Relazioni costitutive e proprietà dei componenti

Reti algebriche

Un componente elettrico (a 2 o più morsetti) si dice **privo di memoria** (o senza memoria, o **adinamico**) se la sua relazione costitutiva esprime un legame tra tensioni e correnti relativamente allo stesso istante di tempo. Il legame v-i è quindi espresso da una **funzione algebrica**.

Se invece la relazione costitutiva coinvolge valori di tensione e corrente ad istanti diversi, il bipolo si dice dotato di memoria (o con memoria, o dinamico). Una tipica relazione dinamica è quella integro-differenziale.

Una rete elettrica costituita da soli componenti privi di memoria si dice **rete adinamica** o **rete algebrica**.

Bipolo

Elemento a due morsetti (poli).
Corrente entrante = corrente uscente → elemento ad **<u>una porta</u>**
→ ***Convenzione dell'utilizzatore***

Un bipolo elettrico si dice **<u>lineare</u>** (*in senso esteso*) se il legame tra tensione e corrente, ovvero la sua <u>relazione costitutiva</u>, è rappresentato da una retta sul piano (v, i):

$\boldsymbol{a\,v + b\,i + c = 0}$ con a, b, c indipendenti da (v, i)

Questa relazione rappresenta un'<u>affinità</u> tra v ed i. Per tale motivo un **<u>bipolo lineare</u>** è anche detto **<u>resistore affine</u>**.

La potenza elettrica istantanea assorbita dal bipolo è: $\boldsymbol{p = v\,i}$

Bipolo

Un bipolo elettrico si dice **tempo invariante** (o autonomo) quando la sua relazione costitutiva non dipende esplicitamente dal tempo.
In caso contrario il bipolo è detto tempo variante.

Un bipolo elettrico si dice **passivo** quando, indipendentemente dai valori di tensione e corrente, l'energia assorbita $w(t)$ non è mai negativa:

$$w(t) \geq 0 \qquad \text{ovvero} \qquad \int_{-\infty}^{t} p(t)\,dt = \int_{-\infty}^{t} v(t)\,i(t)\,dt \geq 0$$

Resistore lineare

Se $c = 0$ si ha: $a\,v + b\,i = 0$. Ponendo $R = -b/a$ oppure $G = 1/R = -a/b$:

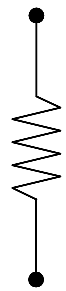
$$\boldsymbol{v = R\,i} \qquad \text{Legge di Ohm} \qquad \boldsymbol{i = G\,v}$$

$\boldsymbol{R}$ ≡ resistenza [Ohm, Ω] $\boldsymbol{G}$ ≡ conduttanza [Siemens, S]

Tale espressione rappresenta una relazione di linearità tra v ed i.

Per quanto riguarda la potenza elettrica assorbita, si ha:

R



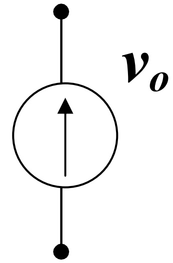
$$\boldsymbol{p = R\,i^2 = v^2/R} \qquad \boldsymbol{p = G\,v^2 = i^2/G}$$

Se $\boldsymbol{R \geq 0}$ il resistore lineare è quindi certamente un bipolo passivo.

Per i resistori comunemente utilizzati nei circuiti elettrici, la potenza assorbita viene dissipata sotto forma di calore (effetto Joule).

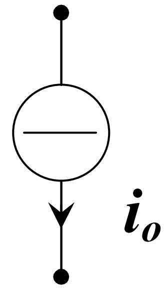
Generatori indipendenti

Se $b = 0$ si ha: $a\,v + c = 0$, ovvero, ponendo $v_o = -c/a$



$\boldsymbol{v = v_o}$ <u>generatore di tensione</u>, ***v*** indipendente da ***i***

Se $a = 0$ si ha: $b\,i + c = 0$, ovvero, ponendo $i_o = -c/b$



$\boldsymbol{i = i_o}$ <u>generatore di corrente</u>, ***i*** indipendente da ***v***

