

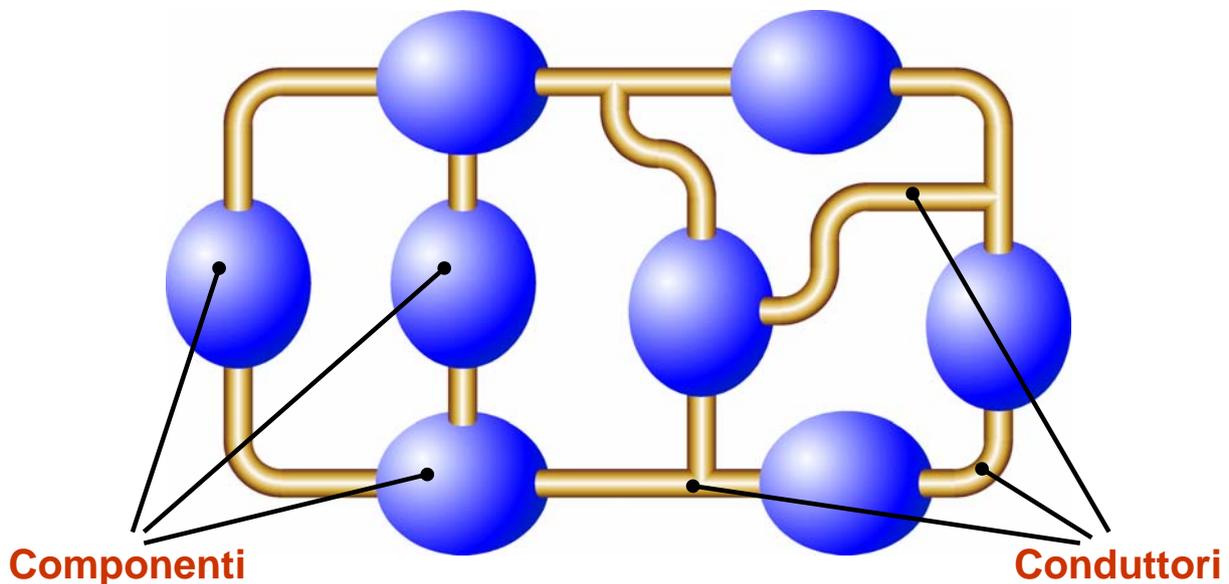
# Circuiti elettrici

## Introduzione

[www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm](http://www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm)  
(versione del 20-9-2014)

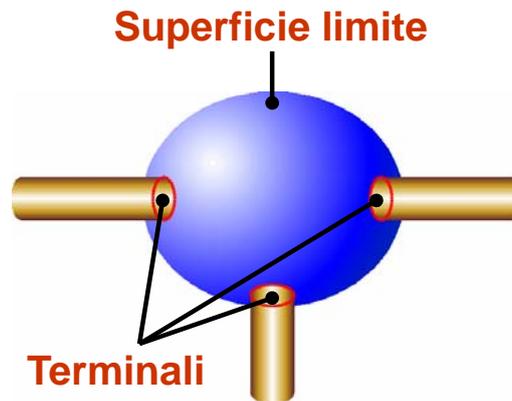
### Circuiti elettrici

- Un **circuito** elettrico è un sistema elettromagnetico costituito dal **collegamento** di sottosistemi detti **componenti circuitali**



## Componenti

- Un **componente** è un sottosistema idealmente delimitato da una superficie chiusa (**superficie limite**)
- La superficie limite può essere attraversata da correnti elettriche solo in corrispondenza di un certo numero ( $\geq 2$ ) di regioni, dette **poli** o **terminali**



- Un componente dotato di  $N$  terminali è detto  **$N$ -polo**

3

## Correnti e tensioni

- La definizione di componente di base sulle seguenti ipotesi:
  - ◆ Ad ogni terminale di un componente può essere associata in modo univoco una grandezza detta **corrente**
  - ◆ Ad ogni coppia di terminali di un componente può essere associata in modo univoco una grandezza detta **tensione**
  - ◆ Le interazioni di un componente con il resto del circuito (e in particolare gli scambi di energia elettromagnetica) sono completamente determinati dagli andamenti nel tempo delle correnti e delle tensioni ai suoi terminali
- ➔ Il **comportamento di un circuito** è definito dall'andamento nel tempo delle correnti e delle tensioni dei suoi componenti

4

## Carica elettrica

- La **carica elettrica** è una proprietà fondamentale della materia rappresentabile mediante una grandezza scalare (unità di misura **coulomb**, C)
- I fenomeni fisici riconducibili alle cariche elettriche sono detti fenomeni **elettromagnetici**
- L'esperienza mostra che esistono due tipi di cariche
  - ◆ tra cariche dello stesso tipo si esercitano forze repulsive
  - ◆ tra cariche di tipo diverso si esercitano forze attrattive
- *Convenzionalmente* si attribuiscono valori positivi alle cariche di un tipo e negativi alle cariche dell'altro tipo

5

## Corrente elettrica

- La **corrente elettrica** è costituita da un flusso di cariche elettriche
- E' descritta da una grandezza scalare che rappresenta la quantità di carica che attraversa una superficie orientata  $S$  (ad esempio la sezione di un conduttore o un terminale di un componente) in senso concorde con la normale alla superficie nell'unità di tempo
- In generale si possono avere cariche dei due tipi e che si muovono sia in senso concorde sia in senso discorde con la normale
  - ➔ La carica totale che attraversa la superficie è valutata mediante una somma algebrica
  - ◆ Il segno dai vari contributi è ottenuto combinando il segno della carica con un segno + o - dipendente dal verso del moto

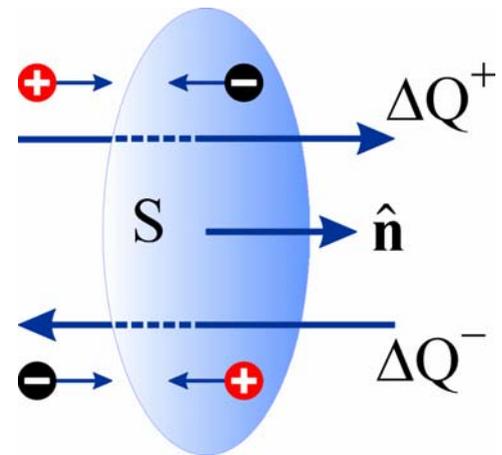
6

## Definizione della corrente elettrica

- Si indica con  $\Delta Q$  la carica che attraversa la superficie  $S$  in senso concorde con la normale  $\hat{n}$  nell'intervallo di tempo  $\Delta t$

$$\Delta Q = \Delta Q^+ - \Delta Q^-$$

- ◆ Contributo positivo ( $\Delta Q^+$ )
  - cariche positive dirette in senso concorde con la normale
  - cariche negative dirette in senso discorde con la normale
- ◆ Contributo negativo ( $-\Delta Q^-$ )
  - cariche positive dirette in senso discorde con la normale
  - cariche negative dirette in senso concorde con la normale



7

## Definizione della corrente elettrica

- La corrente,  $i(t)$ , è definita dalla relazione

$$i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

- ➔ La corrente è la derivata della funzione  $Q(t)$  che rappresenta la quantità di carica transitata attraverso  $S$  a partire da un certo istante iniziale fino all'istante  $t$
- $Q(t)$  non si identifica necessariamente con la carica presente in qualche regione dello spazio all'istante  $t$ 
  - ◆ è possibile che le stesse cariche (muovendosi lungo percorsi chiusi) forniscano più contributi a  $Q(t)$

8

## Verso di riferimento della corrente

- Il verso della normale alla superficie è detto **verso di riferimento** della corrente
- Il verso di riferimento
  - ◆ può essere scelto in modo arbitrario
  - ◆ non ha nessuna relazione con il verso del moto delle cariche
- La corrente può assumere sia valori positivi sia valori negativi
  - ◆  $i > 0$  ➔ trasferimento di una quantità positiva di carica in senso concorde con il verso di riferimento
  - ◆  $i < 0$  ➔ trasferimento di una quantità positiva di carica in senso opposto al il verso di riferimento

9

## Verso fisico della corrente

- Indipendentemente dal tipo di cariche effettivamente presenti nel conduttore, è sempre possibile rappresentare una data corrente come risultato del moto di cariche positive dirette tutte nello stesso verso
- Il verso del moto di queste cariche positive è indicato *convenzionalmente* come **verso fisico della corrente**
- E' opportuno notare che
  - ◆ In generale, nello studio dei circuiti elettrici, i versi fisici delle correnti non sono noti a priori
  - ◆ Se le correnti non sono costanti nel tempo anche i loro versi fisici possono variare

