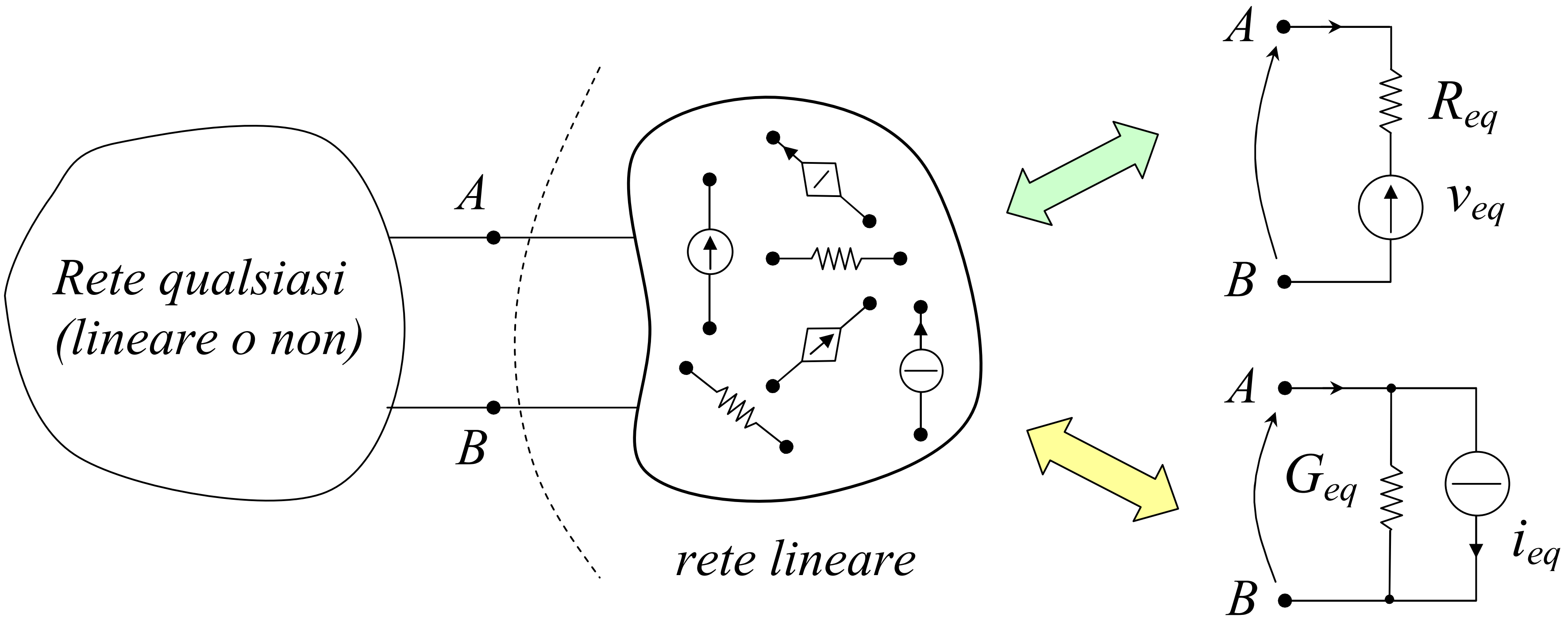
Teorema di Thévenin-Norton

E' detto anche teorema di rappresentazione del bipolo, consente infatti di rappresentare una rete lineare a due morsetti (A, B) con:

- un generatore di tensione ed un resistore serie (Thévenin) o con
- un generatore di corrente ed un resistore parallelo (Norton).



Teorema di Thévenin-Norton

In virtù del principio di sostituzione è possibile considerare il bipolo equivalente di Thévenin-Norton in luogo della rete lineare originaria (bipolo) se la relazione di legame *v*-*i*, ovvero la relazione costitutiva, è la stessa nei due casi.

Si tratta, in effetti, della riscrittura della relazione costitutiva generale di un <u>bipolo lineare</u>. Nel caso non vi siano generatori pilotati esternamente:

$$\boxed{a\,v + b\,i + c = 0} \quad \begin{cases} \text{se } a \neq 0 \;\Rightarrow\; v = -\dfrac{b}{a}\,i - \dfrac{c}{a} & \text{bipolo rappresentabile Thévenin} \\[2ex] \text{se } b \neq 0 \;\Rightarrow\; i = -\dfrac{a}{b}\,v - \dfrac{c}{b} & \text{bipolo rappresentabile Norton} \end{cases}$$

Nota *(successiva)*

Teorema di Thévenin-Norton

La resistenza $\boldsymbol{R_{eq}}$ $(-b/a)$ rappresenta la resistenza equivalente vista dai morsetti A e B <u>disattivando i generatori indipendenti</u> di tensione e di corrente presenti nella rete (ovvero, rendendola inerte).
Analogamente per la conduttanza equivalente $\boldsymbol{G_{eq}} = 1/R_{eq}$ $(-a/b)$.

$$\begin{cases} v = R_{eq}\, i + v_{eq} & \textit{Rappresentazione } \textbf{\textit{Thévenin}} \\ i = G_{eq}\, v + i_{eq} & \textit{Rappresentazione } \textbf{\textit{Norton}} \end{cases}$$

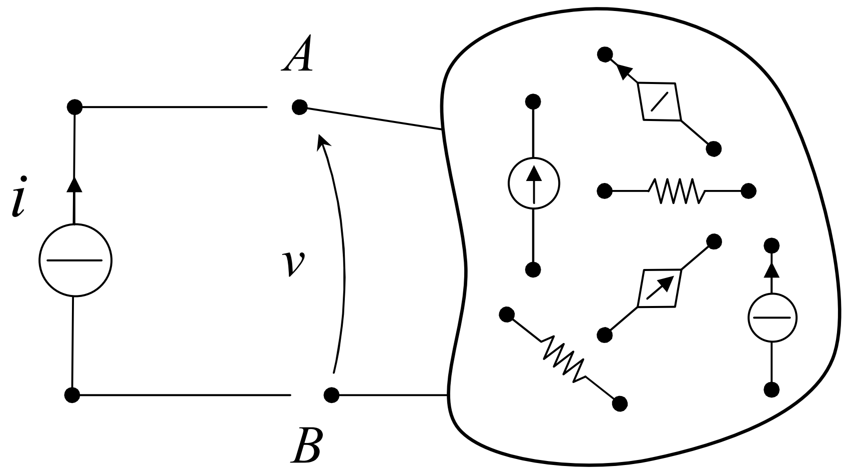
La tensione $\boldsymbol{v_{eq}}$ rappresenta la tensione a vuoto del bipolo $(-c/a)$.