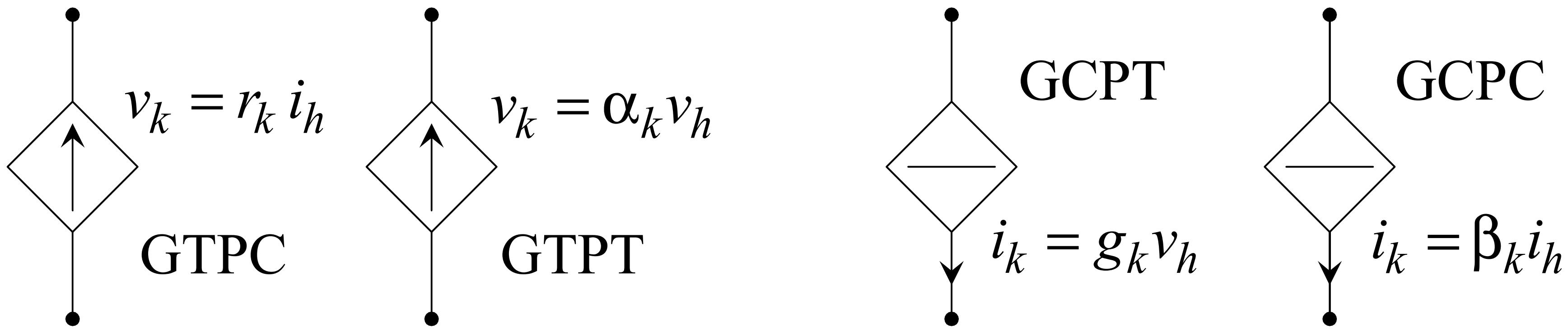
La potenza elettrica può essere erogata o assorbita, in funzione dei versi di tensione e corrente.
Da un punto di vista fisico, i generatori elettrici trasformano l'energia di una fonte esterna in energia elettrica, e viceversa.

I generatori sono dunque <u>bipoli attivi</u>, potendo erogare permanentemente potenza elettrica. (→ *connessioni inconsistenti ed indeterminate*)

Generatori pilotati

Sono componenti lineari in quanto esprimono una proporzionalità tra la grandezze impressa (tensione o corrente) ed una grandezza della rete (grandezza pilota). Si parla in tal caso di generatori <u>pilotati internamente</u>.

La grandezza pilota può essere una delle l tensioni di lato, v_h, o una delle l correnti di lato, i_h, oppure una combinazione lineare di queste.
Ad esempio, la grandezza pilota può essere la tensione tra due nodi qualsiasi del circuito. Questa in virtù della LKT sarà sempre esprimibile come somma algebrica (e quindi combinazione lineare) delle tensioni di lato. (commenti dimensionali sui coeff.)



Collegamenti anomali dei generatori

La caratteristica dei generatori (indipendenti e/o pilotati) di "imprimere" la tensione o la corrente può non essere compatibile con le caratteristiche del circuito ai morsetti tra i quali avviene l'inserzione del generatore.

Con riferimento ad un generatore di tensione, la sua inserzione non può avvenire se si viene a creare una **maglia di soli generatori di tensione**. In tal caso, infatti, non può essere in generale soddisfatta la LKT alla maglia così creatasi, essendo la tensione tra i nodi di inserzione di uno dei generatori che forma la maglia già assegnata dalla somma algebrica delle tensioni degli altri generatori. La rete viene in questo caso detta inconsistente, a meno che la somma delle tensioni dei generatori non sia esattamente nulla. In tal caso la rete è indeterminata in quanto risulterebbe indefinita la corrente che circola nella maglia in questione.