10

## Verso riferimento e verso fisico

- Per scrivere le equazioni di un circuito elettrico occorre assegnare alle correnti dei versi di riferimento
  - ◆ fissati a priori
  - ◆ costanti nel tempo
- ➔ **I versi di riferimento vengono scelti in modo arbitrario e non devono necessariamente coincidere con i versi fisici**
- A posteriori, il segno della corrente in relazione al verso di riferimento consente di determinare anche il verso fisico
  - ◆ Negli istanti in cui  $i(t) > 0$  il verso fisico coincide con il verso di riferimento
  - ◆ Negli istanti in cui  $i(t) < 0$  il verso fisico è opposto al verso di riferimento
- *In seguito, quando si parlerà di **verso della corrente** senza ulteriori specificazioni, si intenderà sempre verso di riferimento (non verso fisico)*

11

## Unità di misura della corrente

- L'unità di misura della corrente elettrica è l'**ampere** (A)
- L'ampere è una delle unità di misura fondamentali del Sistema Internazionale:

*L'ampere è l'intensità di una corrente costante che percorrendo due conduttori rettilinei paralleli di lunghezza infinita, di sezione circolare trascurabile e posti alla distanza di 1 metro nel vuoto, produce tra i conduttori una forza pari a  $2 \times 10^{-7}$  newton per unità di lunghezza*
- Il **coulomb** (C) è un'unità derivata, definita in termini di ampere:

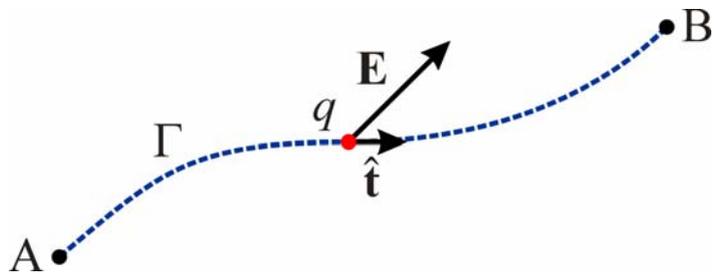
*Il coulomb è la quantità di carica trasportata in un secondo da una corrente di un ampere*

12

## Tensione

- **Campo elettrico**: si dice che una regione dello spazio è sede di un campo elettrico  $\mathbf{E}(P)$  se una carica elettrica  $q$  posta in quiete un generico punto  $P$  di tale regione è soggetta ad una forza  $\mathbf{F}(P) = q\mathbf{E}(P)$
- Si considera una carica  $q$  che si sposta da un punto  $A$  a un punto  $B$  lungo una linea  $\Gamma$  all'interno di una regione sede di campo elettrico
- **Tensione** tra il punto  $A$  e il punto  $B$  lungo  $\Gamma$  = lavoro per unità di carica compiuto dalle forze del campo elettrico quando la carica si muove da  $A$  a  $B$  lungo  $\Gamma$

$$v_{AB,\Gamma} = \frac{1}{q} \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \int_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl$$



13

## Potenziale

- In generale la tensione tra due punti  $A$  e  $B$  dipende dalla linea  $\Gamma$  considerata
- In casi particolari la tensione dipende solo dai punti estremi  $A$  e  $B$
- In questi casi, scelto arbitrariamente un punto  $O$  (= **punto di riferimento**), si può definire una funzione scalare detta **potenziale**

$$V(P) = \int_P^O \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl$$

che rappresenta il lavoro per unità di carica compiuto dal campo elettrico quando una carica si sposta dal generico punto  $P$  al punto  $O$  (o il lavoro che si deve compiere contrastando le forze del campo elettrico per portare la carica dal punto  $O$  al punto  $P$ )

14

## Tensione e differenza di potenziale

- Se la tensione tra due punti A e B, non dipende dalla linea, è possibile valutarla seguendo un percorso passante per il punto O

$$\begin{aligned}V_{AB} &= \int_A^B \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \int_A^O \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl + \int_O^B \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \\ &= \int_A^O \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl - \int_B^O \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = V(A) - V(B)\end{aligned}$$

- ➔ la tensione può essere espressa come **differenza di potenziale** tra il punto A e il punto B

15

## Tensione e differenza di potenziale

- La differenza di potenziale non dipende dalla scelta del punto di riferimento
- Si considerano i potenziali  $V(P)$  e  $V'(P)$ , relativi ai punti di riferimento O e O'

$$V(P) = \int_P^O \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl \quad V'(P) = \int_P^{O'} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl$$

- I potenziali sono legati dalla relazione

$$V'(P) = \int_P^{O'} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \int_P^O \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl + \int_O^{O'} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = V(P) - V(O')$$

- ➔ Quindi si ha

$$V'(A) - V'(B) = V(A) - V(O') - V(B) + V(O') = V(A) - V(B)$$

16

## Unità di misura della tensione

- L'unità di misura della tensione è il **volt** (V)

*Si dice che la tensione tra due punti A e B è di 1 volt se il lavoro compiuto dalle forze del campo elettrico quando una carica di 1 coulomb si sposta dal punto A al punto B è pari a 1 joule*

17

## Tensioni dei componenti

- Per un componente circuitale si assume che sia possibile associare in modo univoco una tensione ad ogni coppia di terminali
- ➔ La tensione è indipendente del percorso, almeno fino a che si considerano linee che non entrano nella superficie limite del componente
  - ◆ esternamente ai componenti e sulle superfici limite è possibile esprimere le tensioni come differenze di potenziale
- ➔ Su ciascun terminale il potenziale è costante
  - ◆ si può parlare semplicemente di tensione tra due terminali, senza specificare quale punto si considera all'interno di ciascun terminale
  - ◆ la forma e le dimensioni dei terminali non sono rilevanti ai fini del comportamento del circuito
    - ➔ i terminali possono essere considerati praticamente puntiformi

18

## Tensioni dei componenti

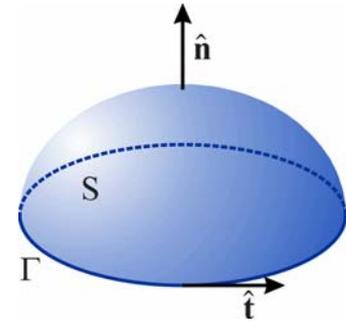
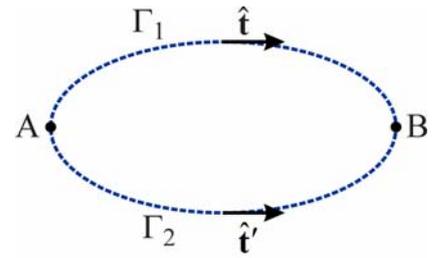
- Se all'esterno delle superfici limite dei componenti la tensione tra due punti non dipende dal percorso, l'integrale del campo elettrico lungo una linea chiusa deve essere nullo

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \int_A^B \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl - \int_A^B \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}}' dl = 0$$

- Per la *legge di Faraday* questo integrale è uguale all'opposto della derivata del flusso di induzione magnetica concatenato con la linea stessa

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

- Affinché il modello circuitale sia applicabile, nella regione esterna deve essere nulla, o comunque trascurabile, la derivata rispetto al tempo del vettore induzione magnetica  $\mathbf{B}$



19

## Verso di riferimento della tensione

- Per definire completamente una tensione occorre specificarne il **verso di riferimento**, cioè attribuire ad uno dei terminali il ruolo di **terminale positivo** e all'altro quello di **terminale negativo**
- Queste denominazioni indicano solo quali segni sono attribuiti ai potenziali dei terminali nella valutazione della differenza di potenziale, non quale dei terminali si trova effettivamente a potenziale maggiore
- Come avviene per la corrente, anche **il verso della tensione viene fissato a priori e può essere scelto in modo arbitrario**
- La tensione può assumere sia valori positivi sia valori negativi
  - $v > 0$  ➔ il terminale positivo ha potenziale maggiore del terminale negativo
  - $v < 0$  ➔ il terminale positivo ha potenziale minore del terminale negativo

20

## Collegamenti

- I **collegamenti** tra i componenti sono realizzati unendo i loro terminali mediante **conduttori ideali** (**connessioni ideali**)
  - ◆ Un conduttore si dice ideale se la tensione tra due punti generici del conduttore è nulla indipendentemente dal valore della corrente che scorre nel conduttore stesso
- ➔ Il collegamento tra due o più terminali comporta che tali terminali siano allo stesso potenziale
- ➔ Forma e lunghezza dei conduttori che realizzano i collegamenti non hanno nessun effetto sul comportamento del circuito