La corrente $\boldsymbol{i_{eq}}$ rappresenta la corrente di corto del bipolo $(-c/b)$.

Teorema di Thévenin

Dimostrazione

Per il teorema di **Thévenin**, si consideri un generatore indipendente di corrente (i) collegato ai morsetti A e B della rete lineare considerata.



$$v = R_{eq}\, i + v_{eq}$$

Nota storica: *Il teorema fu formulato per primo dallo scienziato tedesco Hermann von Helmholtz nel 1853, ma fu riscoperto poi nel 1883 dall'ingegnere francese Léon Charles Thévenin*.

Teorema di Thévenin

In base alla linearità della rete, è possibile utilizzare il principio di sovrapposizione degli effetti ed esprimere la tensione tra i morsetti *A* e *B* come combinazione lineare di tutti i generatori indipendenti, compreso quello di corrente collegato esternamente:

resistenza equivalente con la rete disattivata (inerte)

$$v = R_{eq}\, i + \boxed{\sum_k a_k v_{ok} + \sum_k b_k i_{ok}}$$

$$R_{eq} = \left(\frac{v}{i} \right)_{\substack{v_{ok}=0 \\ i_{ok}=0}}$$

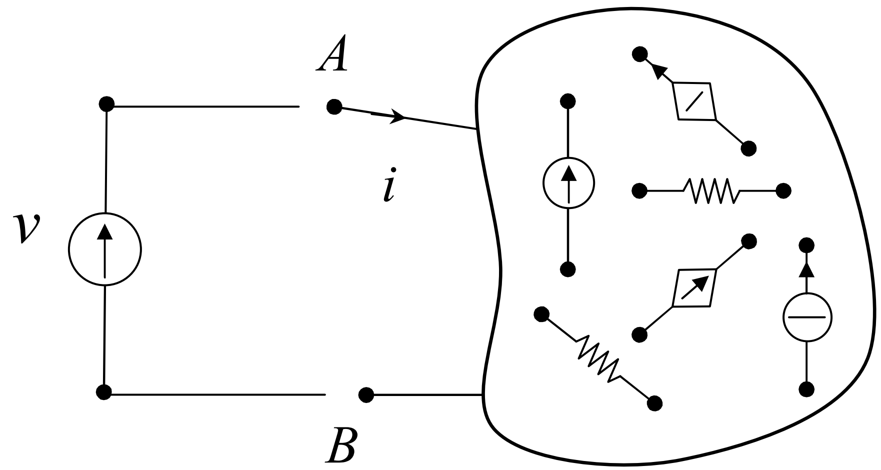
$$\sum_k a_k v_{ok} + \sum_k b_k i_{ok} = (\, v \,)_{i=0} = v_{eq}$$

tensione equivalente con corrente nulla → *a vuoto*

Teorema di Norton

Dimostrazione

Per il teorema di **Norton**, si consideri invece un generatore indipendente di tensione (v) collegato ai morsetti A e B della rete lineare considerata. Ora è necessario esprimere la corrente assorbita da tale bipolo.



$$i = G_{eq} v + i_{eq}$$

Teorema di Norton

In base alla linearità della rete, è possibile utilizzare il principio di sovrapposizione degli effetti ed esprimere la corrente ai morsetti *A*, *B* come combinazione lineare di tutti i generatori indipendenti, compreso quello di tensione collegato esternamente:

$$i = G_{eq}\, v + \boxed{\sum_k \alpha_k v_{ok} + \sum_k \beta_k i_{ok}}$$

conduttanza equivalente con la rete disattivata (inerte)

$$G_{eq} = \left(\frac{i}{v} \right)_{\substack{v_{ok}=0 \\ i_{ok}=0}}$$

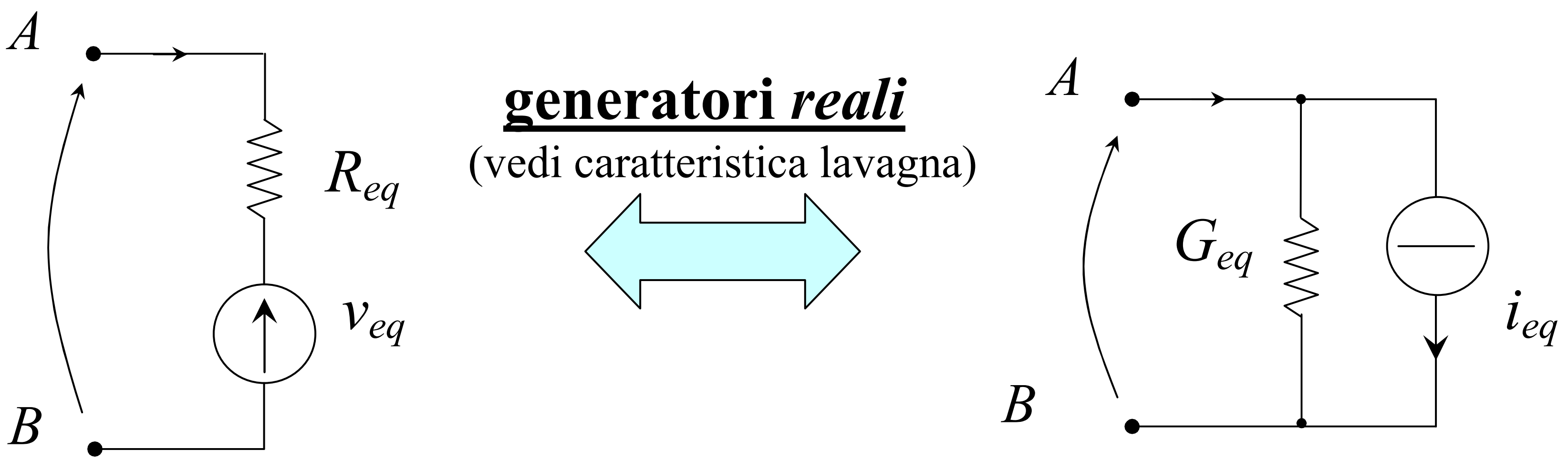
$$\sum_k \alpha_k v_{ok} + \sum_k \beta_k i_{ok} = (\, i \,)_{v=0} = i_{eq}$$

corrente equivalente con tensione nulla → in corto

Teorema di Thévenin-Norton

<u>Se</u> entrambe le rappresentazioni sono possibili i generatori equivalenti sono legati dalla relazione: $i_{eq} = -\, v_{eq} / R_{eq}$, $v_{eq} = -\, i_{eq} R_{eq}$.

