibile agli effetti che la richiusura della corrente sulle testate produce sulla distribuzione al centro della billetta

Sottoprogetto Unità di BOLOGNA

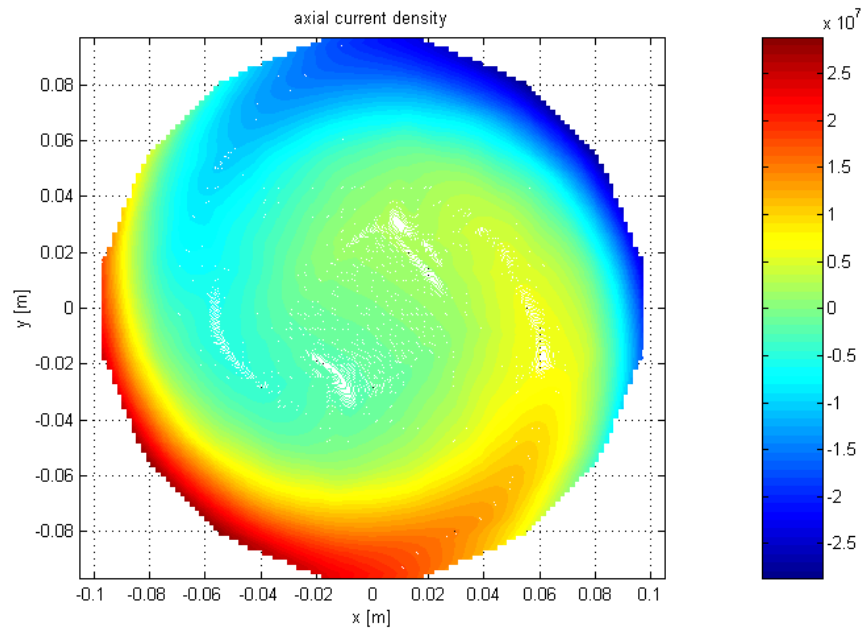


Figura 4.2.1 - Distribuzione di J_z – Risultati Numerici
 $n = 1000 \text{ rpm}$, $B = 0.3 \text{ T}$

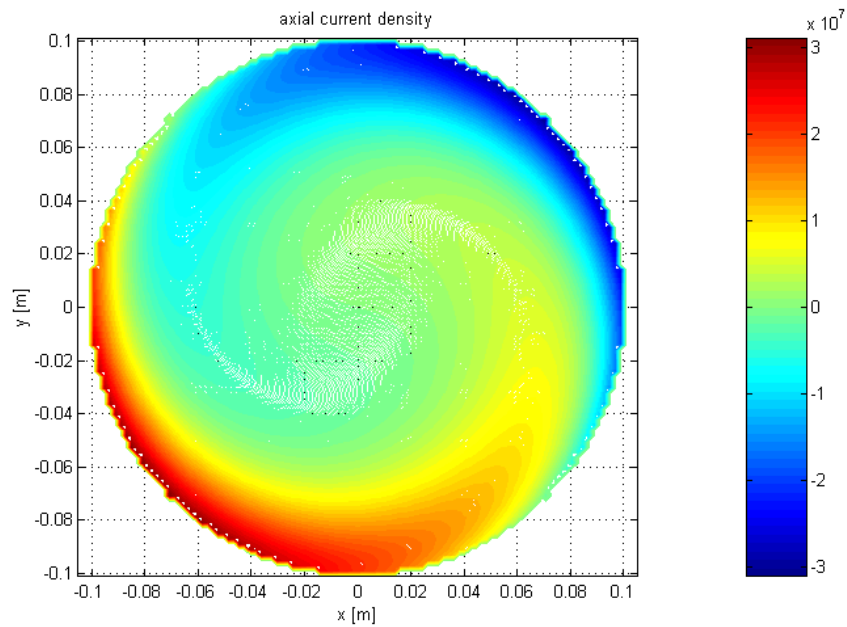


Figura 4.2.2 - Distribuzione di J_z – Risultati Analitici (billetta infinitamente lunga)
 $n = 1000 \text{ rpm}$, $B = 0.3 \text{ T}$

Sottoprogetto Unità di BOLOGNA

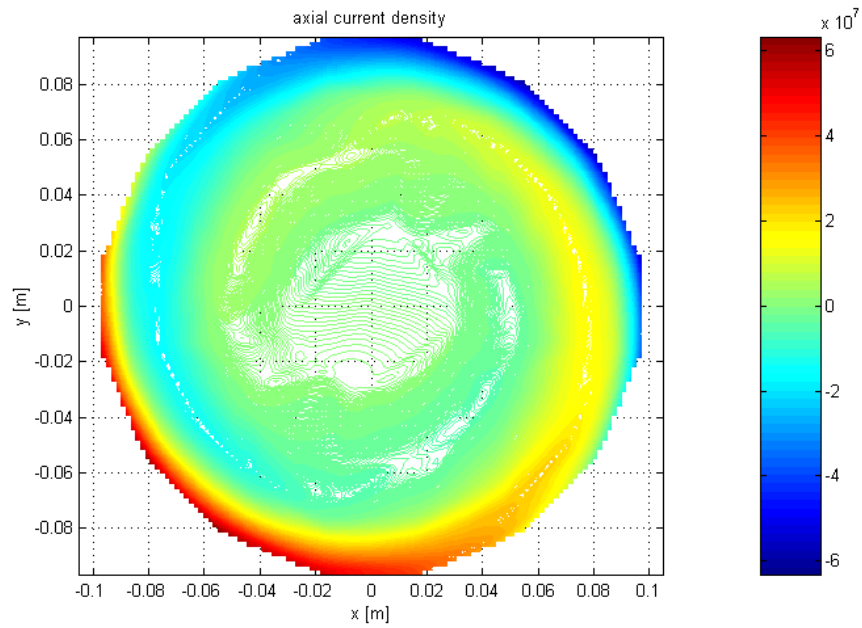


Figura 4.2.3 - Distribuzione di J_z – Risultati Numerici
 $n = 5000 \text{ rpm}$, $B = 0.3 \text{ T}$

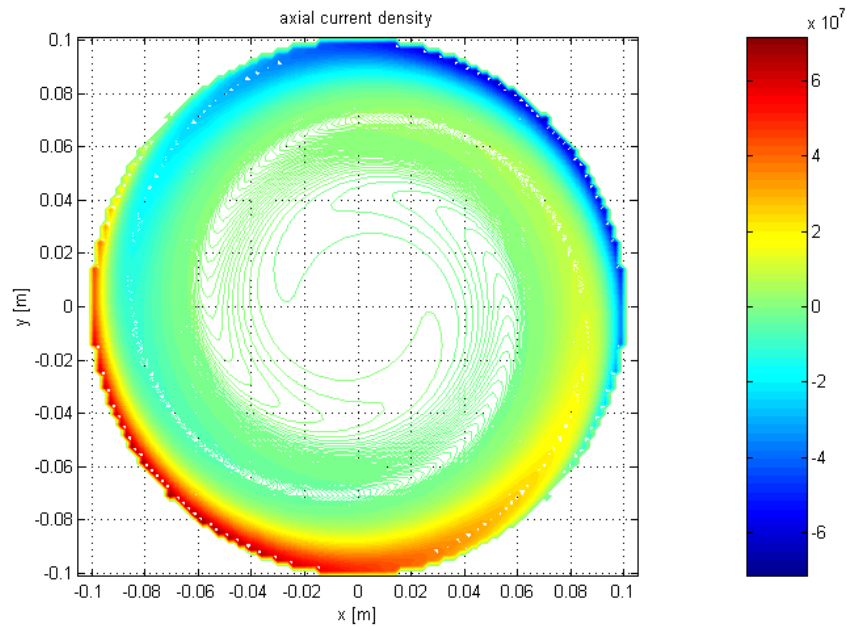


Figura 4.2.4 - Distribuzione di J_z – Risultati Analitici (billetta infinitamente lunga)
 $n = 5000 \text{ rpm}$, $B = 0.3 \text{ T}$

4.3 Validazione del modello termico mediante codice commerciale

Per la validazione del modello termico i risultati numerici sono stati confrontati coi risultati ottenuti mediante il solutore *PDE tool* di *MATLAB*.

La figura 4.3.1 mostra, a titolo di esempio, la distribuzione di temperatura, calcolata mediante il codice, che si stabilisce dopo 60 s all'interno di una billetta soggetta ad una densità di potenza termica uniforme e ad uno scambio termico convettivo sul contorno. La figura 4.3.2 mostra la distribuzione di temperatura calcolata, a parità di parametri, attraverso il solutore *PDE tool* di *MATLAB*. Per le simulazioni si sono adoperati i valori dei parametri riportati in tabella 4.3.1. Dal confronto tra le figure si evince la sostanziale coincidenza dei risultati.

Tabella 4.3.1 – Dati del materiale per la validazione

Potenza termica specifica	$p = 10 \text{ MW/m}^3$
Temperatura iniziale	$T_0 = 26.85 \text{ }^\circ\text{C}$
Coefficiente di scambio termico	$h = 250 \text{ W/m}^2\text{K}$
Temperatura di equilibrio lontano dalla parete	$T_{far} = 26.85 \text{ }^\circ\text{C}$
Conducibilità termica	$k = 238 \text{ W/mK}$
Calore specifico	$c = 965 \text{ J/kgK}$
Densità di massa	$\gamma = 2072 \text{ kg/m}^3$

Occorre considerare che durante la rotazione della billetta la distribuzione di potenza iniettata al suo interno non è uniforme bensì superficiale. Al fine di testare l'accuratezza dei risultati numerici in condizioni più realistiche si è calcolata la distribuzione di temperatura corrispondente ad una densità di potenza $p = 10 \text{ MW/m}^3$ distribuita uniformemente su uno strato sottile di profondità $\delta = 8 \text{ mm}$ disposto sulla superficie della billetta (sia sulla superficie laterale che sulle testate). La profondità dello strato corrisponde alla metà dello spessore di penetrazione relativo alla velocità di rotazione di 3000 rpm. La figura 4.3.3 mostra la distribuzione di temperatura dopo 60 s all'interno della billetta calcolata mediante il codice mentre la figura 4.3.4 mostra i risultati del solutore *PDE tool* di *MATLAB*. Anche in questo caso dal confronto tra le figure si evince la sostanziale coincidenza dei risultati.

Sottoprogetto Unità di BOLOGNA

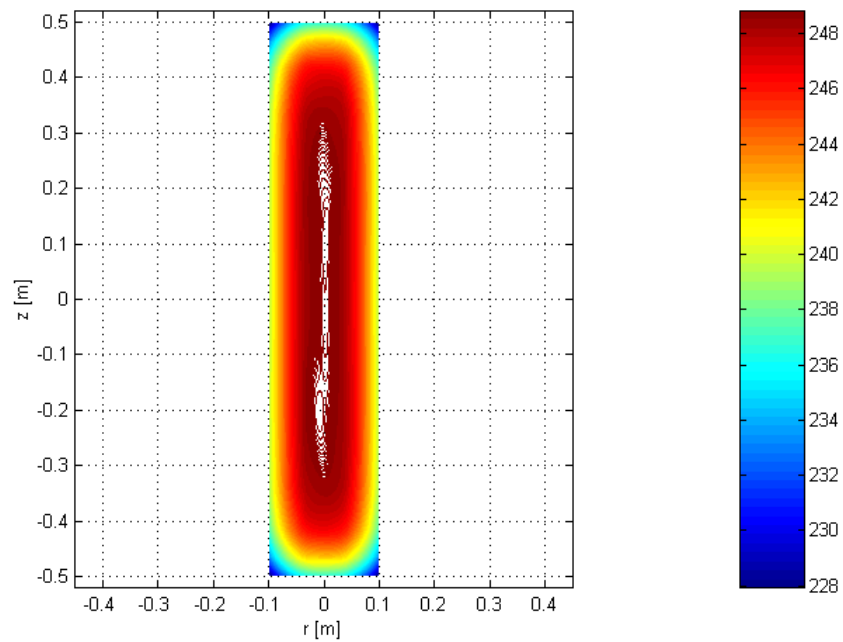


Figura 4.3.1 - Distribuzione di temperatura – Risultati Numerici
Densità di potenza uniforme

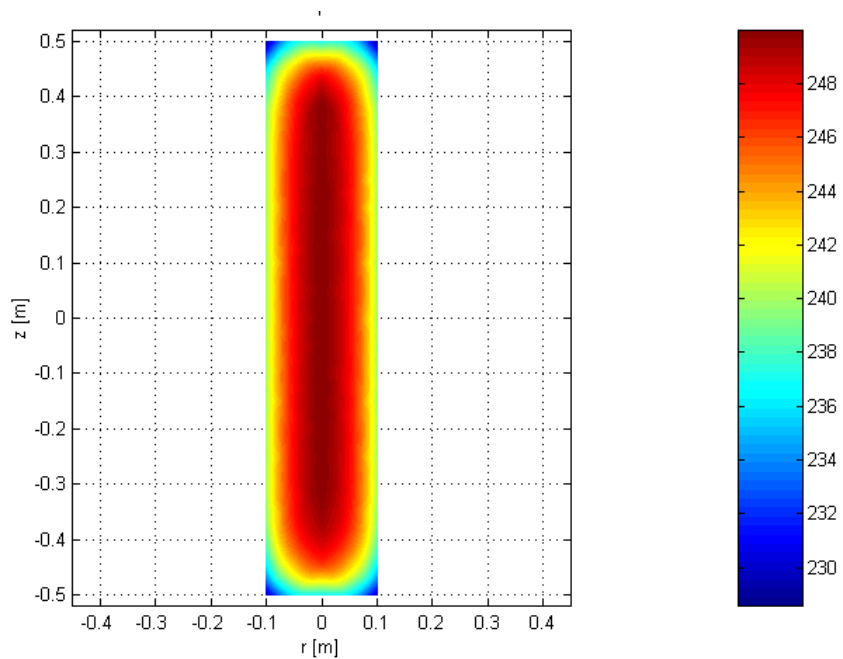


Figura 4.3.2 - Distribuzione di temperatura – Risultati MATLAB PDE tool
Densità di potenza uniforme

Sottoprogetto Unità di BOLOGNA

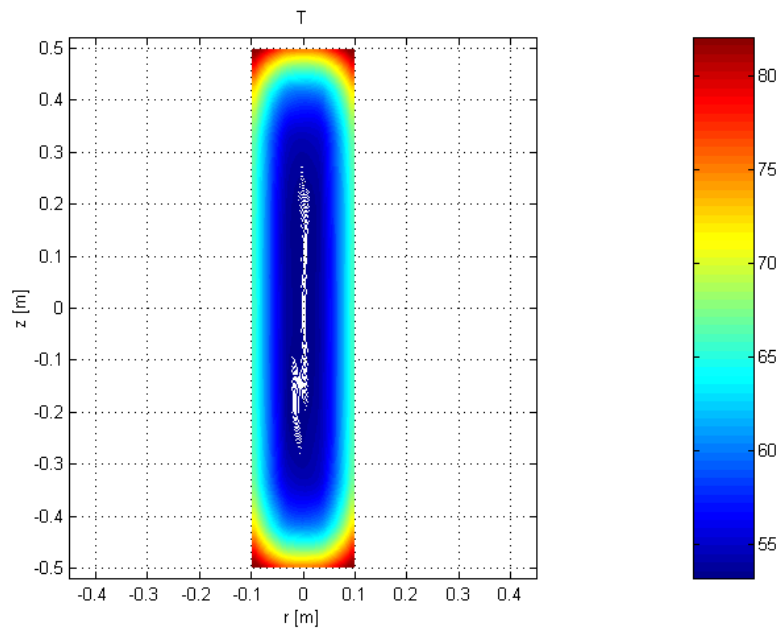


Figura 4.3.3 - Distribuzione di potenza superficiale – Risultati Numerici

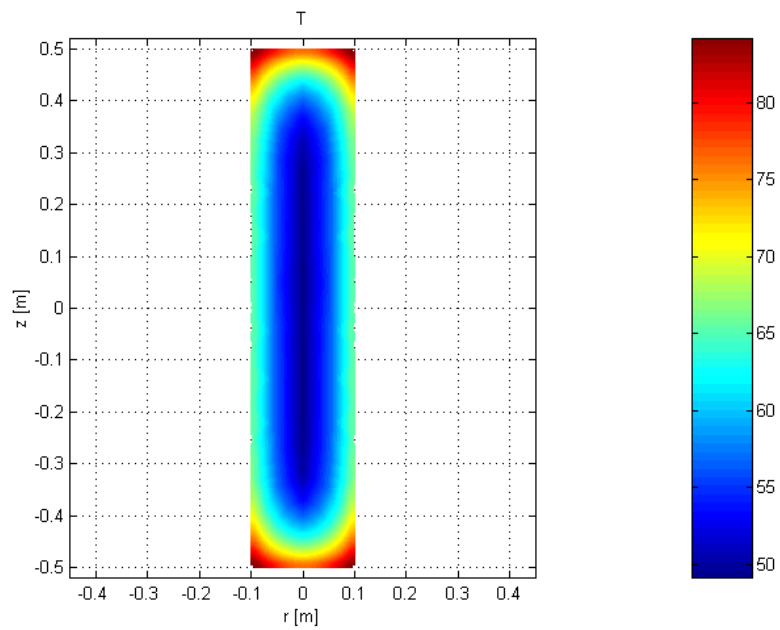


Figura 4.3.4 - Distribuzione di potenza superficiale – Risultati MATLAB PDE tool

5. Risultati numerici

I risultati numerici riportati in questa sezione sono relativi alla billetta in alluminio di raggio $R = 100 \text{ mm}$ e lunghezza $L = 1000 \text{ mm}$, rotante con varie velocità all'interno di un campo magnetico uniforme. Il numero di avvolgimenti che producono il campo esterno può essere fissato a piacimento all'interno del codice; ponendo uguale a 6 tale parametro e compilando opportunamente la sezione dati relativa agli avvolgimenti all'interno del file di input (come specificato nella sezione 3) è possibile implementare il sistema a sei avvolgimenti riportato in figura 5.1. La coppia di avvolgimenti di dimensione maggiore produce un campo praticamente uniforme sul volume occupato dalla billetta per cui assegnando corrente nulla agli altri avvolgimenti si realizza la condizione di simulazione voluta.