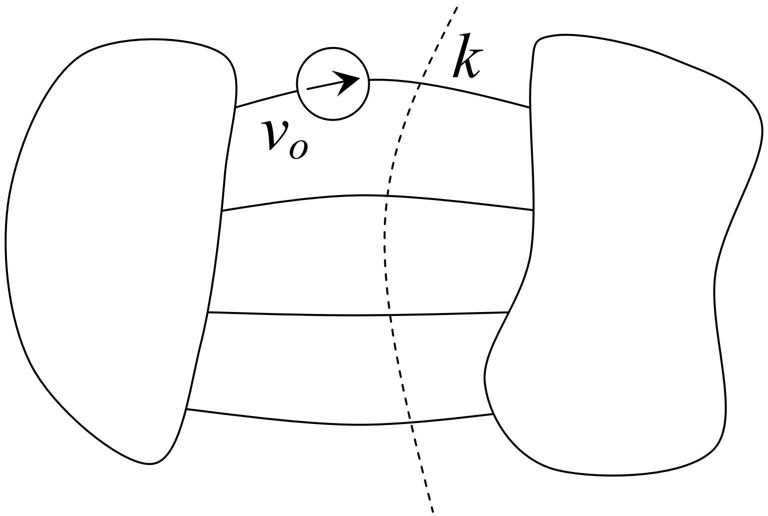
Un discorso analogo vale per un **insieme di taglio di soli generatori di corrente**, che può generare inconsistenza nella LKC o indeterminazione delle tensioni ai capi dei generatori stessi (*vedi dopo dimostr. indeterminaz.).*

Proprietà di spostamento dei generatori

Nella soluzione di una rete elettrica può risultare utile modificare la posizione di un generatore senza che questo spostamento alteri lo stato elettrico della restante parte della rete in esame. Per far questo, è necessario che non siano alterate le leggi di Kirchhoff relativamente agli insiemi di taglio e/o alle maglie coinvolte nello spostamento.

Generatore di tensione

Si considera un insieme di taglio che comprende il lato k con il generatore v_o in oggetto. E' possibile togliere v_o dal lato k, lasciando al suo posto un collegamento diretto (corto circuito), ed aggiungere in serie a ciascuno dei restanti lati dell'insieme di taglio un generatore di tensione $-v_o$ (inserimento detto "a tenaglia").

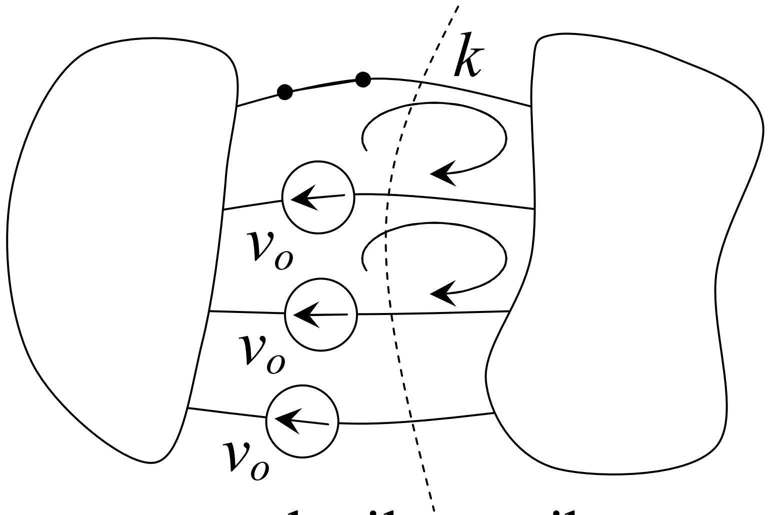


Nota: le orientazioni v_o e $-v_o$ sono riferite a quella (arbitraria) della superficie di taglio considerata.

Proprietà di spostamento dei generatori

Dimostrazione

Lo spostamento del generatore non modifica la LKT in nessuna delle maglie coinvolte nello spostamento. Infatti, tali maglie sono quelle formate da due dei lati dell'insieme di taglio e da altri lati nella restante parte della rete:



- nelle maglie che contengono il lato *k* si ha sempre che il contributo v_o compare una sola volta con il giusto verso;
- nelle maglie che non contengono il lato *k* si hanno due contributi $+v_o$ e $-v_o$ (con segno opposto) che quindi si elidono.