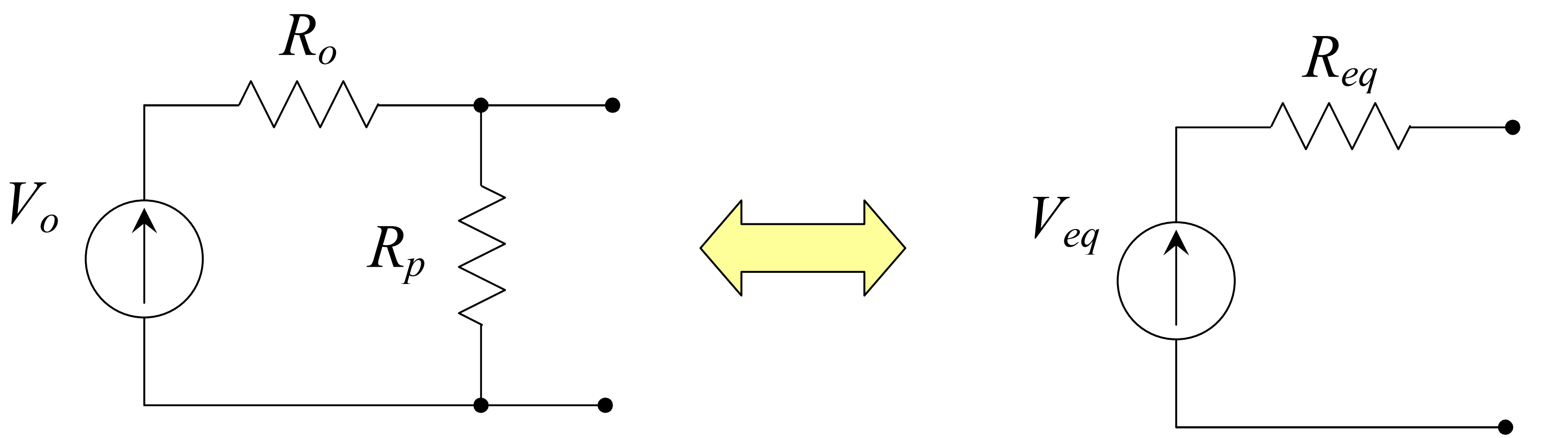
Una modalità alternativa per calcolare R_{eq} (o G_{eq}) è quindi: $\boxed{R_{eq} = -v_{eq} / i_{eq}}$



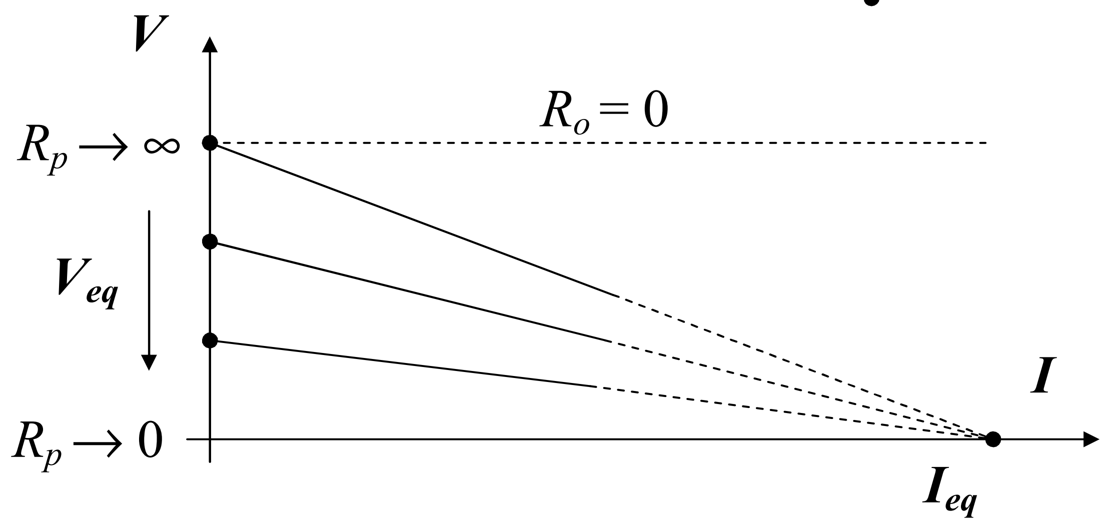
<u>Nota</u>: Nel caso in cui siano presenti <u>generatori pilotati esternamente</u>, è necessario aggiungere un generatore pilotato equivalente serie di tensione (Thévenin) o un generatore pilotato equivalente parallelo di corrente (Norton). Tali generatori rappresentano, rispettivamente, la tensione a vuoto o la corrente di corto con i generatori indipendenti disattivati.

Esempio di applicazione Thévenin

Resistore in parallelo ad un generatore reale di tensione:



$$\begin{cases} V_{eq} = \dfrac{V_o}{R_o + R_p} R_p \\[2ex] R_{eq} = \dfrac{R_o R_p}{R_o + R_p} \end{cases}$$



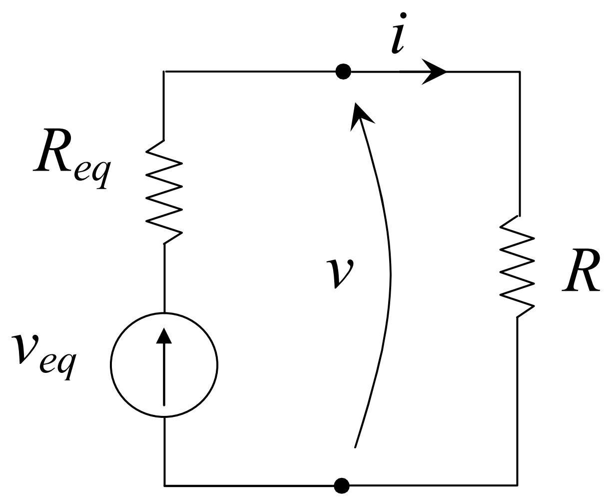
Teorema del massimo trasferimento di potenza