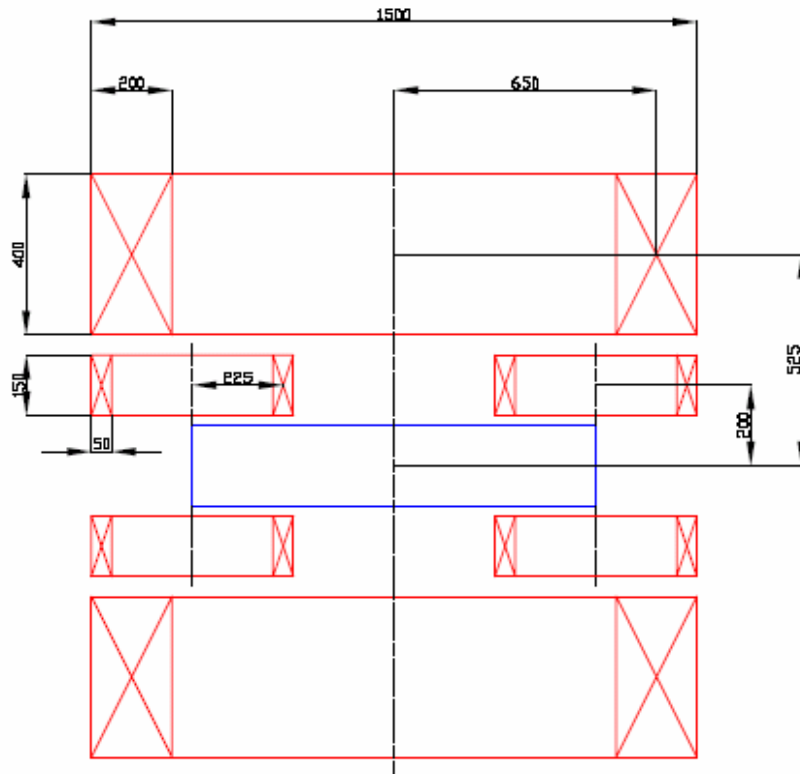


Figura 5.1

I parametri del modello accoppiato elettromagnetico-termico adoperati nelle simulazioni sono stati dedotti da [Tsalaf1981] ed interpolati (vedi Appendice B); inoltre il coefficiente di scambio termico, espresso in funzione della velocità alla parete è espresso dalla seguente relazione [Dughiero2006]

$$(5.1) \quad h [\text{W/m}^2 \text{ K}] = 20 (v [\text{m/s}])^{0.54}$$

La figure 5.2 e 5.3 mostrano, per $n = 1000 \text{ rpm}$ e $n = 5000 \text{ rpm}$, l'andamento delle linee di campo delle correnti indotte in una sezione assiale della billetta nell'istante in cui la temperatura raggiunge i $500 \text{ }^{\circ}\text{C}$. Dalle figure si evince un maggior addensamento della corrente sulla superficie della billetta alle alte velocità.

Linee di campo del vettore $\mathbf{J}$
 $B = 0.3 \text{ T}$, $n = 1000 \text{ rpm}$, $T_{\max} = 500 \text{ }^{\circ}\text{C}$



Figura 5.2

Linee di campo del vettore $\mathbf{J}$
 $B = 0.3 \text{ T}$, $n = 5000 \text{ rpm}$, $T_{\max} = 500 \text{ }^{\circ}\text{C}$



Figura 5.3

Le figure 5.4 e 5.5 mostrano, per l'istante in cui la temperatura in un punto raggiunge i $500 \text{ }^{\circ}\text{C}$, l'andamento della componente assiale J_z della corrente indotta nella sezione centrale della billetta. Nel caso $n = 1000 \text{ rpm}$ il valore massimo di J_z è nell'ordine di 17 MA/m^2 , mentre nel caso $n = 5000 \text{ rpm}$ il massimo è nell'ordine di 40 MA/m^2 . Tali valori sono inferiori a quelli riportati nelle figure 4.2.1 e 4.2.3, rispettivamente, a causa del maggiore valore della resistività corrispondente alla temperatura di $500 \text{ }^{\circ}\text{C}$ che provoca inoltre una maggiore profondità di penetrazione della corrente all'interno della billetta calda.

Sottoprogetto Unità di BOLOGNA

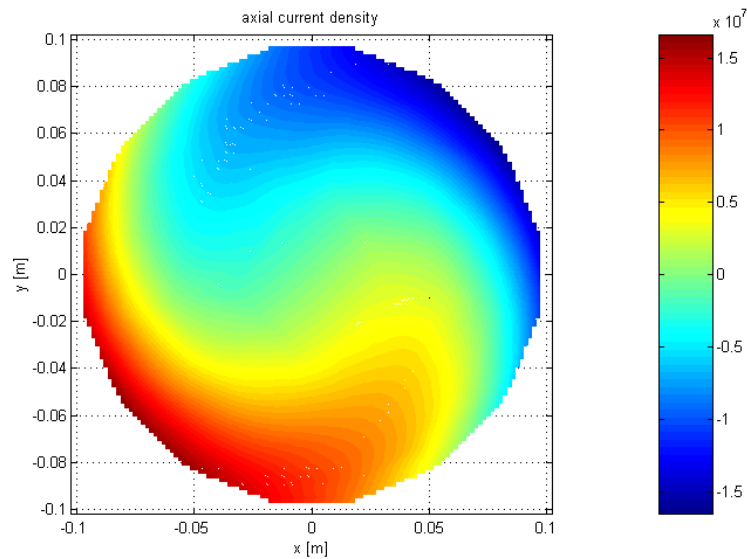


Figura 5.4 - Andamento di J_z nella sezione centrale
 $B = 0.3 \text{ T}$, $n = 1000 \text{ rpm}$, $T_{\max} = 500 \text{ }^{\circ}\text{C}$

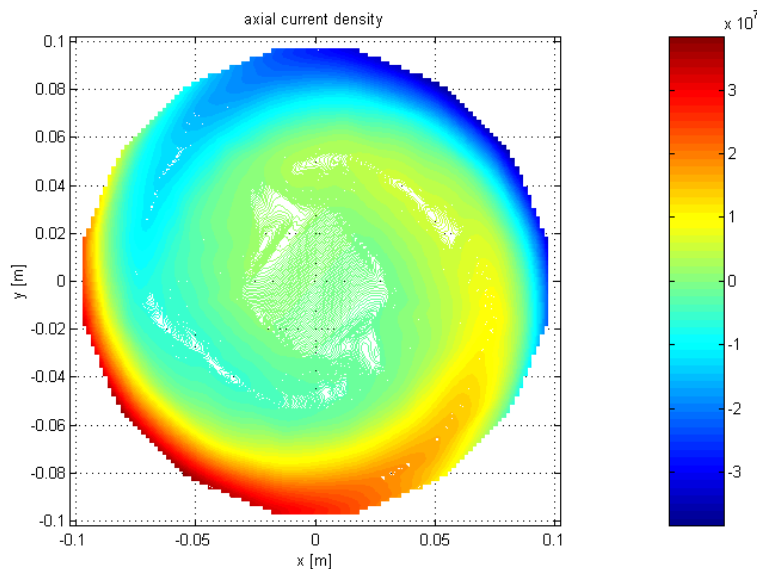


Figura 5.5 - Andamento di J_z nella sezione centrale
 $B = 0.3 \text{ T}$, $n = 5000 \text{ rpm}$, $T_{\max} = 500 \text{ }^{\circ}\text{C}$

La figura 5.6 mostra, per l'istante in cui la temperatura raggiunge i $500 \text{ }^{\circ}\text{C}$, le linee di campo della componente sul piano trasversale all'asse (piano x-y) della densità di corrente $\mathbf{J}$ per diverse sezioni poste a varie profondità all'interno della billette. La figura 5.7 mostra l'andamento del valore massimo del modulo di tale componente in funzione della profondità. La figura evidenzia il decadimento esponenziale di tale componente all'allontanarsi dalle testate.

Sottoprogetto Unità di BOLOGNA

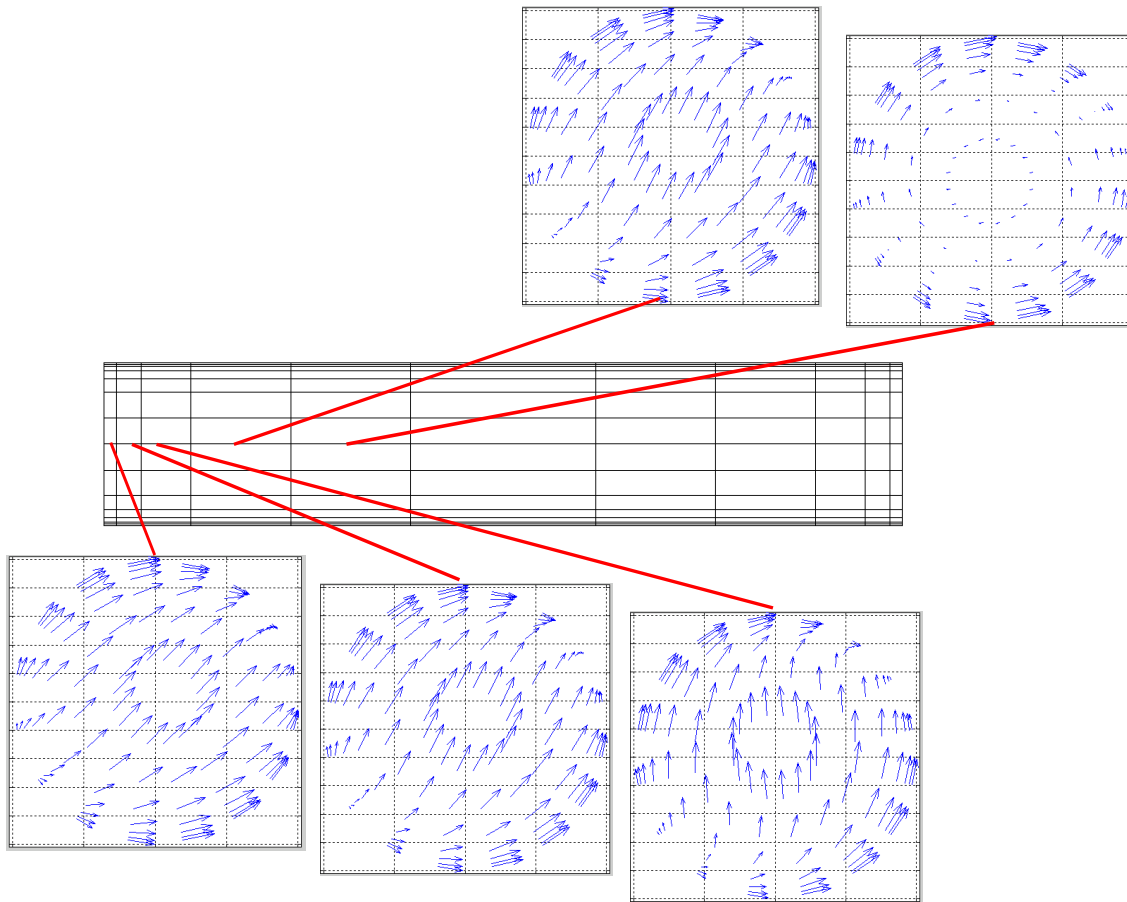


Figura 5.6 - Linee di campo della componente x-y del vettore $\mathbf{J}$ per varie sezioni
($B = 0.3 \text{ T}$, $n = 1000 \text{ rpm}$, $T_{\max} = 500 \text{ }^{\circ}\text{C}$)

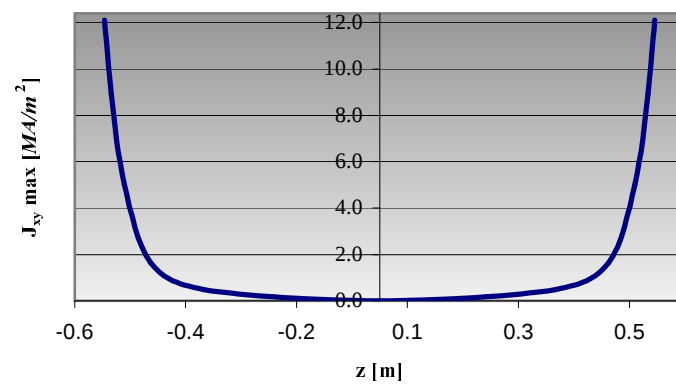


Figura 5.7 - Modulo massimo della componente x-y del vettore $\mathbf{J}$ in funzione della coordinata assiale
 $B = 0.3 \text{ T}$, $n = 1000 \text{ rpm}$, $T_{\max} = 500 \text{ }^{\circ}\text{C}$

Le figure 5.8 e 5.9 mostrano, per l'istante in cui la temperatura raggiunge i 500 °C, la distribuzione della densità di potenza nella sezione centrale della billetta. Le figure 5.10 e 5.11 mostrano invece la distribuzione della densità di potenza sulle due sezioni assiali evidenziate nelle figure 5.8 e 5.9. Tali figure evidenziano una forte dipendenza della distribuzione della densità di potenza dalla coordinata azimutale; tuttavia a seguito di una rotazione completa della billetta tutte le sezioni assiali sono soggette alle medesime condizioni di riscaldamento e la distribuzione di potenza media in un periodo è uguale per ciascuna di essa. La figura 5.12 mostra la distribuzione sulla sezione assiale della densità di potenza media in un periodo.