Un caso particolare riguarda una superficie di taglio che contiene un solo nodo. In questo caso il generatore v_o è "spinto" dal lato *k* su tutti gli altri lati incidenti il nodo. (*vedi figura lavagna*)

Proprietà di spostamento dei generatori

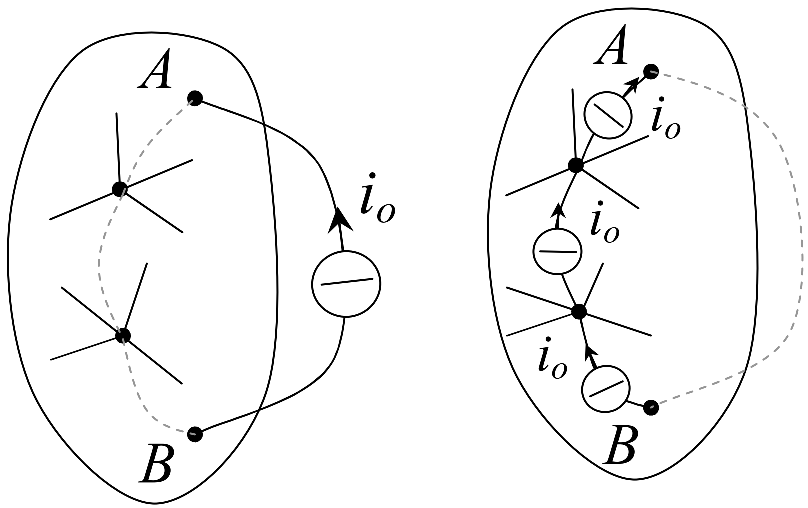
Generatore di corrente

Si considera la coppia di nodi A e B tra i quali è inserito il generatore di corrente i_o in oggetto. E' possibile togliere i_o, eliminando il corrispondente lato (diviene aperto), creando un nuovo cammino tra i nodi A e B composto da generatori di corrente i_o ciascuno facente capo ad una coppia di nodi della rete (inserimento detto a "saldatura"), con la stessa orientazione del generatore originario rispetto i nodi di estremità (da A verso B o viceversa).

Dimostrazione

Lo spostamento di i_o non modifica la LKC in nessuno dei nodi coinvolti:

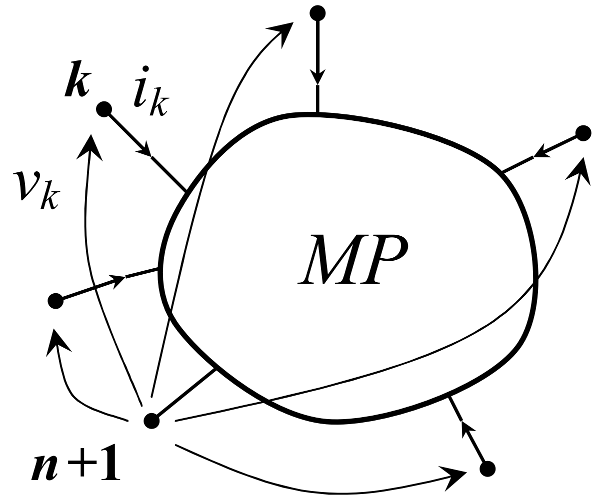
- per i nodi A / B si ha sempre una corrente i_o entrante / uscente;
- per i nodi intermedi si ha una corrente aggiuntiva nulla (i_o e $-i_o$).



Nota: vale anche generatori pilotati purché il pilota non sia coinvolto nello spostamento.

Multipolo

Elemento a più morsetti (poli). Supponendo di avere $n+1$ morsetti, dalle leggi di Kirchhoff risulta che solo n correnti sono indipendenti e le n tensioni descrittive possono essere rappresentate rispetto ad un morsetto preso come riferimento.



Un multipolo elettrico si dice **<u>lineare</u>** se il legame v-i è del tipo:

$$[\boldsymbol{a}]\,[\boldsymbol{v}] + [\boldsymbol{b}]\,[\boldsymbol{i}] + [\boldsymbol{c}] = [\mathbf{0}]$$

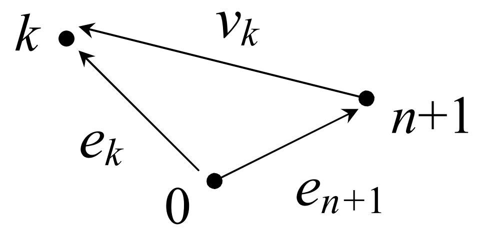
con $[a]$, $[b]$, matrici $n \times n$ e $[c]$ vettore colonna $1 \times n$, indipendenti dai vettori colonna $[v]$, $[i]$.

Le definizioni di passività e tempo invarianza date per i bipoli sono immediatamente estendibili ai multipoli.

