Circuiti dinamici

Introduzione

www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm
(versione del 20-10-2013)

Circuiti resistivi e circuiti dinamici

- **Circuiti resistivi**: circuiti formati solo da componenti resistivi
  - le equazioni del circuito costituiscono un sistema di equazioni algebriche
  - i valori delle tensioni e delle correnti (**risposte** o **uscite**) in un certo istante dipendono solo dai valori delle grandezze impresse dai generatori indipendenti (**ingressi**) allo stesso istante
- **Circuiti dinamici**: circuiti che contengono almeno un componente dinamico
  - le equazioni del circuito costituiscono un sistema di equazioni differenziali
  - i valori delle risposte a un certo istante dipendono anche dagli andamenti degli ingressi negli istanti precedenti

Equazioni di un circuito dinamico lineare

- **Ipotesi**:
  - Circuito lineare
  - Numero di lati: l
  - Numero di lati corrispondenti a componenti dinamici: N_d
- **Equazioni**:
  - LKV, LKI ➡ l equazioni lineari algebriche omogenee
  - Componenti resistivi ➡ $l - N_d$ equazioni lineari algebriche
  - Componenti dinamici ➡ N_d equazioni differenziali lineari

Condensatori

$$\mathrm{i}_k(t) = C_k \frac{d\,\mathrm{v}_k}{dt}$$

Induttori

$$\mathrm{v}_k(t) = L_k \frac{d\,\mathrm{i}_k}{dt}$$

Stato di un circuito dinamico

- La determinazione dell'andamento della risposta di un circuito dinamico a partire da un istante iniziale t_0 richiede la conoscenza
  - dell'andamento per $t \geq t_0$ delle grandezze impresse dei generatori (**ingressi**)
  - di N_d **condizioni iniziali** corrispondenti ai valori all'istante t_0 delle grandezze che compaiono sotto il segno di derivata nelle equazioni del circuito (tensioni dei condensatori e correnti degli induttori)
- **Stato del circuito** all'istante $t = t_0$: insieme di informazioni che assieme all'andamento degli ingressi per $t \geq t_0$ consentono di determinare la risposta del circuito per $t \geq t_0$
  - ➡ Le condizioni iniziali rappresentano lo stato iniziale del circuito

Variabili di stato

- **Variabili di stato**: insieme di variabili mediante le quali è rappresentato lo stato del circuito
  - lo stato può essere rappresentato mediante le tensioni dei condensatori e le correnti degli induttori
  - la stessa informazione può essere rappresentata mediante le cariche dei condensatori e i flussi degli induttori
- Le variabili di stato determinano l'energia accumulata nei componenti dinamici

  Energia di un condensatore $W_C = \frac{1}{2} C v_C^2$ *Energia di un induttore* $W_L = \frac{1}{2} L i_L^2$

  ➡ L'energia accumulata nel circuito è una *funzione di stato*
- **Stato zero**: stato caratterizzato da valori nulli di tutte le tensioni dei condensatori e di tutte le correnti degli induttori

  ➡ Nello stato zero l'energia accumulata nel circuito è nulla

Risposta con ingresso zero e nello stato zero

- **Risposta con ingresso zero** (o **risposta libera**): risposta corrispondente a valori identicamente nulli degli ingressi per $t \geq t_0$
  - dipende solo dallo stato iniziale
  - è dovuta all'energia accumulata nel circuito all'istante iniziale t_0
- **Risposta nello stato zero**: risposta del circuito quando lo stato iniziale coincide con lo stato zero
  - dipende solo dall'andamento degli ingressi per $t \geq t_0$

