

Potenza in regime sinusoidale

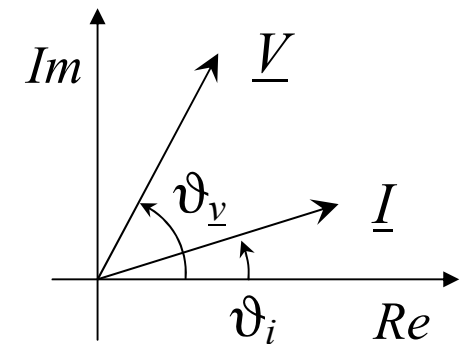
Con riferimento alla convenzione dell'utilizzatore, la potenza istantanea $p(t)$ assorbita da un bipolo è sempre definita come prodotto tra tensione $v(t)$ e corrente $i(t)$:

$$p(t) = v(t) i(t)$$

Considerando le grandezze in regime sinusoidale si ha:

$$v(t) = \sqrt{2} V \cos(\omega t + \vartheta_v) \quad , \quad i(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \vartheta_i)$$

$$p(t) = 2 VI \cos(\omega t + \vartheta_v) \cos(\omega t + \vartheta_i)$$



Utilizzando la formula: $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$ si ha:

$$p(t) = \underbrace{VI \cos(\vartheta_v - \vartheta_i)}_{\text{termine costante}} + \underbrace{VI \cos(2\omega t + \vartheta_v + \vartheta_i)}_{\text{termine a frequenza doppia}}$$

termine costante *termine a frequenza doppia*

Potenza attiva

La potenza istantanea è quindi data dalla somma di due contributi, uno costante ed uno sinusoidale a frequenza doppia di quella del regime sinusoidale considerato. In termini energetici, quello che conta è l'integrale della potenza istantanea, ovvero il valor medio P_m della potenza assorbita dal bipolo. Si ha quindi:

$$P_m = VI \cos(\vartheta_v - \vartheta_i)$$

Si definisce **potenza attiva** P il valor medio della potenza istantanea:

$$P = VI \cos \varphi, \text{ avendo posto: } \varphi = \vartheta_v - \vartheta_i \text{ sfasamento tra } v(t) \text{ ed } i(t).$$

In termini simbolici si ha quindi che la potenza attiva è espressa dal prodotto scalare tra i fasori di tensione e corrente:

$$P = \underline{V} \cdot \underline{I} = \operatorname{Re}(\underline{V} \underline{I}^*) \quad [\text{watt, W}]$$

dimostrazione lavagna

$$\underline{X} = X_r + jX_i$$

Corrente attiva e corrente reattiva

In particolare, è possibile scomporre la sinusoide della corrente, in ritardo dell'angolo φ rispetto alla sinusoide della tensione, nella somma di due sinusoidi rispettivamente in fase ed in quadratura rispetto la tensione:

$$i(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \vartheta_v - \varphi) \quad \{\vartheta_i = \vartheta_v - \varphi\} \quad \{ \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \}$$

$$i(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \vartheta_v) \cos \varphi + \sqrt{2} I \sin(\omega t + \vartheta_v) \sin \varphi$$

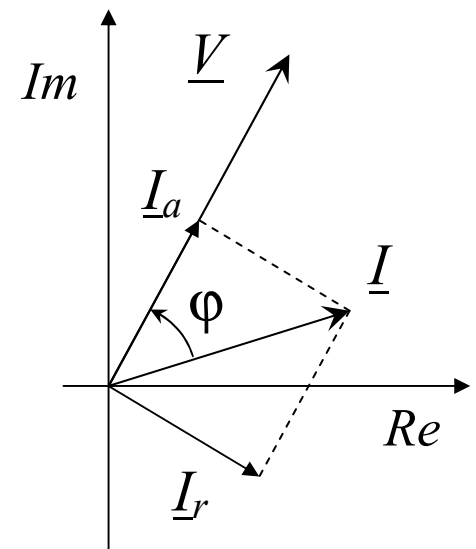
ovvero: $i(t) = i_a(t) + i_r(t)$ avendo posto:

$$i_a(t) = \sqrt{2} I \cos \varphi \cos(\omega t + \vartheta_v) \quad \textbf{corrente attiva}$$

$$i_r(t) = \sqrt{2} I \sin \varphi \cos(\omega t + \vartheta_v - \pi/2) \quad \textbf{corrente reattiva}$$