21

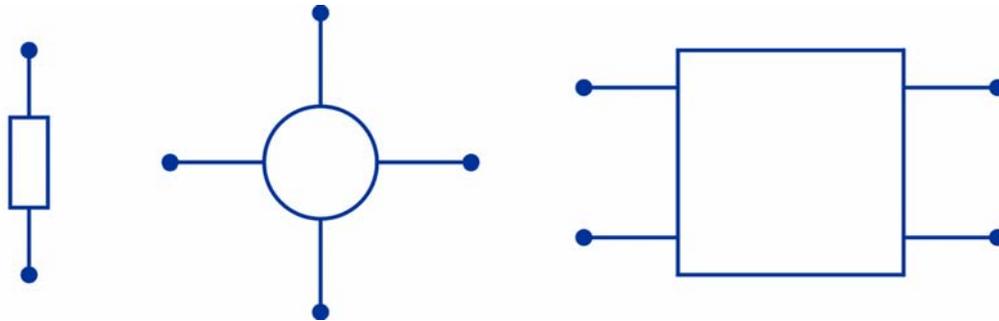
## Definizioni

- **Nodo**: insieme di terminali uniti tra loro da connessioni ideali (come caso degenere, un nodo può essere costituito da un solo terminale isolato)
- **Ramo** o **lato**: tratto del circuito che unisce due nodi
- **Maglia**: percorso chiuso formato da rami del circuito che attraversa una sequenza di nodi senza passare più di una volta per uno stesso nodo (e per uno stesso ramo)

22

## Simboli dei componenti

- Un componente generico viene indicato con un simbolo costituito da
  - ◆ un cerchio o un rettangolo che rappresenta la superficie limite
  - ◆ dei segmenti che rappresentano i terminali

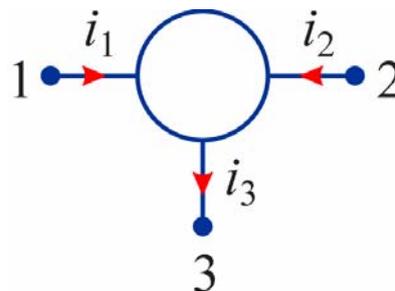


- I versi di riferimento delle correnti si indicano mediante frecce poste sui terminali
- I versi di riferimento delle tensioni si indicano ponendo i simboli + e - vicino ai terminali, oppure mediante una freccia diretta dal terminale negativo a quello positivo

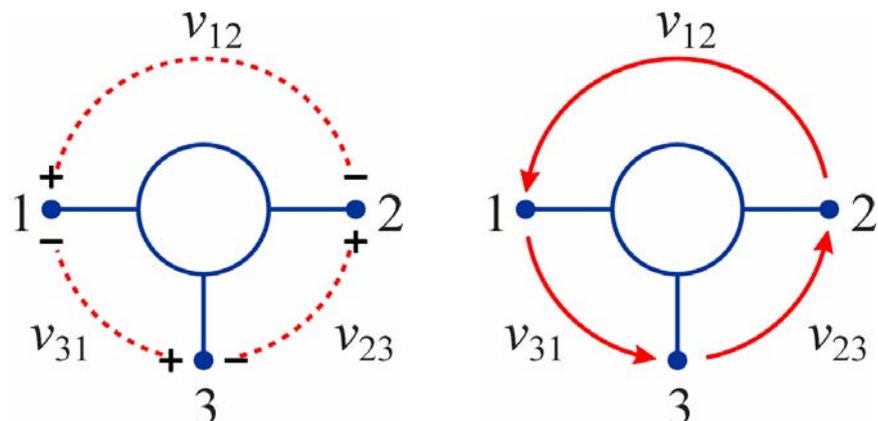
23

## Rappresentazione dei versi di riferimento

**Versi delle correnti**



**Versi delle tensioni**

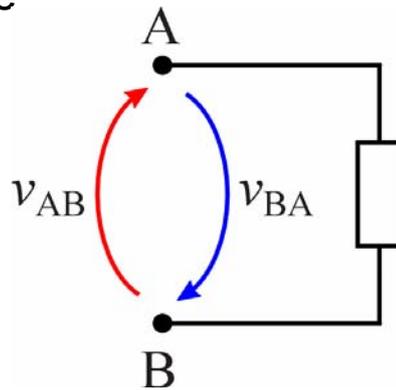


24

## Nota

- La tensione tra due terminali o due nodi A e B viene indicata con il simbolo  $v_{AB}$ 
  - ◆ il primo indice rappresenta il terminale (o il nodo) positivo
  - ◆ il secondo indice rappresenta il terminale (o il nodo) negativo
- Quindi si ha anche

$$v_{AB} = -v_{BA}$$



25

## Rappresentazione dei collegamenti

- I collegamenti sono indicati unendo i terminali dei componenti mediante segmenti o archi che rappresentano i conduttori ideali
- Lo scopo dello schema è solo mostrare quali terminali sono collegati tra loro
  - ➔ Lo schema non riproduce necessariamente
    - le posizioni relative dei componenti
    - la forma dei conduttori con cui sono realizzate le connessionidalle quali non dipende il comportamento del circuito
  - ➔ Generalmente lo schema di un circuito può essere rappresentato in più modi

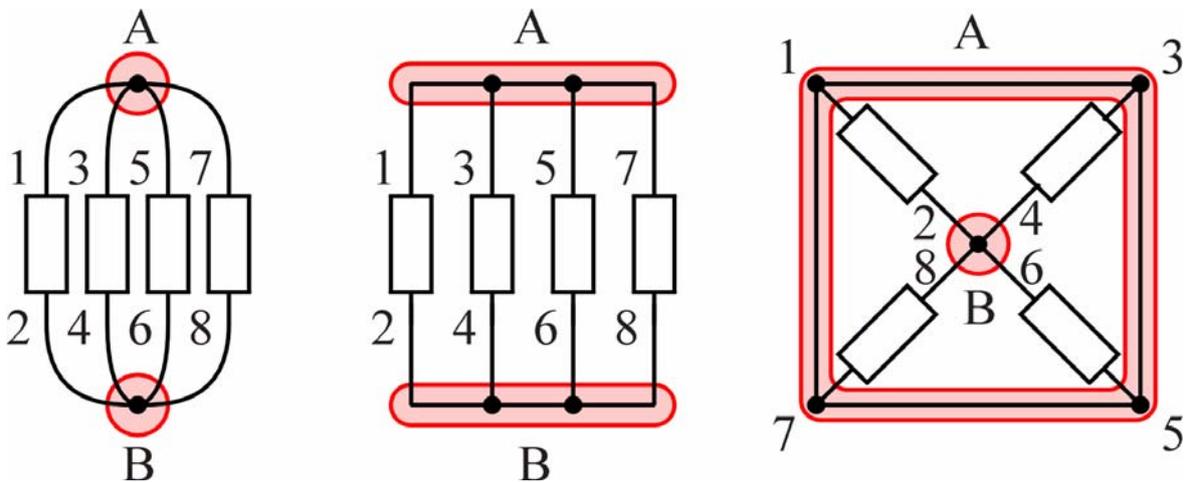
26

## Rappresentazione dei collegamenti

- **Esempio:**

3 rappresentazioni equivalenti dello stesso collegamento

- ◆ I terminali 1 3 5 7, collegati tra loro, costituiscono un nodo (A)
- ◆ I terminali 2 4 6 8, collegati tra loro, costituiscono un nodo (B)



27

## Equazioni di un circuito

- Le tensioni e le correnti di un circuito elettrico sono soggette a due tipi di vincoli, espressi da due gruppi di equazioni
- **Equazioni caratteristiche dei componenti (relazioni costitutive)**
  - ◆ dipendono dalle proprietà fisiche dei componenti
  - ◆ ciascuna equazione riguarda le tensioni e le correnti di un solo componente
- **Equazioni dei collegamenti (equazioni topologiche)**
  - ◆ dipendono solo dalla struttura dei collegamenti
  - ◆ riguardano le tensioni e le correnti di componenti diversi
  - ◆ derivano dalle **leggi di Kirchhoff**

28

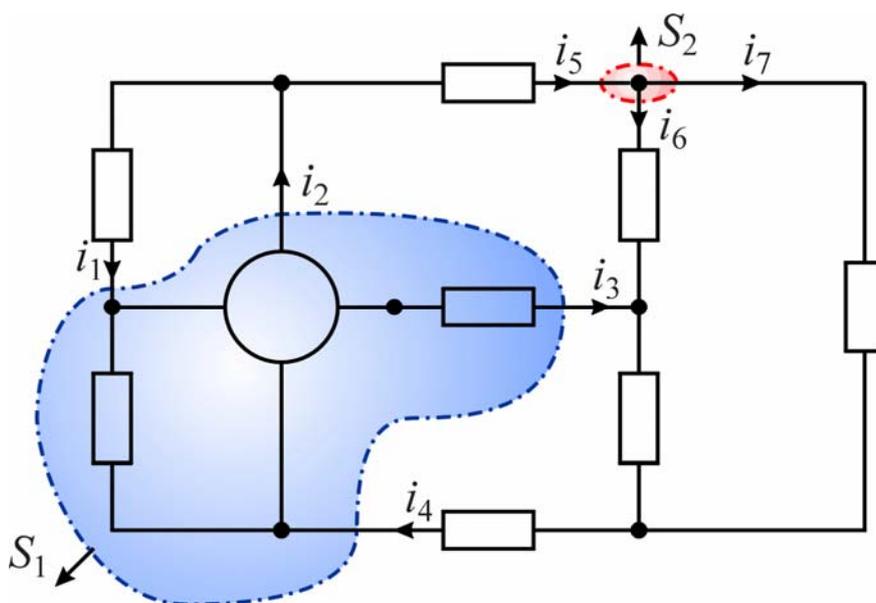
## Legge di Kirchhoff per le correnti (LKI)