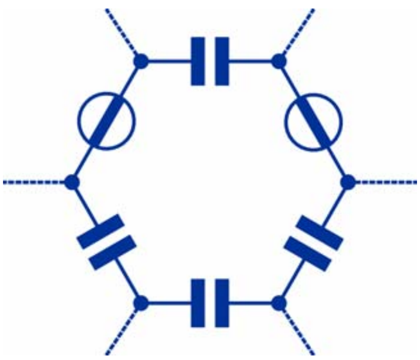
Ordine di un circuito

- **Ordine di un circuito:** $N =$ numero di variabili indipendenti necessarie per descrivere lo stato del circuito
  - normalmente coincide con il numero di componenti dinamici (induttori e condensatori) contenuti nel circuito ➡ $N = N_d$
- In casi particolari è possibile che, a causa della struttura del circuito, le variabili di stato non siano indipendenti tra loro
  - ➡ $N < N_d$
  - i circuiti per cui si verifica questa condizione sono detti **degeneri**

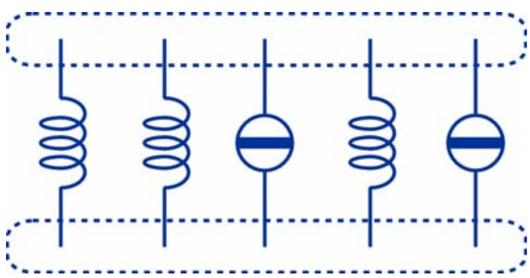
Circuiti degeneri (1)

- Un circuito formato da bipoli R L C passivi e generatori indipendenti è degenere se e solo se contiene
  - almeno una maglia formata da condensatori o da generatori di tensione e condensatori (**maglia di condensatori**)
  - almeno un taglio formato da induttori o da generatori di corrente e induttori (**taglio di induttori**)

Maglia di condensatori



Taglio di induttori



Circuiti degeneri (2)

- Un circuito contenente componenti multipolari (e in particolare generatori dipendenti) o bipoli attivi (oltre ai generatori indipendenti) può essere degenere anche non contiene maglie di condensatori o tagli di induttori
  - non si può formulare un criterio generale per stabilire se il circuito è degenere (occorre verificare caso per caso)
- I circuiti degeneri corrispondono a situazioni ideali, fisicamente non realizzabili
- L'analisi dei circuiti degeneri è più complessa dell'analisi dei circuiti non degeneri
  - In seguito, salvo indicazione esplicita, si farà riferimento ai soli circuiti non degeneri

Equazione risolvente

- Risolvendo le equazioni di un circuito dinamico lineare rispetto alla tensione o alla corrente di un lato, indicata con $\mathrm{y}(t)$, si ottiene un'equazione differenziale del tipo

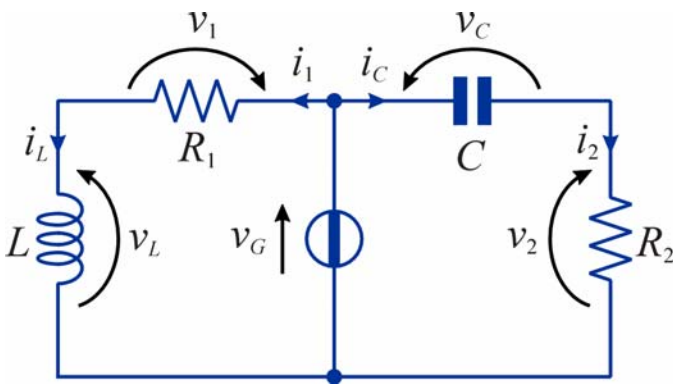
$$a_N \frac{d^N \mathrm{y}(t)}{dt^N} + a_{N-1} \frac{d^{N-1} \mathrm{y}(t)}{dt^{N-1}} + \cdots + a_1 \frac{d\,\mathrm{y}(t)}{dt} + a_0\, \mathrm{y}(t) = \mathrm{f}(t)$$

  - L'ordine dell'equazione differenziale generalmente coincide con l'ordine del circuito
  - Il secondo membro è una combinazione lineare degli ingressi e di loro derivate rispetto al tempo (in generale dipende sia dalle grandezze impresse dai generatori indipendenti, sia dai parametri degli altri componenti)
  - I coefficienti a_k sono funzione dei parametri dei componenti diversi dai generatori indipendenti