Con riferimento ad un generatore reale di tensione, o comunque ad un bipolo rappresentabile Thévenin, è possibile collegare un resistore e determinare a quale valore della resistenza R corrisponde la massima potenza da questi assorbita. Si tratta di un problema di massimo, si ha infatti potenza nulla per $R \to 0$ ($p_R = R\, i^2$) e per $R \to \infty$ ($p_R = v^2/R$).

$$p_R = R \cdot i^2 = R \frac{v_{eq}^2}{\left(R_{eq}+R\right)^2}$$

$$\frac{d}{dR} p_R = \frac{v_{eq}^2}{\left(R_{eq}+R\right)^2} - 2R \frac{v_{eq}^2}{\left(R_{eq}+R\right)^3} =$$

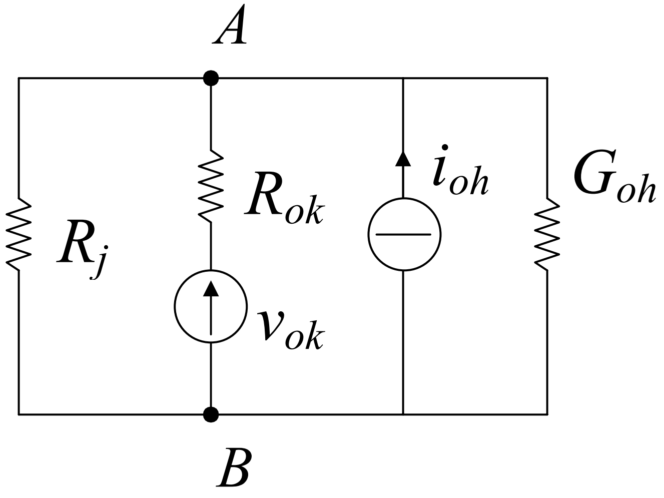
$$= \frac{v_{eq}^2}{\left(R_{eq}+R\right)^2}\left[1 - \frac{2R}{\left(R_{eq}+R\right)}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = R_{eq}}$$



Teorema di Millman

Il teorema di Millman può essere visto come un'applicazione del teorema di Thévenin-Norton. Afferma che è possibile esprimere immediatamente la tensione v_{AB} di una rete ottenuta collegando più bipoli lineari in parallelo tra i nodi *A* e *B*, essendo ciascun bipolo rappresentabile Thévenin o Norton.

$$v_{AB} = \frac{\sum_k \frac{v_{ok}}{R_{ok}} + \sum_h i_{oh}}{\sum_j \frac{1}{R_j} + \sum_k \frac{1}{R_{ok}} + \sum_h G_{oh}}$$



<u>Nota</u>: *in presenza di soli generatori di tensione reali, la tensione risultante è la <u>media pesata</u> delle loro tensioni, essendo il peso costituito dalle rispettive conduttanze.*

Teorema di Millman

Dimostrazione

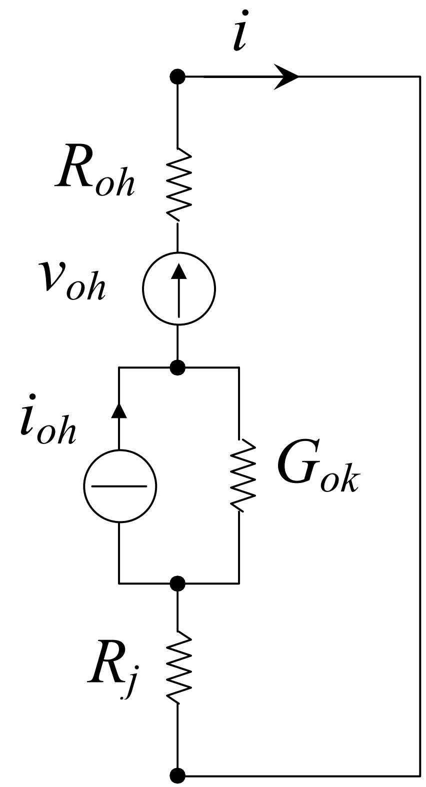
Per ogni bipolo tipo Thévenin si consideri la rappresentazione equivalente di Norton: $i_{ok} = v_{ok}/R_{ok}$, $G_{ok} = 1/R_{ok}$.
Tra i nodi *A* e *B* si ottengono così solamente generatori indipendenti di corrente e resistori (caratterizzati da resistenza o conduttanza).
La corrente complessivamente iniettata dai generatori verso il morsetto *A* e la conduttanza complessiva tra i morsetti *A* e *B* valgono:

$$\left.\begin{aligned} i_{o\,tot} &= \sum_k \frac{v_{ok}}{R_{ok}} + \sum_h i_{oh} \\ G_{AB} &= \sum_j \frac{1}{R_j} + \sum_k \frac{1}{R_{ok}} + \sum_h G_{oh} \end{aligned}\right\} \quad v_{AB} = \frac{i_{o\,tot}}{G_{AB}}$$

Teorema di Millman duale

La corrente di una rete ottenuta collegando più bipoli lineari in serie è immediatamente esprimibile nella forma:

$$i = \frac{\sum_k \frac{i_{ok}}{G_{ok}} + \sum_h v_{oh}}{\sum_j R_j + \sum_k \frac{1}{G_{ok}} + \sum_h R_{oh}} = \frac{v_{o\,tot}}{R_{tot}}$$



La dimostrazione è immediata considerando per ogni bipolo tipo Norton la rappresentazione equivalente di Thévenin, ottenendo così solamente generatori di tensione e resistori (caratterizzati da resistenza o conduttanza). La corrente risulta quindi il rapporto tra la somma algebrica dei generatori $v_{o\,tot}$ e la resistenza serie complessiva R_{tot}.