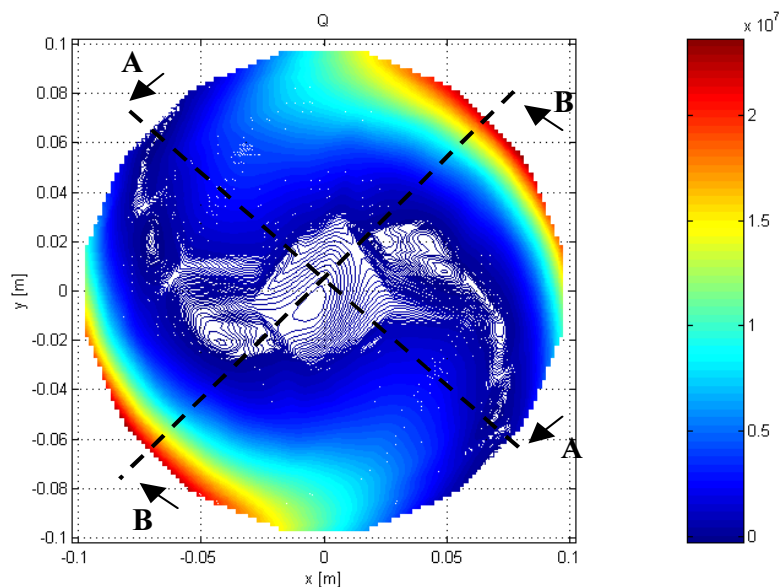


Figura 5.8 - Distribuzione della densità di potenza nella sezione centrale
 $B = 0.3 \text{ T}$, $n = 1000 \text{ rpm}$, $T_{\max} = 500 \text{ °C}$

Sottoprogetto Unità di BOLOGNA

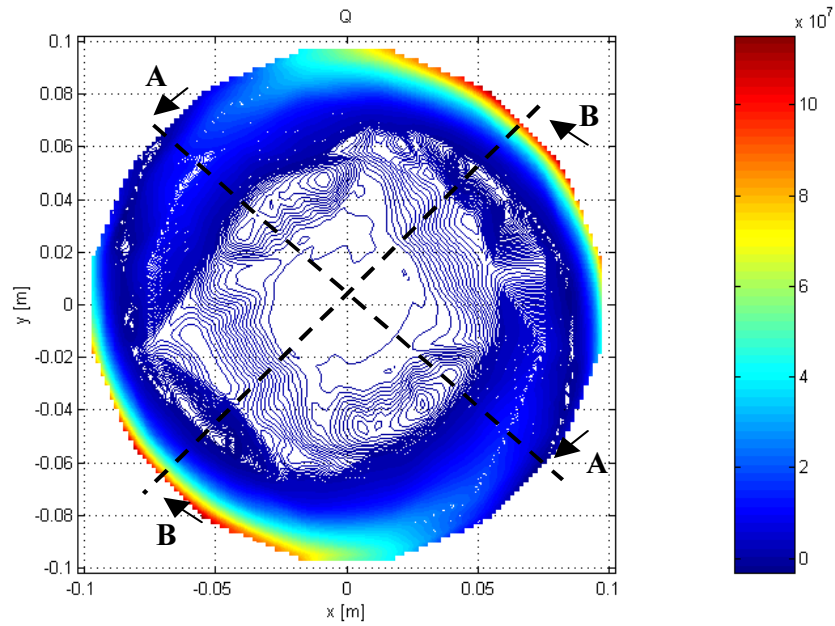


Figura 5.9 - Distribuzione della densità di potenza nella sezione centrale
 $B = 0.3 \text{ T}$, $n = 5000 \text{ rpm}$, $T_{\max} = 500 \text{ }^{\circ}\text{C}$

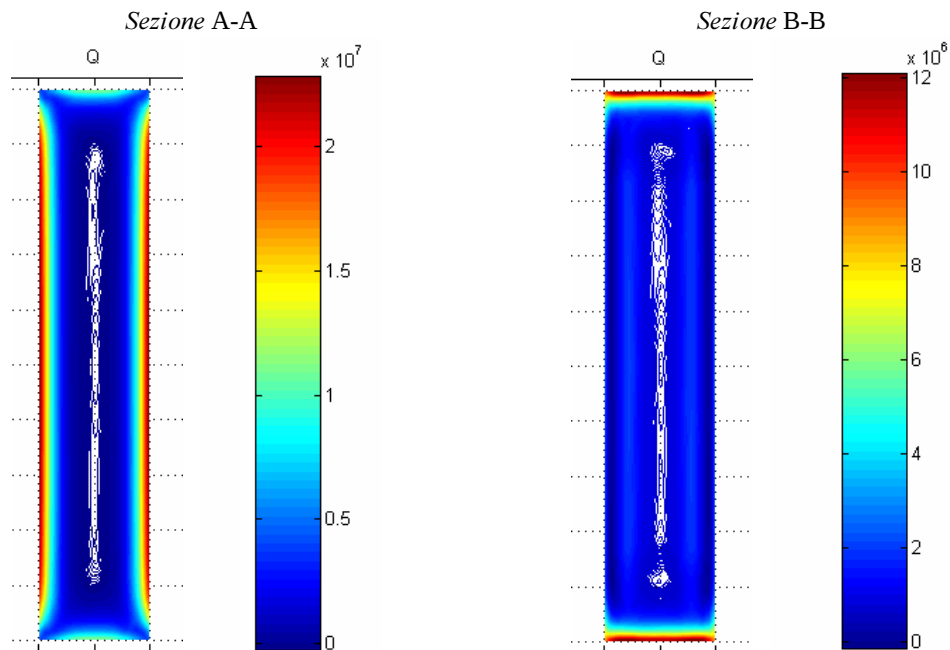


Figura 5.10 - Distribuzione della densità di potenza nelle sezioni assiali
 $B = 0.3 \text{ T}$, $n = 1000 \text{ rpm}$, $T_{\max} = 500 \text{ }^{\circ}\text{C}$

Sottoprogetto Unità di BOLOGNA

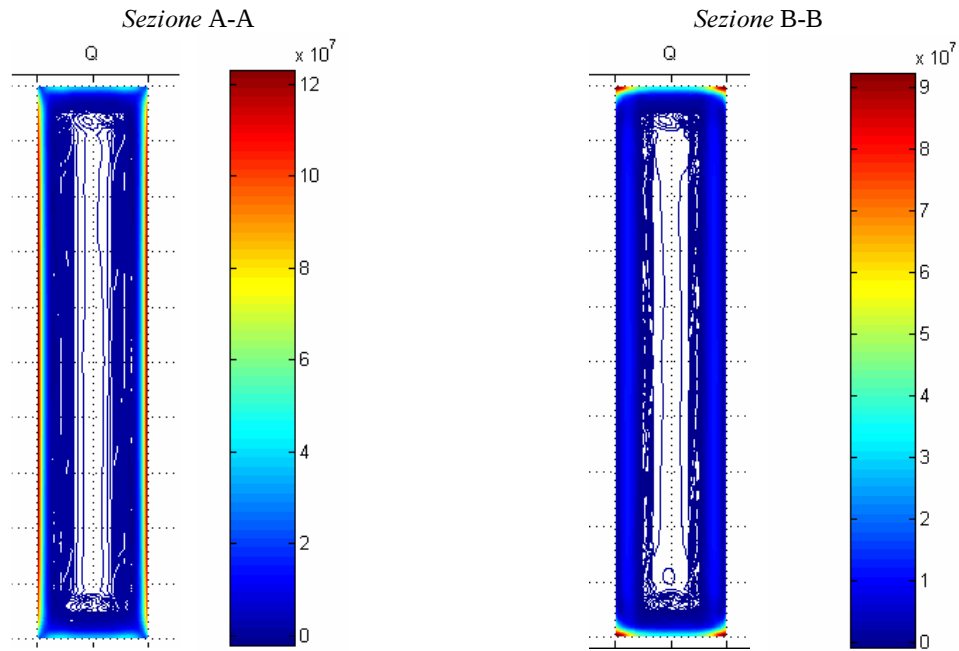


Figura 5.11 - Distribuzione della densità di potenza nelle sezioni assiali
 $B = 0.3 \text{ T}$, $n = 5000 \text{ rpm}$, $T_{\max} = 500 \text{ }^{\circ}\text{C}$

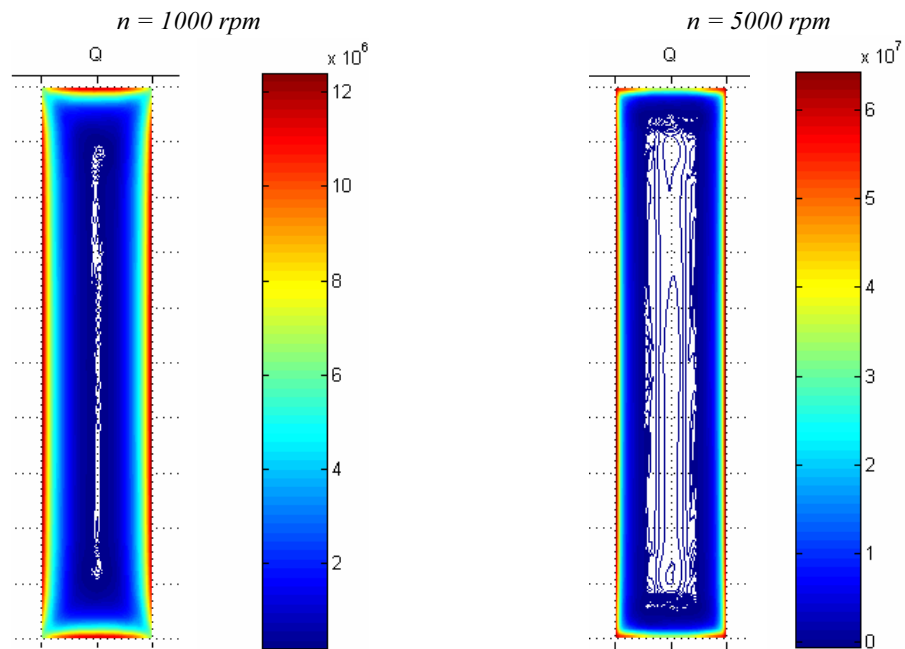


Figura 5.12 - Distribuzione della densità di potenza media in un periodo
 $B = 0.3 \text{ T}$, $T_{\max} = 500 \text{ }^{\circ}\text{C}$

Nelle condizioni di riscaldamento descritte il flusso medio in direzione azimutale in un periodo risulta nullo; ciò implica che se si trascurano le fluttuazioni in un periodo, di piccola entità a causa dell'inerzia termica del materiale, il profilo istantaneo di temperatura possiede simmetria assiale. La figura 5.13 mostra la distribuzione di temperatura relativa all'istante in cui nella billetta vengono raggiunti i 500 °C. Da essa si vede come l'uniformità della temperatura decresca al crescere della velocità di rotazione.

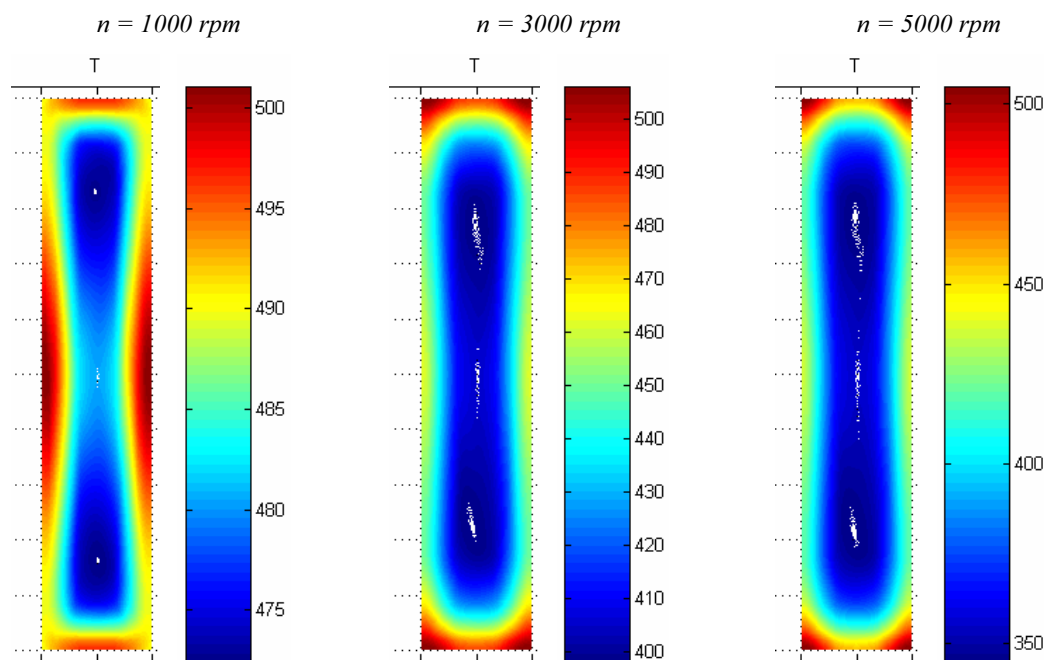


Figura 5.13 - Distribuzione della temperatura ($B = 0.3 T$, $T_{max} = 500$ °C)

La figura 5.14 mostra l'andamento del tempo necessario per raggiungere i 500 °C all'interno della billetta (tempo di riscaldamento) in funzione della velocità e del campo applicato. Tale tempo varia da un massimo di 993 s a un minimo di 26 s nell'intervallo di campo e velocità di rotazione e esaminato.

La figura 5.15 mostra l'andamento della potenza totale iniettata nella billetta nell'istante in cui vengono raggiunti i 500 °C in funzione degli stessi parametri. Tale quantità non è costante durante il processo di riscaldamento; la figura 5.16 mostra l'evoluzione nel tempo della potenza totale iniettata nel caso $n = 1000$ rpm e $B = 0.3 T$ e la figura 5.17 mostra la contestuale evoluzione della massima e minima temperatura all'interno della billetta.

Sottoprogetto Unità di BOLOGNA

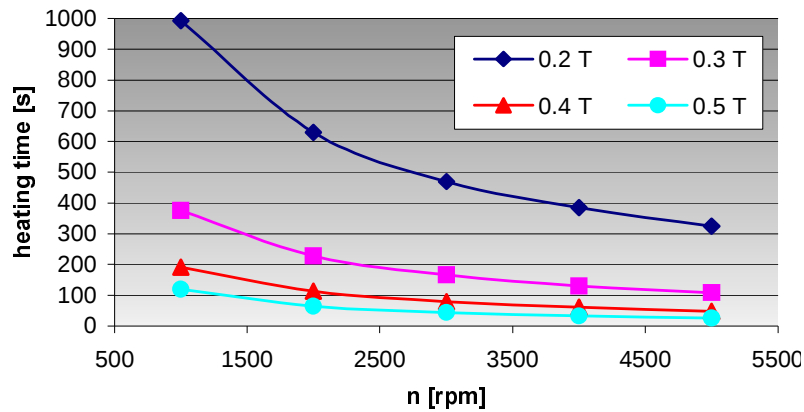


Figura 5.14 - Tempo di riscaldamento – $T_{max} = 500\text{ }^{\circ}\text{C}$

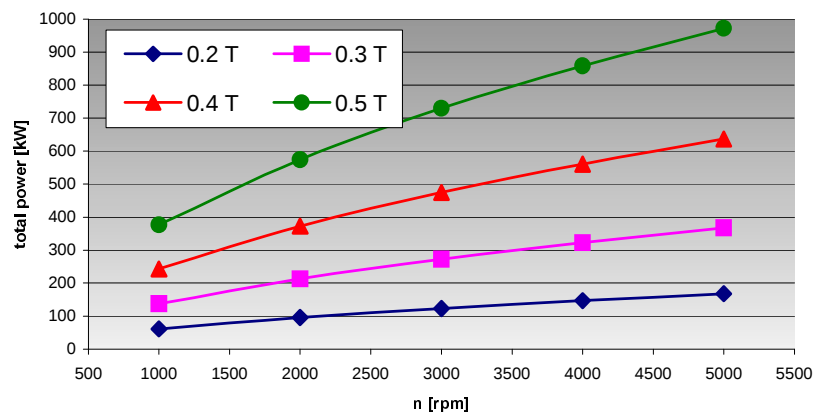


Figura 5.15 - Potenza totale iniettata – $T_{max} = 500\text{ }^{\circ}\text{C}$

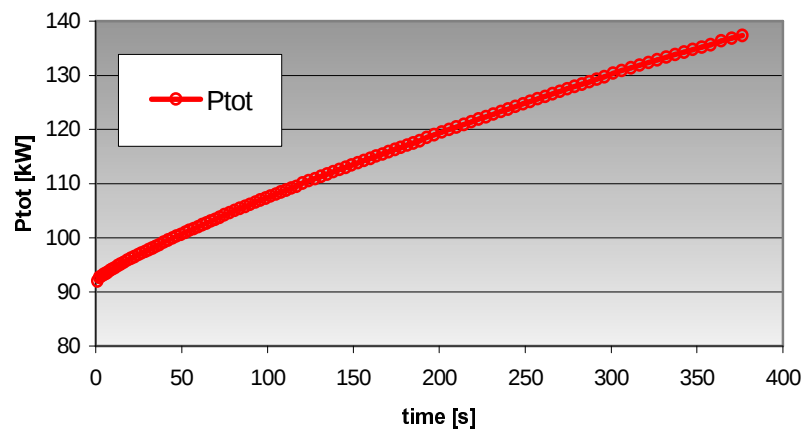


Figura 5.16 - Andamento nel tempo della potenza totale iniettata – $B = 0.3\text{ T}$, $n=1000\text{ rpm}$