Ordine dell'equazione risolvente

- In casi particolari l'equazione risolvente può essere di ordine inferiore all'ordine del circuito
- Ciò avviene quando la struttura del circuito è tale da rendere nulla l'interazione tra alcune risposte e alcune variabili di stato

Esempio



- La tensione e la corrente di L e R_1 non dipendono da v_C
- la tensione e la corrente di C e R_2 non dipendono da v_L
- ➡ L'analisi del circuito richiede la risoluzione di due equazioni del primo ordine disaccoppiate

Condizioni iniziali

- Per determinare la risposta per $t > t_0$ si devono associare all'equazione N condizioni iniziali del tipo

$$y(t_0) = Y_0$$
$$\left.\frac{d\,y}{dt}\right|_{t_0} = Y_0^{(1)}$$
$$\vdots$$
$$\left.\frac{d^{N-1}y}{dt^{N-1}}\right|_{t_0} = Y_0^{(N-1)}$$

$$Y_0, Y_0^{(1)}, \ldots, Y_0^{(N-1)} = \text{costanti}$$

- Come si vedrà in seguito, i valori iniziali di $y(t)$ e delle sue derivate possono essere determinati se sono noti i valori per $t = t_0$ delle variabili di stato

Risoluzione dell’equazione differenziale

- L’**integrale generale** dell’equazione differenziale può essere espresso nella forma: $y_G(t) = y_H(t) + y_P(t)$
  - $y_H(t) =$ integrale generale dell’equazione omogenea associata (**soluzione omogenea**)
    - Si determina a partire dalle radici dell’*equazione caratteristica*
    - La soluzione omogenea rappresenta l’insieme delle possibili risposte con ingresso zero del circuito
  - $y_P(t) =$ integrale particolare dell’equazione differenziale (**soluzione particolare**)
    - In genere è una funzione *dello stesso tipo* del termine noto
- $y_H(t)$, e quindi $y_G(t)$, contengono N costanti che si possono determinare imponendo le N condizioni iniziali

Equazione caratteristica

Equazione omogenea associata

$$a_N \frac{d^N y(t)}{dt^N} + a_{N-1} \frac{d^{N-1} y(t)}{dt^{N-1}} + \cdots + a_1 \frac{d\, y(t)}{dt} + a_0\, y(t) = 0$$

$$\frac{d^i y(t)}{dt^i} \rightarrow \lambda^i$$

$$y(t) \rightarrow \lambda^0$$

$$a_N \lambda^N + a_{N-1}\lambda^{N-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Equazione caratteristica

Determinazione della soluzione omogenea (1)

- **Caso 1**: l'equazione caratteristica ammette N soluzioni distinte: λ_1, ..., λ_N
  - la soluzione omogenea è $y_H(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + k_N e^{\lambda_N t}$
  - le costanti k_1, ..., k_N si determinano imponendo le condizioni iniziali a $y_G(t)$
- **Caso 2:** l'equazione caratteristica ammette anche soluzioni multiple
  - se la soluzione ha λ_h molteplicità m nell'espressione di $y_H(t)$ compaiono m termini associati a λ_h:

    $$k_{h,0} e^{\lambda_h t} + k_{h,1} t e^{\lambda_h t} + \cdots + k_{h,m-1} t^{m-1} e^{\lambda_h t}$$
  - anche in questo caso $y_H(t)$ contiene N costanti da determinare imponendo le condizioni iniziali

Determinazione della soluzione omogenea (2)

- I coefficienti dell'equazione caratteristica sono reali
- ➡ Se l'equazione ammette una soluzione complessa $\lambda_h = \sigma_h + j\omega_h$, ammette anche la soluzione coniugata $\lambda_{h+1} = \lambda_h{}^* = \sigma_h - j\omega_h$
- $y_H(t)$ deve essere reale ➡ anche le costanti moltiplicative dei termini associati a λ_h e λ_{h+1} devono essere complesse coniugate:

$$k_h e^{\lambda_h t} + k_{h+1} e^{\lambda_{h+1} t} = k_h e^{\lambda_h t} + k_h^* e^{\lambda_h^* t}$$