- *E' nulla la somma algebrica delle correnti che attraversano una superficie chiusa orientata esterna alle superfici limite dei componenti*
- Alle correnti va attribuito segno + o segno - a seconda che i loro versi di riferimento siano concordi o discordi con il verso della normale alla superficie considerata
  - ◆ E' arbitrario scegliere di attribuire il segno + alle correnti uscenti o a quelle entranti
  - ◆ In seguito si utilizzerà prevalentemente la prima convenzione
- Come caso particolare si può considerare una superficie chiusa che racchiude un solo nodo
  - ➔ *E' nulla la somma algebrica delle correnti afferenti a un nodo*

29

## Legge di Kirchhoff per le correnti (LKI)

### ● Esempio



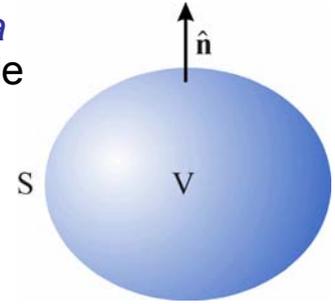
- ◆ **Superficie  $S_1$ :**  $-i_1 + i_2 + i_3 - i_4 = 0$
- ◆ **Superficie  $S_2$ :**  $-i_5 + i_6 + i_7 = 0$

30

## Legge di Kirchhoff per le correnti (LKI)

- Per il *principio di conservazione della carica elettrica* la corrente uscente da una superficie chiusa è uguale alla diminuzione nell'unità di tempo della carica  $Q$  contenuta all'interno della superficie stessa

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -\frac{dQ}{dt} \quad (\mathbf{J} = \text{densità di corrente})$$



- ➔ La LKI implica che non può variare la carica contenuta all'interno di ogni superficie chiusa che non attraversa le superfici limite dei componenti
- Per la *legge di Gauss*, ciò avviene se nella regione esterna è nulla, o comunque trascurabile, la derivata rispetto al tempo del campo elettrico

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

- ➔ In queste condizioni nella regione esterna è nulla, o trascurabile, la *densità di corrente di spostamento*

$$\mathbf{J}_s = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

31

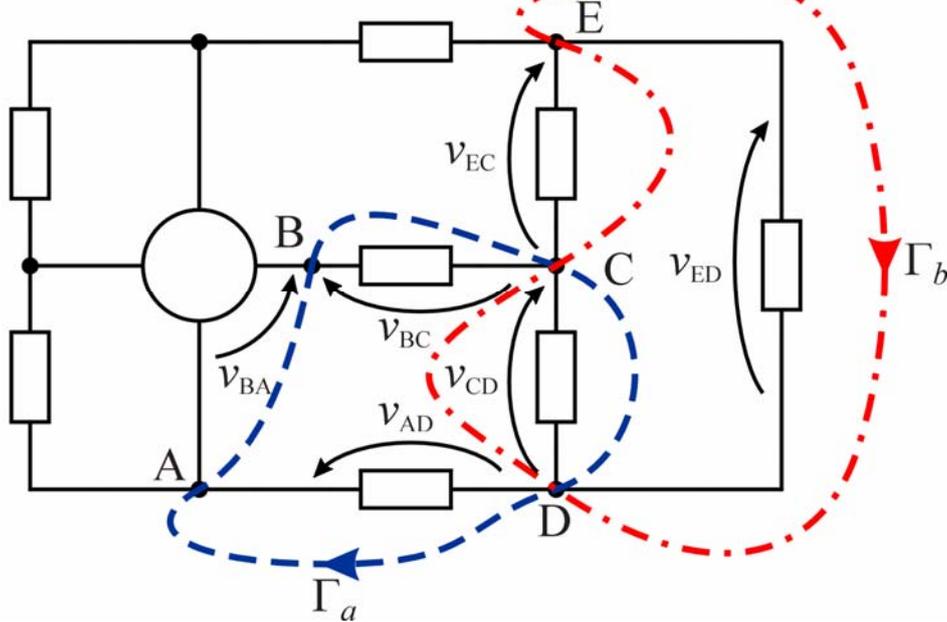
## Legge di Kirchhoff per le tensioni (LKV)

- *E' nulla la somma algebrica delle tensioni lungo una linea chiusa orientata passante per i nodi di un circuito ed esterna alle superfici limite dei componenti*
- Alle tensioni va attribuito segno + o segno - a seconda di quale terminale (positivo o negativo) si incontra per primo
  - ◆ In seguito si seguirà prevalentemente la convenzione di attribuire segno + quando il primo terminale è quello positivo e segno - quando il primo terminale è quello negativo
- Le equazioni non dipendono dalla forma delle linee considerate, ma solo dalla sequenza dei nodi toccati dalle linee stesse

32

# Legge di Kirchhoff per le tensioni (LKV)

## Esempio



- ◆ **Linea  $\Gamma_a$ :**  $-v_{BA} + v_{BC} + v_{CD} - v_{AD} = 0$
- ◆ **Linea  $\Gamma_b$ :**  $v_{ED} - v_{CD} - v_{EC} = 0$

33

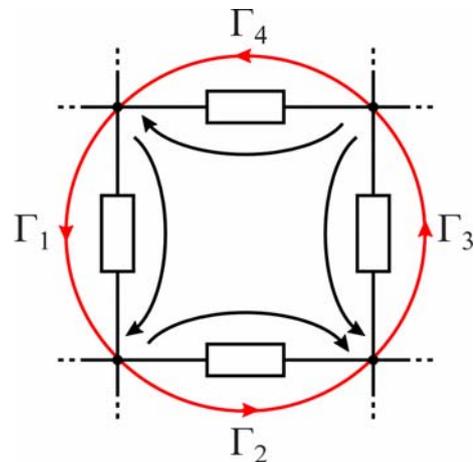
# Legge di Kirchhoff per le tensioni (LKV)

- La LKV conseguenza del fatto che nella regione esterna deve essere nulla o trascurabile la variazione nel tempo dell'induzione magnetica  $\mathbf{B}$ , in queste condizioni, per una generica linea chiusa  $\Gamma$  risulta

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = 0$$

- Si suddivide la curva  $\Gamma$  in una successione di curve  $\Gamma_k$ , ciascuna delle quali collega un nodo al successivo

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \sum_k \int_{\Gamma_k} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \sum_k \pm V_k = 0$$

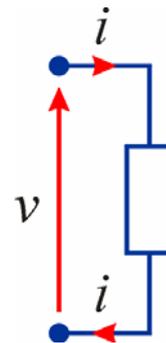


- L'integrale di  $\mathbf{E}$  lungo la linea  $\Gamma_k$  rappresenta la tensione  $V_k$  tra i nodi collegati dalla linea  $\Gamma_k$  o il suo opposto ( $-V_k$ ) a seconda che il verso della tensione e il verso di  $\Gamma$  siano concordi o discordi

34

# Bipoli

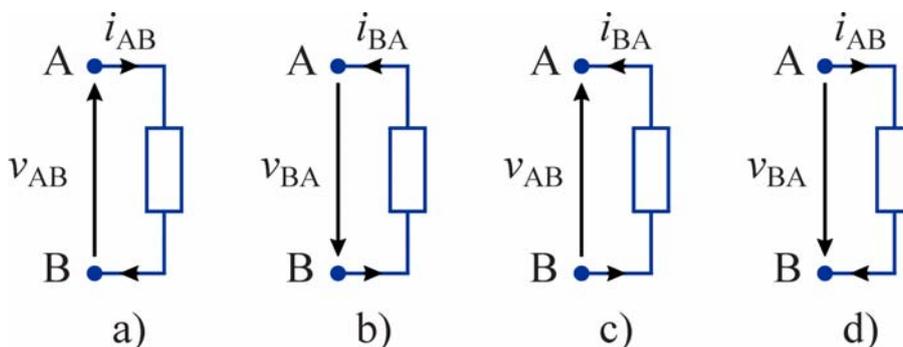
- Un componente a due terminali è detto **bipolo**
- Applicando la LKI ad una superficie che racchiude il solo bipolo si ottiene che la corrente entrante in uno dei terminali del bipolo deve essere uguale a quella uscente dall'altro terminale
- ➔ Ad un bipolo sono associate una corrente  $i$  e una tensione  $v$
- La corrente e la tensione sono legate da un'**equazione caratteristica**, dipendente dalle proprietà fisiche del bipolo