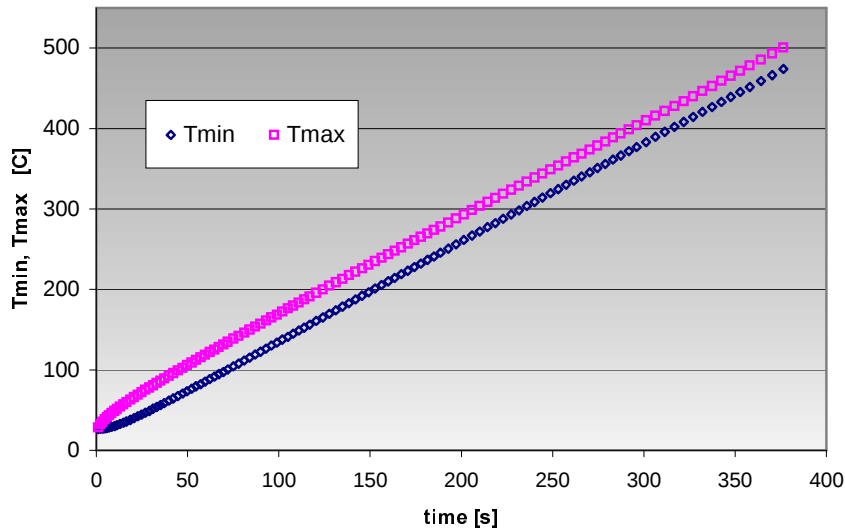


Figura 5.17 - Andamento nel tempo della temperatura minima e massima– $B = 0.3 \text{ T}$, $n=1000 \text{ rpm}$

La figura 5.18 mostra il salto termico assoluto all'interno della billetta (ossia la differenza tra la temperatura del punto più caldo e la temperatura del punto più freddo). La figura 5.19 mostra, a titolo di confronto, la differenza di temperatura tra superficie e asse nella sezione centrale. Nello stesso grafico sono riportati anche i risultati calcolati mediante la formulazione analitica descritta nella sezione 6. Tali risultati sono in buon accordo con quelli calcolati numericamente.

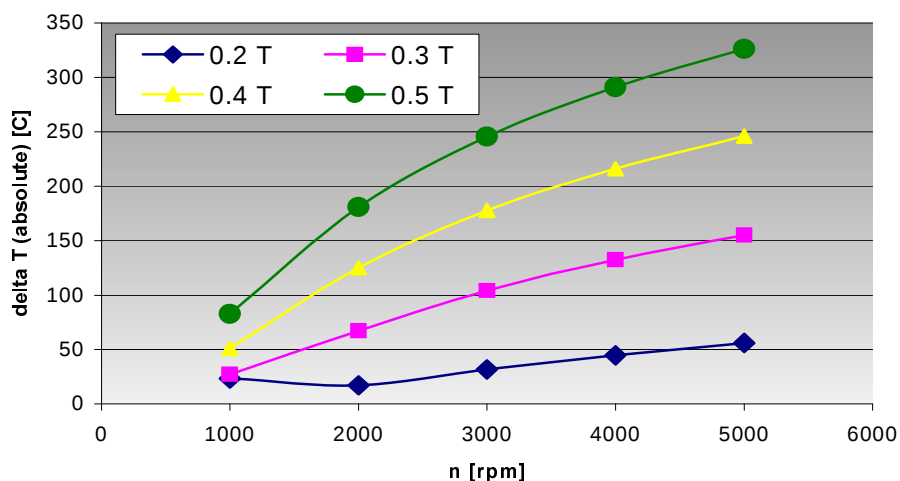


Figura 5.18 - Differenza di temperatura assoluta

Sottoprogetto Unità di BOLOGNA

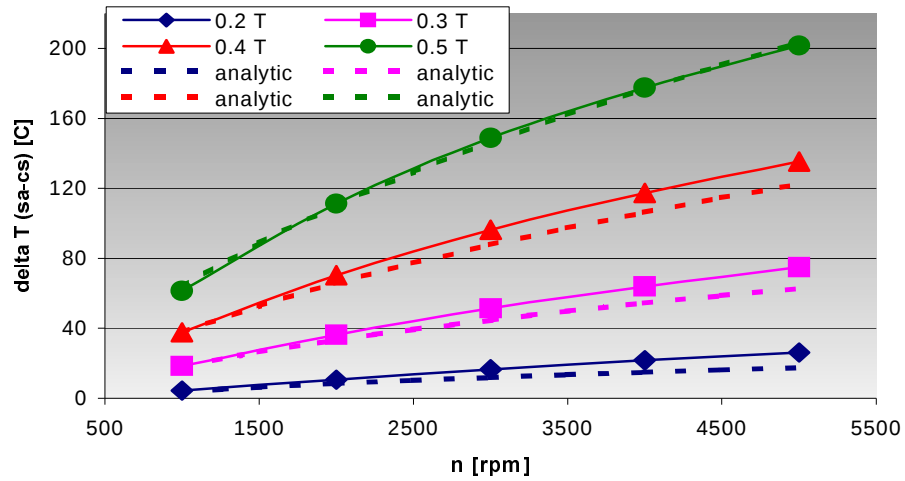


Figura 5.19 - Differenza di temperatura superficie-asse – sezione centrale

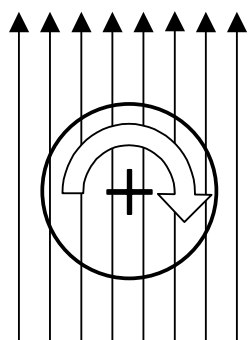
6. Appendice A: soluzioni analitiche

6.1 Equivalenza formale tra gli approcci lagrangiano ed euleriano

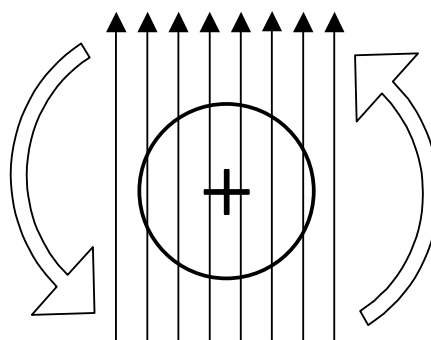
In questa sezione si illustra l'equivalenza formale tra gli approcci lagrangiano ed euleriano nell'analisi del problema del riscaldamento ad induzione di una billetta: l'analisi mostra che la soluzione del problema elettromagnetico ottenuta nel sistema di riferimento del laboratorio (approccio euleriano), in cui il campo di eccitazione è stazionario e la billetta ruota a velocità costante è identificabile, tramite una trasformazione di coordinate, con la soluzione del problema nel sistema di riferimento rotante solidale alla billetta (approccio lagrangiano), in cui il campo di eccitazione ruota a velocità costante e la billetta è immobile.

Si considerino le due situazioni illustrate: a sinistra un cilindro conduttore è rotante (nel vuoto) all'interno di un campo di induzione uniforme e stazionario, mentre a destra un cilindro conduttore immobile (nel vuoto) è soggetto ad un campo di induzione rotante uniforme. Supponiamo che le velocità di rotazione siano costanti in entrambi i casi: si indichi con Ω la velocità angolare del cilindro e con ω la velocità angolare del campo. Con riferimento alla soluzione di regime, nel primo caso la densità di corrente indotta ed il campo di induzione totale saranno stazionari, mentre nel secondo caso saranno rotanti alla stessa velocità del campo applicato. Si noti inoltre che in entrambi i casi il sistema di riferimento è fisso ed inerziale. Obiettivo del seguito è dimostrare che la soluzione nel secondo caso è ottenibile dalla soluzione stazionaria dopo la trasformazione in un sistema di coordinate rotante nel verso opportuno alla velocità $\omega = \Omega$.

Caso I (approccio euleriano)
Cilindro rotante
in un campo stazionario uniforme



Caso II (approccio lagrangiano)
Cilindro fermo
in un campo rotante uniforme



In entrambi i casi illustrati le equazioni rilevanti, nell'approssimazione QMS e supponendo il mezzo conduttore lineare, omogeneo, isotropo e avente permeabilità μ_0 , sono:

$$\text{Faraday - Neumann} \quad \nabla \times \mathbf{E} = - \partial_t \mathbf{B} \quad (6.1)$$

$$\text{Ampere - Maxwell} \quad \nabla \times \mathbf{B} = - \mu_0 \mathbf{J} \quad (6.2)$$

$$\text{continuità} \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (6.3)$$

$$\text{solenoidalità di B} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (6.4)$$

La legge di Ohm in forma locale assume tuttavia forme diverse:

Caso I	Caso II
$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$	$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$
(6.5)	(6.6)

Iniziando dal caso II, l'equazione che determina il campo di induzione (anche fuori dal cilindro) è data da $\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = - \mu_0 \sigma \partial_t \mathbf{B}$, che andrebbe risolta nelle regioni interna ed esterna del cilindro (in questo caso con $\sigma = 0$) e raccordata attraverso le condizioni di continuità delle componenti normali e tangenziali di $\mathbf{B}$ sulla superficie del cilindro (dato che la permeabilità del mezzo e quella del vuoto coincidono). Introducendo il sistema di Coordinate Cilindriche (r, θ, z) “naturale” con asse z centrato sul cilindro e diretto lungo l'asse, tale equazione può essere scomposta nelle sue componenti, come segue^(o):

$$\begin{aligned} r^{-1} \partial_r (r \partial_r B_r) + r^{-2} \partial_\theta \partial_\theta B_r + \partial_z \partial_z B_r - r^{-2} B_r - 2 r^{-2} \partial_\theta B_\theta &= \mu_0 \sigma \partial_t B_r \\ r^{-1} \partial_r (r \partial_r B_\theta) + r^{-2} \partial_\theta \partial_\theta B_\theta + \partial_z \partial_z B_\theta - r^{-2} B_\theta + 2 r^{-2} \partial_\theta B_r &= \mu_0 \sigma \partial_t B_\theta \\ r^{-1} \partial_r (r \partial_r B_z) + r^{-2} \partial_\theta \partial_\theta B_z + \partial_z \partial_z B_z &= \mu_0 \sigma \partial_t B_z \end{aligned} \quad (6.II.1)$$

La densità di corrente indotta nel caso II, introducendo il potenziale scalare ϕ ed il potenziale vettore $\mathbf{A}$, nel gauge di Coulomb, deve soddisfare la relazione $\sigma^{-1} \mathbf{J} = - \nabla \phi - \partial_t \mathbf{A}$, che andrebbe risolta nella regione interna con la condizione sulla solenoidalità di $\mathbf{J}$, con la condizione al $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0$ sulla superficie del cilindro ed esprimendo $\mathbf{A}$ come funzione di $\mathbf{J}$ attraverso la relazione $\nabla^2 \mathbf{A} = - \mu_0 \mathbf{J}$, con la condizione all' “infinito” imposta dal campo impresso. In coordinate cilindriche, si ha quindi:

$$\begin{aligned} \sigma^{-1} J_r &= - \partial_r \phi - \partial_t A_r \\ \sigma^{-1} J_\theta &= - r^{-1} \partial_\theta \phi - \partial_t A_\theta \end{aligned} \quad (6.II.2)$$

^(o) Nota: se $\mathbf{A}$ è una funzione vettoriale, ψ è una funzione scalare ed i versori degli assi sono indicati con $\mathbf{e}$, gli operatori gradiente, divergenza e rotore sono rappresentati in coordinate cilindriche, come segue:

$$\begin{aligned} \nabla \psi &= \partial_r \psi \mathbf{e}_r + r^{-1} \partial_\theta \psi \mathbf{e}_\theta + \partial_z \psi \mathbf{e}_z ; & \nabla \cdot \mathbf{A} &= r^{-1} \partial_r (r A_r) + r^{-1} \partial_\theta A_\theta + \partial_z A_z \\ \nabla \times \mathbf{A} &= (r^{-1} \partial_\theta A_z - \partial_z A_\theta) \mathbf{e}_r + (\partial_z A_r - \partial_r A_z) \mathbf{e}_\theta + (r^{-1} \partial_r (r A_\theta) - r^{-1} \partial_\theta A_r) \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

$$\sigma^{-1} J_z = -\partial_z \varphi - \partial_t A_z$$

$$\begin{aligned} r^{-1} \partial_r (r \partial_r A_r) + r^{-2} \partial_\theta \partial_\theta A_r + \partial_z \partial_z A_r - r^{-2} A_r - 2 r^{-2} \partial_\theta A_\theta &= -\mu_0 J_r \\ r^{-1} \partial_r (r \partial_r A_\theta) + r^{-2} \partial_\theta \partial_\theta A_\theta + \partial_z \partial_z A_\theta - r^{-2} A_\theta + 2 r^{-2} \partial_\theta A_r &= -\mu_0 J_\theta \\ r^{-1} \partial_r (r \partial_r A_z) + r^{-2} \partial_\theta \partial_\theta A_z + \partial_z \partial_z A_z &= -\mu_0 J_z \end{aligned} \quad (6.II.3)$$

Per quanto riguarda il caso I, l'equazione che determina il campo di induzione (anche fuori dal cilindro) è data da $\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \sigma \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \mu_0 \sigma \partial_t \mathbf{B}$, che andrebbe risolta nelle regioni interna ed esterna del cilindro (in questo caso con $\sigma = 0$) e raccordata attraverso le condizioni di continuità delle componenti normali e tangenziali di $\mathbf{B}$ sulla superficie del cilindro (dato che la permeabilità del mezzo e quella del vuoto coincidono). Analizziamo ora il primo termine del membro di destra, introducendo il sistema di Coordinate Cilindriche (r, θ, z) “naturale” con asse z centrato sul cilindro e diretto lungo l'asse, ed esprimendo il campo di velocità come $\mathbf{v} = -\Omega \mathbf{e}_\theta$:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) &= \nabla \times (-\Omega \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{B}) = \Omega \nabla \times (r B_r \mathbf{e}_z - r B_z \mathbf{e}_r) = \\ &= \Omega [(\partial_\theta B_r) \mathbf{e}_r - (\partial_r (r B_r) + r \partial_z B_z) \mathbf{e}_\theta + (\partial_\theta B_z) \mathbf{e}_z] \end{aligned}$$

Dalla solenoidalità di $\mathbf{B}$, tuttavia, si deduce che $r^{-1} \partial_r (r B_r) + r^{-1} \partial_\theta B_\theta + \partial_z B_z = 0$ e dunque:

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = (\Omega \partial_\theta B_r) \mathbf{e}_r + (\Omega \partial_\theta B_\theta) \mathbf{e}_\theta + (\Omega \partial_\theta B_z) \mathbf{e}_z$$

Pertanto, l'equazione che determina il campo di induzione può essere scomposta nelle sue componenti, come segue

$$\begin{aligned} r^{-1} \partial_r (r \partial_r B_r) + r^{-2} \partial_\theta \partial_\theta B_r + \partial_z \partial_z B_r - r^{-2} B_r - 2 r^{-2} \partial_\theta B_\theta &= -\mu_0 \sigma \Omega \partial_\theta B_r + \mu_0 \sigma \partial_t B_r \\ r^{-1} \partial_r (r \partial_r B_\theta) + r^{-2} \partial_\theta \partial_\theta B_\theta + \partial_z \partial_z B_\theta - r^{-2} B_\theta + 2 r^{-2} \partial_\theta B_r &= -\mu_0 \sigma \Omega \partial_\theta B_\theta + \mu_0 \sigma \partial_t B_\theta \\ r^{-1} \partial_r (r \partial_r B_z) + r^{-2} \partial_\theta \partial_\theta B_z + \partial_z \partial_z B_z &= -\mu_0 \sigma \Omega \partial_\theta B_z + \mu_0 \sigma \partial_t B_z \end{aligned} \quad (6.I.1)$$