Rappresentazione Thévenin-Norton del multibipolo

La relazione costitutiva in forma matriciale del multibipolo (multiporta) **lineare** consente di generalizzare il teorema di Thévenin-Norton:

$$[a]\,[v] + [b]\,[i] + [c] = [0]$$

$$\begin{cases} \text{se } \ det[a] \neq 0 \quad \Rightarrow \quad [v] = -[a]^{-1}[b][i] - [a]^{-1}[c] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{il multibipolo è rapprenentabile Thévenin} \\ \\ \text{se } \ det[b] \neq 0 \quad \Rightarrow \quad [i] = -[b]^{-1}[a][v] - [b]^{-1}[c] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{il multibipolo è rapprenentabile Norton} \end{cases}$$

Nota: tale rappresentazione può essere utilizzata anche per i multipoli

Rappresentazione Thévenin-Norton del multibipolo

Utilizzando le matrici di cui sopra si può pervenire alla forma:

<u>Thévenin</u>:

$$[v] = [R_{eq}]\,[i] + [v_{eq}]$$

$$\begin{cases} [R_{eq}] \equiv \underline{\text{matrice di resistenza}},\ n \times n \\ \qquad (\textit{multibipolo disattivato}) \\ [v_{eq}] \equiv n \text{ tensioni a vuoto di porta} \end{cases}$$

<u>Norton</u>:

$$[i] = [G_{eq}]\,[v] + [i_{eq}]$$

$$\begin{cases} [G_{eq}] \equiv \underline{\text{matrice di conduttanza}},\ n \times n \\ \qquad (\textit{multibipolo disattivato}) \\ [i_{eq}] \equiv n \text{ correnti in corto di porta} \end{cases}$$

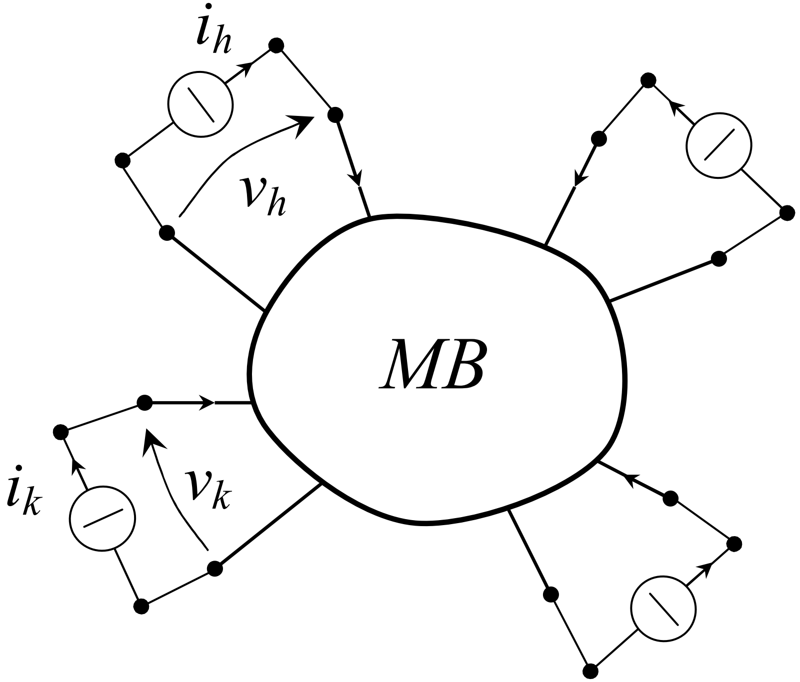
<u>Se</u> entrambe le rappresentazioni sono possibili:

$$\begin{cases} [G_{eq}] = [R_{eq}]^{-1} \\ [i_{eq}] = -[G_{eq}]\,[v_{eq}] \end{cases}$$

Rappresentazione Thévenin del multibipolo

Per l'individuazione degli elementi della matrice di resistenza $[R_{eq}]$ si procede in modo analogo a quanto fatto nel caso del singolo bipolo.

Si considerino quindi n generatori indipendenti di corrente $[i]$ rispettivamente collegati a ciascuna porta.



Data la linearità della rete complessiva è possibile esprime la tensione della porta k-esima come combinazione lineare di tutti i generatori indipendenti, interni ed esterni il multibipolo:

$$v_k = \sum_{h=1}^{n} R_{kh}\, i_h + \sum_i a_{ki}\, v_{oi} + \sum_i b_{ki}\, i_{oi}$$

Rappresentazione Thévenin del multibipolo

Gli elementi R_{kh} possono pertanto essere espressi disattivando tutti i generatori indipendenti, interni ed esterni, ad esclusione del h-esimo generatore di corrente esterno:

$$R_{kh} = \left(\frac{v_k}{i_h} \right)_{\substack{v_{oi}=0 \\ i_{oi}=0 \\ \boldsymbol{i}_j=\mathbf{0} \\ j \neq h}} \qquad \text{in particolare:} \qquad R_{kk} = \left(\frac{v_k}{i_k} \right)_{\substack{v_{oi}=0 \\ i_{oi}=0 \\ \boldsymbol{i}_j=\mathbf{0} \\ j \neq k}}$$

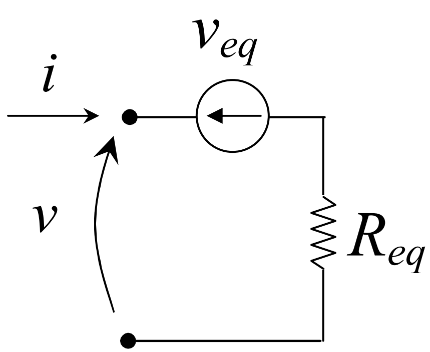
Il termine: $$v_{eq\,k} = \sum_i a_{ki} v_{oi} + \sum_i b_{ki} i_{oi} = \left(v_k \right)_{\boldsymbol{i}_j=\mathbf{0}}$$

rappresenta la tensione alla porta k-esima disattivando tutti i generatori di corrente esterni, ovvero, la tensione di porta a vuoto.