- ➡ Posto $k_h = \dfrac{A_h}{2} e^{j\varphi_k}$ si ottiene

$$k_h e^{\lambda_h t} + k_h^* e^{\lambda_h^* t} = \frac{A_h}{2} e^{j\varphi_h} e^{(\sigma_h + j\omega_h)t} + \frac{A_h}{2} e^{-j\varphi_h} e^{(\sigma_h - j\omega_h)t} =$$

$$= \frac{A_h e^{\sigma_h t}\left[e^{j(\omega_h t + \varphi_h)} + e^{-j(\omega_h t + \varphi_h)}\right]}{2} = A_h e^{\sigma_h t} \cos(\omega_h t + \varphi_h)$$

Determinazione della soluzione omogenea (3)

- Combinando i due termini associati alle soluzioni complesse coniugate, le costanti complesse coniugate k_h e k_{h+1} vengono sostituite dalle costanti reali A_h e φ_h
  - Anche in questo caso, imponendo le condizioni iniziali, si devono determinare N costanti reali
- Con un procedimento simile si può verificare che, se l'equazione caratteristica ammette una soluzione complessa λ_h di molteplicità m, $y_H(t)$ contiene i termini

$$A_{h,0}e^{\sigma_h t}\cos(\omega_h t + \varphi_{h,0}) + A_{h,1}te^{\sigma_h t}\cos(\omega_h t + \varphi_{h,1}) + \cdots$$
$$\cdots + A_{h,m-1}t^{m-1}e^{\sigma_h t}\cos(\omega_h t + \varphi_{h,m-1})$$

Determinazione della soluzione particolare

- In genere si può scegliere come soluzione particolare una funzione *dello stesso tipo* del termine noto
- Questo avviene se $f(t)$ appartiene ad una classe di funzioni $\mathfrak{F}$ tale che ogni combinazione lineare di funzioni appartenenti a $\mathfrak{F}$ e di loro derivate rispetto a t è ancora una funzione della classe $\mathfrak{F}$
  - Infatti, in questo caso, sostituendo a primo membro dell'equazione differenziale una funzione dello stesso tipo del termine noto si ottiene come risultato ancora una funzione dello stesso tipo
- **Esempi**:
  - costante: $f(t) = F$
  - polinomio: $f(t) = c_n t^n + \cdots + c_1 t + c_0$
  - funzione sinusoidale di pulsazione ω: $f(t) = F_M \cos(\omega t + \varphi)$

Stabilità

- **Circuito asintoticamente stabile**: le risposte con ingresso zero tendono a zero per $t \to \infty$
  - Tutte le soluzioni dell'equazione caratteristica hanno parte reale negativa
  - Per $t \to \infty$ la risposta tende ad identificarsi con la soluzione particolare
- **Circuito semplicemente stabile**: le risposte con ingresso zero sono limitate per $t \to \infty$
  - L'equazione caratteristica, oltre a eventuali soluzioni con parte reale negativa, ammette soluzioni semplici con parte reale nulla
- **Circuito instabile**: le risposte con ingresso zero divergono per $t \to \infty$
  - L'equazione caratteristica, ha almeno una soluzione con parte reale positiva o una soluzione multipla con parte reale nulla

Componente transitoria e di regime della risposta

- Se il circuito è asintoticamente stabile
  - la componente della risposta che tende a zero per $t \to \infty$ è detta **componente transitoria**
    - deriva dalla soluzione omogenea
    - dipende sia dallo stato iniziale del circuito sia dagli ingressi (i valori delle costanti che compaiono in $y_H(t)$ si ottengono imponendo le condizioni iniziali a $y_G(t)$, che contiene anche il contributo degli ingressi)
  - la componente permanente della risposta è detta **componente di regime**
    - si identifica con la soluzione particolare
    - dipende solo dagli ingressi