Multipolo

La potenza assorbita dal multipolo può essere espressa considerando le tensioni degli n+1 morsetti rispetto un riferimento (0) esterno: → $p = \sum_{k=1}^{n+1} e_k \, i_k \quad (e_k = v_{k0})$

E' immediato verificare che tale espressione è invariante rispetto al punto scelto come riferimento per le tensioni, essendo: → $\sum_{k=1}^{n+1} i_k = 0$

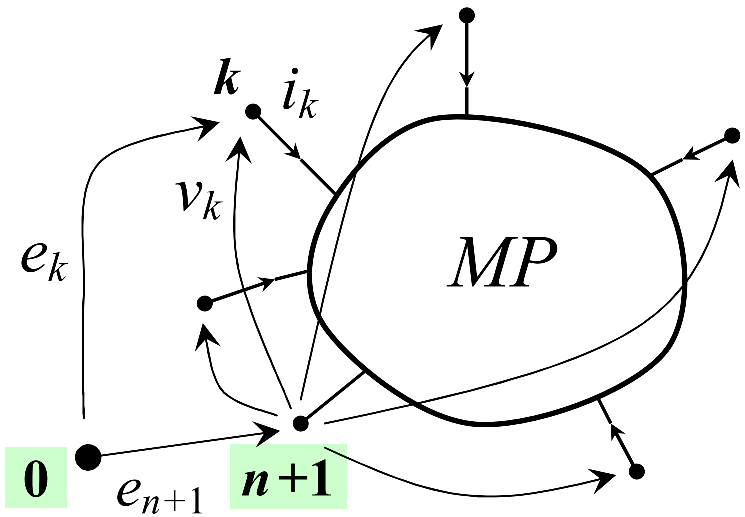


In particolare, è possibile assumere come riferimento uno degli n+1 morsetti del multipolo, riducendo la sommatoria ad n termini ed utilizzando utilizzando le tensioni e le correnti precedentemente definite:

$$p = \sum_{k=1}^{n} v_k \, i_k \qquad \text{ovvero:} \qquad \boldsymbol{p} = [\boldsymbol{v}]^{\mathrm{T}} \, [\boldsymbol{i}]$$

Multipolo

$$p^{(0)} = \sum_{k=1}^{n+1} e_k \, i_k$$



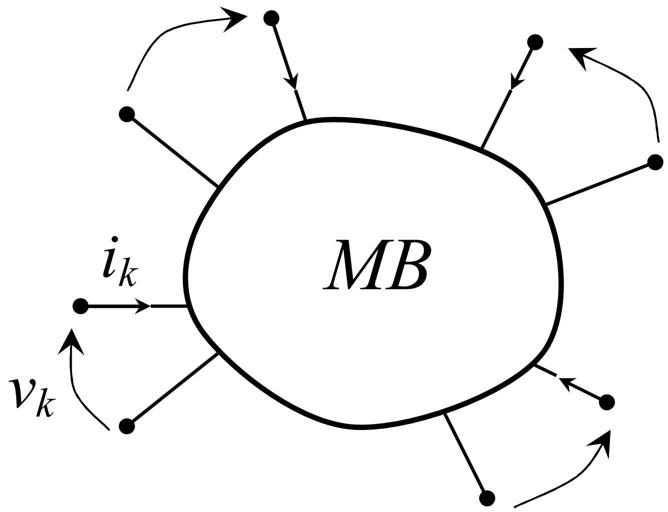
$$e_k = e_{n+1} + v_k$$

$$v_{n+1}=0$$

$$p^{(0)} = \sum_{k=1}^{n+1} (e_{n+1} + v_k)\, i_k = e_{n+1} \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} i_k}_{=0} + \sum_{k=1}^{n} v_k \, i_k = p^{(n+1)}$$

Multibipolo - Multiporta

Elemento che presenta più bipoli ovvero più porte.
In presenza di n porte si hanno quindi solo n correnti descrittive.
Solitamente le tensioni di interesse sono solamente quelle di porta e non quelle tra i morsetti di porte diverse, si hanno quindi n tensioni.