La densità di corrente indotta nel caso I, introducendo il potenziale scalare φ ed il potenziale vettore $\mathbf{A}$, nel gauge di Coulomb, deve soddisfare la relazione $\sigma^{-1} \mathbf{J} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \nabla \varphi - \partial_t \mathbf{A}$, che andrebbe risolta nella regione interna con la condizione sulla solenoidalità di $\mathbf{J}$, con la condizione al $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0$ sulla superficie del cilindro ed esprimendo $\mathbf{A}$ come funzione di $\mathbf{J}$ attraverso la relazione $\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$, con la condizione all' “infinito” imposta dal campo impresso. Analizziamo ora il primo termine del membro di destra, nel sistema di Coordinate Cilindriche:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \Omega (r B_r \mathbf{e}_z - r B_z \mathbf{e}_r) = \Omega (\partial_\theta A_z - r \partial_z A_\theta) \mathbf{e}_z - \Omega (\partial_r (r A_\theta) - \partial_\theta A_r) \mathbf{e}_r =$$

Sottoprogetto Unità di BOLOGNA

$$\begin{aligned}
&= \Omega (\partial_\theta A_r) \mathbf{e}_r + \Omega (\partial_\theta A_z) \mathbf{e}_z - \Omega \partial_z(rA_\theta) \mathbf{e}_z - \Omega \partial_r(rA_\theta) \mathbf{e}_r = \\
&= \Omega (\partial_\theta A_r) \mathbf{e}_r + \Omega (\partial_\theta A_\theta) \mathbf{e}_\theta + \Omega (\partial_\theta A_z) \mathbf{e}_z - \Omega [\partial_r(rA_\theta) \mathbf{e}_r + r^{-1} \partial_\theta(rA_\theta) \mathbf{e}_\theta + \partial_z(rA_\theta) \mathbf{e}_z] = \\
&= \Omega (\partial_\theta A_r) \mathbf{e}_r + \Omega (\partial_\theta A_\theta) \mathbf{e}_\theta + \Omega (\partial_\theta A_z) \mathbf{e}_z - \Omega \nabla(rA_\theta)
\end{aligned}$$

Pertanto, l'equazione che determina la densità di corrente può essere scomposta nelle sue componenti, come segue:

$$\begin{aligned}
\sigma^{-1} J_r &= \Omega \partial_\theta A_r - \partial_r(\varphi + rA_\theta) - \partial_t A_r \\
\sigma^{-1} J_\theta &= \Omega \partial_\theta A_\theta - r^{-1} \partial_\theta(\varphi + rA_\theta) - \partial_t A_\theta \\
\sigma^{-1} J_z &= \Omega \partial_\theta A_z - \partial_z(\varphi + rA_\theta) - \partial_t A_z \\
r^{-1} \partial_r(rJ_r) + r^{-1} \partial_\theta J_\theta + \partial_z J_z &= 0
\end{aligned} \tag{6.I.2}$$

Inoltre il potenziale vettore è determinato dalle seguenti relazioni (con la condizione all' "infinito" imposta dal campo impresso):

$$\begin{aligned}
r^{-1} \partial_r(r \partial_r A_r) + r^{-2} \partial_\theta \partial_\theta A_r + \partial_z \partial_z A_r - r^{-2} A_r - 2 r^{-2} \partial_\theta A_\theta &= -\mu_0 J_r \\
r^{-1} \partial_r(r \partial_r A_\theta) + r^{-2} \partial_\theta \partial_\theta A_\theta + \partial_z \partial_z A_\theta - r^{-2} A_\theta + 2 r^{-2} \partial_\theta A_r &= -\mu_0 J_\theta \\
r^{-1} \partial_r(r \partial_r A_z) + r^{-2} \partial_\theta \partial_\theta A_z + \partial_z \partial_z A_z &= -\mu_0 J_z
\end{aligned} \tag{6.I.3}$$

Si consideri ora il seguente sistema di coordinate, rotante a velocità ω :

$$r' = r \qquad \theta' = \theta + \omega t \qquad z' = z \qquad t' = t$$

Gli operatori corrispondenti si trasformano secondo la relazione $\partial_x = \sum' (\partial_x y') \partial_{y'}$:

$$\partial_r = \partial_{r'} \qquad \partial_\theta = \partial_{\theta'} \qquad \partial_z = \partial_{z'} \qquad \partial_t = \partial_{t'} + \omega \partial_{\theta'}$$

Si noti che gli operatori spaziali sono formalmente immutati. Sostituendo nelle (6.I.1)-(6.I.2)-(6.I.3) si ha:

$$\begin{aligned}
 r'^{-1} \partial_{r'} (r' \partial_{r'} B_r') + r'^{-2} \partial_{\theta'} \partial_{\theta'} B_r' + \partial_z \partial_z B_r' - r'^{-2} B_r' - 2 r'^{-2} \partial_{\theta'} B_{\theta'} &= \\
 &= -\mu_0 \sigma (\Omega - \omega) \partial_{\theta'} B_r' + \mu_0 \sigma \partial_{t'} B_r' \\
 r'^{-1} \partial_{r'} (r' \partial_{r'} B_{\theta'}) + r'^{-2} \partial_{\theta'} \partial_{\theta'} B_{\theta'} + \partial_z \partial_z B_{\theta'} - r'^{-2} B_{\theta'} + 2 r'^{-2} \partial_{\theta'} B_r' &= \quad (6.I.1'_{\omega}) \\
 &= -\mu_0 \sigma (\Omega - \omega) \partial_{\theta'} B_{\theta'} + \mu_0 \sigma \partial_{t'} B_{\theta'} \\
 r'^{-1} \partial_{r'} (r' \partial_{r'} B_z') + r'^{-2} \partial_{\theta'} \partial_{\theta'} B_z' + \partial_z \partial_z B_z' &= -\mu_0 \sigma (\Omega - \omega) \partial_{\theta'} B_z' + \mu_0 \sigma \partial_{t'} B_z'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma^{-1} J_r' &= (\Omega - \omega) \partial_{\theta'} A_r' - \partial_{r'} (\varphi' + r' A_{\theta}') - \partial_{t'} A_r' \\
 \sigma^{-1} J_{\theta}' &= (\Omega - \omega) \partial_{\theta'} A_{\theta}' - r'^{-1} \partial_{\theta'} (\varphi' + r' A_{\theta}') - \partial_{t'} A_{\theta}' \\
 \sigma^{-1} J_z' &= (\Omega - \omega) \partial_{\theta'} A_z' - \partial_z (\varphi' + r' A_{\theta}') - \partial_{t'} A_z' \quad (6.I.2'_{\omega}) \\
 r'^{-1} \partial_{r'} (r' J_r') + r'^{-1} \partial_{\theta'} J_{\theta}' + \partial_z J_z' &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r'^{-1} \partial_{r'} (r' \partial_{r'} A_r') + r'^{-2} \partial_{\theta'} \partial_{\theta'} A_r' + \partial_z \partial_z A_r' - r'^{-2} A_r' - 2 r'^{-2} \partial_{\theta'} A_{\theta}' &= -\mu_0 J_r' \\
 r'^{-1} \partial_{r'} (r' \partial_{r'} A_{\theta}') + r'^{-2} \partial_{\theta'} \partial_{\theta'} A_{\theta}' + \partial_z \partial_z A_{\theta}' - r'^{-2} A_{\theta}' + 2 r'^{-2} \partial_{\theta'} A_r' &= -\mu_0 J_{\theta}' \quad (6.I.3'_{\omega}) \\
 r'^{-1} \partial_{r'} (r' \partial_{r'} A_z') + r'^{-2} \partial_{\theta'} \partial_{\theta'} A_z' + \partial_z \partial_z A_z' &= -\mu_0 J_z'
 \end{aligned}$$

Pertanto, se il sistema di coordinate (non inerziale) è rotante alla velocità $\omega = \Omega$, risulta:

$$\begin{aligned}
 r'^{-1} \partial_{r'} (r' \partial_{r'} B_r') + r'^{-2} \partial_{\theta'} \partial_{\theta'} B_r' + \partial_z \partial_z B_r' - r'^{-2} B_r' - 2 r'^{-2} \partial_{\theta'} B_{\theta}' &= \mu_0 \sigma \partial_{t'} B_r' \\
 r'^{-1} \partial_{r'} (r' \partial_{r'} B_{\theta}') + r'^{-2} \partial_{\theta'} \partial_{\theta'} B_{\theta}' + \partial_z \partial_z B_{\theta}' - r'^{-2} B_{\theta}' + 2 r'^{-2} \partial_{\theta'} B_r' &= \mu_0 \sigma \partial_{t'} B_{\theta}' \quad (6.I.1'_{\Omega}) \\
 r'^{-1} \partial_{r'} (r' \partial_{r'} B_z') + r'^{-2} \partial_{\theta'} \partial_{\theta'} B_z' + \partial_z \partial_z B_z' &= \mu_0 \sigma \partial_{t'} B_z'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma^{-1} J_r' &= -\partial_{r'} (\varphi' + r' A_{\theta}') - \partial_{t'} A_r' \\
 \sigma^{-1} J_{\theta}' &= -r'^{-1} \partial_{\theta'} (\varphi' + r' A_{\theta}') - \partial_{t'} A_{\theta}' \\
 \sigma^{-1} J_z' &= -\partial_z (\varphi' + r' A_{\theta}') - \partial_{t'} A_z' \quad (6.I.2'_{\Omega}) \\
 r'^{-1} \partial_{r'} (r' J_r') + r'^{-1} \partial_{\theta'} J_{\theta}' + \partial_z J_z' &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r'^{-1} \partial_{r'} (r' \partial_{r'} A_r') + r'^{-2} \partial_{\theta'} \partial_{\theta'} A_r' + \partial_z \partial_z A_r' - r'^{-2} A_r' - 2 r'^{-2} \partial_{\theta'} A_{\theta}' &= -\mu_0 J_r' \\
 r'^{-1} \partial_{r'} (r' \partial_{r'} A_{\theta}') + r'^{-2} \partial_{\theta'} \partial_{\theta'} A_{\theta}' + \partial_z \partial_z A_{\theta}' - r'^{-2} A_{\theta}' + 2 r'^{-2} \partial_{\theta'} A_r' &= -\mu_0 J_{\theta}' \quad (6.I.3'_{\Omega})
 \end{aligned}$$

$$r'^{-1}\partial_{r'}(r'\partial_{r'}A_z') + r'^{-2}\partial_{\theta}\partial_{\theta}A_z' + \partial_z\partial_zA_z' = -\mu_0J_z'$$

I sistemi (6.I.1' $_{\Omega}$) ed (6.I.3' $_{\Omega}$) coincidono formalmente con i sistemi (6.II.1) e (6.II.3). Il sistema (6.I.2' $_{\Omega}$) coincide formalmente con il sistema (6.II.2), quando si ponga

$$\varphi^+ = \varphi' + r'A_{\theta}'$$

Le condizioni di continuità all'interfaccia e le condizioni all' "infinito" non presentano problemi di sorta. Pertanto, limitatamente alla distribuzione di densità di corrente e di campo di induzione, la soluzione nel caso II (approccio lagrangiano) è ottenibile dalla soluzione nel caso I (approccio euleriano) dopo la trasformazione in un sistema di coordinate rotante nel verso opportuno alla velocità $\omega = \Omega$. Dunque anche la coppia e la potenza dissipata per effetto joule coincidono.

6.2 Soluzione del problema elettromagnetico

Con riferimento all'approccio lagrangiano, si consideri un cilindro a conducibilità σ e permeabilità μ_0 "molto lungo" immobile (nel vuoto) e soggetto ad un campo di induzione rotante uniforme $\mathbf{B}_{app} = B_0 \cos(\omega t)\mathbf{e}_x + B_0 \sin(\omega t)\mathbf{e}_y$. Introducendo il sistema di coordinate cilindriche (r, θ, z) "naturale" con asse z centrato sul cilindro e diretto lungo l'asse, ed esplicitando i versori $\mathbf{e}_x = \cos\theta \mathbf{e}_r - \sin\theta \mathbf{e}_{\theta}$, $\mathbf{e}_y = \sin\theta \mathbf{e}_r + \cos\theta \mathbf{e}_{\theta}$, si ha:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{app}(t) &= B_0 [\cos(\omega t)\cos\theta \hat{\mathbf{e}}_r - \cos(\omega t)\sin\theta \hat{\mathbf{e}}_{\theta} + \sin(\omega t)\sin\theta \hat{\mathbf{e}}_r + \sin(\omega t)\cos\theta \hat{\mathbf{e}}_{\theta}] = \\ &= B_0 [\cos(\theta - \omega t)\hat{\mathbf{e}}_r - \sin(\theta - \omega t)\hat{\mathbf{e}}_{\theta}] = \frac{B_0}{2} [(e^{j(\theta - \omega t)} + e^{-j(\theta - \omega t)})\hat{\mathbf{e}}_r + j(e^{j(\theta - \omega t)} - e^{-j(\theta - \omega t)})\hat{\mathbf{e}}_{\theta}] = \\ &= \frac{B_0}{2} [e^{j(\theta - \omega t)}(\hat{\mathbf{e}}_r + j\hat{\mathbf{e}}_{\theta}) + e^{-j(\theta - \omega t)}(\hat{\mathbf{e}}_r - j\hat{\mathbf{e}}_{\theta})] = \Re[B_0(\hat{\mathbf{e}}_r - j\hat{\mathbf{e}}_{\theta})e^{-j(\theta - \omega t)}] = \Re[\underline{\mathbf{B}}_{app}e^{-j(\theta - \omega t)}]\end{aligned}$$

Nello stesso modo rappresentiamo il campo di induzione nella regione interna (pedice "in": $0 < r < R_0$) e nella regione esterna (pedice "out": $r > R_0$) e la densità di corrente indotta nell'interno del cilindro:

$$\mathbf{B}_X(r, \theta; t) = \Re[\underline{\mathbf{B}}_X(r)e^{-j(\theta - \omega t)}], \quad X = \text{in, out} \quad \mathbf{J}(r, \theta; t) = \Re[\underline{\mathbf{J}}(r)\hat{\mathbf{e}}_z e^{-j(\theta - \omega t)}]$$

La densità di corrente indotta deve soddisfare (nella regione interna) l'equazione $\nabla \times \mathbf{J} = -\sigma \partial_t \mathbf{B}$, da cui $\nabla \times \nabla \times \mathbf{J} = -\sigma \partial_t \nabla \times \mathbf{B} = -\mu_0 \sigma \partial_t \mathbf{J}$. Tenuto conto della solenoidalità di $\mathbf{J}$, si ha, nella sola componente z :

$$r^{-1}\partial_r(r\partial_r J_z) + r^{-2}\partial_{\theta}\partial_{\theta}J_z + \partial_z\partial_zJ_z = \mu_0\sigma \partial_t J_z$$

Sostituendo la rappresentazione data, si ottiene quindi (indicando con D_r l'operatore di derivazione rispetto ad r)