Rappresentazione Thévenin del multibipolo

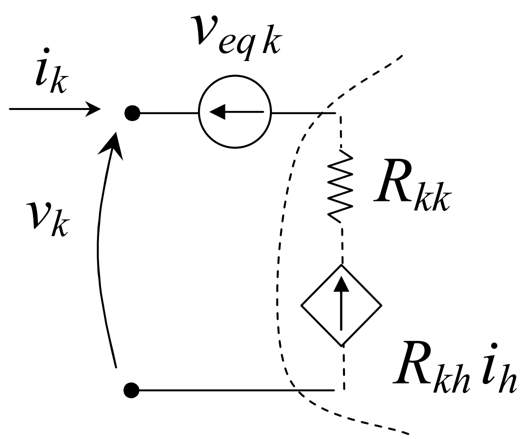
Il multibipolo lineare può quindi essere rappresentato Thévenin con una rete inerte, individuata dalla matrice di resistenza $[R_{eq}]$, ottenuta disattivando tutti i generatori indipendenti interni, e da n generatori di tensione che rappresentano le tensioni di porta a vuoto, in serie con ciascuna porta.

bipolo

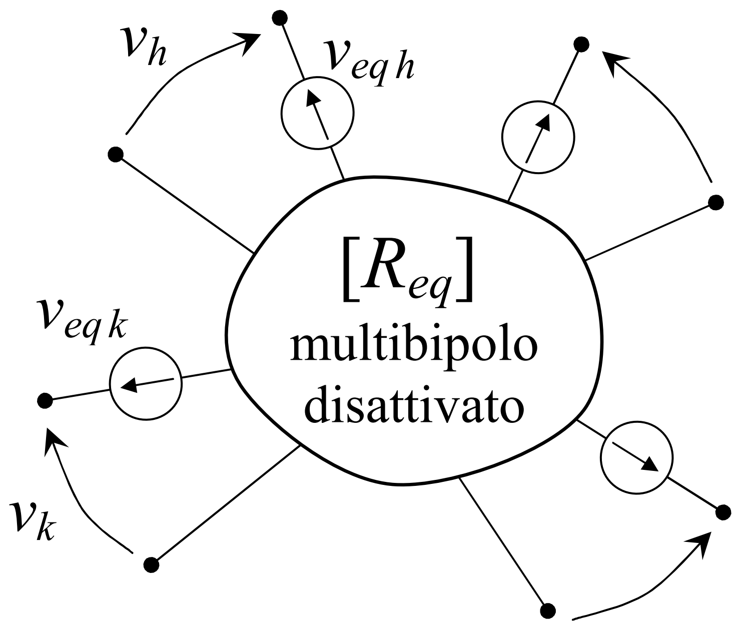


$$v = R_{eq}\, i + v_{eq}$$

multibipolo



$$v_k = R_{kk}\, i_k + \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq k}}^{n} R_{kh}\, i_h + v_{eq\,k}$$



Rappresentazione Norton del multibipolo

Con un analogo procedimento si individuano gli elementi della matrice di conduttanza $[G_{eq}]$, introducendo n generatori indipendenti di tensione $[v]$ rispettivamente collegati ciascuna porta.

Data la linearità della rete complessiva, la corrente della porta k risulta:

$$i_k = \sum_{h=1}^{n} G_{kh}\, v_h + \sum_i \alpha_{ki}\, v_{oi} + \sum_i \beta_{ki}\, i_{oi} \qquad G_{kh} = \left(\frac{i_k}{v_h}\right)_{\substack{v_{oi}=0 \\ i_{oi}=0 \\ \boldsymbol{v_j=0} \\ j\neq h}}$$

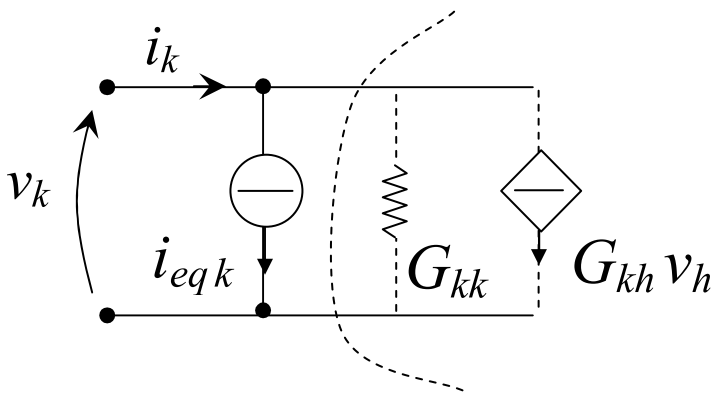
$$i_{eq\,k} = \sum_i \alpha_{ki} v_{oi} + \sum_i \beta_{ki} i_{oi} = (i_k)_{\boldsymbol{v_j=0}}$$

rappresenta la corrente della k-esima porta disattivando tutti i generatori di tensione esterni, ovvero, la corrente di porta in corto circuito.

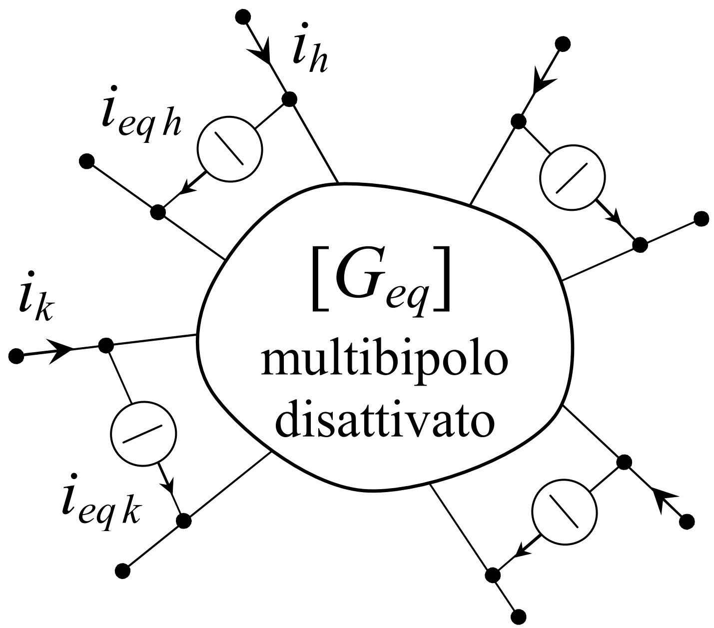
E' anche possibile caratterizzare il multibipolo con <u>rappresentazioni ibride</u>, ovvero con generatori sia di tensione che di corrente e matrici $[H]$ ibride.

Rappresentazione Norton del multibipolo

Il multibipolo lineare può quindi essere rappresentato Norton con una <u>rete inerte</u>, individuata dalla matrice di conduttanza $[G_{eq}]$, ottenuta disattivando tutti i generatori indipendenti interni, e da n generatori di corrente che rappresentano le correnti di corto circuito di porta, in parallelo con ciascuna porta.