Un multibipolo elettrico si dice **lineare** se il legame v-i è lineare:

$$[\boldsymbol{a}]\,[\boldsymbol{v}] + [\boldsymbol{b}]\,[\boldsymbol{i}] + [\boldsymbol{c}] = [\mathbf{0}]$$

con $[a]$, $[b]$, matrici n x n e $[c]$ vettore colonna 1 x n, indipendenti dai vettori colonna delle tensioni e delle correnti di porta $[v]$, $[i]$.

Multibipolo - Multiporta

Il multibipolo è un caso particolare di multipolo, la potenza elettrica può quindi essere espressa considerando le tensioni dei 2*n* morsetti rispetto un qualsiasi riferimento esterno. Introducendo la condizione che per ogni porta le correnti sono uguali e di segno opposto, è immediato verificare che la potenza elettrica può essere espressa come sommatoria delle singole potenze di porta.

La potenza assorbita dal multibipolo risulta quindi: $\boldsymbol{p} = [\boldsymbol{v}]^{\mathrm{T}} [\boldsymbol{i}]$

Un multibipolo si dice **intrinseco** se la proprietà di avere le correnti di porta uguali ed opposte non dipende dai collegamenti esterni. Molto spesso i multibipoli consistono in multipoli con i 2*n* morsetti collegati a coppie ad *n* singoli bipoli esterni. Si parla in questo caso di multibipoli di tipo **estrinseco**.

Analisi di tableau

La formulazione matriciale delle leggi di Kirchhoff porta alla scrittura di $n-1$ equazioni per le correnti di lato e di $l-n+1$ equazioni per le tensioni di lato, ovvero ad un totale di l equazioni indipendenti. Tali equazioni dipendono esclusivamente dalla topologia della rete elettrica considerata, sono per questo dette <u>equazioni topologiche</u>.

Assumendo tensioni e correnti di lato come variabili, si ottiene complessivamente un sistema con $2l$ incognite, $[v]$ ed $[i]$. Alle equazioni topologiche devono quindi essere aggiunte le relazioni costitutive dei componenti elettrici presenti nella rete, ovvero, i legami tra $[v]$ ed $[i]$.

Se i componenti elettrici sono lineari ($av+bi+c=0$, bipoli o multipli), ovvero per <u>reti lineari</u>, le l leggi costitutive si possono esprimere come:

$$[M]\,[v] + [N]\,[i] = [u_s]\,,$$

nella quale il vettore $[u_s]$ tiene conto dei generatori indipendenti.

Analisi di tableau

Infatti, nel caso la rete sia composta da soli <u>bipoli lineari</u>, per il lato *k*-esimo la relazione costitutiva può essere del tipo:

resistori
$$\begin{cases} v_k - R_k i_k = 0 \\ G_k v_k - i_k = 0 \end{cases}$$

generatori pilotati
$$\begin{cases} v_k - r_k i_h = 0 \\ v_k - \alpha_k v_h = 0 \\ g_k v_h - i_k = 0 \\ \beta_k i_h - i_k = 0 \end{cases}$$

m generatori indipendenti
$$\begin{cases} v_k = v_{ok} \\ i_k = i_{ok} \end{cases}$$

Ordinando tali relazioni in modo da lasciare nelle ultime *m* righe gli *m* generatori indipendenti si può scrivere:

$$\begin{array}{cccccc} & l & & l & & \\ l & \begin{bmatrix} & & \\ & M & \\ & & \end{bmatrix} & [v] + & \begin{bmatrix} & & \\ & N & \\ & & \end{bmatrix} & [i] = & \begin{bmatrix} 0 \\ v_o \\ i_o \end{bmatrix} \begin{array}{l} l-m \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} m \end{array} \end{array}$$

vedi esempio lavagna

Matrice di tableau

Utilizzando la matrice di incidenza [A] e la matrice degli anelli [B] per la scrittura delle l equazioni indipendenti di Kirchhoff, e la precedente relazione matriciale per esprimere le relazioni costitutive dei componenti si ottiene un sistema di $2l$ equazioni esprimibile nella forma:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} l & l \end{array} \\ \begin{array}{r} n-1 \\ l-n+1 \\ l \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \\ M & N \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_s \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{array}{cc} & 2l \\ 2l & \begin{bmatrix} \quad T \quad \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_o \\ i_o \end{bmatrix} \begin{array}{l} 2l-m \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} m \end{array}$$

$[T]$ matrice quadrata $2l$ x $2l$ è una <u>**matrice di tableau**</u>

Per com'è definita, [T] è una <u>matrice sparsa</u>, il che può offrire vantaggi nella soluzione della rete elettrica con algoritmi numerici iterativi.