Sottoprogetto Unità di BOLOGNA

$$r^{-1}D_r(rD_r\mathbf{J}) - r^{-2}\mathbf{J} = j\omega\mu_0\sigma \mathbf{J}$$

posto, come consueto, $\delta = (2/\omega\mu_0\sigma)^{1/2}$ ed $\kappa = (1+j)/\delta$, risulta $j\omega\mu_0\sigma = \kappa^2$. Quindi, posto $x = \kappa r$, si ha:

$$x^{-1}D_x(xD_x\mathbf{J}) - (1 + x^{-2})\mathbf{J} = 0$$

Tale equazione (Bessel modificata di ordine 1) ammette, per definizione, le soluzioni $I_1(x)$ ed $K_1(x)$, funzioni di Bessel modificate di prima e di seconda specie di ordine 1. La soluzione per $\mathbf{J}$ è esprimibile come una loro combinazione lineare, tuttavia la K_1 è divergente per x tendente a zero e può essere trascurata:

$$\mathbf{J}(r) = a I_1(\kappa r)$$

Prima di procedere si ricorda che (indicando con D_x l'operatore di derivazione rispetto a x): $x^{-1} I_1(x) = \frac{1}{2} [I_0(x) - I_2(x)]$, $D_x I_1(x) = \frac{1}{2} [I_0(x) + I_2(x)]$, $D_x I_0(x) = I_1(x)$, $D_x(x I_1(x)) = x I_0(x)$, $D_x I_1(x) = I_0(x) - x^{-1} I_1(x)$. Determiniamo ora il corrispondente campo di induzione nell'interno del cilindro, tramite la relazione $-\sigma \partial_t \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{J}$:

$$-\sigma \partial_t \mathbf{B}_{in} = (r^{-1} \partial_\theta J_z) \mathbf{e}_r - (\partial_r J_z) \mathbf{e}_\theta$$

Sostituendo la rappresentazione data, si ottiene quindi

$$-j\omega\sigma \mathbf{B}_{in} = (-j r^{-1} \mathbf{J}) \mathbf{e}_r - (D_r \mathbf{J}) \mathbf{e}_\theta$$

ovvero, nota la forma di $\mathbf{J}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{in}(r) &= \frac{1}{j\omega\sigma} \left[\frac{J(r)}{r} j\hat{\mathbf{e}}_r + \frac{dJ(r)}{dr} \hat{\mathbf{e}}_\theta \right] = a \frac{\mu_0}{\kappa} \left[\frac{I_1(x)}{x} j\hat{\mathbf{e}}_r + \frac{dI_1(x)}{dx} \hat{\mathbf{e}}_\theta \right] = \\ &= ja \frac{\mu_0}{2\kappa} [(I_0(x) - I_2(x)) \hat{\mathbf{e}}_r - (I_0(x) + I_2(x)) j\hat{\mathbf{e}}_\theta] = \\ &= ja \frac{\mu_0}{2\kappa} [I_0(x) (\hat{\mathbf{e}}_r - j\hat{\mathbf{e}}_\theta) - I_2(x) (\hat{\mathbf{e}}_r + j\hat{\mathbf{e}}_\theta)] \end{aligned}$$

Per risolvere il problema esterno si introduce il potenziale scalare magnetico ψ , definito dalla relazione $\mathbf{H}_{out} = -\nabla\psi = -\partial_r\psi \mathbf{e}_r - r^{-1}\partial_\theta\psi \mathbf{e}_\theta$ e rappresentato tramite la relazione $\psi(r, \theta; t) = \Re[\underline{\psi}(r) e^{-j(\theta - \omega t)}]$. Dalla solenoidalità del campo di induzione si ottiene quindi $\nabla^2 \underline{\psi} = 0$ e dunque:

$$r^{-1}D_r(rD_r\underline{\psi}) - r^{-2}\underline{\psi} = 0$$

la soluzione di tale equazione è data da $\underline{\psi}(r) = C_1 r + C_2 r^{-1}$, che corrisponde ad un campo di induzione nella regione esterna pari a:

$$\mathbf{B}_{out}(r) = -\mu_0(C_1 - C_2 r^{-2}) \mathbf{e}_r + j\mu_0(C_1 + C_2 r^{-2}) \mathbf{e}_\theta =$$

$$= -\mu_0 C_1 (\mathbf{e}_r - j\mathbf{e}_\theta) + \mu_0 C_2 r^{-2} (\mathbf{e}_r + j\mathbf{e}_\theta)$$

che va adattata alla condizione all' "infinito" $\underline{\mathbf{B}}_{\text{out}}(r \rightarrow \infty) \rightarrow \underline{\mathbf{B}}_{\text{app}}$, fornendo $-\mu_0 C_1 = B_0$.

Le espressioni per il campo esterno e per il campo interno vanno adattate inoltre alla condizione di interfaccia in $r=R_0$ che, in questo caso, si riduce alla semplice continuità: $\underline{\mathbf{B}}_{\text{in}}(r=R_0) = \underline{\mathbf{B}}_{\text{out}}(r=R_0)$. Posto $x_0 = \kappa R_0$, si ha:

$$\begin{cases} ja \frac{\mu_0}{\kappa} \frac{l_1(x_0)}{x_0} = B_0 + \frac{\mu_0 C_2}{R_0^2} \\ a \frac{\mu_0}{\kappa} \frac{dl_1(x_0)}{dx_0} = -j \left(B_0 - \frac{\mu_0 C_2}{R_0^2} \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2\kappa B_0}{j\mu_0 l_0(x_0)} \\ -\mu_0 C_2 = B_0 R_0^2 \frac{l_2(x_0)}{l_0(x_0)} \end{cases}$$

La soluzione del problema elettromagnetico nel sistema di riferimento lagrangiano è quindi data da [Perry1978]:

$$\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) = \frac{2\kappa B_0}{j\mu_0 l_0(\kappa R_0)} l_1(\kappa \mathbf{r})$$

$$\underline{\mathbf{B}}_{\text{in}}(\mathbf{r}) = \frac{B_0}{l_0(\kappa R_0)} [l_0(\kappa \mathbf{r}) - l_2(\kappa \mathbf{r})] \hat{\mathbf{e}}_r - [l_0(\kappa \mathbf{r}) + l_2(\kappa \mathbf{r})] j \hat{\mathbf{e}}_\theta$$

$$\underline{\mathbf{B}}_{\text{out}}(\mathbf{r}) = \frac{B_0}{l_0(\kappa R_0)} \left[\left(l_0(\kappa R_0) - \frac{R_0^2}{r^2} l_2(\kappa R_0) \right) \hat{\mathbf{e}}_r - \left(l_0(\kappa R_0) + \frac{R_0^2}{r^2} l_2(\kappa R_0) \right) j \hat{\mathbf{e}}_\theta \right]$$

Nel sistema di riferimento euleriano $\mathbf{J}$ e $\mathbf{B}$ sono stazionari, quindi possono essere espressi specializzando le relazioni sopra esposte per $t = 0$, tenendo presente che in tal caso si ha

$$\hat{\mathbf{e}}_x + j\hat{\mathbf{e}}_y = (\hat{\mathbf{e}}_r + j\hat{\mathbf{e}}_\theta) e^{j\theta} \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{e}}_x - j\hat{\mathbf{e}}_y = (\hat{\mathbf{e}}_r - j\hat{\mathbf{e}}_\theta) e^{-j\theta}$$

$$\underline{\mathbf{B}}_{\text{app}}(t=0) = \Re[B_0 (\hat{\mathbf{e}}_r - j\hat{\mathbf{e}}_\theta) e^{-j\theta}] = \Re[B_0 (\hat{\mathbf{e}}_x - j\hat{\mathbf{e}}_y)] = B_0 \hat{\mathbf{e}}_x$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, \theta) = \Re \left[\frac{2\kappa B_0 l_1(\kappa \mathbf{r}) e^{-j\theta}}{j\mu_0 l_0(\kappa R_0)} \hat{\mathbf{e}}_z \right] \quad (6.E.1)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{\text{in}}(r, \theta) &= \Re \left[\frac{B_0}{I_0(\kappa R_0)} \left[I_0(\kappa r) (\hat{\mathbf{e}}_r - j \hat{\mathbf{e}}_\theta) e^{-j\theta} - I_2(\kappa r) (\hat{\mathbf{e}}_r + j \hat{\mathbf{e}}_\theta) e^{-j\theta} \right] \right] = \\
&= \Re \left[\frac{B_0}{I_0(\kappa R_0)} \left[I_0(\kappa r) (\hat{\mathbf{e}}_x - j \hat{\mathbf{e}}_y) - I_2(\kappa r) (\hat{\mathbf{e}}_x + j \hat{\mathbf{e}}_y) e^{-j2\theta} \right] \right] = \\
&= \Re \left[\frac{B_0}{I_0(\kappa R_0)} \left[(I_0(\kappa r) - I_2(\kappa r) e^{-j2\theta}) \hat{\mathbf{e}}_x - (I_0(\kappa r) + I_2(\kappa r) e^{-j2\theta}) j \hat{\mathbf{e}}_y \right] \right]
\end{aligned} \tag{6.E.2}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{\text{out}}(r, \theta) &= \Re \left[\frac{B_0}{I_0(\kappa R_0)} \left[I_0(\kappa R_0) (\hat{\mathbf{e}}_r - j \hat{\mathbf{e}}_\theta) e^{-j\theta} - \frac{R_0^2}{r^2} I_2(\kappa R_0) (\hat{\mathbf{e}}_r + j \hat{\mathbf{e}}_\theta) e^{-j\theta} \right] \right] = \\
&= \Re \left[\frac{B_0}{I_0(\kappa R_0)} \left[I_0(\kappa R_0) (\hat{\mathbf{e}}_x - j \hat{\mathbf{e}}_y) - \frac{R_0^2}{r^2} I_2(\kappa R_0) (\hat{\mathbf{e}}_x + j \hat{\mathbf{e}}_y) e^{-j2\theta} \right] \right] = \\
&= \Re \left[\frac{B_0}{I_0(\kappa R_0)} \left[\left(I_0(\kappa R_0) - \frac{R_0^2}{r^2} I_2(\kappa R_0) e^{-j2\theta} \right) \hat{\mathbf{e}}_x - \left(I_0(\kappa R_0) + \frac{R_0^2}{r^2} I_2(\kappa R_0) e^{-j2\theta} \right) j \hat{\mathbf{e}}_y \right] \right]
\end{aligned} \tag{6.E.3}$$

La densità di potenza dissipata (mediata sulla coordinata θ) risulta quindi pari a (l'asterisco denota la coniugazione):

$$w(r) = \frac{|\underline{J}(r)|^2}{2\sigma} = \frac{2|\kappa|^2}{\sigma} \left(\frac{B_0}{\mu_0} \right)^2 \frac{I_1(\kappa r) I_1(\kappa^* r)}{I_0(\kappa R_0) I_0(\kappa^* R_0)} \tag{6.E.4}$$

Mentre la densità di potenza dissipata localmente è data da

$$w(r, \theta) = \frac{\|\underline{J}(r, \theta)\|^2}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{B_0}{\mu_0} \right)^2 \left| \frac{\kappa I_1(\kappa r) e^{-j\theta}}{I_0(\kappa R_0)} - \frac{\kappa^* I_1(\kappa^* r) e^{j\theta}}{I_0(\kappa^* R_0)} \right|^2 \tag{6.E.5}$$

La coppia elettromagnetica (per unità di lunghezza) è data da

$$\begin{aligned}
C &= \int_0^{R_0} 2\pi r dr \left[r \hat{\mathbf{e}}_\theta \cdot \left(\frac{\underline{J} \hat{\mathbf{e}}_z \times \underline{B}_{\text{in}}^*}{2} \right) \right] = \int_0^{R_0} 2\pi r dr \frac{r \underline{J} \underline{B}_{\text{in},r}^*}{2} = \frac{1}{\omega} \int_0^{R_0} 2\pi r dr \frac{|\underline{J}|^2}{2\sigma} = \\
&= \frac{2|\kappa|^2}{\omega \sigma} \left(\frac{B_0}{\mu_0} \right)^2 \int_0^{R_0} 2\pi r dr \frac{I_1(\kappa r) I_1(\kappa^* r)}{I_0(\kappa R_0) I_0(\kappa^* R_0)}
\end{aligned}$$

Dalla $D_r[r l_1(\kappa r) l_0(\kappa^* r)] = \kappa r l_0(\kappa r) l_0(\kappa^* r) + r l_1(\kappa r) \kappa^* l_1(\kappa^* r)$ e considerando anche la sua coniugata, si ottiene la seguente relazione

$$D_r[\kappa^* r l_1(\kappa r) l_0(\kappa^* r) - \kappa r l_0(\kappa r) l_1(\kappa^* r)] = (\kappa^{*2} - \kappa^2) r l_1(\kappa r) l_1(\kappa^* r)$$

utilizzando la quale l'integrazione è immediata:

$$C = \frac{2\pi}{\omega\sigma} \left(\frac{B_0}{\mu_0} \right)^2 \left[\frac{\kappa R_0 l_1(\kappa R_0)}{l_0(\kappa R_0)} + \frac{\kappa^* R_0 l_1(\kappa^* R_0)}{l_0(\kappa^* R_0)} \right] \quad (E.6)$$

A titolo di esempio, nelle figure 6.2.1, 6.2.2. e 6.2.3 si riportano le mappe della densità di corrente assiale, della densità di potenza dissipata media e della densità di potenza dissipata localmente, valutate tramite le (6.E.1), (6.E.4) ed (6.E.5) per una billetta di alluminio (conducibilità elettrica costante $\sigma = 20$ MS/m) di raggio $R_0 = 100$ mm, che ruota in un campo uniforme di 0.3 T alla velocità di 1000 rpm. Il valore massimo della densità di corrente è pari a 22.8 MA/m². Il valore massimo della densità di potenza dissipata media è pari a 13 MW/m³. Il valore massimo della densità di potenza dissipata localmente è pari a 26 MW/m³. La potenza complessivamente dissipata, per unità di lunghezza, risulta in questo caso pari a 111.4 kW/m.

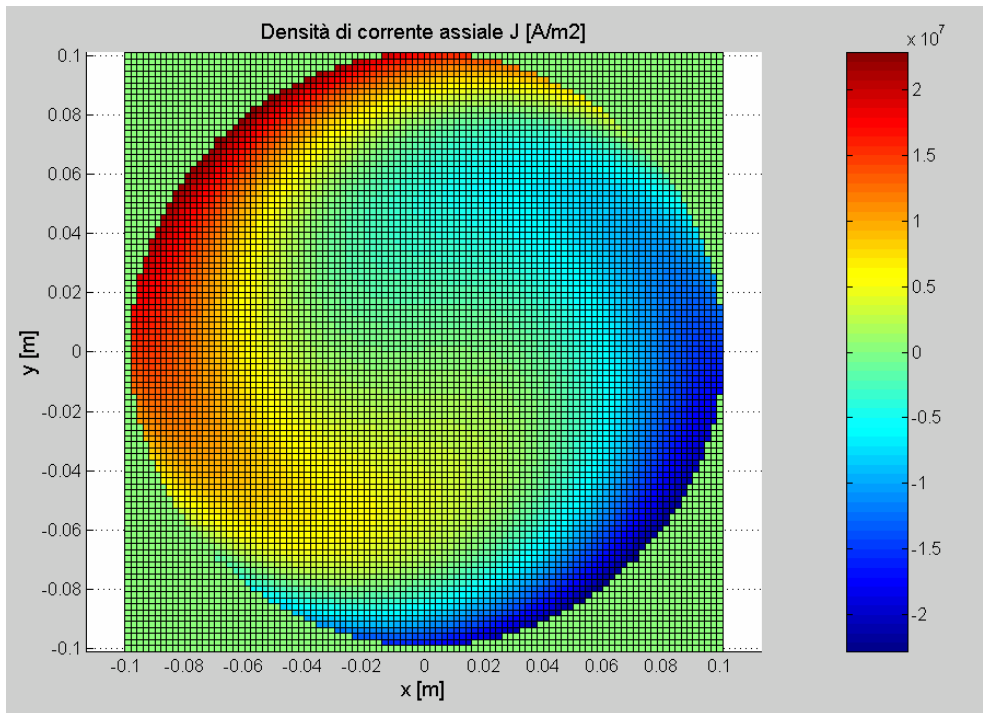


Figura 6.2.1 - Mappa della densità di corrente assiale, valutata tramite la (6.E.1) per una billetta di alluminio ($\sigma = 20$ MS/m) di raggio $R_0 = 100$ mm, che ruota in un campo uniforme di 0.3 T alla velocità di 1000 rpm.