35

## Convenzione del generatore e dell'utilizzatore

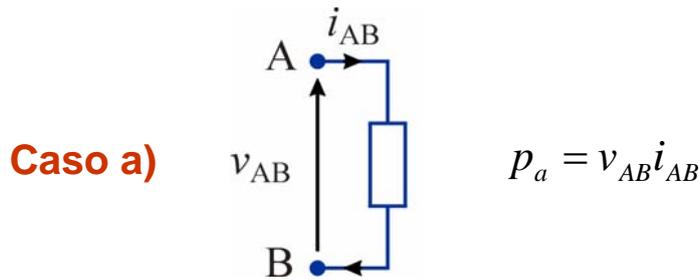
- Per la scelta dei versi di riferimento si hanno 4 possibilità:



- Casi a) e b): **convenzione dell'utilizzatore** (o **convenzione normale**)
  - ◆ la corrente ha verso di riferimento entrante dal terminale positivo (e uscente da quello negativo)
  - ◆ in questo caso i versi di riferimento si dicono anche **coordinati**
- Casi c) e d): **convenzione del generatore**
  - ◆ la corrente ha verso di riferimento entrante dal terminale negativo (e uscente da quello positivo)

36

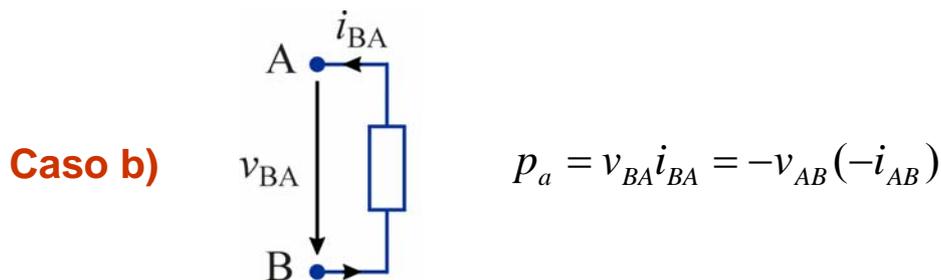
## Convenzione dell'utilizzatore



- $i_{AB}$  è la carica che nell'unità di tempo attraversa il bipolo da A verso B
- $v_{AB}$  è la quantità di energia ceduta da una carica unitaria nel passaggio dal terminale A al terminale B
- Il prodotto  $p_a = v_{AB} i_{AB}$  rappresenta l'energia ceduta nell'unità di tempo dalle cariche che attraversano il bipolo
  - ➔  $p_a =$  **potenza assorbita** dal bipolo (unità di misura watt, W)
- $p_a$  può assumere valori positivi o negativi
  - ◆  $p_a > 0$  indica che il bipolo assorbe effettivamente energia
  - ◆  $p_a < 0$  indica che il bipolo eroga energia

37

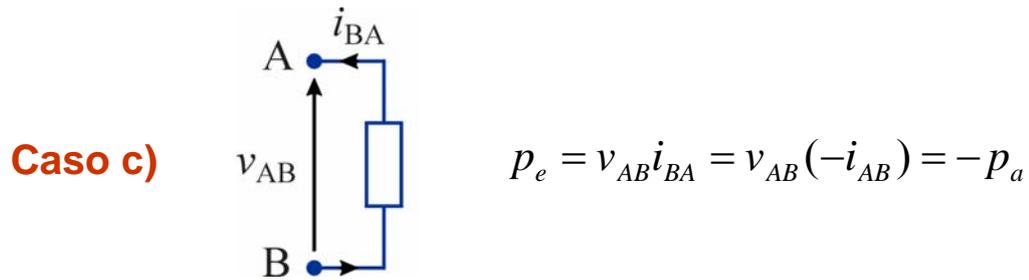
## Convenzione dell'utilizzatore



- Si possono ripetere le considerazioni fatte nel caso precedente scambiando i ruoli dei terminali A e B
- $p_a = v_{BA} i_{BA} =$  **potenza assorbita** dal bipolo
- A parità di condizioni, rispetto al caso precedente cambiano sia il segno della tensione sia il segno della corrente, quindi il segno del prodotto non cambia

38

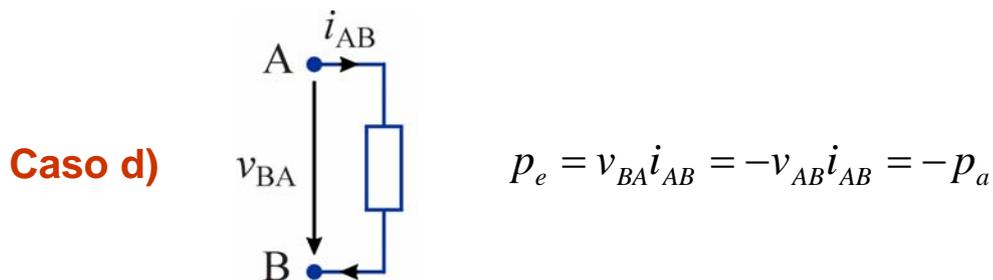
## Convenzione del generatore



- $i_{BA}$  è la carica che nell'unità di tempo attraversa il bipolo da B verso A
- $v_{AB}$  è la quantità di energia che occorre fornire a una carica unitaria nel passaggio dal terminale A al terminale B
- Il prodotto  $p_e = v_{AB} i_{BA}$  rappresenta l'energia fornita nell'unità di tempo alle cariche che attraversano il bipolo
  - ➔  $p_e =$  **potenza erogata** dal bipolo
- La potenza erogata è l'opposto della potenza assorbita  $p_e = -p_a$
- $p_e$  può assumere valori positivi o negativi
  - ◆  $p_e > 0$  ( $\Rightarrow p_a < 0$ ) indica che il bipolo eroga effettivamente energia
  - ◆  $p_e < 0$  ( $\Rightarrow p_a > 0$ ) indica che il bipolo assorbe energia

39

## Convenzione del generatore



- Si possono ripetere le considerazioni fatte nel caso precedente scambiando i ruoli dei terminali A e B
- $p_e = v_{BA} i_{AB} = -p_a =$  **potenza erogata** dal bipolo

40

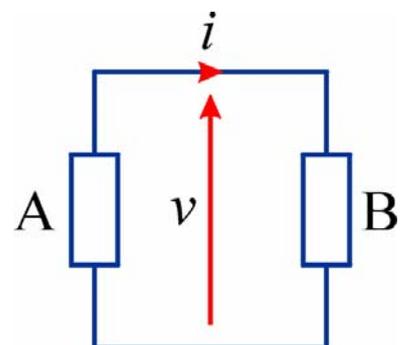
## Note

- La scelta della convenzione è *arbitraria* e non deve necessariamente corrispondere all'effettivo comportamento del bipolo
- In seguito si adotterà prevalentemente la convenzione dell'utilizzatore
- Le equazioni caratteristiche dei bipoli saranno formulate assumendo che la tensione e la corrente siano orientate secondo la convenzione dell'utilizzatore
  - ➔ *Nei casi in cui sarà necessario adottare la convenzione del generatore le equazioni dei componenti dovranno essere modificate cambiando il segno della tensione o della corrente*
- Se sugli schemi viene indicato solo il verso della corrente o solo quello della tensione, si sottintende che l'altro verso di riferimento è correlato a quello indicato secondo la convenzione dell'utilizzatore
  - ➔ *Nei casi in cui si adotterà la convenzione del generatore entrambi i versi di riferimento saranno indicati esplicitamente*

41

## Esempio

- Si considera un circuito formato da due bipoli A e B
  - ◆ per il bipolo A,  $v$  e  $i$  sono orientate secondo la convenzione del generatore
  - ◆ per il bipolo B,  $v$  e  $i$  sono orientate secondo la convenzione dell'utilizzatore
- Il prodotto  $p = vi$  rappresenta
  - ◆ la *potenza erogata* da A
  - ◆ la *potenza assorbita* da B
- ➔ Il segno di  $p$ , in relazione ai versi di riferimento, consente di determinare in quale verso avviene il trasferimento di potenza
  - ◆  $p > 0$  indica che effettivamente A cede energia a B
  - ◆  $p < 0$  indica che B cede energia ad A



42

## Esempio

- Si considera il caso in cui  $v(t)$  e  $i(t)$  hanno le seguenti espressioni

$$v(t) = 6 \cos(100\pi \cdot t) \text{ V}$$

$$i(t) = 2 \cos\left(100\pi \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ A}$$

(funzioni sinusoidali del tempo  
con periodo 20 ms)