Matrice di tableau

La matrice di tableau può essere definita anche utilizzando la matrice dei rami [D] e quella delle corde [C], o una loro elaborazione.
La condizione essenziale è che le relazioni costitutive associate alle matrici [M] ed [N] siano scritte con riferimento alle tensioni ed alle correnti nello stesso ordine in cui queste compaiono nella formulazione matriciale delle leggi di Kirchhoff.

Se la rete è univocamente risolvibile, allora: $det[T] \neq 0$, e viceversa.
(la matrice [T] ha rango massimo, $rg[T] = 2l$)

Se invece ***det*[*T*] = 0** si possono avere due casi:
(teorema di Rouché-Capelli, si considera la **matrice completa**) →

$$\begin{array}{cc} & 2l+1 \\ 2l & \left[\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c} \\ T \\ \\ \end{array}\right] & \begin{array}{c} 0 \\ v_o \\ i_o \end{array} \end{array}\right] \end{array}$$

$\uparrow$

termini noti, u_s

- <u>rete indeterminata</u>, infinite soluzioni: $rg[T|u_s] = rg[T]$;

- <u>rete inconsistente</u>, soluzione impossibile: $rg[T|u_s] > rg[T]$.

Matrice di tableau

La condizione $det[T] = 0$ è determinata dalla presenza di (almeno) una maglia di generatori di tensione (GdT) e/o da (almeno) un insieme di taglio di generatori di corrente (GdC).

Nel caso di maglia di GdT, la corrispondente riga nella matrice $[B]$ (o $[C]$) risulta esattamente la somma delle righe corrispondenti ai GdT in questione nella matrice $[M]$:
- se questi soddisfano la LKT (somma dei termini noti = 0) si ha una rete indeterminata: $rg[T|u_s] = rg[T] < 2l$.
- se non soddisfano la LKT (somma dei termini noti ≠ 0) si ha una rete inconsistente: $rg[T|u_s] > rg[T] < 2l$.

Nel caso di insieme di taglio di GdC, la corrisp. riga nella matrice $[A]$ (o $[D]$) risulta esattamente la somma delle righe corrispondenti ai GdC in questione nella matrice $[N]$:
- se questi soddisfano la LKC (somma dei termini noti = 0) si ha una rete indeterminata: $rg[T|u_s] = rg[T] < 2l$.
- se non soddisfano la LKC (somma dei termini noti ≠ 0) si ha una rete inconsistente: $rg[T|u_s] > rg[T] < 2l$.

Soluzione per sostituzione

Un metodo immediato ed intuitivo per risolvere la rete algebrica descritta della equazioni in forma tableau è quello di utilizzare le l relazioni costitutive ed introdurle nelle relazioni topologiche per ridurre il problema da $2l$ ad l incognite, per sostituzione.

Nel casso di bipoli, infatti, ogni relazione costitutiva consente l'eliminazione della tensione o della corrente del corrispondente lato.

Spesso si preferisce mantenere come <u>incognite le correnti</u>. In particolare, ciò è possibile per tutti i lati che corrispondono a <u>resistori</u> ed a <u>generatori di tensione</u> (pilotati e non), mentre è necessario assumere come <u>incognite le tensioni dei generatori di corrente</u> (pilotati e non) essendo in questo caso la corrente di lato nota o comunque impressa.

Il sistema risolutivo così ottenuto presenta l equazioni in l incognite.