In termini simbolici si ha:

$$\underline{I} = \underline{I}_a + \underline{I}_r = I \cos \varphi \angle \vartheta_v + I \sin \varphi \angle (\vartheta_v - \pi/2)$$



Potenza istantanea attiva e reattiva

Introducendo l'espressione delle due correnti nella definizione di potenza istantanea si ottiene:

$$p(t) = v(t) [i_a(t) + i_r(t)] = \quad \{ \text{sen } \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\text{sen}(\alpha - \beta) + \text{sen}(\alpha + \beta)] \}$$

$$= 2VI \cos \varphi \cos(\omega t + \vartheta_v) \cos(\omega t + \vartheta_v) + 2VI \text{sen } \varphi \cos(\omega t + \vartheta_v) \text{sen}(\omega t + \vartheta_v)$$

$$p(t) = VI \cos \varphi + VI \cos \varphi \cos(2\omega t + 2\vartheta_v) + VI \text{sen } \varphi \text{sen}(2\omega t + 2\vartheta_v)$$

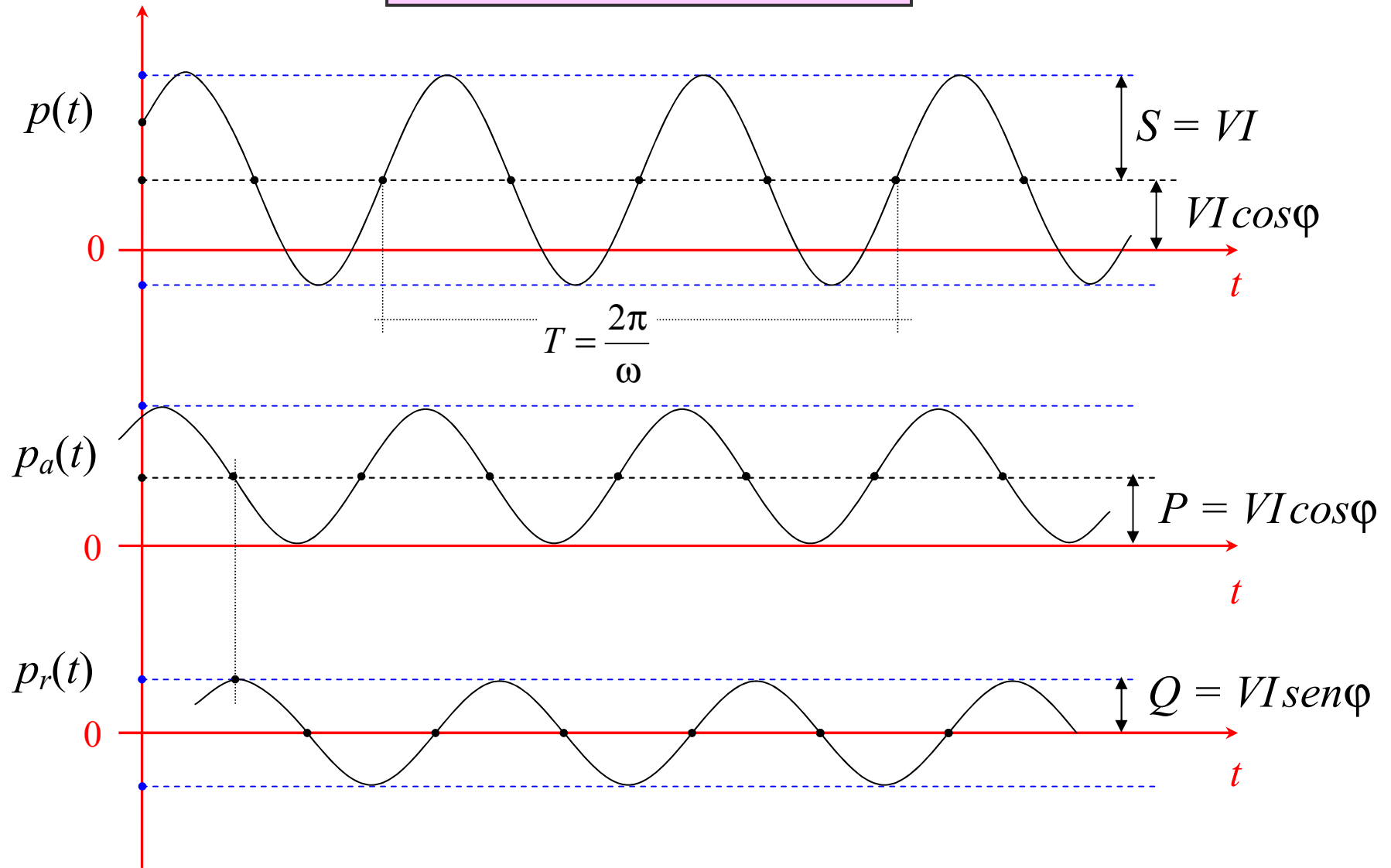
$p(t) = p_a(t) + p_r(t)$, avendo posto:

$$\begin{cases} p_a(t) = VI \cos \varphi + VI \cos \varphi \cos(2\omega t + 2\vartheta_v) & \text{potenza istantanea attiva} \\ p_r(t) = VI \text{sen } \varphi \text{sen}(2\omega t + 2\vartheta_v) & \text{potenza istantanea reattiva} \end{cases}$$

La $p_a(t)$ è unidirezionale, assumendo sempre il segno di $\cos \varphi$. Il valor medio della $p_a(t)$ è la potenza attiva.

La $p_r(t)$ ha valor medio nullo ed ampiezza pari a $VI \text{sen } \varphi$.

Potenze istantanee



Potenza reattiva

All'ampiezza della potenza reattiva istantanea viene associata la:

$$Q = V I \sin \varphi \quad \text{potenza reattiva}$$

La potenza reattiva rappresenta quindi l'ampiezza della componente di potenza istantanea che non comporta un trasferimento medio di energia ma un semplice “palleggiamento” a frequenza doppia di quella di lavoro.

In termini di fasori si ha:

$$Q = \underline{V} \cdot j \underline{I} = \text{Im}(\underline{V} \underline{I}^*) \quad [\text{volt-ampere reattivi, VAr}]$$

$$\begin{cases} P = V I_a \\ Q = V I_r \end{cases}$$

vedi disegni lavagna

Potenza complessa e potenza apparente

Si osserva che potenza attiva e potenza reattiva possono essere scritte come parte reale e parte immaginaria di una medesima quantità complessa data dal prodotto tra il fasore della tensione, $\underline{V}$, ed il fasore complesso coniugato della corrente, $\underline{I}^*$. Tale quantità è detta **potenza complessa**, $\underline{S}$:

$$P = \operatorname{Re}(\underline{V} \underline{I}^*), \quad Q = \operatorname{Im}(\underline{V} \underline{I}^*) \quad \Rightarrow \quad \underline{V} \underline{I}^* = P + jQ$$

$$\underline{S} = \underline{V} \underline{I}^* = P + jQ$$

Il modulo della potenza complessa, ovvero il prodotto tra i valori efficaci di tensione e corrente, è detto **potenza apparente**:

$$S = |\underline{S}| = |\underline{V} \underline{I}^*| = VI \quad [\text{volt-ampere, VA}]$$

Nota: il termine potenza “apparente” deriva dal fatto che in regime sinusoidale il prodotto VI esprime solo apparentemente una potenza (in senso energetico), come invece accade in continua. Solo una quotaparte della potenza apparente, la potenza attiva, rappresenta un effettivo scambio di energia.