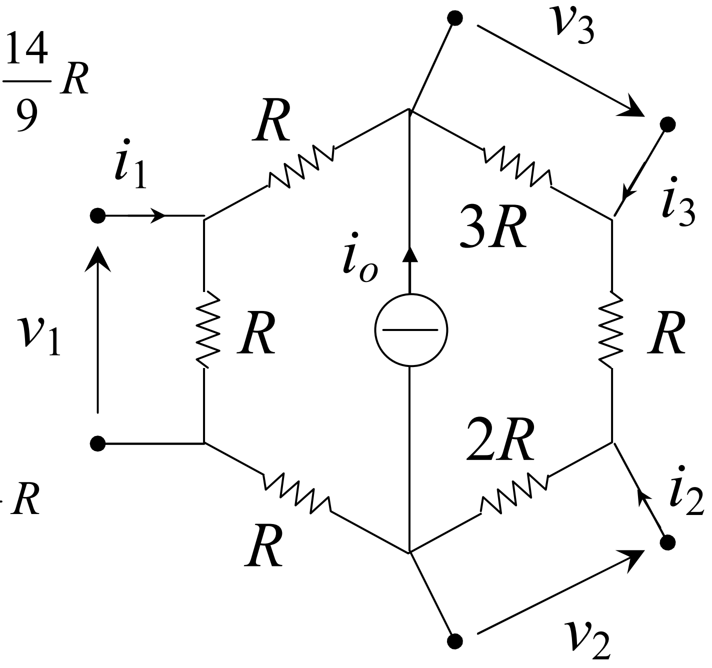


$$i_k = G_{kk}\,v_k + \sum_{\substack{h=1 \\ h\neq k}}^{n} G_{kh}\,v_h + i_{eq\,k}$$



Esempio di rappresentazione Thévenin di un triporta

$$R_{11} = \left(\frac{v_1}{i_1}\right)_{\substack{i_2=0\\ i_3=0}}^{i_o=0} = \frac{R\cdot 8R}{9R} = \frac{8}{9}R \qquad R_{22} = \left(\frac{v_2}{i_2}\right)_{\substack{i_1=0\\ i_3=0}}^{i_o=0} = \frac{2R\cdot 7R}{9R} = \frac{14}{9}R$$



$$R_{33} = \left(\frac{v_3}{i_3}\right)_{\substack{i_1=0\\ i_2=0}}^{i_o=0} = \frac{3R\cdot 6R}{9R} = 2R$$

$$R_{12} = \left(\frac{v_1}{i_2}\right)_{\substack{i_1=0\\ i_3=0}}^{i_o=0} = R\frac{2R}{9R} = \frac{2}{9}R \qquad R_{21} = \left(\frac{v_2}{i_1}\right)_{\substack{i_2=0\\ i_3=0}}^{i_o=0} = 2R\frac{R}{9R} = \frac{2}{9}R$$

$$R_{13} = \left(\frac{v_1}{i_3}\right)_{\substack{i_1=0\\ i_2=0}}^{i_o=0} = -R\frac{3R}{9R} = -\frac{1}{3}R \qquad R_{23} = \left(\frac{v_2}{i_3}\right)_{\substack{i_1=0\\ i_2=0}}^{i_o=0} = 2R\frac{3R}{9R} = \frac{2}{3}R$$

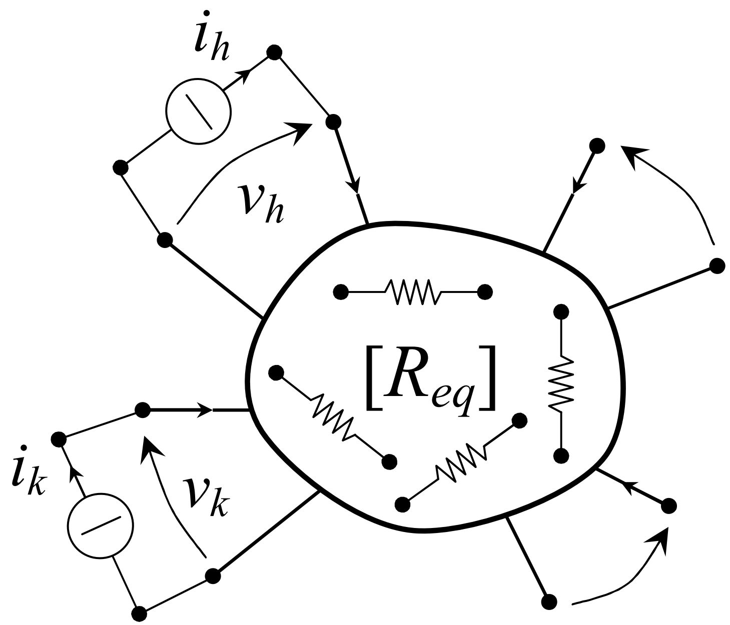
$$v_{eq1} = (v_1)_{\substack{i_1=0\\ i_2=0\\ i_3=0}} = R\frac{6R}{9R}i_o = \frac{2}{3}R\,i_o \qquad v_{eq2} = (v_2)_{\substack{i_1=0\\ i_2=0\\ i_3=0}} = 2R\frac{3R}{9R}i_o = \frac{2}{3}R\,i_o \qquad v_{eq3} = (v_3)_{\substack{i_1=0\\ i_2=0\\ i_3=0}} = -3R\frac{3R}{9R}i_o = -R\,i_o$$

Teorema di reciprocità

Si considera una rete di soli resistori. In particolare, il teorema viene enunciato nel caso di un multibipolo senza generatori (pilotati e non), caratterizzato quindi dalla sola matrice di resistenza $[R_{eq}]$. Analogamente può essere considerata la rete disattivata di un multibipolo rappresentabile Thévenin, privo di generatori pilotati.

Considerati due generatori di corrente indipendenti collegati alle porte k ed h, lasciando tutte le altre porte a vuoto, si ha:

$$\left(\frac{v_k}{i_h}\right)_{i_k=0} = \left(\frac{v_h}{i_k}\right)_{i_h=0} \quad \text{ovvero:}$$



$$R_{kh} = R_{hk} \,, \quad [R_{eq}] = [R_{eq}]^{\mathrm{T}}$$

La matrice di resistenza è simmetrica

Teorema di reciprocità

Dimostrazione

Si consideri la rete complessiva costituita dai due generatori e dal multibipolo. In particolare, si indichino con il singolo apice l'insieme delle tensioni e correnti di lato del multibipolo, v_j' ed i_j', relative al caso di $i_k' \neq 0$ ed $i_h' = 0$, e con il doppio apice l'insieme delle tensioni e correnti di lato del multibipolo, v_j'' ed i_j'', relative al caso $i_k''=0$ ed $i_h''\neq 0$.