Soluzione per sostituzione

Con riferimento alle notazioni introdotte precedentemente si ha:

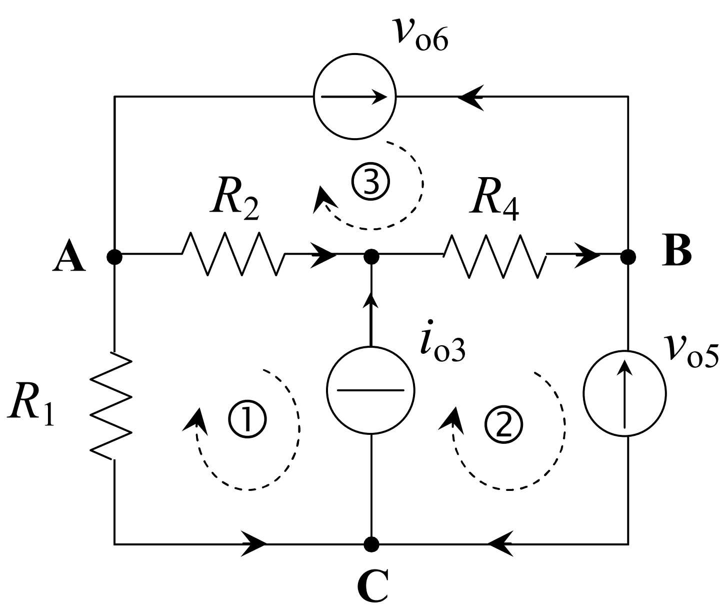
Tipo di bipolo	**Relazione**	**Sostituzione**	**Incognita residua**
resistori	$\begin{cases} v_k - R_k i_k = 0 \\ G_k v_k - i_k = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} v_k = R_k i_k \\ v_k = i_k / G_k \end{cases}$	$\boldsymbol{i_k}$
generatori di tensione pilotati	$\begin{cases} v_k - r_k i_h = 0 \\ v_k - \alpha_k v_h = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} v_k = r_k i_h \\ v_k = \alpha_k v_h \end{cases}$	$\boldsymbol{i_k}$
generatori di corrente pilotati	$\begin{cases} g_k v_h - i_k = 0 \\ \beta_k i_h - i_k = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} i_k = g_k v_h \\ i_k = \beta_k i_h \end{cases}$	$\boldsymbol{v_k}$
generatori indipendenti	$\begin{cases} v_k = v_{ok} \\ i_k = i_{ok} \end{cases}$	$\begin{cases} v_k = v_{ok} \\ i_k = i_{ok} \end{cases}$	$\boldsymbol{i_k}$ $\boldsymbol{v_k}$

Soluzione per sostituzione: esempio

A) $+ i_1 + i_2 - i_6 = 0$
B) $-i_4 + i_5 + i_6 = 0$ **LKC**
C) $-i_1 + i_3 - i_5 = 0$ $(n-1=3)$

1) $+ v_1 - v_2 + v_3 = 0$
2) $- v_3 - v_4 - v_5 = 0$ **LKT**
3) $+ v_2 + v_4 + v_6 = 0$ $(l-n+1=3)$

$v_1 = R_1\, i_1$
$v_2 = R_2\, i_2$
$i_3 = i_{o3}$ relaz. costit.
$v_4 = R_4\, i_4$ $(l=6)$
$v_5 = v_{o5}$
$v_6 = v_{o6}$



Soluzione per sostituzione: esempio

Introducendo le relazioni costitutive nelle LKC ed LKV si ottiene:

A) $+ \boldsymbol{i_1} + \boldsymbol{i_2} - \boldsymbol{i_6} = 0$
B) $-\boldsymbol{i_4} + \boldsymbol{i_5} + \boldsymbol{i_6} = 0$
C) $-\boldsymbol{i_1} + i_{o3} - \boldsymbol{i_5} = 0$

1) $+ R_1 \boldsymbol{i_1} - R_2 \boldsymbol{i_2} + \boldsymbol{v_3} = 0$
2) $- \boldsymbol{v_3} - R_4 \boldsymbol{i_4} - v_{o5} = 0$
3) $+ R_2 \boldsymbol{i_2} + R_4 \boldsymbol{i_4} + v_{o6} = 0$

Le incognite rimanenti (l=6) sono in questo caso**:** $\boldsymbol{i_1}$, $\boldsymbol{i_2}$, $\boldsymbol{v_3}$, $\boldsymbol{i_4}$, $\boldsymbol{i_5}$, $\boldsymbol{i_6}$.

Il sistema così ottenuto di 6 equazioni nelle 6 incognite indicate può ulteriormente essere risolto per sostituzione o con altri metodi analitici o numerici.