Sottoprogetto Unità di BOLOGNA

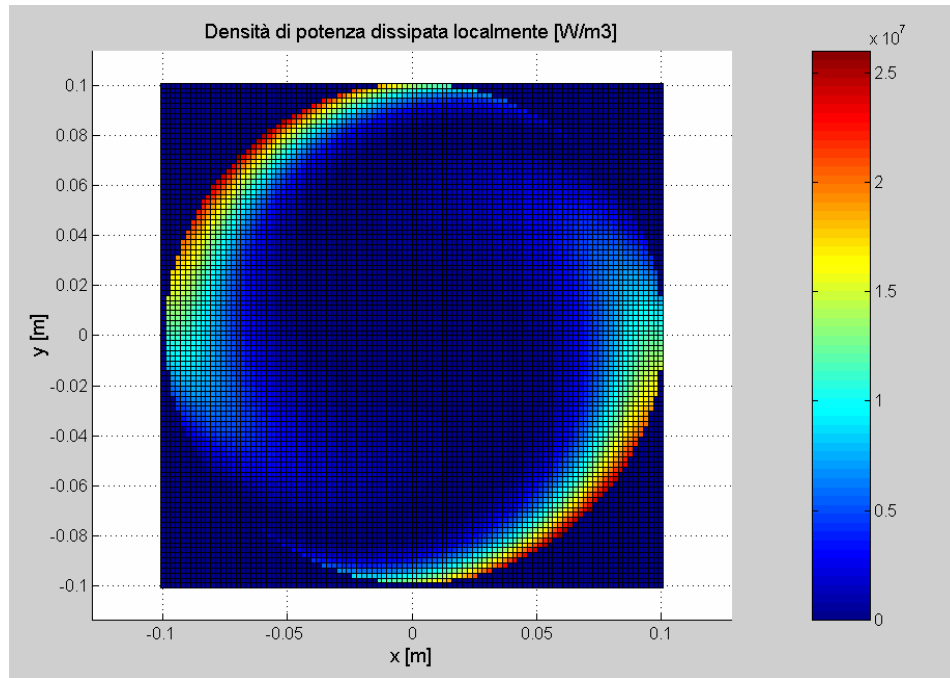


Figura 6.2.2 - Mappa della densità di potenza dissipata localmente, valutata tramite la (6.E.5) per una billetta di alluminio ($\sigma = 20 \text{ MS/m}$) di raggio $R_0 = 100 \text{ mm}$, che ruota in un campo uniforme di 0.3 T alla velocità di 1000 rpm .

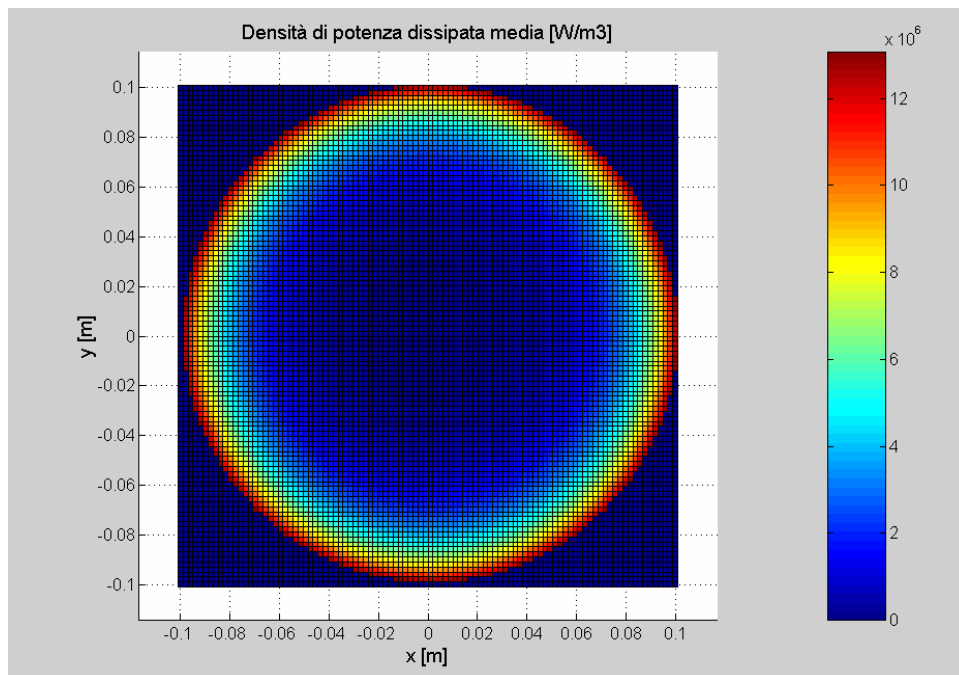


Figura 6.2.3 - Mappa della densità di potenza dissipata media, valutata tramite la (6.E.4) per una billetta di alluminio ($\sigma = 20 \text{ MS/m}$) di raggio $R_0 = 100 \text{ mm}$, che ruota in un campo uniforme di 0.3 T alla velocità di 1000 rpm .

6.3 Soluzione del problema termico

Si considera ora il problema termico in fase transitoria sulla sezione del cilindro. Indicando con k la conducibilità termica, γ la densità di massa, c il calore specifico ed h il coefficiente di scambio termico alla parete (costanti), le equazioni rilevanti sono:

Fourier	$\mathbf{q} = -k \nabla T$
bilancio termico	$\frac{\partial}{\partial t} (\gamma c T) + \nabla \cdot \mathbf{q} = G$
convezione	$\mathbf{q} _{\text{wall}} = h (T - T_{\text{far}}) \mathbf{n}$
condizione iniziale	$T(t = 0) = T_{\text{far}}$

Dove T_{far} indica la temperatura ambiente ed il termine di sorgente G è dato dalla (6.E.4) assumendo che la densità di potenza sia sensibilmente costante nel tempo per $0 < t < t_{\text{off}}$, e che per $t > t_{\text{off}}$ il riscaldatore sia spento.

$$G(r, t) = \begin{cases} \frac{2|\kappa|^2}{\sigma} \left(\frac{B_0}{\mu_0} \right)^2 \frac{I_1(\kappa r) I_1(\kappa^* r)}{I_0(\kappa R_0) I_0(\kappa^* R_0)} & 0 < t < t_{\text{off}} \\ 0 & t > t_{\text{off}} \end{cases} \quad (6.T.1)$$

Introducendo il sistema di coordinate cilindriche (r, θ, z) “naturale” con asse z centrato sul cilindro e diretto lungo l’asse, ed esplicitando la componente radiale, si ha:

bilancio termico	$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{\gamma c}{k} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{G}{k}$
condizione al contorno	$-k \frac{\partial T}{\partial r} (r = R_0, t) = h (T(r = R_0, t) - T_{\text{far}})$
condizione iniziale	$T(r, t = 0) = T_{\text{far}}$
simmetria	$\frac{\partial T}{\partial r} (r = 0, t) = 0$

Introducendo la sovratemperatura da $\vartheta = T - T_{\text{far}}$, ed il numero di Nusselt $Nu = hR_0/k$, si ottiene:

bilancio termico	$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) = \frac{\gamma c}{k} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} - \frac{G}{k}$
------------------	---

$$\text{condizione al contorno} \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial r}(r = R_0, t) + \frac{Nu}{R_0} \vartheta(r = R_0, t) = 0$$

$$\text{condizione iniziale} \quad \vartheta(r, t = 0) = 0$$

$$\text{simmetria} \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial r}(r = 0, t) = 0$$

La sovratemperatura può quindi essere sviluppata in serie di Fourier-Bessel:

$$\vartheta(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \Theta_m(t) J_0\left(\alpha_m \frac{r}{R_0}\right) \quad (6.T.2)$$

dove le costanti α_m (m intero positivo) sono definite come le soluzioni dell'equazione trascendente

$$\alpha_m J_1(\alpha_m) - Nu J_0(\alpha_m) = 0$$

e dove $J_0(x)$ ed $J_1(x)$ sono le funzioni di Bessel di prima specie di ordine 0 ed 1, rispettivamente. Lo sviluppo è completo [Arfken1985] e il sistema di funzioni scelto per lo sviluppo è ortogonale in $[0, R_0]$. Infatti, si ha [Gradshteyn1980]:

$$\begin{aligned} \int_0^{R_0} J_0\left(\alpha_m \frac{r}{R_0}\right) J_0\left(\alpha_n \frac{r}{R_0}\right) r dr &= R_0^2 \int_0^1 J_0(\alpha_m x) J_0(\alpha_n x) x dx = \\ &= \frac{R_0^2}{\alpha_m^2 - \alpha_n^2} [\alpha_m x J_1(\alpha_m x) J_0(\alpha_n x) - \alpha_n x J_0(\alpha_m x) J_1(\alpha_n x)]_0^1 = \\ &= \frac{R_0^2}{\alpha_m^2 - \alpha_n^2} [\alpha_m J_1(\alpha_m) J_0(\alpha_n) - \alpha_n J_1(\alpha_n) J_0(\alpha_m)] = \\ &= \frac{R_0^2}{\alpha_m^2 - \alpha_n^2} [Nu J_0(\alpha_m) J_0(\alpha_n) - Nu J_0(\alpha_n) J_0(\alpha_m)] = 0, \quad \text{if } m \neq n \end{aligned}$$

$$\int_0^{R_0} J_0^2\left(\alpha_m \frac{r}{R_0}\right) r dr = R_0^2 \int_0^1 J_0^2(\alpha_m x) x dx = \frac{R_0^2}{2} [x^2 J_0^2(\alpha_m x) + x^2 J_1^2(\alpha_m x)]_0^1 = \frac{R_0^2}{2} [J_0^2(\alpha_m) + J_1^2(\alpha_m)]$$

La condizione di simmetria del problema è rispettata e, inoltre, la scelta delle costanti α_m è tale per cui la condizione al contorno diviene un'identità (si ricordi che, indicando con D_x l'operatore di derivazione rispetto a x , si ha $D_x J_0(x) = -J_1(x)$ e $D_x(x J_1(x)) = x J_0(x)$):

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial r}(r = R_0, t) + \frac{Nu}{R_0} \vartheta(r = R_0, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \Theta_m(t) \left[-\frac{\alpha_m}{R_0} J_1(\alpha_m) + \frac{Nu}{R_0} J_0(\alpha_m) \right] \equiv 0$$

Infine, è possibile dedurre coefficienti dello sviluppo (T.2) per proiezione:

$$\Theta_m(t) = \frac{2}{R_0^2 [J_0^2(\alpha_m) + J_1^2(\alpha_m)]} \int_0^{R_0} \vartheta(r, t) J_0\left(\alpha_m \frac{r}{R_0}\right) r dr$$

Introducendo anche per il termine di sorgente lo stesso tipo di sviluppo

$$G(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} g_m(t) J_0\left(\alpha_m \frac{r}{R_0}\right) \quad g_m(t) = \frac{2 \int_0^{R_0} G(r, t) J_0\left(\alpha_m \frac{r}{R_0}\right) r dr}{R_0^2 [J_0^2(\alpha_m) + J_1^2(\alpha_m)]}$$

si ottiene quindi, per ognuno dei coefficienti, una equazione differenziale ordinaria:

$$\text{bilancio termico} \quad -\frac{\alpha_m^2}{R_0^2} \Theta_m(t) = \frac{\gamma c}{k} \frac{d}{dt} \Theta_m(t) - \frac{g_m(t)}{k}$$

$$\text{condizione iniziale} \quad \Theta_m(t=0) = 0$$

$$\text{La cui soluzione è data da: } \Theta_m(t) = \int_0^t d\tau \frac{g_m(\tau)}{\gamma c} e^{-\frac{k\alpha_m^2}{\gamma c R_0^2}(t-\tau)}$$

Il problema termico ammette quindi la seguente soluzione

$$T(r, t) = T_{\text{far}} + \frac{2}{R_0^2} \int_0^{R_0} dr' r' \int_0^t d\tau \frac{G(r', \tau)}{\gamma c} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\alpha_m \frac{r}{R_0}\right) J_0\left(\alpha_m \frac{r'}{R_0}\right)}{J_0^2(\alpha_m) + J_1^2(\alpha_m)} e^{-\frac{k\alpha_m^2}{\gamma c R_0^2}(t-\tau)} \quad (6.T.3)$$

dove il numero di Nusselt è definito da $Nu = hR_0/k$ e dove le costanti α_m (m intero positivo) sono definite come le soluzioni dell'equazione trascendente: $\alpha_m J_1(\alpha_m) - Nu J_0(\alpha_m) = 0$.

Infine, sostituendo la (6.T.1) nella (6.T.3) si ottiene:

$$T(r, t) = \begin{cases} T_{\text{far}} + \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_m J_0 \left(\alpha_m \frac{r}{R_0} \right) \left(1 - e^{-\frac{k\alpha_m^2}{\gamma c R_0^2} t} \right) & 0 < t < t_{\text{off}} \\ T_{\text{far}} + \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_m J_0 \left(\alpha_m \frac{r}{R_0} \right) \left(e^{\frac{k\alpha_m^2}{\gamma c R_0^2} (t_{\text{off}} - t)} - e^{-\frac{k\alpha_m^2}{\gamma c R_0^2} t} \right) & t > t_{\text{off}} \end{cases} \quad (6.T.4)$$

dove le costanti Γ_m sono date da:

$$\Gamma_m = \frac{2}{k} \int_0^{R_0} dr r \frac{2|\kappa|^2 \left(\frac{B_0}{\mu_0} \right)^2}{\sigma} \frac{l_1(\kappa r) l_1(\kappa^* r)}{l_0(\kappa R_0) l_0(\kappa^* R_0)} \frac{J_0 \left(\alpha_m \frac{r}{R_0} \right)}{(\alpha_m^2 + Nu^2) J_0^2(\alpha_m)}$$

La convergenza numerica della serie (T.4) può essere verificata utilizzando la soluzione di regime (per $t_{\text{off}} \rightarrow \infty$):

$$T(r, t \rightarrow \infty) = T_{\text{far}} + \frac{1}{h\sigma} \left(\frac{B_0}{\mu_0} \right)^2 \left[\frac{\kappa l_1(\kappa R_0)}{l_0(\kappa R_0)} + \frac{\kappa^* l_1(\kappa^* R_0)}{l_0(\kappa^* R_0)} \right] + \frac{1}{k\sigma} \left(\frac{B_0}{\mu_0} \right)^2 \left[1 - \frac{l_0(\kappa r) l_0(\kappa^* r)}{l_0(\kappa R_0) l_0(\kappa^* R_0)} \right] \quad (6.T.5)$$

È possibile inoltre determinare due parametri importanti del processo di riscaldamento: la temperatura media ed il ΔT tra parete ed asse; si ha dunque:

$$\langle T \rangle(t) = \frac{\int_0^{R_0} 2\pi r dr T(r, t)}{\pi R_0^2} = \begin{cases} T_{\text{far}} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\Gamma_m}{\alpha_m} J_1(\alpha_m) \left(1 - e^{-\frac{k\alpha_m^2}{\gamma c R_0^2} t} \right) & 0 < t < t_{\text{off}} \\ T_{\text{far}} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\Gamma_m}{\alpha_m} J_1(\alpha_m) \left(e^{\frac{k\alpha_m^2}{\gamma c R_0^2} (t_{\text{off}} - t)} - e^{-\frac{k\alpha_m^2}{\gamma c R_0^2} t} \right) & t > t_{\text{off}} \end{cases} \quad (6.T.6)$$

$$\Delta T(t) = T(R_0, t) - T(0, t) = \begin{cases} \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_m [J_0(\alpha_m) - 1] \left(1 - e^{-\frac{k\alpha_m^2}{\gamma c R_0^2} t} \right) & 0 < t < t_{\text{off}} \\ \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_m [J_0(\alpha_m) - 1] \left(e^{\frac{k\alpha_m^2}{\gamma c R_0^2} (t_{\text{off}} - t)} - e^{-\frac{k\alpha_m^2}{\gamma c R_0^2} t} \right) & t > t_{\text{off}} \end{cases} \quad (6.T.7)$$

Sottoprogetto Unità di BOLOGNA

A titolo di esempio si riportano nella figura 6.3.1 le curve relative al ΔT ed al tempo di riscaldamento t_{off} , valutate tramite le (6.T.4) ed (6.T.7) per una billetta di alluminio (conducibilità elettrica $\sigma = 20$ MS/m, densità di massa $\gamma = 2702$ kg/m³, conducibilità termica $k = 238$ W/mK, calore specifico $c = 965$ J/kgK) di raggio $R_0 = 100$ mm, che ruota in un campo uniforme di $0.2 \div 0.5$ T alla velocità di $1000 \div 6000$ rpm fino a raggiungere la temperatura massima di 500°C .