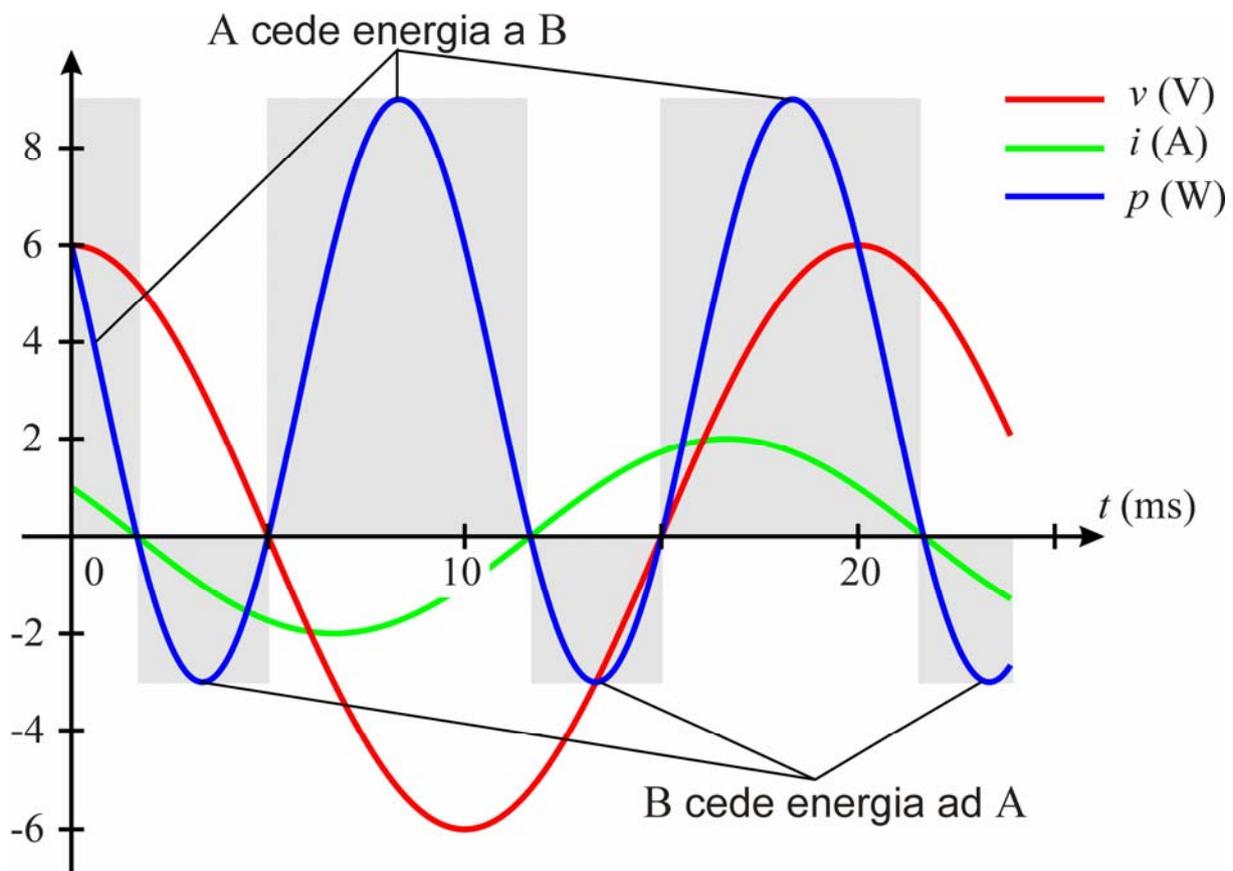
- ➔ In queste condizioni l'espressione della potenza è

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = 12 \cos(100\pi \cdot t) \cdot \cos\left(100\pi \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 3 + 6 \cos\left(200\pi \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ W}$$

43

## Esempio



44

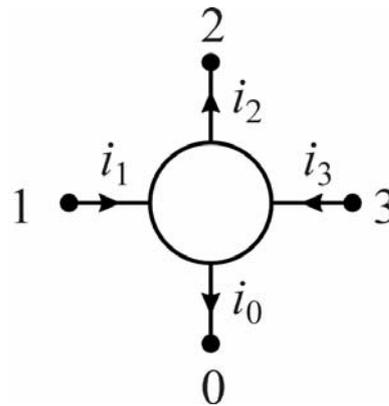
## N-poli

- Un componente con  $N$  terminali è detto **N-polo**
- Ad un  $N$ -polo si possono associare  $N$  correnti
- La LKI richiede che valga la relazione:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \pm i_k = 0$$

- ➔ Note  $N-1$  correnti è possibile ricavare l'ultima corrente
- ➔ Per caratterizzare un  $N$ -polo sono sufficienti le correnti di  $N-1$  terminali

$$i_0 = i_1 - i_2 + i_3$$



45

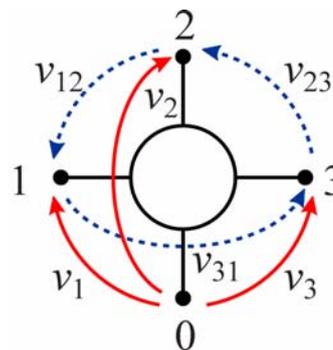
## N-poli

- Ad un  $N$ -polo si possono associare  $N(N-1)/2$  tensioni (una per ogni coppia di terminali)
- Queste tensioni sono vincolate dalla LKV
- ➔ Tutte le tensioni possono essere ricavate a partire dalle tensioni di  $N-1$  terminali rispetto a un terminale scelto come riferimento
- ➔ Per caratterizzare un  $N$ -polo sono sufficienti  $N-1$  tensioni

$$v_{12} = v_1 - v_2$$

$$v_{23} = v_2 - v_3$$

$$v_{31} = v_3 - v_1$$



- Le  $N-1$  tensioni e le  $N-1$  correnti di un  $N$ -polo sono legate da  $N-1$  **equazioni caratteristiche**, dipendenti dalle proprietà fisiche del componente

46

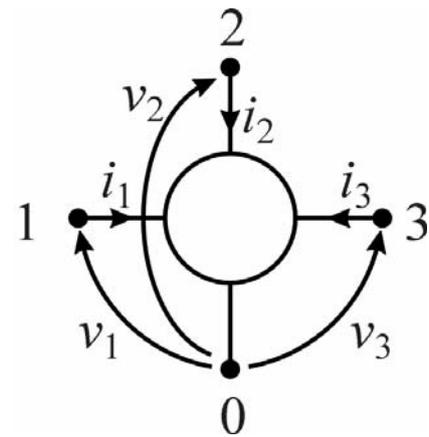
# N-poli

## • Convenzione normale

- ◆ Si fissa un terminale di riferimento (0)
- ◆ Si utilizzano per descrivere il comportamento del componente
  - le  $N-1$  tensioni degli altri terminali rispetto al riferimento (che quindi ha sempre il ruolo di terminale negativo)  
 $v_1, \dots, v_{N-1}$
  - Le  $N-1$  correnti degli altri terminali prese con verso entrante  
 $i_1, \dots, i_{N-1}$

- In queste condizioni, con considerazioni simili a quelle fatte nel caso dei bipoli, si può ricavare che la **potenza assorbita** dall' $N$ -polo è

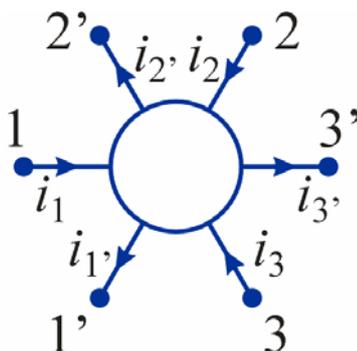
$$P_a = \sum_{k=1}^{N-1} v_k i_k$$



47

# N-porte

- **Porta**: coppia di terminali di un componente tale che la corrente entrante in uno dei terminali è sempre uguale a quella uscente dall'altro
  - ➔ I terminali di un bipolo costituiscono una porta
- **N-porte** (o **N-plo bipolo**): componente con  $2N$  terminali che costituiscono  $N$  porte



$$i_1 = i_{1'}$$

$$i_2 = i_{2'}$$

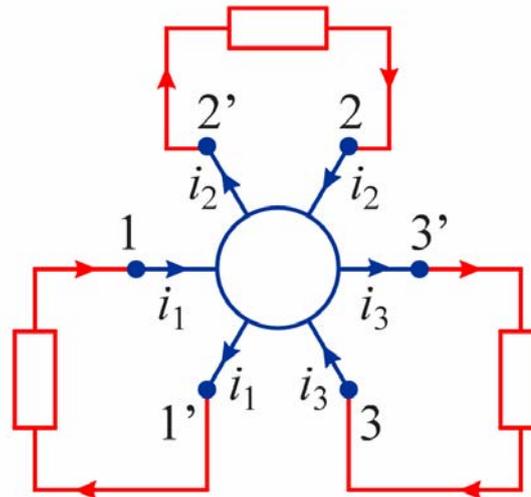
$$i_3 = i_{3'}$$

48

## N-porte

- Se l'uguaglianza delle correnti ai terminali delle porte dipende dalla struttura interna del componente l'  $N$ -porte è detto **intrinseco**
- E' possibile che un componente con  $2N$  terminali si comporti come un  $N$ -porte solo a conseguenza del collegamento ad altri componenti ( $N$ -porte **non intrinseco**)