Stabilità dei circuiti passivi

- Un circuito formato da componenti passivi e generatori indipendenti è stabile
  - Tutte le soluzioni dell'equazione caratteristica hanno parte reale non positiva
  - Eventuali soluzioni con parte reale nulla sono semplici
- **Dimostrazione**
  - Se il circuito fosse instabile, le risposte con ingresso zero (generatori azzerati) dovrebbero divergere per $t \to \infty$
  - In queste condizioni anche le energie assorbite o erogate dai componenti tenderebbero ad infinito
  - Se tutti i componenti sono passivi questo è impossibile, dato che l'energia accumulata nel circuito all'istante iniziale è finita e nessun componente è in grado di generare energia

Stabilità dei circuiti passivi - Note

- In un circuito passivo asintoticamente stabile, l'energia accumulata nei componenti dinamici viene progressivamente dissipata nei componenti resistivi e quindi tende a zero per $t \to \infty$
- I circuiti passivi semplicemente stabili corrispondono a casi ideali (es. circuiti formati solo da induttori e condensatori), nei quali l'energia accumulata non viene dissipata
- Se il circuito contiene componenti attivi (oltre ai generatori indipendenti) non si possono fare affermazioni a priori sulla stabilità (occorre verificare caso per caso)

Regime stazionario (1)

- Si considera un circuito dinamico lineare in cui tutti i generatori indipendenti sono costanti
- La generica risposta è soluzione di un'equazione del tipo

$$a_N \frac{d^N\,\mathrm{y}(t)}{dt^N} + a_{N-1} \frac{d^{N-1}\,\mathrm{y}(t)}{dt^{N-1}} + \cdots + a_1 \frac{d\,\mathrm{y}(t)}{dt} + a_0\,\mathrm{y}(t) = F$$

con F costante

➡ Se $a_0 \neq 0$, l'equazione ammette la soluzione particolare

$$\mathrm{y}_\mathrm{p} = \frac{F}{a_0}$$

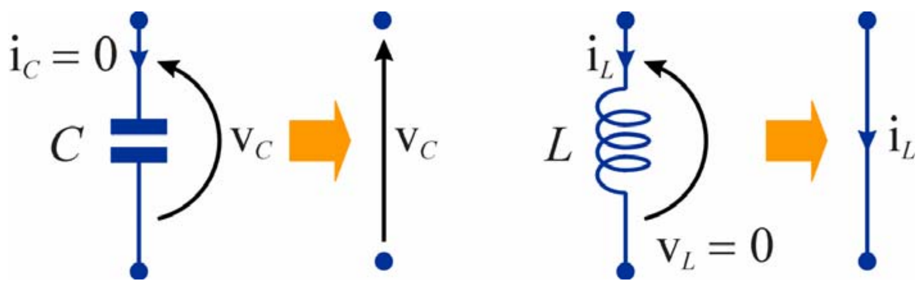
➡ Se il circuito ammette una soluzione costante ed è asintoticamente stabile, per $t \to \infty$ tende ad una condizione di regime in cui tutte le tensioni e le correnti sono costanti (➡ **regime stazionario**)

Regime stazionario (2)

- Un circuito è in condizioni di **regime stazionario** se le tensioni e le correnti di tutti i componenti sono costanti nel tempo
- In queste condizioni, dalle relazioni costitutive del condensatore e dell'induttore, si ottiene

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt} = 0$$

$$v_L = L\frac{di_L}{dt} = 0$$



➡ i condensatori si comportano come circuiti aperti

➡ gli induttori si comportano come cortocircuiti

Analisi in continua

- La soluzione particolare di un circuito dinamico corrispondente alla condizione di regime stazionario può essere determinata direttamente, senza utilizzare le equazioni differenziali
- In condizioni di regime stazionario, per il teorema di sostituzione, si può sostituire
  - ogni condensatore con un circuito aperto ($i_C = 0$)
  - ogni induttore con un cortocircuito ($v_L = 0$)

➡ La determinazione della risposta a regime è ricondotta allo studio di un circuito resistivo (**analisi in continua**)