Triangolo delle potenze

In analogia con quanto fatto per l'impedenza, si introduce anche il triangolo delle potenze:

$$\underline{S} = P + jQ$$

$$P = VI \cos \varphi$$

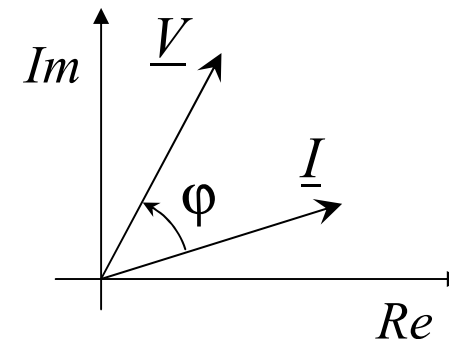
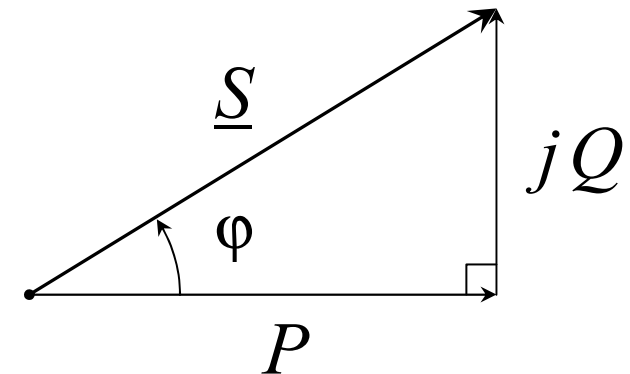
$$Q = VI \sin \varphi, \quad Q = P \tan \varphi$$

$$S = \sqrt{(P^2 + Q^2)} = VI$$

$$FP = P/S \quad \textbf{fattore di potenza}$$

$$FP = \cos \varphi \quad (\text{solo in regime sinusoidale})$$

Nota: Se la parte immaginaria di $\underline{S}$ è positiva, come nel caso di figura, si tratta di una potenza reattiva induttiva, ($\underline{I}$ in ritardo su $\underline{V}$). Se la parte immaginaria di $\underline{S}$ è negativa si ha una potenza reattiva di tipo capacitivo ($\underline{I}$ in anticipo su $\underline{V}$).



Applicazione del Teorema di Tellegen

Il teorema di Tellegen può essere applicato ad un insieme di fasori rappresentativi di tensioni e di correnti in regime sinusoidale, con l'ipotesi che tali fasori soddisfino alle LKC e LKT. Con riferimento alla matrice di incidenza $[A]$, deve pertanto essere:

$$[A] [\underline{I}] = 0 \quad , \quad [A]^T [\underline{E}] = [\underline{V}]$$

Si possono considerare come fasori quelli corrispondenti alle tensioni ed alle correnti di lato della rete considerata. Essendo la matrice $[A]$ reale, la LKC è soddisfatta anche considerando, in luogo dei fasori delle correnti, $\underline{I}$, i fasori complessi coniugati $\underline{I}^*$:

$$[A] [\underline{I}^*] = 0 \quad , \quad [A]^T [\underline{E}] = [\underline{V}]$$

Il teorema di Tellegen fornisce in questo caso la relazione:

$$[\underline{V}]^T [\underline{I}^*] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum \underline{V}_k \underline{I}_k^* = 0 \quad \text{ovvero:} \quad \sum \underline{S}_k = 0$$

Teorema di addittività delle potenze

La formulazione: $\sum \underline{S}_k = 0$ *(somma vettoriale!)*

esprime il concetto che la somma delle potenze complesse assorbite dagli elementi della rete è complessivamente nulla. Ovvero, la somma delle potenze complesse erogate dai generatori è uguale alla somma delle potenze complesse assorbite dagli utilizzatori.

Tale relazione complessa corrisponde a due equazioni scalari, considerando la parte reale, ovvero le potenze attive, e la parte parte immaginaria, ovvero le potenze reattive:

$$\sum P_k = 0 \quad , \quad \sum Q_k = 0 \quad \text{(*somma algebrica!*)}$$

Potenza complessa, potenza attiva e potenza reattiva sono pertanto quantità additive. Tale risultato è anche noto come **teorema di Boucherot**.

Nota: Ciò è scontato per P , in virtù della conservazione dell'energia, ma non per Q ed $\underline{S}$.