Esempio

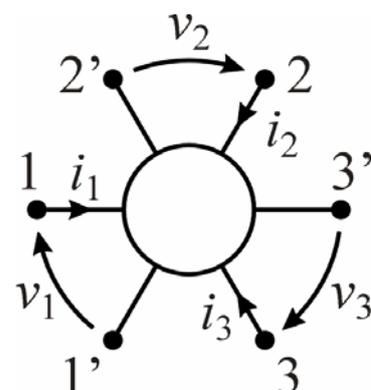


49

## N-porte

- Il comportamento di un  $N$ -porte è caratterizzato mediante
  - ◆ le  $N$  correnti  $(i_1, \dots, i_N)$  associate alle porte
  - ◆ le  $N$  tensioni  $(v_1, \dots, v_N)$  tra le coppie di terminali di ciascuna porta
- Le  $N$  correnti e  $N$  tensioni alle porte sono vincolate da  $N$  equazioni caratteristiche
- **Convenzione dell'utilizzatore:** per ciascuna porta il verso della corrente è entrante nel terminale positivo
- In queste condizioni si può verificare che la **potenza assorbita** da un  $N$ -porte è

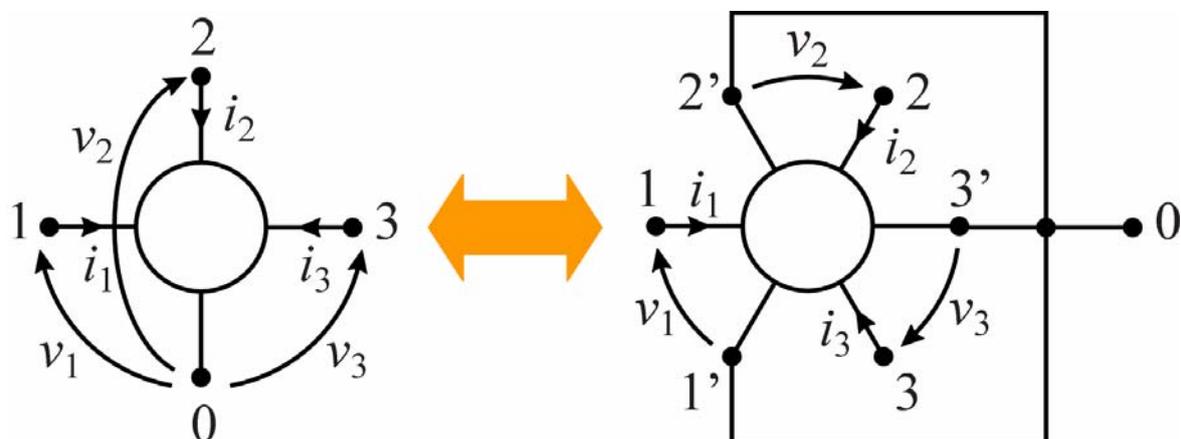
$$P_a = \sum_{k=1}^N v_k i_k$$



50

## N-poli e N-porte

- Un generico  $(N+1)$ -polo può essere visto come un  $N$ -porte avente tutti i terminali negativi delle porte collegati tra loro



- Come si vedrà in seguito, questo consente di trattare in modo unificato i due tipi di componente

51

## Classificazione dei componenti in base alle proprietà delle equazioni caratteristiche

- **Linearità**
  - ◆ *Componenti lineari*: le equazioni caratteristiche sono lineari
  - ◆ *Componenti non lineari*: le equazioni caratteristiche sono non lineari
- **Memoria**
  - ◆ *Componenti privi di memoria (resistivi)*: le equazioni contengono solo i valori delle correnti e delle tensioni relativi allo stesso istante
  - ◆ *Componenti dotati di memoria (dinamici)*: le equazioni coinvolgono valori delle tensioni e delle correnti relativi a istanti diversi
- **Tempo-varianza**
  - ◆ *Componenti tempo-varianti*: il tempo compare esplicitamente nelle equazioni caratteristiche
  - ◆ *Componenti tempo-invarianti*: il tempo compare solo implicitamente (come argomento delle tensioni e delle correnti)

52

## Esempi – equazioni caratteristiche di bipoli

Equazione	Lineare	Dinamico	Tempo-variante
$v(t) = Ri(t)$	Sì	No	No
$i(t) = I_0 [e^{\alpha v(t)} - 1]$	No	No	No
$v(t) = [R_0 + R_1 \cos(\omega t)]i(t)$	Sì	No	Sì
$i(t) = a(t)v(t) + b(t)v^3(t)$	No	No	Sì
$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(x) dx$	Sì	Sì	No
$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$	Sì	Sì	No
$i(t) = \frac{K}{\sqrt{V_0 - v(t)}} \frac{dv(t)}{dt}$	No	Sì	No

53

## Energia

- L'integrale su un intervallo  $[t_0, t_1]$  della potenza assorbita (erogata) da un componente rappresenta l'**energia assorbita (erogata)** nell'intervallo stesso (unità di misura **joule**, J)

$$w_a(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} p_a(t) dt$$

**Energia assorbita**  
nell'intervallo  $[t_0, t_1]$

$$w_e(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} p_e(t) dt = -w_a(t_0, t_1)$$

**Energia erogata**  
nell'intervallo  $[t_0, t_1]$

- In particolare, per  $t_0 \rightarrow -\infty$  si ha

$$w_a(t_1) = \int_{-\infty}^{t_1} p_a(t) dt$$

**Energia assorbita**  
fino all'istante  $t_1$

$$w_e(t_1) = \int_{-\infty}^{t_1} p_e(t) dt = -w_a(t_1)$$

**Energia erogata**  
fino all'istante  $t_1$

54

## Componenti attivi e passivi

- **Componente passivo:**

per tutti i possibili andamenti delle tensioni e delle correnti compatibili con le relazioni costitutive risulta

$$w_a(t) \geq 0 \quad \forall t$$

- **Componente attivo:**

esistono andamenti delle tensioni e delle correnti compatibili con le relazioni costitutive tali che, per qualche valore di  $t$ , risulta

$$w_a(t) < 0$$

- ➔ *Un componente attivo è un componente in grado di generare energia elettrica (cioè convertire energia di altro tipo in energia elettrica)*

55

## Componenti attivi e passivi

- Dati due istanti  $t_1 < t_2$ , l'energia assorbita fino all'istante  $t_2$  si può esprimere come

$$w_a(t_2) = \int_{-\infty}^{t_2} p_a(t) dt = \int_{-\infty}^{t_1} p_a(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} p_a(t) dt = w_a(t_1) + w_a(t_1, t_2)$$

- Per un componente passivo deve essere

$$w_a(t_2) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad w_a(t_1) + w_a(t_1, t_2) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad w_a(t_1) \geq w_e(t_1, t_2)$$

- ➔  $w_e(t_1, t_2)$  può essere positiva
- ➔ il componente può erogare energia nell'intervallo  $[t_1, t_2]$
- ➔ *per un componente passivo l'energia erogata in un intervallo  $[t_1, t_2]$  non può superare l'energia assorbita fino all'istante iniziale dell'intervallo*

56

## Componenti attivi e passivi

- Un componente attivo può generare energia (introdurre energia nel circuito)
- Un componente passivo può accumulare (almeno in parte) l'energia assorbita e, in seguito, restituire l'energia accumulata
  - ◆ un comportamento di questo tipo implica un vincolo tra i valori delle tensioni e correnti nell'intervallo  $[t_1 t_2]$  da cui dipende  $w_e(t_1, t_2)$  e i valori nell'intervallo  $[-\infty t_1]$  da cui dipende  $w_a(t_1)$
  - ➔ il componente deve essere dotato di memoria
  - ➔ per un componente passivo privo di memoria deve essere verificata la condizione
$$w_a(t_1, t_2) \geq 0 \quad \forall t_1, \forall t_2 \geq t_1$$

57

## Analisi di un circuito

- **Dati:**
  - ◆ caratteristiche dei componenti
  - ◆ struttura dei collegamenti
- **Incognite:**
  - ◆ correnti e tensioni dei componenti  
(nel caso generale sono funzioni incognite del tempo)
- **Equazioni:**
  - ◆ **equazioni dei collegamenti** (lineari algebriche omogenee)
    - legge di Kirchhoff per le correnti
    - legge di Kirchhoff per le tensioni
  - ◆ **equazioni dei componenti**
    - componenti lineari ➔ equazioni lineari
    - componenti non lineari ➔ equazioni non lineari
    - componenti privi di memoria ➔ equazioni algebriche
    - componenti dotati di memoria ➔ equazioni differenziali