Analisi in continua - Esempio

- V_G = costante
- Determinare i valori a regime delle tensioni e delle correnti
- **Risoluzione**:

$$I_{R3} = I_{C2} = 0\ \text{A} \quad \Rightarrow \quad V_{R3} = 0\ \text{V}$$

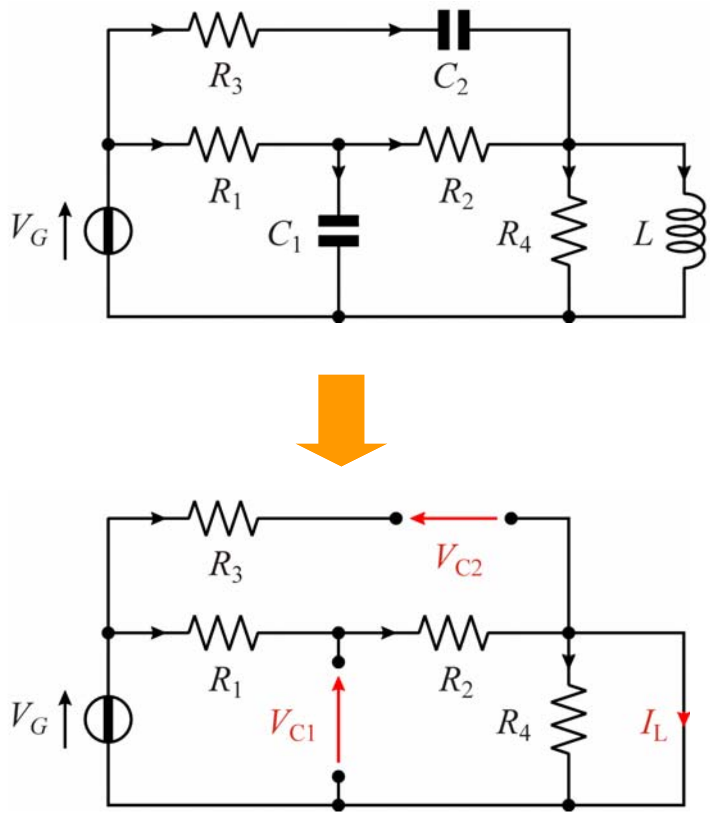
$$V_{R4} = V_L = 0\ \text{V} \quad \Rightarrow \quad I_{R4} = 0\ \text{A}$$

$$I_{R1} = I_{R2} = I_L = \frac{V_G}{R_1 + R_2}$$

$$V_{R1} = R_1 I_{R1} = \frac{V_G R_1}{R_1 + R_2}$$

$$V_{C1} = V_{R2} = R_2 I_{R2} = \frac{V_G R_2}{R_1 + R_2}$$

$$V_{C2} = V_G$$

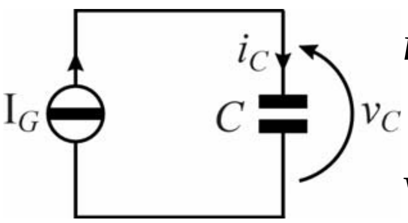


Casi particolari

- In casi particolari il circuito ottenuto sostituendo i condensatori con circuiti aperti e gli induttori con cortocircuiti può risultare impossibile o indeterminato
- Nel primo caso il circuito non ammette una soluzione costante
  - ➡ il circuito non può trovarsi in condizioni di regime stazionario
- Nel secondo caso esistono infinite soluzioni costanti
  - ➡ non è possibile determinare la risposta e regime del circuito mediante l'analisi in continua, ma è necessario studiare le equazioni differenziali
- Per circuiti formati da bipoli R L C passivi e generatori indipendenti questi casi particolari si verificano in presenza di
  - maglie formate da induttori o da generatori di tensione e induttori (**maglie di induttori**)
  - tagli formati da condensatori o da generatori di corrente e condensatori (**tagli di condensatori**)

Casi particolari - Esempi

- Circuito che non ammette una soluzione particolare costante



$$i_C(t) = C\frac{dv_C}{dt} = \mathrm{I}_G$$

$$v_C(t) = v_C(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} \mathrm{I}_G\, dt' = v_C(t_0) + \frac{1}{C}\mathrm{I}_G(t - t_0)$$

- Circuito che ammette infinite soluzioni particolari costanti