Calcolo delle potenze

Con semplici sostituzioni è possibile pervenire alle seguenti formulazioni in termini di resistenza R , reattanza X , ed impedenza Z (modulo):

$$P_R = R I_R^2 = V_R^2 / R, \quad Q_R = 0$$

$$P_X = 0, \quad Q_X = \pm X I_X^2 = \pm V_X^2 / X$$

$$\underline{S}_Z = \underline{Z} I_Z^2 = V_Z^2 / \underline{Z}^*, \quad S_Z = Z I_Z^2 = V_Z^2 / Z$$

Ovvero:

- i resistori non assorbono potenza reattiva
- induttori e condensatori (ideali) non assorbono potenza attiva

Attenzione: si devono utilizzare la tensione o la corrente ai morsetti dell'elemento considerato!

Nota: un numero complesso moltiplicato per il suo complesso coniugato fornisce il quadrato del modulo. Ad esempio, per il fasore della corrente: $\underline{I} \underline{I}^* = I^2$

Rifasamento

Si consideri una tipica configurazione “generatore-trasmissione-carico”.

Come precedentemente evidenziato, la potenza reattiva non corrisponde ad alcun trasferimento energetico verso il carico (utenza) mentre comporta la circolazione di una corrente, la corrente reattiva, che contribuisce a perdite ed a cadute di tensione, sia nel generatore che nella trasmissione (linea e/o trasformatore) (*vedi schema lavagna*).

Per rifasamento di un carico si intende la parziale o totale compensazione della potenza reattiva. Ciò si può ottenere introducendo in parallelo ad esso una reattanza di tipo e di valore opportuno.

Tipicamente le utenze sono ohmico-induttive, ovvero, assorbono potenza reattiva Q positiva. Il rifasamento consiste quindi nell’inserzione di una batteria di condensatori tali da assorbire una potenza reattiva Q_C :

$-Q \leq Q_C < 0$. La potenza attiva assorbita dai condensatori è nulla.

Rifasamento

Si può quindi avere una parziale o totale compensazione della potenza reattiva, solitamente la scelta avviene in funzione di considerazioni di tipo tecnico-economiche.

Il carico parte da un certo valore di $\cos \varphi < 1$ e, per effetto del rifasamento, lo aumenta fino al valore desiderato $\cos \varphi' \leq 1$. Si ha quindi:

prima del rifasamento:

$$\cos \varphi \rightarrow Q = P \operatorname{tg} \varphi$$

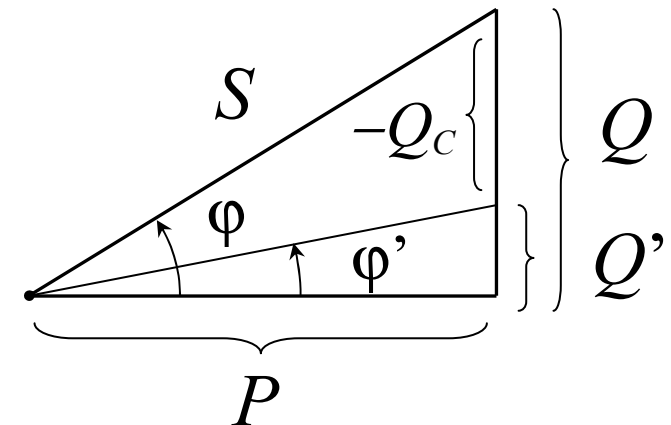
dopo il rifasamento, stessa P :

$$\cos \varphi' \text{ desiderato} \rightarrow Q' = Q + Q_c = P \operatorname{tg} \varphi'$$

$$Q_c = Q' - Q = P [\operatorname{tg} \varphi' - \operatorname{tg} \varphi]$$

Se rifasamento completo: $\cos \varphi' = 1$, $\operatorname{tg} \varphi' = 0$:

$$Q_c = -P \operatorname{tg} \varphi$$



Rifasamento

In termini di correnti le considerazioni sono analoghe. La corrente reattiva assorbita dal carico, $\underline{I}_r$, in ritardo di 90° rispetto la tensione $\underline{V}$, è bilanciata (in tutto o in parte) dalla corrente assorbita dai condensatori, $\underline{I}_C$, in anticipo di 90° rispetto la tensione: $\underline{I}_r$ ed $\underline{I}_C$, sono in opposizione di fase.