58

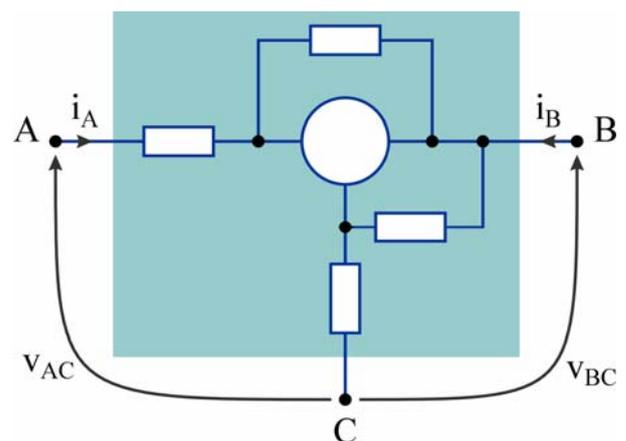
## Componenti equivalenti

- Due componenti si dicono **equivalenti** se impongono gli stessi vincoli alle tensioni e alle correnti ai loro terminali, cioè se hanno le stesse equazioni caratteristiche
- Se un componente viene sostituito con un componente equivalente, le equazioni del circuito non cambiano
  - ➔ anche le tensioni e le correnti non cambiano
- *L'equivalenza riguarda esclusivamente il comportamento ai terminali, i fenomeni che avvengono all'interno di componenti equivalenti possono essere diversi*

59

## Sottocircuiti

- Un blocco formato da componenti collegati tra loro (**sottocircuito**) che interagisce con la parte restante del circuito mediante un certo numero di terminali (**terminali esterni**) può essere considerato a sua volta un componente
- Le relazioni costitutive di questo componente possono essere ottenute a partire dalle leggi di Kirchhoff e dalle relazioni costitutive dei componenti da cui è formato, eliminando le tensioni e le correnti relative ai terminali interni
- Il concetto di equivalenza può essere esteso anche ai sottocircuiti
  - ➔ Se un sottocircuito viene sostituito con un sottocircuito equivalente, le tensioni e le correnti all'esterno del sottocircuito non cambiano



60

# Modello elettromagnetico e modello circuitale

- **Modello elettromagnetico (Equazioni di Maxwell)**
  - ◆ Validità generale
  - ◆ Il sistema è descritto mediante grandezze dipendenti dal tempo e dalle coordinate spaziali
  - ◆ Richiede la risoluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali
- **Modello circuitale**
  - ◆ Applicabile solo in casi particolari
  - ◆ Il sistema è descritto mediante grandezze che possono dipendere dal tempo ma sono indipendenti dalle coordinate spaziali
  - ◆ Richiede la risoluzione di sistemi di equazioni differenziali ordinarie o di equazioni algebriche

61

## Equazioni fondamentali dell'Elettromagnetismo

	Forma locale	Forma integrale
Equazione di continuità	$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_c}{\partial t}$	$\oint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -\frac{d}{dt} \int_V \rho_c dV$
Equazioni di Maxwell	$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$	$\oint_\Gamma \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$
	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_\Gamma \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$
Equazioni di divergenza	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c$	$\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V \rho_c dV$
	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0$

62

## Limiti di validità del modello circuitale

- Il modello circuitale può essere derivato in termini rigorosi dalle equazioni di Maxwell per sistemi nei quali tutte le grandezze elettromagnetiche sono costanti nel tempo (**condizioni di regime stazionario**)
  - ◆ In particolare in regime stazionario sono nulle in tutto il sistema le derivate rispetto al tempo di **E** e **B**
  - ➔ Valgono le leggi di Kirchhoff
- Nel caso di grandezze elettromagnetiche variabili nel tempo è possibile dedurre modello circuitale dal modello elettromagnetico mediante opportune approssimazioni se le variazioni sono *sufficientemente lente* (**condizioni quasi stazionarie**)
  - ◆ In particolare le variazioni devono essere sufficientemente lente da consentire di trascurare le derivate rispetto al tempo di **E** e **B** nella regione esterna ai componenti (mentre si può ammettere che tali derivate assumano valori apprezzabilmente diversi da zero all'interno delle superfici limite dei componenti)

63

## Limiti di validità del modello circuitale

- Per specificare cosa si intende per variazioni *sufficientemente lente* si può fare riferimento al **criterio del tempo di transito**
- Secondo il modello elettromagnetico, l'effetto della variazione di una grandezza elettromagnetica in un punto del sistema si propaga con una velocità finita  $c$  (**velocità della luce**, valore nel vuoto:  $c_0 = 299792458$  m/s)
- L'effetto viene avvertito all'interno del sistema con un **ritardo di propagazione** dipendente dalla distanza dal punto considerato
- Se la massima distanza tra due punti del sistema è  $d_{\max}$ , il massimo ritardo di propagazione (**tempo di transito**) è

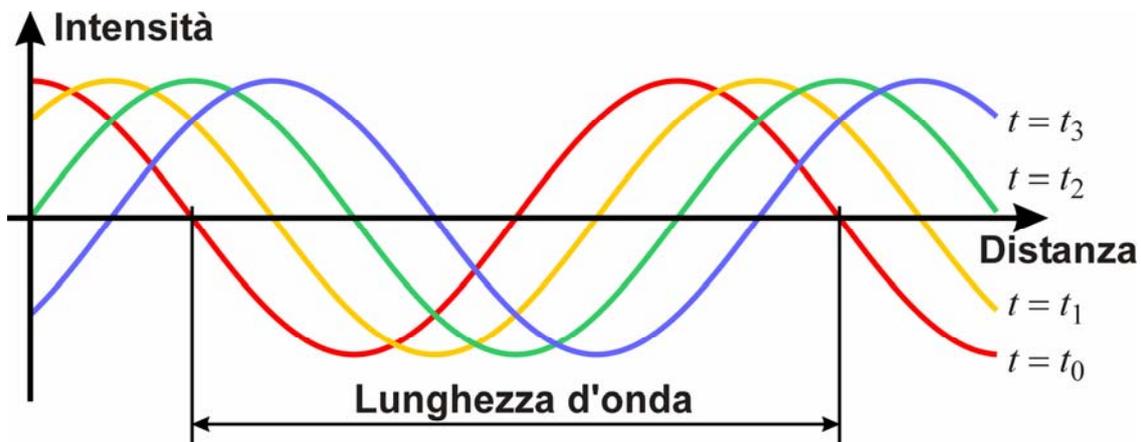
$$\tau_{\max} = \frac{d_{\max}}{c}$$

- Il modello circuitale non fa riferimento alle coordinate spaziali
- ➔ Affinché sia utilizzabile occorre che i ritardi siano trascurabili
- ➔ *Le variazioni devono essere abbastanza lente da permettere di considerare ogni grandezza elettromagnetica costante nell'intervallo  $\tau_{\max}$*

64

## Limiti di validità del modello circuitale

- **Ipotesi:** le grandezze elettromagnetiche variano con legge sinusoidale
  - ◆ **frequenza**  $f$
  - ◆ **periodo**  $T = 1/f$
  - ◆ **lunghezza d'onda**  $\lambda = cT = c/f$
- *La lunghezza d'onda rappresenta la distanza percorsa da un'onda in un tempo pari a un periodo e corrisponde alla distanza tra due punti consecutivi dell'onda aventi uguale fase*



65

## Limiti di validità del modello circuitale

- Affinché il modello circuitale sia utilizzabile deve valere la condizione
$$T \gg \tau_{\max}$$
  - ➔ *Il periodo deve essere molto grande rispetto al tempo di transito*
- La condizione può essere posta anche nella forma
$$cT \gg c\tau_{\max} \quad \Rightarrow \quad \lambda \gg d_{\max}$$
  - ➔ *La massima dimensione del sistema deve essere trascurabile rispetto alla lunghezza d'onda*
- Variazioni di tipo più generale possono essere espresse mediante sovrapposizione di funzioni sinusoidali (**serie** o **integrali di Fourier**)
  - ➔ Le condizioni precedenti devono essere verificate in corrispondenza della massima frequenza che occorre considerare

66

## Limiti di validità del modello circuitale

$f$	$T$	$\lambda_0 = c_0/f$
50 Hz	20 ms	6000 km
100 Hz	10 ms	3000 km
1 kHz	1 ms	300 km
10 kHz	100 $\mu$ s	30 km
20 kHz	50 $\mu$ s	15 km
100 kHz	10 $\mu$ s	3 km
1 MHz	1 $\mu$ s	300 m
10 MHz	100 ns	30 m
100 MHz	10 ns	3 m
1 GHz	1 ns	300 mm
10 GHz	100 ps	30 mm

67

## Circuiti concentrati e distribuiti

- I circuiti studiati in questo corso sono detti **circuiti a parametri concentrati**
  - ◆ sistemi con dimensione abbastanza piccole da consentire di trascurare i ritardi di propagazione
  - ◆ descritti mediante grandezze che non dipendono dalle coordinate spaziali
  - ◆ il comportamento non dipende dalle posizioni relative dei componenti, ma solo dal modo in cui sono collegati
- Esistono anche sistemi che si estendono prevalentemente in una o due dimensioni, lungo le quali i ritardi di propagazione non sono trascurabili (per esempio le *linee di trasmissione*)
  - ◆ Per questi sistemi è possibile utilizzare modelli di tipo circuitale che fanno uso di grandezze dipendenti da una o due coordinate spaziali (➔ **circuiti a parametri distribuiti**)

68