Entrambi i sistemi di tensioni e correnti della rete complessiva $[v']$, $[i']$ ed $[v'']$, $[i'']$ soddisfano le leggi di Kirchhoff, può quindi essere applicato il teorema di Tellegen nelle due formulazioni:

$$\begin{cases} [v']^T [i''] = 0 \\ [v'']^T [i'] = 0 \end{cases}$$

Teorema di reciprocità

<u>Dimostrazione</u> (*segue*)

Evidenziando il contributo dei generatori, presenti sui soli lati *k* ed *h* :

$$\begin{cases} v_k' i_k'' + v_h' i_h'' + \sum_j v_j' i_j'' = 0 \\ v_k'' i_k' + v_h'' i_h' + \sum_j v_j'' i_j' = 0 \end{cases}$$

Si tratta ora di esplicitare i contributi $v_j' i_j''$ ed $v_j'' i_j'$ relativi al componente circuitale sul generico lato *j* interno il multibipolo.

Per definizione, se $\boldsymbol{v_j' i_j'' = v_j'' i_j'}$ il componente si dice <u>reciproco</u>.

Teorema di reciprocità

Dimostrazione (*segue*)

Avendo supposto un multibipolo di soli resistori si ha:

$$\begin{cases} v_j' = R_j\, i_j' \\ v_j'' = R_j\, i_j'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_j' i_j'' = R_j\, i_j'\, i_j'' \\ v_j'' i_j' = R_j\, i_j''\, i_j' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_j' i_j'' = v_j'' i_j' \\ \underline{\text{il resistore è reciproco}} \end{cases}$$

Si ha quindi: $$\sum_j v_j' i_j'' = \sum_j v_j'' i_j'$$

sostituendo nelle precedenti relazioni di Tellegen si ottiene:

$$v_k'\, i_k'' + v_h'\, i_h'' = v_k''\, i_k' + v_h''\, i_h'$$

Teorema di reciprocità

Considerando le ipotesi sulle correnti dei generatori relativamente alle due situazioni:

$$\begin{cases} i_k' \neq 0\,,\ i_h' = 0 \\ i_k'' = 0\,,\ i_h'' \neq 0 \end{cases}$$

$$\underbrace{v_k'\, i_k''}_{=0} + v_h'\, i_h'' = v_k''\, i_k' + \underbrace{v_h''\, i_h'}_{=0}$$

si possono eliminare i due termini nulli ed ottenere la relazione:

$$v_h' i_h'' = v_k'' i_k' \Leftrightarrow \frac{v_h'}{i_k'} = \frac{v_k''}{i_h''} \quad \text{ovvero:} \quad \left(\frac{v_h}{i_k}\right)_{i_h=0} = \left(\frac{v_k}{i_h}\right)_{i_k=0}$$

Con procedimento analogo, utilizzando generatori esterni di tensione, si può dimostrare che anche la matrice di conduttanza $[G_{eq}]$ è simmetrica. (Nota: *l'inversa di una mat. simmetrica è simmetrica*)

Teorema di reciprocità – formulazione generale

Il teorema di reciprocità ha validità generale per tutte le reti reciproche, ovvero per reti composte da soli elementi reciproci. Il resistore è l'unico elemento reciproco fin'ora esaminato. I generatori (indipendenti e pilotati) non sono elementi reciproci.

In base alla dimostrazione, la formulazione generale del teorema di reciprocità può essere espressa nella forma:

$$v_k' \, i_k'' + v_h' \, i_h'' = v_k'' i_k' + v_h'' i_h'$$

indicando con apice e doppio apice due dei possibili stati elettrici della rete relativamente ai lati *k* ed *h*:

$$\begin{cases} v_k',\ i_k',\ v_h',\ i_h' \\ v_k'',\ i_k'',\ v_h'',\ i_h'' \end{cases}$$

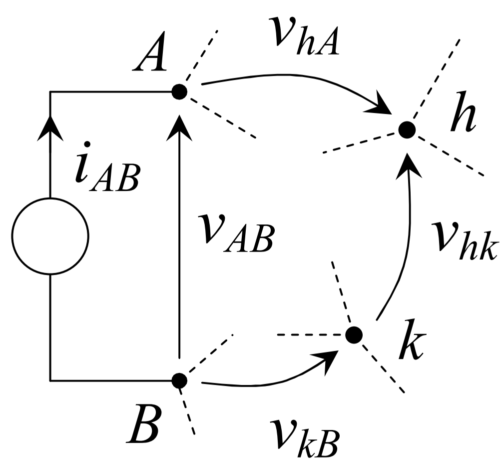
Teorema di non amplificazione (o massimo guadagno)

In una rete di soli resistori (o comunque di elementi passivi) con un solo generatore indipendente, si ha che la tensione tra qualsiasi coppia di nodi e la corrente in qualsiasi lato sono minori (o uguali) rispettivamente alla tensione ed alla corrente del generatore.
Ovvero, siano A e B i morsetti del generatore, h e k due nodi qualsiasi.
Si ha: $v_{AB} \geq |v_{hk}|$, $i_{AB} \geq |i_{hk}|$ (se h e k sono le estremità di un lato).

Dimostrazione

Per la tensione, si può anche dimostrare che:

$$v_{hA} \leq 0 \ , \ \ v_{kB} \geq 0 \ \xrightarrow{\text{LKT}} \ v_{AB} = v_{hk} + (v_{kB} - v_{hA}) \geq v_{hk}$$



Se h fosse il nodo a potenziale maggiore, stante la passività dei bipoli della rete, tutte le correnti uscirebbero da h, non sarebbe quindi verificata la LKC, quindi: $v_{hA} \leq 0$.

Se k fosse il nodo a potenziale minore, stante la passività dei bipoli della rete, tutte le correnti entrerebbero in k, non sarebbe quindi verificata la LKC, quindi: $v_{kB} \geq 0$.