Nel caso di rifasamento completo (*figura* $\rightarrow$)

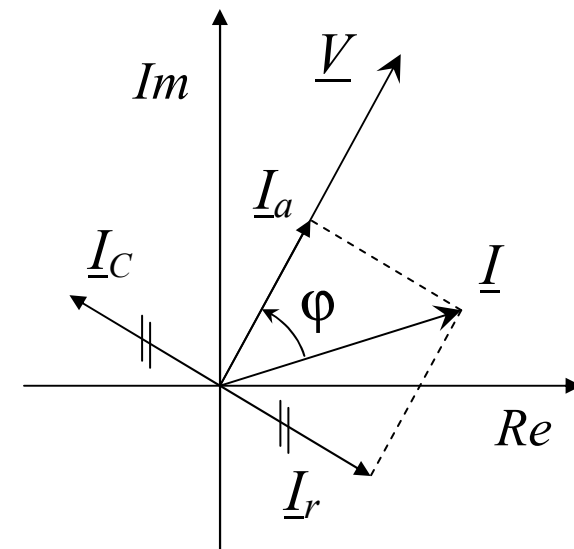
si ha: $\underline{I}_C = -\underline{I}_r \rightarrow \underline{I}' = \underline{I}_a = \sqrt{I^2 - I_r^2}$

Una volta determinata la potenza reattiva necessaria per il rifasamento è immediato calcolare la capacità C del condensatore:

$$Q_C = -V^2 / X_C = -\omega C V^2$$

$$C = -Q_C / \omega V^2$$

$$C = [tg \varphi - tg \varphi'] P / \omega V^2$$



Teorema del massimo trasferimento di potenza

In analogia con quanto visto per le reti algebriche, è ora possibile estendere il teorema al regime sinusoidale in termini di fasori.

Siano $\underline{V}_o$ e $\underline{Z}_o = R_o + jX_o$ la tensione e l'impedenza del generatore (*reale o equival.*), si vogliono determinare le caratteristiche dell'impedenza del carico $\underline{Z} = R + jX$ tali per cui si ha il massimo assorbimento di potenza P .

$$P = RI^2$$

Innanzitutto si osserva che, per qualsiasi valore di R , la corrente e quindi la potenza possono essere massimizzate ponendo: $jX = -jX_o$:

$$I = \frac{V_o}{\sqrt{(R_o + R)^2 + (\pm X_o \pm X)^2}} = \frac{V_o}{(R_o + R)}$$

Il problema di massimizzazione è ora ricondotto al caso algebrico:

$$P = P_{max} \text{ per } R = R_o \rightarrow \underline{Z} = R_o - jX_o, \text{ ovvero: } \underline{Z} = \underline{Z}_o^*$$

Risonanza ed anti-risonanza

Con riferimento alle configurazioni LC serie ed LC parallelo, si ha il cosiddetto fenomeno della risonanza quando, per una certa assegnata frequenza di lavoro, la reattanza induttiva e quella capacitiva si equivalgono, ovvero: $X_L = X_C$. In tale situazione si ha:

$$\underline{LC \text{ serie}} \rightarrow \underline{Z_{eq}} = jX_L - jX_C = 0 \quad \underline{\text{risonanza}}$$

$$\underline{LC \text{ parallelo}} \rightarrow \underline{Y_{eq}} = -j(1/X_L) + j(1/X_C) = 0 \quad \underline{\text{anti-risonanza}} \quad (Z_{eq} \rightarrow \infty)$$

$$\text{Per entrambi i casi si ha: } \omega L = 1/\omega C \rightarrow \boxed{LC = 1/\omega^2}$$

In condizioni di risonanza serie o parallelo si possono avere malfunzionamenti del sistema elettrico dovuti alle singolarità $Z_{eq} \rightarrow 0$ o $Z_{eq} \rightarrow \infty$.