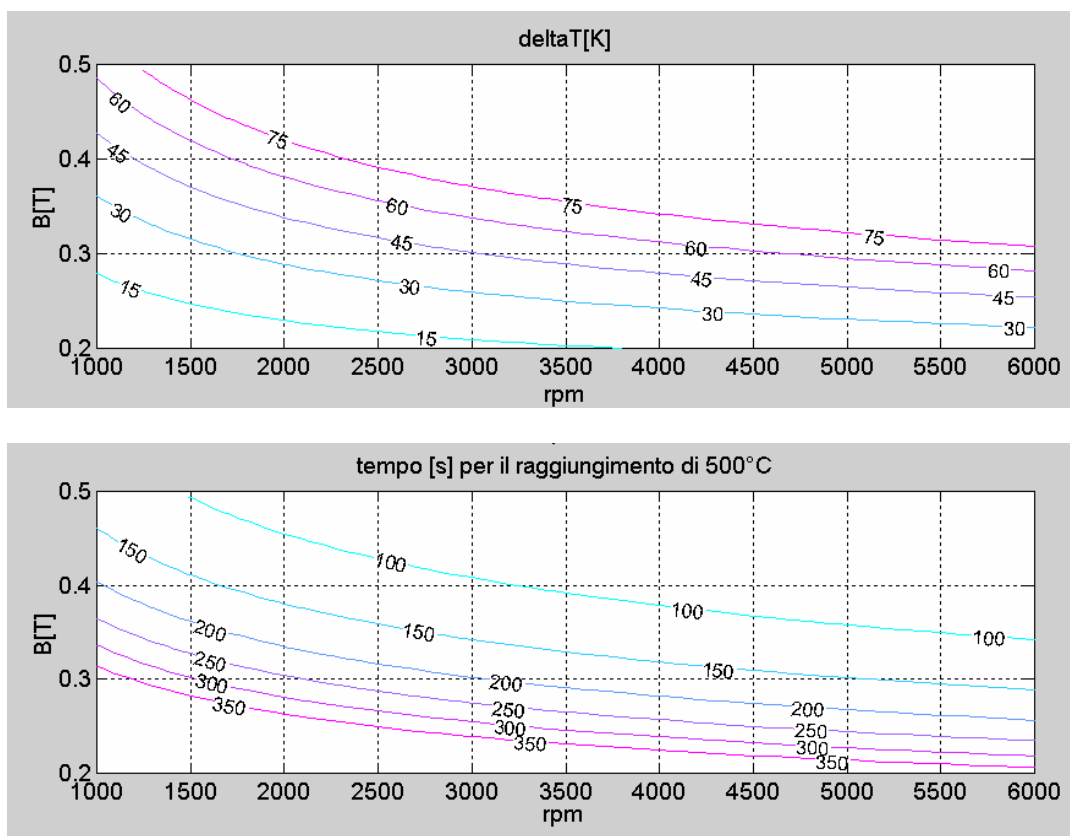


Figura 6.3.1 - curve relative al ΔT ed al tempo di riscaldamento t_{off} , valutate tramite le (6.T.4) ed (6.T.7) per una billetta di alluminio (conducibilità elettrica 20 MS/m, densità di massa 2702 kg/m³, conducibilità termica 238 W/mK e calore specifico 965 J/kgK) di raggio 100 mm, che ruota in un campo uniforme di $0.2 \div 0.5$ T alla velocità di $1000 \div 6000$ rpm fino a raggiungere la temperatura massima di 500°C .

7. Appendice B: Proprietà dell'alluminio

Come riferimento bibliografico per la densità di massa, il calore specifico, la conducibilità termica e la resistività elettrica dell'alluminio si è utilizzato [Tsalaf1981]. La densità di massa si è assunta costante e pari a 2702 [kg/m³], mentre il calore specifico, la conducibilità termica e la resistività elettrica sono state interpolate con un polinomio del sesto grado nel range di temperatura 273 ÷ 873 K, secondo la relazione:

$$(7.1) \quad \frac{g(T)}{g_{\text{ref}}} = \sum_{n=0}^6 K_n \left(\frac{T}{T_{\text{ref}}} - 1 \right)^n$$

dove g rappresenta il calore specifico, la conducibilità termica e la resistività elettrica.

La tabella mostra i valori dei riferimenti e dei coefficienti utilizzati per l'interpolazione ($T_{\text{ref}} = 273 \text{ K}$). Le figure 7.1, 7.2 e 7.3 mostrano gli andamenti delle interpolanti e dei dati originali per il calore specifico, la conducibilità termica e la resistività elettrica dell'alluminio.

g	resistività [Ωm]	conducibilità termica [W/mK]	calore specifico [J/kgK]
g_{ref}	2.5E-8	236	880
K_0	1.000312759749250	0.999769837560507	0.999702696434383
K_1	1.135425588377980	0.060667301378999	0.261747306481993
K_2	0.682560681423638	0.065490501307068	-0.809838793182280
K_3	-1.565362218767400	-0.405364622769412	1.600159353052730
K_4	1.605338987894350	0.427533970156219	-1.329045734135430
K_5	-0.711326891498175	-0.183523698302452	0.496723379648756
K_6	0.113163725312916	0.028399560280377	-0.068657696407172

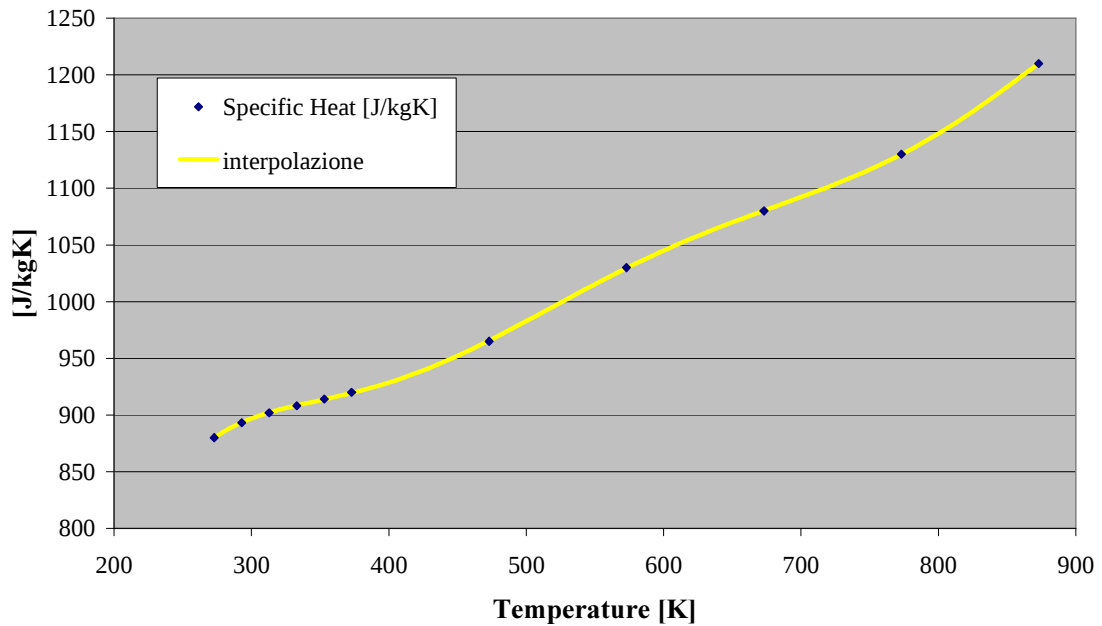


Figura 7.1 - Interpolante e dati originali per il calore specifico dell'alluminio.

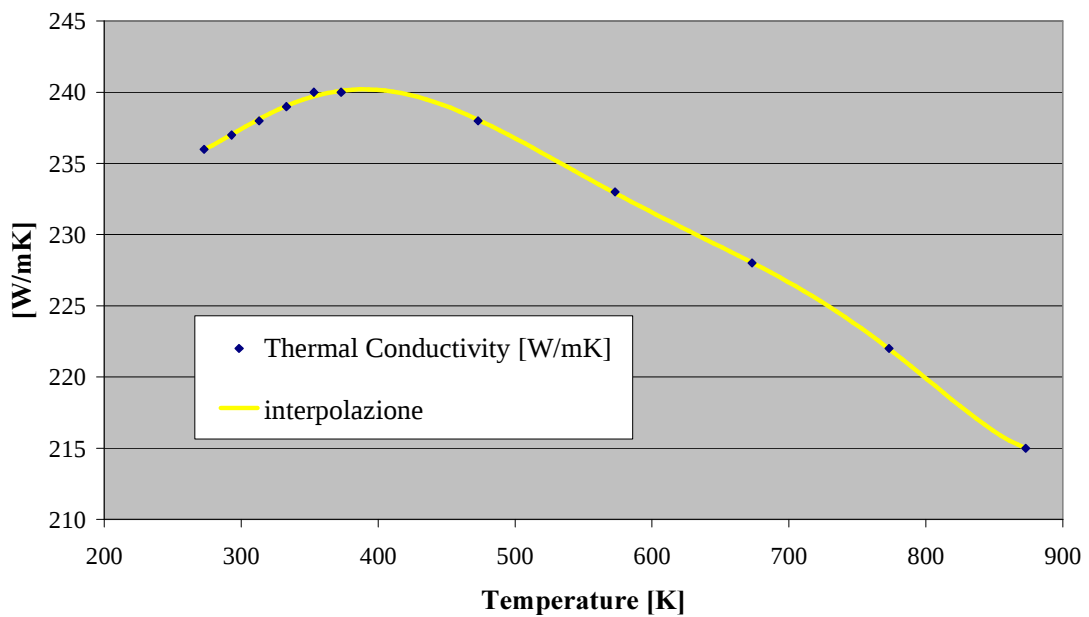


Figura 7.2 - Interpolante e dati originali per la conducibilità termica dell'alluminio.

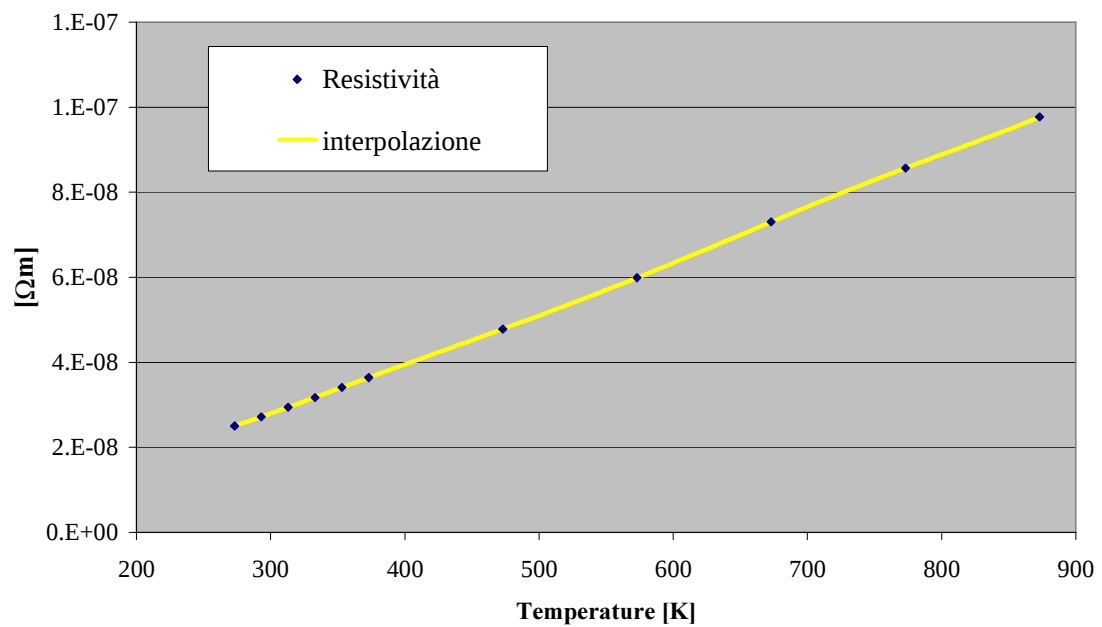


Figura 7.3 - Interpolante e dati originali per la resistività dell'alluminio.

8. Bibliografia

- [Arfken1985] G. Arfken, *Mathematical methos for physicists*, Academic Press, London, 1985, pg. 592.
- [Dughiero2006] F. Dughiero, M. Forzan, S. Lupi, "Induction Heating of Alluminum Billets Rotating in a DC Magnetic Field ", comunicazione privata, 2006
- [Fabbri2005a] M. Fabbri, A. Morandi, F. Negrini, "Temperature Distribution in Aluminum Billets Heated by Rotation in Static Magnetic Field Produced by Superconducting Magnets", *COMPEL*, Vol. 24, n.1, pp. 281-290, 2005
- [Fabbri2005b] M. Fabbri, A. Morandi, F. Negrini, P.L. Ribani, "Temperature Dependent Equivalent Circuit of a Magnetic Shield Type Fault Current Limiter", *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, Vol 15, No. 2, pp. 2078 – 2081, June 2005
- [Fabbri2004] M. Fabbri, A. Morandi, F. Negrini, P.L. Ribani, "Magnetic Shield Type Fault Current Limiter Equivalent Circuit", *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, Vol 14, No. 3, pp. 1966 – 1973, September 2004
- [Gradshteyn1980] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, London, 1980, pg. 672
- [Hiltunen2005] I. Hiltunen, A. Korpela, R. Mikkonen, " Solenoidal Bi-2223/Ag Induction Heater for Aluminum and Copper Billets", *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, Vol. 15, NO 2, June 2005
- [Magnusson2003a] N. Magnusson, M. Runde, "Efficiency Analysis of a High-Ttemperature Superconducting Induction Heater", *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, Vol. 13, NO 2, June 2003
- [Magnusson2003b] N. Magnusson, R. Bersås, M. Runde, "Induction Heating of Aluminium Billets Using HTS DC Coils", *Proceedings of the 6th European Conference on Applied Superconductivity*, Sorrento, Italy, 14–18 September 2003
- [Magnusson2003c] N. Magnusson, M. Runde, "Applying Superconductors to Electromagnetic Processes", *Proceedings of EPM2003*, 4-th Int. Conf. on Electromagnetic Processing of Materials, Lyon, France, 13-17 October 2003
- [Magnusson2005] N. Magnusson, M. Runde, "A 200 kW MgB₂ Induction Heater Project", *Proceedings of the 7th European Conference on Applied Superconductivity – EUCAS05*, Vienna, Austria, 11–15 September 2005
- [Morandi2002] A. Morandi, A. Cristofolini, M. Fabbri, F. Negrini, P. L. Ribani, "Current distribution in a composite superconducting system by means of an equivalent circuit model based on a smooth E-J characteristics", *PHYSICA C*, Volumes 372-376, pp. 1771-1776, 2002
- [Morandi2004] A. Morandi, "Circuit Method for Three-dimensional Field Analysis in Large Scale Superconducting Systems", Relatori: Proff. Francesco Negrini, Pier Luigi Ribani e Massimo Fabbri. Giugno 2004, Dipartimento di Ingegneria Elettrica, Università di Bologna
- [Perry1978] M. P. Perry, T. B. Jones, "Eddy Current Induction in a Solid Conductor Cylinder with a Transverse Magnetic Field", *IEEE Transactions on Magnetics*, VOL. MAG-14, No 4, July 1978
- [Runde2002] M. Runde, N. Magnusson, "Induction Heating of Aluminum Billets using Superconducting Coil", *PHYSICA C*, 372-376 (2002) pp 1339-1341
- [Runde2003] M. Runde, N. Magnusson, "Design, Building and Testing of a 10 kW Superconducting Induction Heater", *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, Vol. 13, NO 2, June 2003
- [Tsalaf1981] A. Tsalaf, *Combined properties of conductors*, Elsevier Scientific Publishing Co., Amsterdam, 1981